ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

PIERRE BÉRARD
DANIEL MEYER

Inégalités isopérimétriques et applications

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 15, nº 3 (1982), p. 513-541
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1982_4_15_3_513_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 15, 1982, p. 513 à 542.

INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES ET APPLICATIONS

PAR PIERRE BÉRARD ET DANIEL MEYER

Cet article se compose de deux parties relativement indépendantes, et de cinq appendices.

Dans la première partie, nous donnons une généralisation de l'inégalité de Faber-Krahn pour la première valeur propre du problème de Dirichlet pour le laplacien dans des ouverts bornés d'une variété à courbure de Ricci strictement positive, c'est le (théorème I.5) :

THÉORÈME. — *Soit* (M, g) *une variété riemannienne lisse, compacte, sans bord, de dimension n. On suppose que la plus petite valeur propre de la courbure de Ricci de* (M, g) *est supérieure ou égale à* $(n-1)$. *Soit* V *un ouvert de* M, *dont le bord soit une sous-variété lisse de* M. *Soit* V* *une boule géodésique, de la sphère canonique* S^n, *dont le* volume relatif *dans* S^n *soit égal au* volume relatif *de* V *dans* M. *Alors, la première valeur propre du problème de Dirichlet dans* V *est supérieure ou égale à la première valeur propre du problème de Dirichlet dans* V*, *et l'égalité a lieu si et seulement si le triplet* (M, g, V) *est isométrique au triplet* (S^n, can, V*).

L'idée de base pour démontrer ce théorème remonte à Krahn, mais l'ingrédient essentiel est une inégalité isopérimétrique de M. Gromov. Nous donnons deux preuves de cette inégalité à la Faber-Krahn. Elles diffèrent plus dans la forme que dans l'esprit. La première met mieux en valeur le rôle joué par l'inégalité de Gromov; la seconde permet d'obtenir une estimation d'une constante de plongement de Sobolev, pour des variétés riemanniennes à courbure de Ricci strictement positive (*voir* n° I.18). La méthode de démonstration du théorème I.5 nous conduit à donner une preuve assez géométrique (bien que non élémentaire) du théorème de Lichnerowicz-Obata (*voir* corollaire I.6).

Dans la deuxième partie de l'article, nous nous intéressons à une amélioration du théorème de Courant sur les domaines nodaux des fonctions propres. Soit (N, g) une variété riemannienne compacte, avec ou sans bord, et soit $\zeta_1 < \zeta_2 \leqq \zeta_3 \leqq \ldots \to \infty$, la suite des valeurs propres (avec multiplicités) du laplacien pour le problème de Dirichlet (si N a un bord) ou le problème sans bord (si N n'a pas de bord). Le théorème de Courant dit que le nombre maximal $\nu(k)$ de domaines nodaux que peut avoir une fonction propre associée à la

k-ième valeur propre ζ_k est au plus égal à k. Dans cette deuxième partie, nous démontrons le (théorème II.7) :

THÉORÈME. — *Considérons l'un des problèmes de valeurs propres indiqués ci-dessus. Il existe une constante numérique* $\gamma(n)<1$, *qui ne dépend que de la dimension* n *de la variété* (N, g), *telle que :*

$$\lim_{k\,\infty} \sup \nu(k)/k \leqq \gamma(n).$$

Ce théorème a été démontré par Pleijel dans le cas d'un ouvert borné assez régulier du plan euclidien, puis généralisé par Peetre au cas de certains ouverts bornés d'une surface riemannienne complète. Ces deux auteurs utilisent une inégalité à la Faber-Krahn; leurs résultats s'étendent facilement au cas des ouverts bornés des espaces riemanniens à courbure constante, de dimension quelconque (on a, en effet, pour ces espaces, des extensions de l'inégalité de Faber-Krahn). Le cas général était, semble-t-il, ouvert. Notons que le théorème I.5 nous permet de généraliser les résultats de Pleijel et Peetre aux variétés à courbure de Ricci strictement positive, et auxquelles nous imposons en plus une borne supérieure sur la courbure sectionnelle (*voir* proposition II.10). Le théorème II.7 généralise ces divers résultats. Sa démonstration repose sur un lemme (lemme II.15) qui donne une inégalité isopérimétrique asymptotique :

LEMME. — *Soit* (M, g) *une variété riemannienne de dimension* n, *lisse, compacte, avec ou sans bord. Pour tout* $\varepsilon>0$, *il existe un nombre* $A=A(M, g, \varepsilon)$ *tel que, pour tout ouvert régulier* D *de* M, *de volume inférieur ou égal à* A, *on ait :*

$$\mathrm{Vol}(\partial D) \geqq (1-\varepsilon)\,\mathrm{Vol}(\partial D^*),$$

où D^* *est une boule euclidienne de* $\mathbb{R}^n$ *de volume égal au volume de* D.

L'appendice C est consacré à la démonstration de ce lemme; nous y donnons aussi une estimée de A en fonction de la courbure de (M, g). Les appendices A, B, et D sont consacrés à des résultats « classiques » dont nous n'avons pas localisé la preuve dans la littérature.

La nécessité de l'appendice D nous est apparue quand Y. Colin de Verdière nous a communiqué que la preuve du théorème de Cheng, sur la régularité des ensembles nodaux, était incomplète (*voir* [CG] et appendice E). Nous avions besoin essentiellement d'une « formule de Green avec singularités ». Il se trouve alors que le cadre naturel devient celui du « problème de Dirichlet généralisé » (*voir* [B-J-S]). Ce matériel étant peu familier aux géomètres différentiels, nous avons jugé bon de l'esquisser dans l'appendice D. Nous en avons profité pour donner une preuve du théorème de Courant dans ce même cadre.

Des références bibliographiques sont données dans le corps du texte. Nous remercions M. Gromov dont l'article [GV] et les conférences ont beaucoup motivé et inspiré notre travail. Nous remercions S. Gallot pour ses remarques (en particulier le n° I.18). Pour plusieurs techniques de démonstration, nous nous sommes inspirés des travaux de T. Aubin.

Pour la rédaction de l'appendice C nous avons profité des critiques constructives de A. Bellaiche. Les conseils de L. Boutet de Monvel et de J. Kazdan nous ont été fort utiles lors de la mise au point de l'appendice D.

Pour tout un matériel relié au présent travail, nous renvoyons aux articles suivants : [AN], [B-D], et [GA].

Le premier auteur remercie l'I.M.P.A. (Rio de Janeiro), et en particulier M. do Carmo, pour l'hospitalité dont il a bénéficié pendant la préparation d'une partie de ce travail; le second auteur remercie le Sonderforschungsinstitut der Universität Bonn pour lui avoir permis d'y travailler pendant 1 mois.

I. – Généralisation de l'inégalité de Faber-Krahn

1. Nous désignons par (M, g) une variété riemannienne complète sans bord, de dimension n, et par V une sous-variété de M, compacte, à bord, de dimension n (munie de la métrique induite). Nous désignons par $\lambda_1(V)$ la première valeur propre du laplacien Δ pour le problème de Dirichlet dans V.

2. Si la variété à bord V est une sous-variété de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure canonique, nous désignons par V^* une boule euclidienne de $\mathbb{R}^n$ de volume $\mathrm{Vol}(V^*)$ égal au volume de V, $\mathrm{Vol}(V)$.

L'inégalité de Faber-Krahn classique s'écrit alors (*voir* [FR], [KN] ou [BE], p. 111, théorème 3.8) :

$$\lambda_1(V) \geqq \lambda_1(V^*) = \left(\frac{\beta(n)}{\mathrm{Vol}(V)}\right)^{2/n} j^2_{(n-2)/2}, \tag{3}$$

où $\beta(n)$ est le volume de la boule euclidienne de rayon unité dans $\mathbb{R}^n$ et où $j_{(n-2)/2}$ est le premier zéro positif de la fonction de Bessel d'indice $(n-2)/2$.

4. Introduisons le nombre :

$$R(M, g) = \mathrm{Inf}\{\mathrm{Ric}(u, u);\ u \in UM\},$$

où Ric désigne la courbure de Ricci de (M, g) et UM le fibré unitaire tangent. Ainsi, si (S^n, g^*) désigne la sphère de rayon 1 dans $\mathbb{R}^{n+1}$, avec la métrique induite, on a $R(S^n, g^*) = n-1$.

Nous supposerons désormais que le nombre $R(M, g)$ est strictement positif. Nous supposerons en fait (après une normalisation éventuelle de la métrique g) que l'on a :

$$R(M, g) \geqq R(S^n, g^*) = (n-1).$$

Soit β le nombre :

$$\beta : = \mathrm{Vol}(M, g)/\mathrm{Vol}(S^n, g^*)$$

[ici, Vol désigne le volume relatif aux mesures riemanniennes naturelles associées aux métriques g et g^*; remarquons que le volume de (M, g) est fini car (M, g) est compacte d'après le théorème de Myers, à cause de l'hypothèse $R(M, g) \geqq n-1$].

Étant donnée une sous-variété à bord lisse, V, de dimension n dans M, on désigne par V^* une boule géodésique de (S^n, g^*) de volume vérifiant :

$$\beta \operatorname{Vol}(V^*) = \operatorname{Vol}(V).$$

5. Théorème. — *Les notations et les hypothèses étant celles du n° 4, on a :*

$$\lambda_1(V) \geqq \lambda_1(V^*)$$

et l'égalité a lieu si et seulement si le triplet (M, V, g) *est isométrique au triplet* (S^n, V^*, g^*).

Il est intéressant de remarquer que le théorème de Lichnerowicz-Obata ([B-G-M], p. 178) découle des méthodes de démonstration du théorème 5.

6. Corollaire. — *Les notations et les hypothèses étant celles du n° 4, on désigne par* $\mu_2(M, g)$ *la première valeur propre non nulle du laplacien sur* M. *Alors :*

$$\mu_2(M, g) \geqq \mu_2(S^n, g^*) = n$$

et l'égalité a lieu si et seulement si la variété (M, g) *est isométrique à la sphère canonique* (S^n, g^*).

7. *Remarques.* — (*a*) L'ingrédient essentiel, pour démontrer le théorème 5 est l'inégalité isopérimétrique de M. Gromov ([GV] 1^re^ partie). Les notations et les hypothèses étant celles du n° 4, cette inégalité s'écrit :

$$\operatorname{Vol}(\partial V) \geqq \beta \operatorname{Vol}(\partial V^*) \tag{8}$$

et l'égalité a lieu si et seulement si les triplets (M, V, g) et (S^n, V^*, g^*) sont isométriques [ici Vol désigne le volume $(n-1)$-dimensionnel relatif à g ou g^*];

(*b*) La première valeur propre $\lambda_1(S^n_+(k))$ de l'hémisphère d'une sphère à courbure constante k tendant vers l'infini avec k, nous voyons que l'estimée du théorème 5 [qui s'écrit ici $\lambda_1(S^n_+(k)) \geqq n$] n'est pas aussi bonne qu'on le souhaiterait. Ce défaut tient au fait que l'inégalité (8) n'est pas complètement satisfaisante;

(*c*) Prenant un domaine $V_\varepsilon = S^n(k) \setminus B(x, \varepsilon)$ (le complémentaire d'une boule géodésique de rayon ε sur une sphère à courbure constante k) nous voyons que l'on peut avoir simultanément $\operatorname{Vol}(V_\varepsilon)$ petit et $\lambda_1(V_\varepsilon)$ petit (faire k grand et ε petit car $\lambda_1(V_\varepsilon)$ tend vers 0 avec ε d'après [C-N], p. 199). Ceci montre la nécessité de prendre une boule V_ε^* dont le volume *relatif* dans (S^n, g^*) est le même que celui de V_ε dans $S^n(k)$: si sur (S^n, g^*) le volume $\operatorname{Vol}(V_\varepsilon^*)$ de V_ε^* est petit alors $\lambda_1(V_\varepsilon^*)$ est grand;

(*d*) Si l'on fait $(M, g) = (S^n, g^*)$ dans le théorème 5, on retrouve le théorème classique de symétrisation sur S^n que l'on peut déduire de l'inégalité isopérimétrique de Schmidt sur S^n (*voir* [ST] et aussi [SR]);

(*e*) Nous donnerons deux preuves de la partie inégalité dans le théorème 5 (et aussi du corollaire 6). La première preuve met mieux en valeur la manière dont on utilise l'inégalité isopérimétrique de Gromov. Sa mise en forme est plus délicate et fait appel à des théorèmes assez fins sur les fonctions propres. La deuxième preuve est plus élémentaire (plus près aussi de la preuve originale de Krahn). Elle permet en outre d'obtenir des informations sur les meilleures constantes de Sobolev.

9. *Première preuve de l'inégalité du théorème* 5. — Dans ce qui suit, nous désignons par $d\,\mathrm{vol}$ les mesures riemanniennes naturelles [n- ou $(n-1)$-dimensionnelles] sur (M, g) ou (S^n, g^*) (ou sur des hypersurfaces) : aucune confusion n'est à craindre. Rappelons la caractérisation variationnelle de $\lambda_1(\mathrm{V})$:

$$(10) \qquad \lambda_1(\mathrm{V}) = \operatorname{Inf} \quad \frac{\displaystyle\int_{\mathrm{V}} |df|^2 \, d\,\mathrm{vol}}{\displaystyle\int_{\mathrm{V}} f^2 \, d\,\mathrm{vol}}, \qquad f \not\equiv 0, \ \mathrm{C}^1 \text{ par morceaux}, f \,|\, \partial\mathrm{V} = 0 \quad ,$$

où $|df|$ désigne la norme (riemannienne) de la différentielle de f. L'égalité est atteinte dans (10) si et seulement si f est C^2 et est une fonction propre associée à $\lambda_1(\mathrm{V})$. D'après le théorème de Courant ([C-H], p. 452, [PL], p. 544 et appendice D) une fonction propre u associée à $\lambda_1(\mathrm{V})$ (pour le problème de Dirichlet) est caractérisée, parmi les fonctions propres, par le fait qu'elle ne s'annule pas dans l'intérieur de V (cela implique en particulier que la valeur propre $\lambda_1(\mathrm{V})$ est simple). Nous supposerons donc u positive. L'idée de la preuve est de construire une fonction u_* sur V^* pour laquelle on montrera que :

$$\int_{\mathrm{V}} |du|^2 \, d\,\mathrm{vol} \Big/ \int_{\mathrm{V}} u^2 \, d\,\mathrm{vol} \geqq \int_{\mathrm{V}^*} |du_*|^2 \, d\,\mathrm{vol} \Big/ \int_{\mathrm{V}^*} u_*^2 \, d\,\mathrm{vol},$$

ce qui permettra de conclure que $\lambda_1(\mathrm{V}) \geqq \lambda_1(\mathrm{V}^*)$ d'après la caractérisation variationnelle (10).

Pour $0 < r \leqq m = \operatorname{Sup}\{u(x), x \in \mathrm{V}\}$, on définit les ensembles :

$$\mathrm{V}(r) = \{x \in \mathrm{V} : u(x) > r\}$$

et on introduit les fonctions :

$$\mathrm{A}(r) = \int_{\mathrm{V}(r)} d\,\mathrm{vol} = \mathrm{Vol}(\mathrm{V}(r)); \ \mathrm{L}(r) = \int_{\partial\mathrm{V}(r)} d\,\mathrm{vol} = \mathrm{Vol}(\partial\mathrm{V}(r));$$

$$\mathrm{H}(r) = \int_{\mathrm{V}(r)} u^2 \, d\mathrm{vol}; \ \mathrm{G}(r) = \int_{\mathrm{V}(r)} |du|^2 \, d\,\mathrm{vol}.$$

On définit les boules géodésiques concentriques $\mathrm{V}^*(r)$ de $(\mathrm{S}^n, g^*))$ par la condition :

$$\mathrm{Vol}(\mathrm{V}(r)) = \beta \, \mathrm{Vol}(\mathrm{V}^*(r))$$

(où β est définie au n° 4). On introduit la fonction $u_* : \mathrm{V}^*(0) = \mathrm{V}^* \to \mathbb{R}$ telle que :

$$u_* \,|\, \partial\mathrm{V}^*(r) = r = u \,|\, \partial\mathrm{V}(r)$$

(c'est le procédé de symétrisation qui remonte à Krahn [KN]; *voir* aussi [P-S], Note F, p. 230 et [BE], p. 104).

On définit alors pour la fonction u_* et les domaines $V^*(r)$, les fonctions $A_*(r)$, $L_*(r)$, $H_*(r)$ et $G_*(r)$ analogues des fonctions définies ci-dessus. On peut montrer que u_* est dans $H^1(V^*)$; on a aussi $u_* \mid \partial V^* = 0$ par construction (*voir* appendice B ou [BE], p. 50). On montre facilement (appendice A ou [BE], p. 53, lemme 2.5) que l'on a :

$$A'(r) = -\int_{\partial V(r)} |du|^{-1}\, d\mathrm{vol} \qquad \text{et} \qquad G'(r) = -\int_{\partial V(r)} |du|\, d\mathrm{vol}$$

et de plus (puisque u_* est radiale par construction) :

$$A'_*(r) = -|du_*|^{-1}(r)\, L_*(r) \qquad \text{et} \qquad G'_*(r) = -|du_*|(r)\, L_*(r).$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne alors :

$$L^2(r) \leqq A'(r)\, G'(r),$$

alors que :

$$L^2_*(r) = A'_*(r)\, G'_*(r).$$

Appliquons maintenant l'inégalité de Gromov (8) i. e. :

$$L(r) \geqq \beta\, L_*(r)$$

et le fait que par construction $A(r) = \beta\, A_*(r)$. Il vient alors :

$$-G'(r) \geqq -\beta\, G'_*(r),$$

d'où en intégrant de r à m :

$$G(r) \geqq \beta\, G_*(r).$$

Il est facile de voir en utilisant la formule de co-aire (appendice A), que $H(r) = \beta\, H_*(r)$. On en déduit que :

$$\frac{G(r)}{H(r)} \geqq \frac{G_*(r)}{H_*(r)}.$$

En particulier,

$$\lambda_1(V) = \frac{G(0)}{H(0)} \geqq \frac{G_*(0)}{H_*(0)} \geqq \lambda_1(V^*),$$

l'inégalité de droite résulte de la caractérisation variationnelle (10).

L'égalité $\lambda_1(V) = \lambda_1(V^*)$ implique les égalités $L(r) = \beta\, L_*(r)$ d'où l'on tire, d'après le théorème de Gromov, que le triplet (M, V, g) est isométrique au triplet (S^n, V^*, g^*).

La preuve ci-dessus n'est parfaitement rigoureuse que si la première fonction propre u est de Morse, et n'admet dans V qu'un nombre fini de points critiques. Si cette propriété (générique pour la première fonction propre) n'est pas vérifiée, on conclut la démonstration de l'inégalité par un argument d'approximation :

10. *bis*. LEMME. — *Il existe une suite de fonctions positives, de Morse*, $u_m : V \to \mathbb{R}_+$, *n'admettant pas* 0 *comme valeur critique, et n'ayant qu'un nombre fini de points critiques dans* V *telles que* u_m *tende vers* u *dans* $H^1(V)$ *et dans* $C^0(V)$, *et telles que* $u_m \mid \partial V = 0$.

On peut donner deux preuves de ce lemme, selon le cadre dans lequel on se place. Dans le cadre de la première preuve, on utilise les résultats de généricité de K. Uhlenbeck [UK] : il existe une suite f_m de fonctions de classe C^∞, à supports dans un ouvert fixe U de V, qui tende vers la fonction nulle au sens de la topologie C^p, pour p assez grand, de telle sorte que la première fonction propre (normalisée, positive) u_m du problème de Dirichlet pour l'opérateur $\Delta + f_m$ dans V ait les deux propriétés suivantes :

(i) u_m est une fonction de Morse dans l'intérieur de V;

(ii) $(\partial u_m/\partial \nu) \mid \partial V$ admet 0 comme valeur régulière.

De la propriété (ii), et du fait que la première fonction propre u_m n'a qu'un seul domaine nodal, on déduit que la dérivée normale de u_m ne s'annule pas sur le bord de V. Il en résulte que u_m n'a qu'un nombre fini de points critiques.

Remarque. — On peut donner du lemme 10 *bis* une preuve plus simple, par des arguments analogues à ceux donnés par T. Aubin dans la preuve de son lemme 1, page 586 de [AN]; les fonctions u_m sont alors seulement dans la classe $m_0^+(V)$ définie au n° 11.

Ceci termine la preuve de la partie inégalité du théorème 5. Le cas de l'égalité est plus délicat, et sera traité au n° 12.

11. *Deuxième preuve de l'inégalité du théorème* 5. — La démonstration qui suit est plus élémentaire que celle donnée plus haut. Notons surtout qu'elle permet aussi de donner une estimée de la constante de Sobolev du plongement $W^{1,q} \to L^p$ avec :

$$1 \geqq 1/p \geqq (n-q)/nq \quad (\textit{voir} \text{ remarque } 18).$$

Soit u une fonction de $H_0^1(V)$ [l'adhérence de $C_0^\infty(V)$ espace des fonctions à support compact dans l'intérieur de V, dans $H^1(M)$ espace des fonctions de carré sommable, ayant une dérivée première de carré sommable]. Alors le quotient de Rayleigh-Ritz de u, $\int_V |du|^2 \, d\,\text{vol} / \int_V u^2 \, d\text{vol}$ est le même que celui de la fonction $|u|$ qui appartient aussi à $H_0^1(V)$ (*voir* [G-T], p. 145). Soit $m_0(V)$ l'ensemble des fonctions continues, à support compact inclus dans l'intérieur de V qui sont C^∞ et ont des points critiques non dégénérés en nombre fini sur l'intérieur de leurs supports. Alors $m_0(V)$ est dense dans $H_0^1(V)$ ([AN], lemme 1, p. 586). On suppose désormais que u est la valeur absolue d'une fonction de $m_0(V)$. Pour toute fonction f continue sur V on a l'égalité classique (formule de co-aire, *voir* appendice A ou [BE], p. 53, lemme 2.5) :

$$\int_{u^{-1}(]a,\,b[)} f \, d\,\text{vol} = \int_a^b \left[\int_{u^{-1}(s)} f \, |du|^{-1} \, \sigma \right] ds,$$

où σ est la mesure induite par g sur $u^{-1}(s)$ et où $]a, b[$ est un intervalle de valeurs régulières de u. On a alors l'inégalité de Hölder géométrique :

$$\int_{u^{-1}(s)} |du|^{q-1}\,\sigma \geqq \mathrm{L}^{q}(s)/(-\mathrm{A}'(s))^{q-1},$$

pour tout réel $q \geqq 1$ et pour toute valeur valeur régulière s de u [pour la notation $\mathrm{L}(s)$, $\mathrm{A}(s)$ voir le n° 9]. De plus, on a égalité si et seulement si du ne dépend que de s. On définit alors u_*, fonction symétrisée de u comme au n° 9. D'après l'appendice B, u_* est dans $\mathrm{H}_0^1(\mathrm{V}^*)$. On vérifie facilement que l'on a $\|u\|_p = \|u_*\|_p$ pour tout $p \geqq 1$. Pour la fonction u_* on a l'égalité :

$$\int_{u_*^{-1}(s)} |du_*|^{q-1}\,\sigma = \mathrm{L}_*^{q}(s)/(-\mathrm{A}_*'(s))^{q-1}.$$

Si on fait $q=2$ et si on applique l'inégalité de Gromov (8) qui se lit ici :

$$\mathrm{L}(s) \geqq \beta\, \mathrm{L}_*(s)$$

(notations du n° 9) on obtient $\mathrm{G}(s) \geqq \beta\, \mathrm{G}_*(s)$ puis :

$$\frac{\mathrm{G}(s)}{\mathrm{H}(s)} \geqq \frac{\mathrm{G}_*(s)}{\mathrm{H}_*(s)}, \qquad \frac{\mathrm{G}(0)}{\mathrm{H}(0)} \geqq \frac{\mathrm{G}_*(0)}{\mathrm{H}_*(0)} \geqq \lambda_1(\mathrm{V}^*);$$

on termine alors avec un argument de densité : $m_0(\mathrm{V})$ est dense dans $\mathrm{H}_0^1(\mathrm{V})$.

12. Le cas de l'égalité dans le théorème 5. — L'hypothèse est que $\lambda_1(\mathrm{V}) = \lambda_1(\mathrm{V}^*)$. On désigne par u_m une suite de fonctions donnée par le lemme 10 *bis*. On désigne par $\mathrm{R}(f)$ le quotient de Rayleigh-Ritz de la fonction f sur V ou V*.

Le premier pas est l'égalité suivante :

$$(a) \qquad \lambda_1(\mathrm{V}) = \mathrm{R}(u) = \mathrm{R}(u_*) = \lambda_1(\mathrm{V}^*).$$

Preuve de l'égalité (a). — Comme la suite u_m tend vers u dans $\mathrm{H}^1(\mathrm{V})$, par hypothèse, on en déduit que la suite u_m y est uniformément bornée. D'après le n° 11, il en résulte que la suite u_{m^*} (fonctions symétrisées des u_m) est uniformément bornée dans $\mathrm{H}^1(\mathrm{V}^*)$.

Comme l'inclusion de $\mathrm{H}^1(\mathrm{V}^*)$ dans $\mathrm{L}^2(\mathrm{V}^*)$ est compacte, on peut, quitte à prendre une sous-suite, supposer que u_{m^*} converge vers une fonction v dans $\mathrm{L}^2(\mathrm{V}^*)$. Du lemme de Banach-Saks (lemme 7, p. 196, [B-J-S]) on peut déduire que v est dans $\mathrm{H}^1(\mathrm{V}^*)$. Si l'on a $f \leqq g + a$ où f et g sont des fonctions et a est une constante, on a une inégalité analogue pour les symétrisées : $f_* \leqq g_* + a$. Comme u_m converge vers u uniformément, u_{m^*} converge vers u_* uniformément, donc $u_* = v$ est dans $\mathrm{H}^1(\mathrm{V}^*) \cap \mathrm{C}^0(\overline{\mathrm{V}}^*)$, et donc dans $\mathrm{H}_0^1(\mathrm{V}^*)$, car u_* s'annule sur le bord de V* qui est lisse.

On a alors, au moins pour des sous-suites :

$$\lambda_1(\mathrm{V}) = \mathrm{R}(u) = \lim\ \mathrm{R}(u_m) \geqq \lim\ \mathrm{R}(u_{m^*}) = \mathrm{R}(u_*) \geqq \lambda_1(\mathrm{V}^*).$$

De l'égalité $\lambda_1(V)=\lambda_1(V^*)$ on déduit que la fonction u_* est la première fonction propre de V^* qui est une fonction C^1, radiale, strictement décroissante, et de dérivée bornée inférieurement sur tout intervalle de la forme $[\varepsilon, \sup(u)]$, avec $\varepsilon>0$. Étant donnés deux nombres a et b, on désigne par $R(a, b)(u)$ le quotient de Rayleigh-Ritz restreint à $u^{-1}(]a, b[)$. D'après le n° 11, on a, pour tout intervalle $]a, b[$ de valeurs régulières de u l'inégalité :

$$(e) \qquad R(a, b)(u) \geqq R(a, b)(u_*).$$

Par compacité, l'ensemble des valeurs régulières de u est un ouvert que l'on peut écrire comme une réunion dénombrable d'intervalles $]a_n, b_n[$, soit I. De plus, le complémentaire de I dans l'intervalle $[0, \sup(u)]$ est de mesure nulle. On déduit des propriétés de u_* citées ci-dessus que l'ensemble $u_*^{-1}([0, \sup(u)]\setminus I)$ est de mesure nulle dans S^n. On déduit alors de l'inégalité (e) que l'on a :

$$R(u) \geqq \sum R(a_n, b_n)(u) \geqq \sum R(a_n, b_n)(u_*) = R(u_*).$$

De l'égalité entre les termes extrêmes, on déduit que pour tout intervalle de valeurs régulières on a l'égalité :

$$R(a, b)(u) = R(a, b)(u_*),$$

d'où l'on tire facilement, que, pour toute valeur régulière s de u on a l'égalité :

$$\mathrm{Vol}(u^{-1}(s)) = \beta \ \mathrm{Vol}(u_*^{-1}(s)).$$

On termine alors la preuve du théorème 5 en appliquant le cas de l'égalité dans l'inégalité isopérimétrique de Gromov au domaine $u^{-1}(]s, +\infty[)$.

Remarque A. — Il n'est pas difficile de montrer que l'on a toujours l'inégalité $R(u) \geqq R(u_*) \geqq \lambda_1(V^*)$: remarquer que la fonction u_* est dans $H^1(V^*)$ car elle est lipschitzienne comme u, *voir* [BE], chap. II.

Remarque B. — Sans rien connaître de la régularité de l'ouvert V, l'appendice D et la construction précédente nous permettent d'affirmer les points suivants :

(i) On peut toujours parler de la première valeur propre de V pour le problème de Dirichlet généralisé, $\lambda_1(V)$, et caractériser la première fonction propre u par $R(u)=\lambda_1(V)$. En particulier, si u est une fonction propre de M associée à la valeur propre μ et si V est l'un des domaines nodaux de u, alors $\mu=\lambda_1(V)$;

(ii) Sous l'hypothèse $R(u)=\lambda_1(V^*)$, la construction précédente fournit une fonction u_*, symétrisée de u, bien que *a priori* la fonction u ne soit pas dans la classe utilisée aux sections 9 et 11. Cette symétrisée étant construite, et sous l'hypothèse ci-dessus, on peut alors conclure que les paires (M, V, g) et (S^n, V^*, g^*) sont isométriques.

13. *Première preuve du corollaire* 6. — Soit u une fonction propre associée à $\mu_2(M, g)$. Alors, d'après le théorème de Courant (*voir* appendice D, corollaire 5) la fonction u a exactement deux domaines nodaux V_1 et V_2.

14. Lemme. — *Avec les notations ci-dessus, on a :*

$$\mu_2(M, g) = \lambda_1(V_i), \qquad i=1, 2.$$

Voir lemme 2 de l'appendice D.

L'un des domaines nodaux V_i a un volume inférieur pu égal à $\frac{1}{2}$ Vol (M). Supposons que ce soit V_1.

Si nous appliquons le théorème 5, nous avons :

$$\mu_2(M, g)=\lambda_1(V_1)\geqq\lambda_1(V_1^*),$$

où V_1^* est une boule géodésique de (S^n, g^*) de volume inférieur à celui d'un hémisphère, donc :

$$\lambda_1(V_1^*)\geqq\lambda_1(S_+^n)=n \qquad \text{d'où} \quad \mu_2(M, g)=\lambda_1(V_1)\geqq\lambda_1(V_1^*)\geqq n.$$

15. Pour traiter le cas de l'égalité, on applique la remarque B du n° 12 à l'un des deux domaines nodaux de la fonction u; la version plus faible du lemme 10 *bis*, signalée en remarque, est alors plus appropriée pour obtenir l'approximation nécessaire dans le n° 12.

16. *Deuxième preuve du corollaire* 6. — Soit f une fonction de Morse sur M, dont 0 ne soit pas valeur critique, de moyenne nulle. Ces fonctions sont denses dans l'hyperplan de $H^1(M)$, constitué des fonctions de moyenne nulle. On applique la construction du n° 11 à $f^+=\operatorname{Sup}(f, 0)$ et à $f^-=\operatorname{Sup}(-f, 0)$ séparément. On construit ainsi une fonction f_*^+ sur une boule géodésique de (S^n, g^*), soit V_+^* et une fonction f_*^- sur une boule géodésique V_-^*. Comme on doit avoir $\operatorname{Vol}(V_+^*)+\operatorname{Vol}(V_-^*)=\operatorname{Vol}(S^n)$, on peut choisir $V_-^*=S^n\diagdown V_+^*$. La fonction $f_*=f_*^+-f_*^-$ est de moyenne nulle sur (S^n, g^*) si f est de moyenne nulle sur (M, g). Comme on a :

$$\int_{V_\pm} |df|^2\, d\,\mathrm{vol}\geqq\int_{V_\pm^*} |df_*|^2\, d\,\mathrm{vol}$$

et :

$$\int_{V_\pm} f^2\, d\,\mathrm{vol}=\int_{V_\pm^*} f_*^2\, d\,\mathrm{vol},$$

il vient :

$$\int_M |df|^2\, d\,\mathrm{vol}\Big/\int_M f^2\, d\,\mathrm{vol}\geqq\int_{S^n} |df_*|^2\, d\,\mathrm{vol}\Big/\int_{S^n} f_*^2\, d\,\mathrm{vol}$$

(*cf.* le n° 11), on en déduit par densité :

$$\mu_2(M, g)\geqq\mu_2(S^n, g^*)=n.$$

Pour le cas de l'égalité *voir* n° 15.

17. *Remarque*. — Le théorème 5 généralise aussi un résultat de R. C. Reilly, [RY] (dont la démonstration est plus dans l'esprit de la démonstration originale de Lichnerowicz-Obata).

On peut étendre le théorème 5 en une inégalité de Schwarz, généralisant le théorème 3.5, page 105 de [BE]. On retrouve alors certains résultats qui étendent le théorème de Lichnerowicz-Obata : [B – K].

18. *Remarque.* — Sous les mêmes hypothèses, et avec les mêmes notations que dans le théorème 5 et le corollaire 6, on peut (ainsi que S. Gallot nous l'a fait remarquer) généraliser le résultat précédent pour donner une estimée de la constante de Sobolev du plongement de $W_0^{1,q}(V)$ dans $L^p(V)$ (lorsque $V=M$ et $\partial V=\emptyset$, $W_0^{1,q}(V)$ est mis pour l'hyperplan de $W^{1,q}(M)$ des fonctions de moyenne nulle), avec $1 \geqq 1/p \geqq (n-q)/nq$. Posons :

$$K(n, p, q) = \operatorname{Inf}\{\|df\|_q/\|f\|_p;\ f \in W_0^{1,q}(V^*)\}.$$

Alors, pour toute fonction u de $W_0^{1,q}(V)$, on a l'inégalité optimale :

$$\|u\|_p \leqq K(n, p, q)\,\beta^{(q-p)/pq}\,\|du\|_q.$$

Les preuves sont analogues à celles du théorème 5 (n° 11) et du corollaire 6 (n° 16).

II. — Généralisation du théorème de Pleijel-Courant

1. Soit (N, g) une variété riemannienne compacte de dimension n et de bord ∂N (éventuellement vide). On désigne par :

$$\zeta_1 < \zeta_2 \leqq \zeta_3 \ldots \to +\infty,$$

la suite des valeurs propres (écrites avec multiplicités) de l'un des problèmes suivants :

Dirichlet $\begin{cases} \Delta u = \zeta u & \text{dans } N, \\ u \mid \partial N = 0\ (\partial N \neq \emptyset), \end{cases}$

Sans bord : $\Delta u = \zeta u$ dans $N\ (\partial N = \emptyset)$.

Étant donnée une fonction u telle que $\Delta u = \zeta_k u$ (vérifiant la condition au bord appropriée), on s'intéresse au nombre $\nu(u)$ de composantes connexes de $N \setminus u^{-1}(0)$ (i. e. au nombre de domaines nodaux de u). On définit aussi les nombres : $\nu(k) = \operatorname{Sup}\{\nu(u);\ u \not\equiv 0,\ u$ fonction propre associée à ζ_k pour le problème de Dirichlet ou le problème sans bord$\}$.

Un théorème classique de Courant ([C—H], p. 452, [PL], p. 544 et appendice D, théorème 4) est le :

2. THÉORÈME. — *Soit* (N, g) *comme ci-dessus. Alors on a :*

$$\nu(k) \leqq k.$$

3. En dimension 1, problème de Sturm-Liouville, on a $\nu(k) = k$ pour tout k.

4. Il résulte en particulier du théorème de Courant que $\nu(1) = 1$: la première valeur propre est simple (sinon nous aurions deux fonctions propres orthogonales ne changeant pas de signe dans N). Les fonctions propres associées aux $\zeta_j, j \geqq 2$, étant orthogonales à la première fonction propre, on doit avoir $\nu(j) \geqq 2$ si $j \geqq 2$. En particulier, une fonction propre associée à

ζ_2 a exactement deux domaines nodaux. Nous avons déjà utilisé ces résultats dans les preuves du théorème 5 et du corollaire 6.

5. Une question naturelle qui se pose est de savoir si dans le théorème 2 il est possible d'avoir égalité pour une infinité de valeurs de k en dimension $\geqq 2$. Dans [PL], Pleijel montre que la réponse est négative, si N est un domaine euclidien. Dans [PE], Peetre généralise le résultat de Pleijel au cas de certains ouverts bornés N d'une surface riemannienne complète S. Il précise que le résultat s'étend au cas d'une sous-variété à bord N d'un espace riemannien de dimension n, à courbure constante, mais que le cas général reste ouvert.

Les résultats de Pleijel et Peetre peuvent s'énoncer :

6. THÉORÈME. — (*a*) (Pleijel). *Si* N *est un ouvert borné assez régulier de* $\mathbb{R}^n$, *on a :*

$$\limsup_{k\infty} \frac{\nu(k)}{k} \leqq \delta < 1 \ (et,\ pour\ n=2\ on\ a\ \delta=4/j_0^2);$$

(*b*) (Peetre). *Si* N *est un ouvert borné assez régulier d'une surface riemannienne complète* S, *alors :*

$$\limsup_{k\,\infty} \frac{\nu(k)}{k} \leqq 4/j_0^2$$

et le résultat s'étend au cas où S *est un espace riemannien à courbure constante, de dimension quelconque.*

Dans cette section nous démontrons le :

7. THÉORÈME. — *Soit* N *une variété riemannienne compacte à bord (éventuellement vide). Alors on a (avec les notations du n° 1) :*

$$\limsup_{k\,\infty} \frac{\nu(k)}{k} \leqq \gamma(n) < 1,$$

où la constante $\gamma(n)$ *ne dépend que de la dimension.*

8. Au lieu de donner simplement la valeur de la constante $\gamma(n)$, nous l'introduisons en esquissant la preuve du théorème de Pleijel [Théorème 6(*a*)] en dimension quelconque.

Soit donc $N \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, régulier, et soit $\lambda_k(N)$ la k-ième valeur propre pour le problème de Dirichlet dans N. Soit u une fonction propre associée à λ_k. Nous désignerons par $\Omega_1, \ldots, \Omega_\nu$ avec $\nu=\nu(u)\leqq\nu(k)$ les domaines nodaux de u. On a en particulier l'égalité suivante (*voir* appendice D) $\lambda_k(N)=\lambda_1(\Omega_i)$ pour $1\leqq i\leqq\nu$. De l'inégalité de Faber-Krahn en dimension n, [*voir* inégalité I.(3)], on déduit que :

$$\lambda_k^{n/2}(N)\,\mathrm{Vol}(\Omega_i) \geqq \beta(n)\, j_{(n-2)/2}^n$$

d'où par sommation sur i :

$$\lambda_k^{n/2}(N)\,\mathrm{Vol}(N) \geqq \nu(u)\,\beta(n)\, j_{(n-2)/2}^n$$

et, puisque le membre de gauche ne dépend pas du choix de u :

$$\frac{\nu(k)}{k} \leqq \frac{\lambda_k^{n/2}(\mathrm{N})\,\mathrm{Vol}(\mathrm{N})}{k}\,\frac{1}{\beta(n)\,j_{(n-2)/2}^n}.$$

On déduit alors de la formule de Weyl qui donne le comportement asymptotique des valeurs propres ([D-G], p. 52) que :

$$\limsup_{k\,\infty} \frac{\nu(k)}{k} \leqq \frac{(2\pi)^n}{\beta(n)^2\,j_{(n-2)/2}^n} = \gamma(n).$$

On peut écrire :

$$\gamma(n) = \frac{2^{n-2}\,n^2\,\Gamma(n/2)^2}{j_{(n-2)/2}^n}.$$

En particulier, pour $n=2$, on trouve :

$$\gamma(2) = 4/j_0^2 \leqq 0{,}692.$$

9. Lemme. — *La constante* $\gamma(n)$ *définie ci-dessus est toujours strictement plus petite que* 1 (*et même en fait que* 0,7).

On utilise les faits suivants :

(*a*) $\Gamma(x) \leqq x^{x-1/2}\,e^{-x}\sqrt{2\pi}\,e^{1/12\,x}$ ([W-W], p. 153);

(*b*) $j_\nu :=$ 1er zéro positif de $\mathrm{J}_\nu \geqq \sqrt{\nu(\nu+2)}$ ([WN], p. 485) pour conclure que si $n \geqq 18$ alors $\gamma(n) < 1$.

Pour les cas $n \leqq 17$, on utilise les tables numériques donnant les premières valeurs des j_p et $j_{p+1/2}$ avec $p \in \mathbb{N}$ ([G-M], [WN]) ainsi que la relation $j_\nu < j_{\nu+1}$.

Le théorème de Peetre [théorème 6 (*b*)] se démontre essentiellement de la même manière. Il faut utiliser une inégalité isopérimétrique valable sur une surface riemannienne S.

Nous donnons maintenant deux preuves du théorème 7. La première preuve ne permet pas de démontrer le théorème 7 dans toute sa généralité. Elle nous paraît cependant intéressante et c'est pourquoi nous la donnons ici.

10. Proposition. — *Les notations sont celles du n°* 1. *On suppose maintenant que* N *est une sous-variété à bord d'une variété simplement connexe* (M, g) *telle que* $\mathrm{R}(\mathrm{M}, g) \geqq (n-1)$ [*si* $\partial \mathrm{N} = \emptyset$ *cette condition devient :* $\mathrm{R}(\mathrm{N}, g) \geqq (n-1)$]. *Posons :*

$$\overline{\mathrm{R}}(\mathrm{M}, g) = \mathrm{Sup}\,\{\text{courbures sectionnelles de M}\}.$$

Alors pour tout nombre γ, *vérifiant* $1 > \gamma > \gamma(n)$, *il existe un nombre* $\varepsilon > 0$, *tel que si* $\overline{\mathrm{R}}(\mathrm{M}, g)$ *est plus petit que* $(1+\varepsilon)$,

$$\limsup_{k\,\infty} \frac{\nu(k)}{k} \leqq \gamma.$$

Pour démontrer la proposition 10, on a besoin du :

11. LEMME. — *Soit* V *une boule géodésique de la sphère* (S^n, g^*). *Alors on a pour la première valeur propre du problème de Dirichlet :*

$$\lambda_1(V) \geqq \left(\frac{\alpha(n-1)}{n\,\mathrm{Vol}(V)}\right)^{2/n} \left[1-\left(\frac{\mathrm{Vol}(V)}{\alpha(n)}\right)^{2/n}\right]^{2[(n-1)/n]} j^2_{(n-2)/2},$$

où $\alpha(n)=\mathrm{Vol}(S^n, g^*)$.

□ D'après [AN], p. 579 preuve du théorème 5, on a toujours l'inégalité suivante :

$$\mathrm{Vol}(\partial V)^{n/n-1} \geqq n\,\alpha(n-1)^{1/n-1}\,\mathrm{Vol}(V)\left[1-\left(\frac{\mathrm{Vol}(V)}{\alpha(n)}\right)^{2/n}\right]. \tag{12}$$

Soit u la première fonction propre (positive) pour le problème de Dirichlet dans V. Posons :

$$V(r)=\{x\in V : u(x)>r\}.$$

Il est facile de voir que la fonction u est radiale et décroissante. Il en résulte que les $V(r)$ sont des boules géodésique centrées au centre de V, qui sont emboîtées. On reprend les notations de la 1^re^ preuve du théorème I.5 (*cf.* n° 9). De (12) on déduit :

$$n^{2[(n-1)/n]}\,\alpha(n-1)^{2/n}\,A(r)^{2[(n-1)/n]}\left[1-\left(\frac{A(r)}{\alpha(n)}\right)^{2/n}\right]^{2[(n-1)/n]} \leqq L^2(r)=A'(r)\,G'(r).$$

On a donc sur (S^n, g^*) :

$$n^{2[(n-1)/n]}\,\alpha(n-1)^{2/n}\frac{A(r)^{2[(n-1)/n]}}{-A'(r)}\left[1-\left(\frac{A(r)}{\alpha(n)}\right)^{2/n}\right]^{2[(n-1)/n]} \leqq -G'(r).$$

On désigne maintenant par $V^*(r)$ la boule euclidienne dans $\mathbb{R}^n$ de centre 0 et de volume $A(r)$. On définit une fonction radiale u_* par :

$$u_* \mid \partial V^*(r)=r.$$

Dans $\mathbb{R}^n$, par homogénéité, on peut écrire :

$$\left(n\frac{A_*(r)}{\alpha(n-1)}\right)^{2[(n-1)/n]}=\left(\frac{L_*(r)}{\alpha(n-1)}\right)^2,$$

d'où l'on déduit :

$$n^{2[(n-1)/n]}\,\alpha(n-1)^{2/n}\,A_*(r)^{2[(n-1)/n]}=L_*^2(r)=G'_*(r)\,A'_*(r),$$

et puisque $A(r)=A_*(r)$ par construction,

$$-\left[1-\left(\frac{A(r)}{\alpha(n)}\right)^{2/n}\right]^{2[(n-1)/n]} G'_*(r) \leqq -G'(r).$$

On intègre de r à ∞ et on divise par $H(r)=H_*(r)$ pour conclure (en faisant $r=0$) :

$$\lambda_1(V) \geqq \left[1-\left(\frac{A(0)}{\alpha(n)}\right)^{2/n}\right]^{2[(n-1)/n]} \lambda_1(V^*),$$

d'où le résultat. □

13. *Remarque.* — (*a*) Quand $n=2$, on retrouve dans un cas particulier l'inégalité sur la première valeur propre utilisée par Peetre dans [PE];

(*b*) Le lemme 11 ne donne pas la meilleure estimée possible, de meilleures estimées sont données dans [F-H]. Elle est suffisante pour nos besoins et commode dans la mesure où il n'est pas nécessaire de faire des distinctions selon les valeurs du rapport $\mathrm{Vol}(V)/\alpha(n)$.

Preuve de la proposition 10. — Soit $\lambda_k(N)$ la k-ième valeur propre pour le problème de Dirichlet dans N ou pour le problème sans bord. Alors, d'après l'appendice D, lemme 2, on peut écrire :

$$\lambda_k(N)=\lambda_1(\Omega_i) \qquad \text{où} \quad 1 \leqq i \leqq \nu(u),$$

où $\nu(u)$ est le nombre de domaines nodaux Ω_i d'une fonction propre associée à $\lambda_k(N)$ et où $\lambda_1(\Omega_i)$ est la première valeur propre du problème de Dirichlet généralisé dans Ω_i. D'après le théorème I.5 :

$$\lambda_1(\Omega_i) \geqq \lambda_1(\Omega_i^*),$$

où Ω_i^* est une boule géodésique de (S^n, g^*) vérifiant :

$$\beta \,\mathrm{Vol}(\Omega_i^*)=\mathrm{Vol}(\Omega_i) \qquad \text{avec} \quad \beta=\mathrm{Vol}(M)/\mathrm{Vol}(S^n).$$

Du lemme 11 on déduit :

$$\lambda_k^{n/2}(N)\,\mathrm{Vol}(\Omega_i^*) \geqq \beta(n)\, j_{(n-2)/2}^n \left[1-\left(\frac{\mathrm{Vol}(\Omega_i^*)}{\alpha(n)}\right)^{2/n}\right]^{n-1}$$

et donc par sommation :

$$\lambda_k^{n/2}(N)\,\mathrm{Vol}(N) \geqq \beta\beta(n)\, j_{(n-2)/2}^n \sum_{i=1}^{\nu(u)} \left[1-\left(\frac{\mathrm{Vol}(\Omega_i^*)}{\alpha(n)}\right)^{2/n}\right]^{n-1}.$$

La fonction $x \to (1-x^{2/n})^{n-1}$ a un graphe convexe tel que pour tout b, $0<b<1$, il existe $a=a(b)>0$ tel que :

$$(1-x^{2/n})^{n-1} \geqq -ax+b \qquad \text{pour} \quad 0 \leqq x \leqq 1.$$

On a alors :

$$\lambda_k^{n/2}(N)\,\mathrm{Vol}(N) \geqq \beta\beta(n)\, j_{(n-2)/2}^n \sum_{i=1}^{\nu(u)} \left(-a\frac{\mathrm{Vol}(\Omega_i^*)}{\alpha(n)}+b\right).$$

On en déduit comme au n° 8 :

$$\overline{\lim_{k\,\infty}}\ \frac{\nu(k)}{k} \leqq \frac{\gamma(n)}{b\,\beta}.$$

Étant donné $\gamma > \gamma(n)$, on choisit b près de 1 puis ε de telle sorte que $\gamma(n)/b\,\beta \leqq \gamma$ d'où le résultat. □

14. *Remarque.* — Quand $\beta = 1$ [i. e. $(M, g) = (S^n, g^*)$] on retrouve le théorème sur la sphère comme indiqué par Peetre ([PE], p. 19). Si $\beta \neq 1$ la proposition 10 ne donne pas le meilleur résultat possible (comparer avec II.7). Remarquons cependant que le théorème 7 découle par la méthode ci-dessus (au moins dans certains cas) de la conjecture 1 de [AN], p. 581. Cette conjecture n'étant pas encore démontrée, sauf en dimension 2 ([AN], p. 582), nous utiliserons le :

15. LEMME. — *Soit* (M, g) *une variété riemannienne compacte (avec éventuellement un bord* ∂M). *Alors pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un nombre* $A = A(M, \varepsilon, g)$ *tel que pour toute sous-variété à bord* V *de* M ($\dim V = \dim M$), *de volume* Vol(V) *inférieur ou égal à* A, *on ait l'inégalité :*

$$\mathrm{Vol}(\partial V) \geqq (1-\varepsilon)\,\mathrm{Vol}(\partial V^*),$$

où V* *est une boule euclidienne de volume* Vol(V).

16. LEMME. — *Dans les conditions du lemme* 15 *on a aussi :*

$$\lambda_1(V) \geqq (1-\varepsilon)^2\,\lambda_1(V^*).$$

On peut déduire le lemme 16 du lemme 15 par la méthode de symétrisation utilisée pour démontrer le lemme 11 (ou le théorème I.5).

La preuve du lemme 15 étant assez longue, nous la donnons dans l'appendice C, où l'on trouvera aussi une estimée du nombre A en fonction de bornes sur la courbure de la variété (M, g).

Preuve du théorème 7. — Soit ε positif. Soit $A = A(N, g, \varepsilon)$ donné par le lemme 15. Soit u une fonction propre associée à la valeur propre λ_k et ayant $\nu(k)$ domaines nodaux. Il y a au plus l = partie entière de Vol(N)/A domaines nodaux de volume supérieur à A. Soient Ω_1, $\Omega_2, \ldots, \Omega_\mu$ les domaines nodaux de volume inférieur ou égal à A. Il est clair que l'on a $\nu(k) - l \leqq \mu \leqq \nu(k)$. D'après le lemme 2 de l'appendice D, on a $\lambda_k = \lambda_1(\Omega_i)$. Pour les domaines nodaux de volume inférieur ou égal à A, on a, par application du lemme 16 ci-dessus [1] :

$$\lambda_k \geqq (1-\varepsilon)^2\,(\beta(n)/\mathrm{Vol}(\Omega_i))^{2/n}\,j^2_{(n-2)/2}.$$

En élévant cette inégalité à la puissance $n/2$ et en sommant sur les μ premiers domaines nodaux, on obtient, puisque $\sum_{i=1}^{\mu} \mathrm{Vol}(\Omega_i) \leqq \mathrm{Vol}(N)$, l'inégalité :

$$\lambda_k^{n/2}\,\mathrm{Vol}(N) \geqq (1-\varepsilon)^n\,\beta(n)\,j^n_{(n-2)/2}\,[\nu(k) - l].$$

[1] Il est facile de voir que le lemme 16 s'applique ici : mêmes méthodes que dans l'appendice D.

La formule de H. Weyl pour le comportement asymptotique des valeurs propres (*cf.* [D-G]) donne $\lambda_k^{n/2}/k \sim (2\pi)^n/\beta(n)\,\mathrm{Vol}(\mathrm{N})$ et ceci démontre le théorème 7 en faisant tendre ε vers 0.

17. *Remarque.* — Il peut être intéressant de déterminer la valeur k_0 à partir de laquelle on a $\nu(k) \leqq \gamma(n)k$. Il faudrait avoir une information plus fine que celle que donne la formule asymptotique de Weyl (du genre des inégalités obtenues par Gromov dans [GV], 2e partie, mais pour lesquelles les meilleures constantes ne sont pas encore explicitement connues). De ce point de vue, la proposition 10 peut donner un résultat plus fin que celui du théorème 7.

18. COMPLÉMENTS. — (*a*) L'équivalent du théorème II.7 pour le problème de Neumann n'est pas connu, sauf pour certains domaines très particuliers (*voir* [PL]);

(*b*) Il est intéressant de remarquer que le nombre $\nu(k)$ intervient pour estimer la multiplicité de la k-ième valeur propre ζ_k : travaux de Cheng et Besson ([CG] et [BN]);

(*c*) Il existe des exemples de fonctions propres u n'ayant que deux domaines nodaux, et associées à des valeurs propres d'indice aussi grand qu'on le veut (*voir* [C-H], p. 455-456, [LY], [B-B], corollaire 6.7). Les variétés pour lesquelles on sait construire de tels exemples admettent des valeurs propres multiples. Comme le montre le cas d'un rectangle « générique » on ne peut pas, *a priori*, avoir de borne inférieure universelle pour $\liminf_{k\,\infty} \nu(k)/k$. Pour un résultat de nature différente dans cette direction *voir* [BG].

APPENDICE A

FORMULE DE CO-AIRE

Soit u une fonction propre (au sens de la topologie) de classe C^1 définie sur une variété riemannienne, à valeurs réelles,

$$u : (\mathrm{M}, g) \to \mathbb{R}.$$

Soit $]a, b[\subset \mathbb{R}$ un intervalle ne contenant pas de valeurs critiques de u. Alors pour toute fonction continue $f : \mathrm{M} \to \mathbb{R}$, on a :

$$\int_{u^{-1}(]a,\, b[)} f\, d\mathrm{vol}_g = \int_a^b \left[\int_{u^{-1}(s)} f\, |du|^{-1}\, \sigma \right] ds,$$

où σ est la mesure induite par la métrique g sur $u^{-1}(s)$. En particulier, la formule précédente est vraie pour toutes valeurs de a et b si la fonction u est de Morse.

□ Soit r une valeur (régulière) dans $]a, b[$. Soit π l'application de $]a, b[\times u^{-1}(r)$ dans $u^{-1}(]a, b[)$ qui au point (s, x) associe le point intersection de la sous-variété $u^{-1}(s)$ avec la ligne intégrale du gradient de u issue de x. Si on pose $d\nu = du/|du|$, alors on a $\pi_*(d\nu) = ds/|du| \circ \pi$. On applique alors le théorème de Fubini en remarquant que :

$$d\mathrm{vol}_g = d\nu \wedge \star\, d\nu = d\nu \wedge \sigma,$$

d'où l'on tire :

$$\int_{u^{-1}(]a,\,b[)} f\,dv \wedge \sigma = \int_a^b \left[\int_{\{s\} \times u^{-1}(r)} f \circ \pi \frac{\pi^* \sigma}{|du| \circ \pi} \right] ds.$$

On termine en faisant un changement de variables dans l'intégrale entre crochets. Si u est de Morse, on applique ce qui précède et le fait que l'ensemble des points critiques de u est de mesure nulle dans M.

APPENDICE B

Sur la régularité de la symétrisée

Soit $H_0^{1,+}(V)$ le sous-ensemble des fonctions de $H_0^1(V)$ (où V est une sous-variété à bord de dimension n d'une variété riemannienne compacte M) qui sont positives ou nulles presque partout. Soit $m_0^+(V)$ le sous-ensemble de celles qui sont la valeur absolue d'une fonction de $m_0(V)$ (*voir* n° I.11). On a défini, n° I.9, une application $K : m_0^+(V) \to L_0^{2,+}(V^*)$ $(u \to u^*)$. On se propose de montrer dans cet appendice le lemme suivant (comparer avec [BE], chap. II, p. 47).

Lemme. — *L'application* K *envoie* $m_0^+(V)$ *dans* $H_0^{1,+}(V^*)$.

On reprend les notations du n° I.9 et suivants. Soit s une valeur régulière de $u \in m_0^+(V)$, $s>0$. Alors :

$$A'(s) = -\int_{u^{-1}(s)} |du|^{-1}\,\sigma.$$

Or, par définition de u_*, on a :

$$u_*(x) = A_*^{-1}(\mathrm{Vol}(B(N, \rho))),$$

où ρ est la distance au pôle nord N de S^n d'un point x situé sur le bord de la boule riemannienne $B(N, \rho)$ de S^n et où $\beta A_*(r) = A(r)$. La fonction u_* sera donc dérivable radialement (remarquer que u_* est radiale) sur V^*, sauf peut-être au pôle nord N, pour les valeurs de ρ correspondant aux valeurs critiques de u et au rayon de V^*. La fonction u_* admet donc une dérivée presque partout.

Soient $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_k = \sup(u)$ les valeurs critiques et extrêmes de u. Alors, notant $V_{i,\varepsilon}^*$ les tranches $\{t_i + \varepsilon < u_* < t_{i+1} - \varepsilon\}$, pour i allant de 0 à $k-1$, on a :

$$(\star) \qquad \beta \cdot \int_{V_{i,\varepsilon}^*} |du_*|^2\, d\,\mathrm{vol} \leqq \int_{V_{i,\varepsilon}} |du|^2\, d\mathrm{vol},$$

d'après le principe de symétrisation que nous pouvons légitimement appliquer dans chaque tranche (de valeurs régulières de u) $V_{i,\varepsilon}$; remarquons aussi que d'après le choix de u, $\lim_{\varepsilon \to 0} \bigcup_{i=0}^{k-1} V^*{}_{i,\varepsilon} = V^* \diagdown \left[\bigcup_{i=0}^{k} \partial B(N, \rho_i) \right]$, où ρ_i est déterminé par $u_*(\partial B(N, \rho_i)) = t_i$.

Mais $\beta . \sum_{i=0}^{k-1} \int_{V^*_{i,\varepsilon}} |du_*|^2 d\mathrm{vol} \leqq \int_V |du|^2 d\mathrm{vol}$. Donc, en appliquant le théorème de Lebesgue dans (★), on obtient :

$$\beta . \| du_* \|_{L^2(V^*)} \leqq \| du \|_{L^2(V)}.$$

Il reste à vérifier que du_* est bien la dérivée au sens des distributions de u_*, i. e. que pour tout champ de vecteurs X sur S^n et toute n-forme différentielle ω sur S^n, on a :

$$\int_{V^*} du_*(X) . \omega = - \int_{V^*} u_* . \mathscr{L}_X(\omega).$$

Or, dans $V^*_{i,\varepsilon}$ la formule de Green nous permet d'écrire :

$$\int_{V^*_{i,\varepsilon}} du_*(X) . \omega = - \int_{V^*_{i,\varepsilon}} u_* . \mathscr{L}_X(\omega) + \int_{\partial V^*_{i,\varepsilon}} u_* . \omega.$$

D'où, par sommation et en utilisant le fait que $u_*^{-1}(\sup(u)) = N$ et aussi $u_*(u^{-1}(0)) = 0$, l'on tire le résultat en faisant tendre ε vers 0 (par continuité de u, toutes les intégrales de bord se détruisent 2 à 2, sauf les extrêmes, pour lesquelles on fait appel aux remarques ci-dessus). □

APPENDICE C

Une inégalité isopérimétrique asymptotique

Théorème. — *Soit* (M, g) *une variété riemannienne compacte, lisse, de dimension n. Alors, pour tout* ε *positif, il existe un nombre* $A = A(M, g, \varepsilon)$ *tel que, si* (V, ∂V) *est une sous-variété lisse de dimension n de* M *et si le volume de* V *est inférieur ou égal à* A *alors :*

$$\frac{\mathrm{Vol}(\partial V)}{\mathrm{Vol}(V)^{(n-1)/n}} \geqq (1-\varepsilon) \frac{\mathrm{Vol}(\partial B^n)}{\mathrm{Vol}(B^n)^{(n-1)/n}},$$

où Vol *désigne le volume riemannien dans* M [*en dimension n ou* $(n-1)$], *où* $\widetilde{\mathrm{V}}\mathrm{ol}$ *désigne le volume euclidien dans* $\mathbb{R}^n$ [*en dimension n ou* $(n-1)$] *et où* B^n *est une boule euclidienne dans* $\mathbb{R}^n$.

La démonstration de ce théorème résulte du lemme de localisation suivant qui en est la version locale :

Lemme de localisation I. — *Sous les hypothèses du théorème, il existe un nombre* $\rho = \rho$ (M, g, ε) *tel que, pour tout point* x *de* M *tel que* (V, ∂V) *soit contenue dans la boule géodésique* B(x, 2ρ), *on ait :*

$$\frac{\mathrm{Vol}(\partial V)}{\mathrm{Vol}(V)^{(n-1)/n}} \geqq (1-\varepsilon/2) \frac{\widetilde{\mathrm{Vol}}(\partial B^n)}{\widetilde{\mathrm{Vol}}(B^n)^{(n-1)/n}}.$$

La preuve de ce lemme est une conséquence directe du fait que la métrique riemannienne g est asymptotiquement euclidienne dans de petites boules géodésiques. Dans le lemme de localisation II que nous donnerons plus loin, nous indiquerons une estimée de ρ (et donc de A) en fonction de bornes sur la courbure de la variété M.

Preuve du théorème. — Choisissons un nombre ε positif, une fois pour toutes. Soit $\rho=\rho(\mathrm{M}, g, \varepsilon)$ le nombre donné par le lemme de localisation. Soit $[x_1, \ldots, x_l]$ [où $l=l(\rho)$] une famille *maximale* de points de M telle que, pour tous $p \neq q$ on ait $\mathrm{B}(x_p, \rho/2) \cap \mathrm{B}(x_q, \rho/2)=\emptyset$. La maximalité de la famille implique que $\bigcup \overline{\mathrm{B}}(x_p, \rho)=\mathrm{M}$. En particulier, on a :

$$\Sigma \operatorname{Vol}(\mathrm{B}(x_p, \rho/2)) \leqq \operatorname{Vol}(\mathrm{M}) \leqq \Sigma \operatorname{Vol}(\mathrm{B}(x_p, \rho)),$$

d'où les estimées sur le nombre l :

$$l \inf[\operatorname{Vol}(\mathrm{B}(x_p, \rho/2)] \leqq \operatorname{Vol}(\mathrm{M}) \leqq l \sup[\operatorname{Vol}(\mathrm{B}(x_p, \rho)]. \tag{1}$$

Les inégalités (1) permettent d'évaluer le nombre $l=l(\rho)$ en fonction du nombre ρ et de la géométrie de la variété (M, g).

Posons $\mathrm{B}_s^t=\mathrm{B}(x_s, t)$. Alors, on a :

$$\operatorname{Vol}(\mathrm{B}_s^{2\rho} \cap \mathrm{V}) \geqq \int_\rho^{2\rho} \operatorname{Vol}(\partial \mathrm{B}_s^t \cap \mathrm{V})\, dt.$$

Le théorème de la moyenne donne : il existe une valeur $t(s)$ comprise entre ρ et 2ρ telle que :

$$\operatorname{Vol}(\partial \mathrm{B}_s^{t(s)} \cap \mathrm{V}) \leqq \operatorname{Vol}(\mathrm{V})/\rho. \tag{2}$$

On déduit de (2) l'inégalité :

$$\sum_{i=1}^{l} \operatorname{Vol}(\partial \mathrm{B}_i \cap \mathrm{V}) \leqq l \operatorname{Vol}(\mathrm{V})/\rho, \tag{3}$$

où B_i désigne la boule $\mathrm{B}(x_i, t(i))$. Définissons les ensembles suivants : $\mathscr{B}=$l'ensemble des composantes connexes de $\mathrm{M} \setminus \bigcup_{i=1}^{l} \partial \mathrm{B}_i$, $\mathrm{V}'=\sum_{b \in \mathscr{B}} (\mathrm{V} \cap b)$, [réunion disjointe].

De l'inégalité (3) on tire :

$$\operatorname{Vol}(\partial \mathrm{V}') \leqq \operatorname{Vol}(\partial \mathrm{V})+2 l \operatorname{Vol}(\mathrm{V})/\rho. \tag{4}$$

Appliquons maintenant le lemme de localisation (rappelons le choix de ρ) à chaque $\mathrm{V} \cap b$. Il vient :

$$\operatorname{Vol}(\partial \mathrm{V}') \geqq (1-\varepsilon/2)\, c(n) \sum_{b \in \mathscr{B}} [\operatorname{Vol}(\mathrm{V} \cap b)]^{(n-1)/n}, \tag{5}$$

où :

$$c(n)=\widetilde{\operatorname{Vol}}(\partial \mathrm{B}^n)/\widetilde{\operatorname{Vol}}(\mathrm{B}^n)^{(n-1)/n}=n\, \beta(n)^{1/n}.$$

Comme $(n-1)<n$, on a l'inégalité :

(6) $$\Sigma[\mathrm{Vol}(\mathrm{V}\cap b)]^{(n-1)/n}\geqq[\Sigma\,\mathrm{Vol}(\mathrm{V}\cap b)]^{(n-1)/n}.$$

Il résulte alors des inégalités (4), (5) et (6) que :

$$\mathrm{Vol}(\partial\mathrm{V})+2\,l\,\mathrm{Vol}(\mathrm{V})/\rho\geqq(1-\varepsilon/2)\,c(n)\,\mathrm{Vol}(\mathrm{V})^{(n-1)/n},$$

d'où :

(7) $$\frac{\mathrm{Vol}(\partial\mathrm{V})}{\mathrm{Vol}(\mathrm{V})^{(n-1)/n}}\geqq(1-\varepsilon/2)\,c(n)-2\,l\,\mathrm{Vol}(\mathrm{V})^{1/n}/\rho.$$

Il suffit de choisir maintenant pour nombre A le nombre :

(8) $$\mathrm{A}=\mathrm{A}(\mathrm{M},\,g,\,\varepsilon)=(\varepsilon\rho\,n/4\,l)^n\,\beta(n).$$

Si $\mathrm{Vol}\,(\mathrm{V})\leqq\mathrm{A}$, on a alors $\mathrm{Vol}\,(\partial\mathrm{V})\geqq(1-\varepsilon)\;c\,(n)\;\mathrm{Vol}(\mathrm{V})^{(n-1)/n}$.

Preuve du lemme de localisation et lemme de localisation II. — Soit x un point quelconque de M et soit r un nombre réel positif, inférieur à $\mathrm{Inj}_x(\mathrm{M},\,g)$, le rayon d'injectivité de $(\mathrm{M},\,g)$ en x (ce nombre est borné inférieurement par un nombre strictement positif car M est compacte). Posons $\mathrm{B}=\mathrm{B}\;(x,\;\mathrm{Inj}_x\;(\mathrm{M},\,g))$ et $\mathrm{B}(r)=\mathrm{B}(x,\,r)$. Dans tout ce qui suit, on suppose que $(\mathrm{V},\,\partial\mathrm{V})\subset\mathrm{B}$.

Considérons la métrique riemannienne $\tilde{g}$ définie dans B par $\tilde{g}=\tilde{g}_x=(\exp_x^{-1})^*\,g_x$. Soient :
g_{T} (resp. $\tilde{g}_{\mathrm{T}}$) la restriction de g (resp. $\tilde{g}$) à $\mathrm{T}\,\partial\mathrm{V}$;
$\tilde{\omega}$, la forme volume de $\tilde{g}_{\mathrm{T}}$;
$\tilde{\sigma}$, la forme volume de $\tilde{g}$.
Soient :
$\mathrm{D}\,(y)$: le déterminant de g_{T} par rapport à $\tilde{g}_{\mathrm{T}}$ en $y\in\partial\mathrm{V}$;
$\mathrm{A}\,(y)$: le déterminant de g par rapport à $\tilde{g}$ en $y\in\mathrm{V}$.
On a alors, avec les notations évidentes :

(10) $$\mathrm{Vol}(\partial\mathrm{V})-\widetilde{\mathrm{Vol}}(\partial\mathrm{V})=\int_{\partial\mathrm{V}}(\sqrt{\mathrm{D}(y)}-1)\,\tilde{\omega};$$
$$\mathrm{Vol}(\mathrm{V})-\widetilde{\mathrm{Vol}}(\mathrm{V})=\int_{\mathrm{V}}(\sqrt{\mathrm{A}(y)}-1)\,\tilde{\sigma}.$$

Posons maintenant :

(11) $$\varphi_s(y)=\sup\{g(v,v)/\tilde{g}(v,v),\,v\in\mathrm{U}_y\mathrm{M}\};$$
$$\varphi_i(y)=\inf\{g(v,v)/\tilde{g}(v,v),\,v\in\mathrm{U}_y\mathrm{M}\}.$$

On a donc les inégalités suivantes :

(12) $$1-\varphi_s(y)^{(n-1)/2}\leqq1-\sqrt{\mathrm{D}(y)}\leqq1-\varphi_i(y)^{(n-1)/2}$$

pour tout y de $B(r)$. Posons :

$$\Phi(r)=\sup[\sup\{|1-\varphi_s(y)^{(n-1)/2}|\, y\in B(r)\},\ \sup\{|1-\varphi_i(y)^{(n-1)/2}|,\ y\in B(r)\}]. \tag{13}$$

De l'inégalité (12) et des définitions (13) on déduit que, pour tout y de $B(r)$ on a $|1-\sqrt{D(y)}|\leqq\Phi(r)$.

La première égalité dans (10) et ce qui précède donnent, si $(V, \partial V)\subset B(x, r)$:

$$|\mathrm{Vol}(\partial V)-\widetilde{\mathrm{Vol}}(\partial V)|\leqq\Phi(r)\,\widetilde{\mathrm{Vol}}(\partial V). \tag{14}$$

D'après le lemme de Gauss, on a de même :

$$|\mathrm{Vol}(V)-\widetilde{\mathrm{Vol}}(V)|\leqq\Phi(r)\,\widetilde{\mathrm{Vol}}(V). \tag{14'}$$

Si donc $(V, \partial V)\subset B(x, r)$, on déduit de (14) et (14′) que :

$$\frac{\mathrm{Vol}(\partial V)}{\mathrm{Vol}(V)^{(n-1)/n}}\geqq\frac{1-\Phi(r)}{(1+\Phi(r))^{(n-1)/n}}\,\frac{\widetilde{\mathrm{Vol}}(\partial V)}{\widetilde{\mathrm{Vol}}(V)^{(n-1)/n}}\geqq\frac{1-\Phi(r)}{1+\Phi(r)}\,\frac{\widetilde{\mathrm{Vol}}(\partial V)}{\widetilde{\mathrm{Vol}}(V)^{(n-1)/n}}.$$

Pour que :

$$\frac{\mathrm{Vol}(\partial V)}{\mathrm{Vol}(V)^{(n-1)/n}}\geqq(1-\varepsilon/2)\frac{\widetilde{\mathrm{Vol}}(\partial V)}{\widetilde{\mathrm{Vol}}(V)^{(n-1)/n}},$$

il suffit que $\Phi(r)\leqq\varepsilon/4$. Cette condition est réalisable car on a :

$$\lim_{r\to 0}\Phi(r)=0. \tag{15}$$

Nous allons maintenant estimer la valeur $\rho=\rho(M, g, \varepsilon)$ telle que pour $r\leqq\rho$ on ait $\Phi(r)\leqq\frac{1}{4}\varepsilon$.

Posons :

$$S(k, r)=\begin{cases}(k^{1/2}r)^{-1}\sin(k^{1/2}r) & \text{si } k>0,\\ 1 & \text{si } k=0,\\ (-k)^{-1/2}r^{-1}\,\mathrm{sh}((-k)^{1/2}r) & \text{si } k<0.\end{cases}$$

Supposons que l'on a (M est compacte) :

$$k\leqq\mathrm{Sect}(M, g)\leqq K, \tag{16}$$

où Sect (M, g) désigne la courbure sectionnelle de (M, g).

Si $r=d_g(x, y)=d_{\tilde g}(x, y)$ et si $\tilde g(v, v)=1$ (où l'on désigne par d_g la distance riemannienne calculée pour la métrique g), on a :

$$S^2(k, r)\geqq g(v, v)\geqq S^2(K, r)$$

(*voir* [B – C]), et donc :

(17) $$\Phi(r) \leqq \sup[\sup\{|1-S^{(n-1)}(K, r)|\}; \quad \sup\{|1-S^{(n-1)}(k, r)|\}].$$

Ces deux inégalités permettent de calculer la valeur de ρ, telle que, pour $r \leqq \rho$ on ait $\Phi(r) \leqq \frac{1}{4}\varepsilon$.

Remarques. — (1) Quand r tend vers 0, on a $1-S^{n-1}(K, r)=0(r^2)$ d'où l'on tire $\rho(M, g, \varepsilon)=0(\varepsilon^{1/2})$;

(2) D'après (1) et les estimées du volume en fonction de la courbure (*voir* [B – C)), on a $l(\rho)=0(\varepsilon^{-(1/2)n})$, d'où l'on tire $A(M, g, \varepsilon)=0(\varepsilon^{(1/2)n(n+3)})$;

(3) En dimension 2, il suffit d'avoir une majoration de la courbure.

De ce qui précède on déduit l'énoncé suivant :

LEMME DE LOCALISATION II. — *Soit* (M, g) *une variété riemannienne, compacte, lisse, telle que* $k \leqq \text{Sect}(M, g) \leqq K$ (*où* Sect *désigne la courbure sectionnelle*). *Soit* $\rho=\rho(M, g, \varepsilon)$ *la plus petite racine positive de l'équation* $\Phi(r)=\frac{1}{4}\varepsilon$ (*voir* n^os 13 et 17) (¹). *Alors, pour* $r \leqq \rho$, *et pour un domaine lisse* $(V, \partial V)$ *contenu dans la boule géodésique* $B(r)$, *on a l'inégalité :*

$$\frac{\text{Vol}(\partial V)}{\text{Vol}(V)^{(n-1)/n}} \geqq \left(1-\frac{1}{2}\varepsilon\right)\frac{\widetilde{\text{Vol}}(\partial B^n)}{\widetilde{\text{Vol}}(B^n)^{(n-1)/n}}.$$

Le nombre $A(M, g, \varepsilon)$ *du théorème est alors :*

$$A(M, g, \varepsilon)=[\varepsilon\rho(M, g, \varepsilon)n/4l(M, g, \varepsilon)]^n\beta(n)$$

et donc $A(M, g, \varepsilon)=0(\varepsilon^{(1/2)n(n+3)})$ *quand* ε *tend vers* 0.

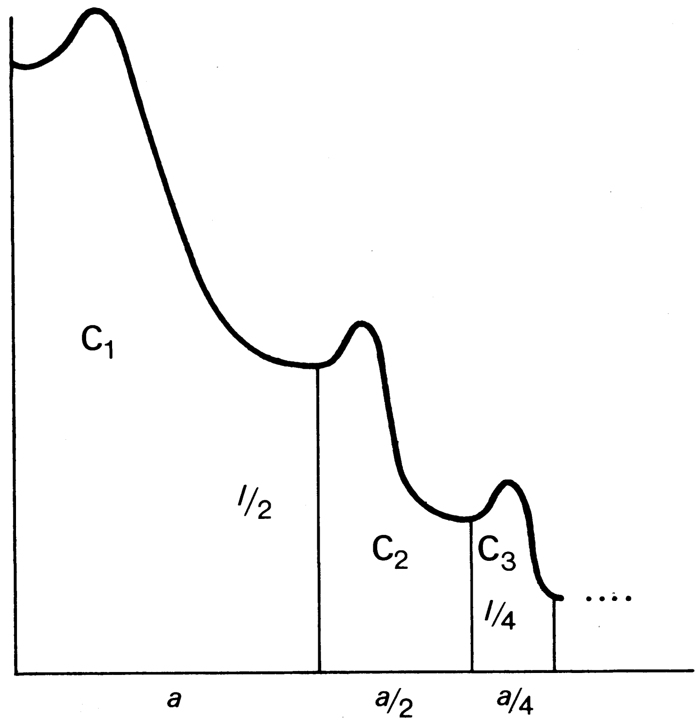
Remarques. — On peut aussi énoncer un théorème analogue au théorème ci-dessus pour une variété M *à bord* lisse. Il faut alors modifier légèrement la preuve ci-dessus (en particulier le lemme de localisation) pour tenir compte de la géométrie du bord.

Pour des domaines bornés $(V, \partial V)$ à bord lisse, d'une variété riemannienne complète (M, g), il suffit de considérer une partie ouverte et relativement compacte M_0 de (M, g) qui contienne V, et de remarquer que la démonstration précédente s'applique sans changement.

Remarquons enfin que l'inégalité isopérimétrique asymptotique est fausse sans bornes sur la courbure, ou sans borne inférieure sur le rayon d'injectivité. Il suffit de considérer la surface de révolution obtenue à partir de la méridienne suivante, *voir* la figure page suivante, où C_2 s'obtient à partir de $\mathscr{C}_1$ par homothétie de rapport 1/2... et C_n à partir de C_{n-1}... de rapport 1/2, i. e. C_n à partir de C_1... de rapport $1/2^{n-1}$, et translation à droite.

Si l'on arrête le processus à gauche et si l est assez petit on a une variété de volume borné pour laquelle l'inégalité de la proposition est fausse.

(¹) Nous supposons toujours implicitement que $\rho(M, g, \varepsilon)$ est inférieur au rayon d'injectivité de (M, g).



APPENDICE D

Théorème de Courant sur les domaines nodaux

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte lisse. On s'intéresse au laplacien sur M (avec conditions de Dirichlet si le bord de M n'est pas vide); dans ce qui suit « problème de Dirichlet » signifie « problème de Dirichlet généralisé » au sens de [B−J−S], chap. II.4.5, p. 196-198.

1. Lemme. — *Soit u une fonction dans* $C^2(M)$ *et soit v une fonction dans* $C^1(M)$. *Soit* D *un domaine nodal de u [i. e. une composante connexe de* $M \setminus u^{-1}(0)$]. *Alors :*

$$(\star) \qquad \int_D v\, \Delta u\, d\mathrm{vol} = \int_D (du, dv)\, d\mathrm{vol}.$$

Supposons u positive sur D *et, pour* $\varepsilon > 0$, *posons* $D_\varepsilon = \{x \in D : u(x) > \varepsilon\}$. *Soit* u_ε *la fonction qui vaut* $u - \varepsilon$ *sur* D_ε *et* 0 *ailleurs. Alors :*

$$(\star\star) \qquad \int_D u\, \Delta u\, d\mathrm{vol} = \int_D |du|^2\, d\mathrm{vol} \geqq \lambda_1(D_\varepsilon) \int_{D_\varepsilon} u_\varepsilon^2\, d\mathrm{vol},$$

où $\lambda_1(D_\varepsilon)$ *désigne la première valeur propre du problème de Dirichlet dans* D_ε.

Preuve. — Soit ε_i une suite de valeurs régulières de u qui tende vers 0. Posons $u_i = u_{\varepsilon_i}$ et $D_i = D_{\varepsilon_i}$. Comme le bord ∂D_i de D_i est lisse, on peut appliquer la formule de Green, d'où l'on tire :

$$(\star_i) \qquad \int_{D_i} v\,\Delta u_i\, d\text{vol} = \int_{D_i} (dv, du_i)\, d\text{vol}.$$

on a aussi, pour une certaine constante C :

$$(a) \qquad \left| \int_D v\,\Delta u\, d\text{vol} - \int_{D_i} v\,\Delta u_i\, d\text{vol} \right| = \left| \int_{D \setminus D_i} v\,\Delta u\, d\text{vol} \right| \leqq C \,\text{Vol}(D \setminus D_i),$$

car u est dans $C^2(M)$ et v dans $C^1(M)$ par hypothèse. De même :

$$(b) \qquad \left| \int_D (dv, du)\, d\text{vol} - \int_{D_i} (dv, du_i)\, d\text{vol} \right| = \left| \int_{D \setminus D_i} (dv, du)\, d\text{vol} \right| \leqq C\,\text{Vol}(D \setminus D_i).$$

Comme $D = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$, le volume de $D \setminus D_i$ tend vers 0 quand i tend vers l'infini. Appliquant $(\star_i)$, (a) et (b), en faisant tendre i vers l'infini, on établit $(\star)$. Il résulte de $(\star)$, avec $u = v$, que :

$$\int_D u\,\Delta u\, d\text{vol} = \int_D |du|^2\, d\text{vol} \geqq \int_{D_\varepsilon} |du_\varepsilon|^2\, d\text{vol}.$$

Comme u_ε est dans $H_0^1(D_\varepsilon)$ ([G−T], 7.4, p. 145-147) on a aussi :

$$\int_{D_\varepsilon} |du_\varepsilon|^2\, d\text{vol} \geqq \lambda_1(D_\varepsilon) \int_{D_\varepsilon} |du_\varepsilon|^2\, d\text{vol},$$

d'après la caractérisation variationnelle des valeurs propres du problème de Dirichlet généralisé (pour un résumé *voir* [BE]). □

2. Lemme. — *Soit u une fonction vérifiant $\Delta u = \lambda u$ dans* M. *Soit* D *un domaine nodal de u. Alors $\lambda = \lambda_1(D)$, première valeur propre du problème de Dirichlet généralisé pour le laplacien dans* D.

Preuve. — (1) Les théorèmes de régularité classiques nous assurent que u est dans $C^2(M)$. Supposons u positive dans D et soit, pour $\varepsilon > 0$, $D_\varepsilon = \{ x \in D : u(x) > \varepsilon \}$. D'après le lemme 1, on a $\lambda \int_D u^2\, d\text{vol} \geqq \lambda_1(D_\varepsilon) \int_{D_\varepsilon} u_\varepsilon^2\, d\text{vol}$. Comme $\overline{D}_\varepsilon \subset D$, on a $H_0^1(D_\varepsilon) \subset H_0^1(D)$, d'où $\lambda_1(D_\varepsilon) \geqq \lambda_1(D)$, et donc :

$$\lambda \int_D u^2\, d\text{vol} \geqq \lambda_1(D) \int_{D_\varepsilon} u_\varepsilon^2\, d\text{vol}.$$

Comme u_ε tend vers u dans $L^2(D)$, on en déduit que $\lambda \geqq \lambda_1(D)$.

(2) Montrons maintenant que $\lambda_1(D) \geqq \lambda$. Prenons D_ε comme ci-dessus, avec ε valeur régulière de u. Soit $v_\varepsilon \in H_0^1(D_\varepsilon)$ telle que v_ε soit >0 et $\Delta v_\varepsilon = \lambda_1(D_\varepsilon) v_\varepsilon$. Comme le bord ∂D_ε de D_ε est lisse, on a par la formule de Green :

$$\int_{D_\varepsilon} v_\varepsilon \Delta u \, d\mathrm{vol} = \lambda \int_{D_\varepsilon} v_\varepsilon u \, d\mathrm{vol} = \int_{D_\varepsilon} u \Delta v_\varepsilon \, d\mathrm{vol}$$

$$+ \int_{\partial D_\varepsilon} u \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial n} d\mathrm{vol} = \lambda_1(D_\varepsilon). \int_{D_\varepsilon} u v_\varepsilon \, d\mathrm{vol} + \int_{\partial D_\varepsilon} u \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial n} d\mathrm{vol},$$

où n est la normale extérieure à D_ε. Comme $v_\varepsilon > 0$ dans D_ε on a $\Delta v_\varepsilon > 0$ et, d'après le principe du maximum fort ([G – T], p. 32, notre laplacien est un opérateur positif !) on a $\partial v_\varepsilon / \partial n \leqq 0$. Il résulte alors de l'égalité ci-dessus et de la positivité de v_ε et u que $\lambda_1(D_\varepsilon) \geqq \lambda$ pour toute valeur régulière ε de u. D'après la caractérisation variationnelle de $\lambda_1(D)$, on a :

$$\lambda_1(D) = \inf \{ RR(f), f \in C_0^\infty(D) \},$$

où RR (f) désigne le quotient de Rayleigh-Ritz de f. Étant donné $\alpha > 0$, il existe une fonction $f \in C_0^\infty(D)$ telle que :

$$\lambda_1(D) \geqq RR(f) - \alpha.$$

Comme $f \in C_0^\infty(D)$, on peut trouver un nombre ε qui soit valeur régulière de u et tel que $\mathrm{Supp}(f) \subsetneqq D_\varepsilon$. On a alors $f \in H_0^1(D_\varepsilon)$, d'où $\lambda_1(D_\varepsilon) \leqq RR(f)$ et donc $\lambda_1(D) \geqq \lambda_1(D_\varepsilon) - \alpha \geqq \lambda - \alpha$. Comme α est arbitraire on a démontré que $\lambda_1(D) \geqq \lambda$. □

Remarque. — Ces deux lemmes sont utilisés implicitement dans la littérature, mais n'y sont pas explicités. Ils sont nécessaires : les propriétés de régularité de l'ensemble nodal d'une fonction propre ne sont pas établies (*voir* appendice E et n° D.6), sauf en dimension 2.

3. LEMME. — *Sous les hypothèses du lemme* 2, *on a* $u \in H_0^1(D)$.

Preuve. — Le matériel des sections 7.4, 7.5, 7.6 de [G – T] permet de démontrer ce lemme sans difficulté particulière et dans le même esprit que les précédents.

Remarque. — On peut en fait démontrer le lemme suivant [KZ] : si $u \in H^1(D) \cap C^0(\overline{D})$ et si $u \upharpoonright \partial D = 0$, alors $u \in H_0^1(D)$ (où D est un domaine borné quelconque). L'idée est que sur un ensemble $\{ u = \mathrm{Cte} \}$, le gradient du est nul presque partout.

4. THÉORÈME (des domaines nodaux de Courant). — *Soit* (M, g) *une variété riemannienne compacte lisse. On s'intéresse au laplacien sur* M (*avec conditions de Dirichlet si le bord n'est pas vide*). *On désigne par* $0 \leqq \lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3 \leqq \ldots \nearrow \infty$ *la suite des valeurs propres du laplacien* ($\lambda_1 = 0$ *si* $\partial M = \emptyset$), *écrites avec leurs multiplicités. Soit u une fonction propre quelconque associée à la k-ième valeur propre* λ_k. *Alors le nombre de domaines nodaux de u est au plus égal à k.*

Preuve. — Par l'absurde : soient $D_1, D_2, \ldots, D_k, D_{k+1}, \ldots$, les domaines nodaux de u. Soit v_j la fonction égale à u sur D_j et à 0 ailleurs, $1 \leqq j \leqq k$. Posons $v = \sum_{j=1}^{k} a_j v_j$. D'après le lemme 3, $v_j \in H_0^1(D_j)$ et donc $v \in H^1(M)$ et à $H_0^1(M)$ si ∂M est non vide. On peut choisir les constantes a_j de telle sorte que $\| v \|_{L^2(M)} = 1$ et que v soit orthogonale, dans $L^2(M)$, aux $k-1$ premières fonctions propres. D'après la caractérisation variationnelle, on a :

$$\lambda_k \leqq \frac{\int_M |dv|^2 \, d\mathrm{vol}}{\int_M v^2 \, d\mathrm{vol}} = \frac{\sum_{j=1}^k a_j^2 \int_{D_j} |dv_j|^2 \, d\mathrm{vol}}{\sum_{j=1}^k a_j^2 \int_{D_j} v_j^2 \, d\mathrm{vol}}.$$

D'après le lemme 1, on a $\int_{D_i} |dv_i|^2 \, d\mathrm{vol} = \int_{D_i} |du|^2 \, d\mathrm{vol} = \int_{D_i} u \Delta u \, d\mathrm{vol} = \lambda_k \int_{D_i} u^2 \, d\mathrm{vol} = \lambda_k \int_{D_i} v_i^2 \, d\mathrm{vol}$. Il en résulte que l'égalité a lieu dans l'inégalité ci-dessus et donc (d'après le choix des a_i) que v est une fonction propre normalisée associée à λ_k. Comme v s'annule sur l'ouvert D_{k+1}, elle s'annule identiquement d'après le principe du prolongement unique [AR], ce qui est absurde. □

5. COROLLAIRE. — *Soit u une première fonction propre du problème de Dirichlet dans* M (*i. e. associée à la première valeur propre*). *Alors u est positive strictement ou négative strictement dans* M. *En particulier la première valeur propre* λ_1 *est simple. Toute fonction propre associée à une valeur propre strictement plus grande que* λ_1 *a au moins deux domaines nodaux.*

6. *Remarques.* — (1) Le théorème 4 est énoncé dans [C—H], volume I, VI.6, p. 452, et démontré dans le cas de la dimension 2. Noter l'hypothèse (*ibid.*, p. 451, note (1) en bas de page) que l'ensemble nodal est C^1 par morceaux.

(2) La preuve du théorème de Courant donnée dans [CG] n'est pas complètement satisfaisante : (i) le théorème 2.2, p. 46 de [CG] n'est pas démontré à notre connaissance en dimension supérieure ou égale à 3 (*voir* appendice E); (ii) même en admettant le théorème 2.2 de [CG], il n'est pas clair que l'on puisse appliquer directement la formule de Green à un domaine nodal en dimension supérieure ou égale à 3.

(3) Au moins en dimension 2, on peut donner des théorèmes analogues au théorème 4, pour d'autres conditions aux limites homogènes (dont celles de Neumann) : [C—H], volume I, VI.6.

APPENDICE E

UN CONTRE EXEMPLE

Dans [CG], théorème 2.2, p. 46, Cheng énonce un résultat sur la régularité des ensembles nodaux, en dimension quelconque. Comme cela nous a été signalé par Y. Colin de Verdière [CV], la démonstration de ce théorème est incomplète en dimension supérieure ou égale à 3. En effet, la preuve donnée dans [CG] repose sur le lemme suivant (dont la version topologique est due à Kuo, *voir* [CG], lemme 2.4).

LEMME. — *Soient f et p deux fonctions* C^∞ *dans un voisinage de* 0 *dans* $\mathbb{R}^n$ *et telles que :*

(*a*) $$f(x)=p(x)+0(|x|^{N+\varepsilon}),$$

pour N *entier et* $\varepsilon\in]0, 1[$;

(*b*) $$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)=\frac{\partial p}{\partial x_i}(x)+O(|x|^{N-1+\varepsilon});$$

(*c*) $$\frac{\partial^\alpha p}{\partial x^\alpha}(0)=0, \qquad 0\leqq|\alpha|\leqq N-1;$$

(*d*) $$|dp(x)|\geqq C|x|^{N-1}, \qquad C>0.$$

Alors, il existe un difféomorphisme local F *de* $\mathbb{R}^n$, F (0) = 0, *tel que l'on ait* $f(x)=p(F(x))$.

La preuve du théorème 2.2 de [CG] est incomplète en ce sens qu'elle utilise implicitement le lemme ci-dessus dans un cas où il ne s'applique pas : en effet l'hypothèse (*d*) est *nécessaire* pour que le lemme soit vrai, comme le contre exemple suivant [CV].

Contre exemple. — Considérons dans $\mathbb{R}^3$, au voisinage de 0, les fonctions :

$$f(x, y, z)=xy-z^4,$$
$$p(x, y, z)=xy.$$

Prenons N = 2, et $\varepsilon<1$ quelconque. Alors, *f* et *p* vérifient les conditions (*a*) – (*c*) du lemme, mais *p* ne vérifie pas la condition (*d*). Il est facile de voir que, près de 0, $\mathbb{R}^3\setminus f^{-1}(0)$ a trois composantes connexes, alors que $\mathbb{R}^3\setminus p^{-1}(0)$ en a quatre.

Remarquons par ailleurs que 0 est une singularité isolée de *f* et que la fonction *f* vérifie l'équation (elliptique au voisinage de 0) $Lf=0$, où :

$$L=-\Delta+12z^2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}.$$

Remarquons aussi que l'opérateur L ne s'étend pas en un opérateur elliptique global.

BIBLIOGRAPHIE

[AN] T. AUBIN, *Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev* (*J. Differential Geometry*, vol. 11, 1976, p. 573-598).

[AR] N. ARONSAJN, *A Unique Continuation Theorem for Solutions of Elliptic Partial Differential Equations or Inequalities of Second Order* (*J. Math. Pures et Appliquées*, vol. 36, 1957, p. 235-249).

[B-B] L. BÉRARD BERGERY et J. P. BOURGUIGNON, *Laplacians and Riemannian Submersions with Totally Geodesic Fibres*, prétirage, Ecole Polytechnique, Palaiseau, France, 1980.

[B-C] R. BISHOP et R. CRITTENDEN, *Geometry of Manifolds*, Academic Press, 1964, New York.

[B-D] J. L. BARBOSA et M. DO CARMO, *A Proof of a General Isoperimetric Inequality for Surfaces* (*Math. Z.*, vol. 162, 1978, p. 245-261).

[BE] C. BANDLE, *Isoperimetric Inequalities and Applications* (*Monographs and Studies in Math.*, n° 7, Pitman, 1980).

[BG] J. BRÜNING, *Ueber Knoten von Eigenfunktionen des Laplace-Beltrami Operators* (*Math. Z.*, vol. 158, 1978, p. 15-21).

[B-G-M] M. BERGER, P. GAUDUCHON et E. MAZET, *Le spectre d'une variété riemannienne*, (*Lecture Notes in Math.*, n° 194, Springer, 1971).

[B-J-S] L. BERS, F. JOHN et M. SCHECHTER, *Partial Differential Équations, Interscience, 1964, New York.*

[B-K] D. BARTHEL et R. KÜMRITZ, *Laplacian with a Potential*, in *Global Differential Geometry and Global Analysis*, Proceedings, Berlin, 1979, (*Lecture Note in Math.*, n° 838, Springer, 1981).

[B-M] P. BÉRARD et D. MEYER, *Une généralisation de l'inégalité de Faber-Krahn* (*C. R. Acad. Sc.* Paris, t. 292, 1981, p. 437).

[BN] G. BESSON, *Sur la multiplicité de la première valeur propre des surfaces riemanniennes*, (*Ann. Institut Fourier*, vol. 30, 1980, p. 109-128).

[CG] S.-Y. CHENG, *Eigenfunctions and Nodal Sets* (*Comment. Math. Helv.*,vol. 51, 1976, p. 43-55).

[C-H] R. COURANT et D. HILBERT, *Methods of Mathematical Physics*, vol. I, Interscience, 1953.

[C-N] I. CHAVEL et E. A. FELDMAN, *Spectra of Domains in Compact Manifolds* (*J. Functional Analysis*, vol. 30, 1978, p. 198-222).

[CV] Y. COLIN DE VERDIÈRE, communication privée.

[D-G] J. DUISTERMAAT et V. GUILLEMIN, *The Spectrum of Positive Elliptic Operators and Periodic Bicharacteristics* (*Inventiones Math.*, vol. 29, 1975, p. 39-79).

[F-H] S. FRIEDLAND et W. K. HAYMAN, *Eigenvalues Inequalities for the Dirichlet Problem on Spheres and Growth of Subharmonic Functions* (*Comment. Math. Helv.*, vol. 51, 1976, p. 133-161).

[FR] G. FABER, *Beweis dass unter allen Homogenen Membranen von Gleicher Fläche und Gleicher Spannung die Kreisförmige den Tiefsten Grundton Gibt* (*S.-B. Math. Nat. Kl. Bayer Akad. Wiss.*, 1923, p. 169-172).

[GA] S. GALLOT, *Minorations sur le λ_1 des variétés riemanniennes* (*Séminaire Bourbaki*, 1980/1981, exposé n° 569).

[G-M] A. GRAY et G. B. MATHEWS, *A Treatise on Bessel Functions and their Applications to Physics*, Dover, 1966.

[G-T] D. GILBARG et N. S. TRUDINGER, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order* (*Grundlehren der Math.*, vol. 224, Springer, 1977).

[GV] M. GROMOV, *Paul Levy's Isoperimetric Inequality*, prétirage I.H.E.S., 1980.

[KN] E. KRAHN, *Über eine von Rayleigh Formulierte Minimaleigenschaft der Kreise* (*Math. Ann.*, vol. 94, 1924, p. 97-100).

[KZ] J. KAZDAN, communication privée.

[LY] H. LEWY, *On the Minimum Number of Domains in which the Nodal Lines of Spherical Harmonics Divide the Sphere* (*Comm. in Partial Differential Equations*, vol. 2, 1977, p. 1233-1244).

[PE] J. PEETRE, *A generalization of Courant's Nodal Domain Theorem* (*Math. Scand.*, vol. 5, 1957, p. 15-20).

[PL] A. PLEIJEL, *Remarks on Courant's Nodal Line Theorem* (*Comm. on Pure Applied Math.*, vol. 9, 1956, p. 543-550).

[P-S] G. POLYA et G. SZEGÖ, *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics* (*Annals of Math. Studies*, n° 27, Princeton, 1951).

[RY] R. C. REILLY, *Applications of the Hessian Operator in a Riemannian Manifold* (*Indiana University Math. J.*, vol. 26, 1977, p. 459-472).

[SR] E. SPERNER, *Zur Symmetrisierung von Funktionen auf Sphären* (*Math. Z.*, vol. 134, 1973, p. 317-327).

[ST] E. SCHMIDT, *Der Brunn-Minkowskische Satz und sein Spiegeltheorem sowie die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel in der euklidischen und nichteuklidischen Geometrie* (*Math. Nachrichten*, vol. 2, 1949, p. 171-244).

[UK] K. UHLENBECK, *Generic Properties of Eigenfunctions* (*Amer. J. Math.*, vol. 98, 1976, p. 1059-1078).

[WN] G. N. WATSON, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 2nd éd., Cambridge, 1944.

[W-W] E. T. WHITTAKER et G. N. WATSON, *A Course on Modern Analysis*, 4th éd., Cambridge, 1969.

(Manuscrit reçu le 4 mars 1982.)

P. BÉRARD
Université de Savoie, Service de Mathématiques, B.P. 1104,
73011 Chambéry Cedex

D. MEYER
Laboratoire Associé au C.N.R.S. n° 212,
U.E.R. de Mathématiques,
Université Paris-7
75251 Paris Cedex 05