LAURENT GRUSON
CHRISTIAN PESKINE

Genre des courbes de l'espace projectif. II

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 15, nº 3 (1982), p. 401-418
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1982_4_15_3_401_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 15, 1982, p. 401 à 418.

GENRE DES COURBES DE L'ESPACE PROJECTIF (II)

PAR LAURENT GRUSON ET CHRISTIAN PESKINE

Dans cet article, on détermine les couples d'entiers positifs (d, g) tels qu'il existe dans P^3 (1) une courbe gauche lisse connexe de degré d et genre g. Il est bien connu qu'une telle courbe peut être tracée sur une quadrique si et seulement si $(d-2)^2-4g$ est le carré d'un entier. D'autre part, on sait [2] que $g \leqq 1+d(d-3)/6$ pour les courbes non contenues dans une quadrique.

Dans le paragraphe 1, on prouve que pour $g \leqq (d-1)^2/8$ il existe une courbe (lisse connexe) de degré d et genre g sur une surface quartique à droite double.

Dans le paragraphe 2, on montre que pour $(d-1)^2/8 \leqq g \leqq 1+d(d-3)/6$ il existe une courbe (lisse connexe) de degré d et genre g sur une surface cubique lisse. On donne aussi un algorithme permettant de déterminer les genres des courbes lisses connexes, de degré donné, tracées sur une surface cubique lisse, et on montre que tous les genres des courbes lisses connexes contenues dans une surface cubique intègre (quelconque) sont ainsi atteints.

Le 1er appendice contient les lemmes numériques, sur les formes quadratiques, utilisés au paragraphe 2.

Dans le 2e appendice, inutile pour le résultat énoncé plus haut, on utilise les informations obtenues au paragraphe 2 pour exhiber de nouvelles composantes irréducibles pathologiques du schéma de Hilbert.

Dans [3], Halphen annonce que pour $g \leqq 1+d(d-3)/6$ on peut tracer une courbe lisse connexe de degré d et genre g sur une surface cubique. Dans [4], Hartshorne montre que ce n'est pas toujours possible sur les surfaces cubiques lisses. Il résulte de notre 2e paragraphe que l'assertion d'Halphen est inexacte. C'est en essayant d'interpréter la démonstration d'Halphen que nous avons remarqué les phénomènes décrits dans le 2e appendice.

Soulignons enfin que la méthode développée ici, en privilégiant une surface particulière contenant la courbe, tend à dissimuler le problème central de la classification des courbes gauches : décrire les composantes du schéma de Hilbert.

(1) Espace projectif de dimension 3 sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle.

1. — Courbes tracées sur une surface quartique à droite double

THÉORÈME 1.1. — *Pour tout couple d'entiers positifs* (d, g) *tels que* $g \leqq (d-1)^2/8$, *il existe une courbe lisse connexe de degré d et genre g tracée sur une surface quartique à droite double.*

Notons S une surface obtenue en éclatant 9 points $P_i (1 \leqq i \leqq 9)$ de $\mathbb{P}^2$ vérifiant la condition suivante (évidemment réalisable) :

($\star$) Les points P_i sont sur une cubique lisse Γ, et les classes des diviseurs $O_\Gamma(P_i) (1 \leqq i \leqq 9)$ et $O_\Gamma(1)$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{Z}$ dans le groupe de Picard de Γ.

Soient $L_i (1 \leqq i \leqq 9)$ les courbes de S images réciproques des points P_i, et soit Δ le O_S-module inversible image réciproque de $O_{\mathbb{P}^2}(1)$. Il est clair que $(\Delta, -L_1, \ldots, -L_9)$ est une base de Pic S nous permettant d'identifier ce groupe à $\mathbb{Z}^{10}$. Dans cette base, la matrice de la forme d'intersection sur S est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1_9 \end{pmatrix}$; le O_S-module canonique ω_S est repéré par $(-3, -1, -1, \ldots, -1)$. Si nous identifions Γ à sa transformée propre dans S, nous avons $-\omega_S \simeq O_S(\Gamma)$. Remarquons de plus que l'hypothèse de position générale ($\star$) exprime que l'application naturelle Pic S $\to$ Pic Γ est une injection.

Par la suite, nous noterons toujours G le groupe des isométries de Pic S laissant ω_S fixe.

PROPOSITION 1.2. — *Pour tout* σ *de* G, *il existe un morphisme* $S \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^2$, *éclatement de* 9 *points* Q_i *vérifiant la condition* ($\star$), *tel que* $\sigma(\Delta) = \pi^*(O_{\mathbb{P}^2}(1))$ *et* $\sigma(L_i) = \pi^{-1}(Q_i)$ *pour* $1 \leqq i \leqq 9$.

Remarquons d'abord qu'il suffit de montrer que pour $i \in [1, 9]$ le O_S-module $\sigma(L_i)$ a une section réduite irréductible. En effet, comme $(\sigma(L_i), \sigma(L_i)) = -1$ et $(\sigma(L_i), \omega_S) = -1$, une telle section est de genre arithmétique nul, donc lisse et rationnelle. De plus, $(\sigma(L_i), \sigma(L_j)) = 0$ pour $i \neq j$, donc ces 9 courbes peuvent être contractées simultanément; la surface obtenue est alors $\mathbb{P}^2$ puisque son groupe de Picard est $\mathbb{Z}$. Si nous notons π ce nouveau morphisme d'éclatement de 9 points de $\mathbb{P}^2$, les faisceaux $\pi^*(O_{\mathbb{P}^2}(1)), -\sigma(L_1), \ldots, -\sigma(L_9)$ forment une base de Pic S; dans cette base ω_S est repéré par $(-3, -1, \ldots, -1)$. Les conditions $(\sigma(\Delta), \sigma(L_i)) = 0$, $(\sigma(\Delta), \sigma(\Delta)) = 1$ et $(\sigma(\Delta), \omega_S) = -3$ imposent évidemment $\sigma(\Delta) = \pi^*(O_{\mathbb{P}^2}(1))$. De plus l'application Pic S $\to$ Pic Γ étant injective, les 9 points éclatés par π vérifient la condition ($\star$) et Γ est la transformée propre de l'unique cubique, nécessairement lisse, passant par ces points.

Il nous reste à démontrer le lemme suivant :

LEMME 1.3. — *Si* E *est un élément exceptionnel de* Pic S, *i. e. si* $(E, E) = (E, \omega_S) = -1$, *alors* E *admet une section réduite irréductible.*

D'après le théorème de Riemann-Roch, on a $\chi(E) = (E, E - \omega_S)/2 + \chi(O_S) = 1$. D'autre part, $\omega_S - E$ n'a pas de section non nulle car $(\omega_S - E, -\omega_S) = -1$ et $-\omega_S$ est effectif. Donc E est effectif. Soit $C = \sum_{j=1}^{r} m_j C_j$ une section de E, où C_j est une courbe réduite irréductible et $m_j \geqq 0$ pour $j = 1, \ldots, r$. On peut supposer $(C_1, \Gamma) = 1$ et $m_1 = 1$ d'une part, et $(C_j, \Gamma) = 0$ pour $j \geqq 2$ d'autre part. Montrons $C_j = \Gamma$ pour $j \geqq 2$. Sinon soit C'_j la courbe image de C_j dans $\mathbb{P}^2$; alors

$(C_j, \Gamma)=0$ exprime que C'_j et la cubique Γ de $\mathbb{P}^2$ s'intersectent ensemblistement dans les 9 points ce qui contredit l'hypothèse de position générale. Il reste $E=\Delta_1 - n\,\omega_S$ où Δ_1 est la classe du diviseur de C_1. Mais $(\Delta_1, -\omega_S)=1$ implique $(E, E)=(\Delta_1, \Delta_1)+2n$, or $(\Delta_1, \Delta_1) \geqq -1$ (car $(\Delta_1, \Delta_1+\omega_S) \geqq -2)$) donc $n=0$, et le lemme est démontré.

Fixons maintenant une représentation de S comme éclatement de 9 points P_i de $\mathbb{P}^2$, vérifiant la condition ($\star$), et la base $(\Delta, -L_1, \ldots, -L_9)$ de Pic S. Définissons les O_S-modules inversibles $c=(1, 1, 0, 0, \ldots, 0)$ et $b=(0, 0, \ldots, 0, -1, -1)$ par leurs coordonnées dans cette base.

THÉORÈME 1.4. — *Le faisceau inversible $c-\omega_S$ est engendré par ses sections sur* S, *et* $h^0(c-\omega_S)=4$. *Pour un choix d'une base de* $H^0(c-\omega_S)$, *soit* V *la variété image de* S *dans* $\mathbb{P}^3$; *alors* V *est une surface quartique ayant une droite double* L *image de* Γ, *dont* Γ *est l'image réciproque, et le morphisme* $S \to V$ *induit un isomorphisme* $S-\Gamma \simeq V-L$.

Nous aurons besoin du résultat suivant :

LEMME 1.5. — (*a*) $H^0(n\,\omega_S)=k$ *pour* $n<0$, *et les zéros d'une section non nulle de* $n\,\omega_S$ *sont concentrés en* Γ.

(*b*) $H^0(n\,\omega_S)=0$ *pour* $n>0$.

(*c*) $H^1(n\,\omega_S)=0$ *pour tout* $n \in \mathbb{Z}$.

Pour $n \in \mathbb{Z}$, considérons la suite exacte :

$$0 \to (n+1)\,\omega_S \to n\,\omega_S \to (n\,\omega_S) \otimes O_\Gamma \to 0.$$

Comme $(\omega_S, \omega_S)=0$, le O_Γ-module $(n\,\omega_S) \otimes O_\Gamma$ est de degré 0. Compte tenu de la condition ($\star$), on a $(n\,\omega_S) \otimes O_\Gamma \neq O^\Gamma$ pour $n \neq 0$, donc $H^0((n\,\omega_S) \otimes O_\Gamma)=H^1((n\,\omega_S) \otimes O_\Gamma)=0$ pour $n \neq 0$, car Γ est une courbe elliptique. On en déduit le lemme immédiatement.

Soit maintenant D une courbe rationnelle section du O_S-module c, i. e. transformée propre dans S d'une droite de $\mathbb{P}^2$ passant par P_1. Comme $(c, c)=0$, il y a une suite exacte $0 \to O_S \to c \to O_D \to 0$; elle démontre $h^0(c)=2$ et $h^1(c)=0$. La suite exacte $0 \to \omega_S \to O_S \to O_\Gamma \to 0$ induit, après produit tensoriel avec $c-\omega_S$, une suite exacte :

$$0 \to H^0(c) \to H^0(c-\omega_S) \to H^0((c-\omega_S) \otimes O_\Gamma) \to 0.$$

Comme $(c-\omega_S, -\omega_S)=2$, le O_Γ-module $(c-\omega_S) \otimes O_\Gamma$ est de degré 2, donc engendré par ses sections et tel que $h^0((c-\omega_S) \otimes O_\Gamma)=2$. On en déduit que $h^0(c-\omega_S)=4$ et que $c-\omega_S$ est engendré par ses sections.

Il reste à démontrer le lemme suivant :

LEMME 1.6. — (1) *Si* P *est un point de* S. *non situé dans* Γ, *le système linéaire complet* $|c-\omega_S|$ *sépare* P *des points distincts de* P *et de ses points infiniment voisins.*

(2) *Si* P *est un point de* Γ, *l'intersection des courbes du système linéaire complet* $|c-\omega_S|$ *passant par* P *est la variété des zéros de l'unique section de* $(C-\omega_S) \otimes O_\Gamma$ *passant par* P.

Soit D la courbe du système linéaire $|c|$ passant par P. On vérifie que D est isomorphe à son image dans $\mathbb{P}^3$; cette image est une conique non singulière, sauf lorsque P est infiniment voisin d'un des points $P_i (i \geqq 2)$, dans ce cas c'est la réunion de deux droites distinctes coplanaires.

Comme $\Gamma \cup D$ est une courbe du système linéaire complet $|c-\omega_S|$, on en déduit (1). Pour (2), soient D et D′ deux courbes distinctes de $|c|$; alors les deux courbes $\Gamma \cup D$ et $\Gamma \cup D'$ de $|c-\omega_S|$ ont pour intersection Γ, et on en déduit évidemment l'assertion.

PROPOSITION 1.7. — (1) *Le O_S-module $c-n\,\omega_S$ est engendré par ses sections pour $n \geqq 0$, et $h^1(c-n\,\omega_S)=0$ pour $n \geqq -1$.*

(2) *Le O_S-module $b-n\,\omega_S$ est engendré par ses sections pour $n \geqq 1$, et $h^1(b-n\,\omega_S)=0$ pour $n \geqq 0$.*

Ces résultats se déduisent facilement des suites exactes :

$$0 \to H^0(K-(n-1)\,\omega_S) \to H^0(K-n\omega_S) \to H^0(O_\Gamma \otimes (K-n\,\omega_S))$$
$$\to H^1(K-(n-1)\,\omega_S) \to H^1(K-n\,\omega_S) \to 0,$$

où K est c ou b et donc $O_\Gamma \otimes (K-n\,\omega_S)$ un O_Γ-module inversible de degré 2.

COROLLAIRE 1.8. — *Une section générale de $c-n\,\omega_S$, $n \geqq 0$ (resp. $b-n\,\omega_S$, $n \geqq 1$ est une courbe lisse connexe de genre $2n$ (resp. $2n-1$).*

Lissité et connexité se déduisent immédiatement de la proposition (compte tenu du théorème de Bertini). Le genre se calcule au moyen du théorème de Riemann-Roch.

Énonçons et prouvons maintenant le résultat clef de la démonstration.

PROPOSITION 1.9. — *Les intersections $(c, \sigma(c))$ et $(b, \sigma(c))$ prennent toutes les valeurs entières positives lorsque σ varie dans* G.

Nous aurons besoin du lemme qui suit (*cf.* [1], prop. 3, p. 29 et [8], chap. V, n° 1.4.3) :

LEMME. — *La forme d'intersection induit sur $\omega_S^\perp/\mathbb{Z}.\omega_S$ une forme définie négative isométrique à l'opposé de Γ_8.*

Notons alors $\overline{\Gamma}_8$ le $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel $\Gamma_8/2\,\Gamma_8$ muni de la forme quadratique Q_8 induite par $(x, x)/2$ mod. 2.

Remarque. — Notons π l'application naturelle Pic S $\to$ Pic S/2. Pic S. Comme $\omega_S \notin 2$ Pic S, on a $\pi(\omega_S)^\perp = \pi(\omega_S^\perp)$, donc tout élément α de Pic S tel que $(\alpha, \omega_S) \in 2\,\mathbb{Z}$ a naturellement une image dans $\overline{\Gamma}_8$ que nous noterons $\bar{\alpha}$; on a $Q_8(\bar{\alpha}) \equiv (\alpha, \alpha)/2$ mod. 2.

LEMME 1.10. — G *opère transitivement sur l'ensemble des éléments c' de* Pic S *vérifiant les conditions suivantes :* (1) *c' est isotrope;* (2) $(c', \omega_S) = -2$; (3) $\bar{c}' \neq 0$.

Montrons que pour tout élément c' de cet ensemble il existe $\sigma \in G$ tel que $\sigma(c') = c$. On sait (Bourbaki : Alg. de Lie, Chap. 6, § 4, ex. 1), que l'application naturelle de G dans le groupe des isométries de Q_8 est surjective. D'après le théorème de Witt en caractéristique 2 (Bourbaki : Algèbre, chap. IX, § 4, th. 1), G opère alors transitivement sur les éléments isotropes non nuls de $\overline{\Gamma}_8$; on peut donc supposer $\bar{c}' = \bar{c}$, soit $c - c' = 2\,t + k\,\omega_S$ où $t \in \omega_S^\perp$ et $k \in \mathbb{Z}$. L'isométrie $x \to x + (t, x)\,\omega_S$ de $\omega_S^\perp$ se prolonge de façon unique en un élément τ de G. On a alors $\tau(c') = c$.

Pour montrer que $(c, \sigma(c))$ prend toutes les valeurs entières positives, il suffit de vérifier que pour tout entier positif n il existe $x \in \omega_S^\perp$ tel que : (1) $-(x, x)/2 = n$; (2) $\bar{x} + \bar{c} \neq 0$; (3) $\bar{x} + \bar{c}$ est isotrope.

En effet, si x est un tel élément, et si $2k=(x, x)/2+(c, x)$ [avec $k \in \mathbb{Z}$ d'après (3)], l'élément $c+x+k\,\omega_S$ appartient à l'ensemble considéré dans le lemme, et on vérifie immédiatement $(c, c+x+k\,\omega_S)=n$. Montrons donc qu'un tel x existe toujours. Comme Γ_8 représente tous les entiers pairs positifs, il existe $x' \in \omega_S^\perp$ tel que $-(x', x')/2=n$. Si n est impair $Q_8(\bar{x}')=1$. On vérifie facilement qu'il existe un élément non isotrope $\bar{x}$ de $\bar{\Gamma}_8$ tel que $\bar{x}+\bar{c}$ soit isotrope. Comme G opère transitivement sur les éléments non isotropes de $\bar{\Gamma}_8$ (théorème de Witt), il existe $\sigma \in G$ tel que $\sigma(\bar{x}')=\bar{x}$. Si $x=\sigma(x')$, on a évidemment $-(x, x)/2=n$; de plus $\bar{x}+\bar{c}\neq 0$ car $\bar{c}$ est isotrope et $\bar{x}$ non isotrope, donc x remplit les 3 conditions énoncées plus haut. Si n est pair, $\bar{x}'$ est isotrope. Si $\bar{x}'=0$ alors $x=x'$ vérifie les trois conditions requises. Sinon, on montre qu'il existe un élément isotrope non nul $\bar{x}$ de $\bar{\Gamma}_8$ tel que $\bar{x}+\bar{c}$ soit un élément isotrope non nul. Toujours d'après le théorème de Witt, il existe $\sigma \in G$ tel que $\sigma(\bar{x}')=\bar{x}$ et $x=\sigma(x')$ remplit les conditions requises.

Pour montrer que $(b, \sigma(c))$ prend toutes les valeurs entières positives, on constate d'abord que pour tout entier positif non nul n il existe $x' \in \omega_S^\perp$ tel que $-(x', x')/2=n$ et $\bar{x}'\neq 0$ (cette dernière condition est évidemment vérifiée pour $n \not\equiv 0$, mod. 4; sinon on remarque que le nombre de représentations de n est strictement supérieur à celui de $n/4$ ([8], p. 176; (104))). On en déduit alors comme précédemment qu'il existe $x \in \omega_S^\perp$ tel que (1) $-(x, x)/2=n$, et (2) $\bar{x}+\bar{b}$ est isotrope non nul. En vertu de cette dernière propriété il existe un entier k tel que $2k=-1+(x, x)/2+(b, x)$. Mais l'élément $b+x+k\,\omega_S$ appartient à l'ensemble considéré dans le lemme, et comme $(b, b+x+k\,\omega_S)=-1-(x, x)/2$ la proposition est démontrée.

Démontrons maintenant un cas particulier du théorème principal de ce paragraphe :

PROPOSITION 1.11. — *Soient d et g des entiers tels que $0\leqq g\leqq d-3$. Il existe une courbe lisse connexe de degré d et genre g tracée sur une surface quartique à droite double de $\mathbb{P}^3$.*

Si $g=2k$, il existe $\sigma \in G$ tel que $(c, \sigma(c))=d-g-2$. D'après 1.2 et 1.7, une section générale de $\sigma(c-k\,\omega_S)$ est une courbe lisse connexe C de genre $2k$. Comme $(c-\omega_S, \sigma(c-k\,\omega_S))=d$, il suffit de vérifier que cette courbe est isomorphe à son image dans $\mathbb{P}^3$ par le morphisme $S \to \mathbb{P}^3$ défini en 1.4. Mais C coupe Γ en 2 points puisque $(\sigma(c-k\,\omega_S), -\omega_S)=2$. Il suffit de montrer que ces deux points ne sont pas involutifs pour $(c-\omega_S)\otimes O_\Gamma$, soit $\sigma(c-k\,\omega_S)\neq c-\omega_S$ compte tenu de l'injection Pic S $\to$ Pic Γ. Mais $(c, \sigma(c))>0$ entraîne que $\sigma(c)-c$ n'est pas isotrope et *a fortiori* : $\sigma(c)-c\neq(k-1)\,\omega_S$.

Si $g=2k-1$, avec $k\geqq 1$, il existe $\sigma \in G$ tel que $(\sigma(b), c)=d-g-3=d-2k-2$. Une section générale de $\sigma(b-k\,\omega_S)$ est une courbe lisse connexe B de genre g. Comme $\sigma(b-k\,\omega_S)\neq c-\omega_S$, cette courbe coupe Γ en deux points non involutifs pour $(c-\omega_S)\otimes O_\Gamma$; elle est donc isomorphe à son image dans $\mathbb{P}^3$. Comme $(\sigma(b-k\,\omega_S), c-\omega_S)=d$, la proposition est démontrée.

Démontrons enfin le théorème 1.1. Considérons des entiers positifs d et g vérifiant la double inégalité $d-3<g\leqq(d-1)^2/8$. Pour tout entier r, définissons $d(r)=d-4r$ et $g(r)=g+r(2r-d+1)$. On vérifie immédiatement qu'il existe un entier positif r tel que $0\leqq g(r)\leqq d(r)-3$. On a vu dans la proposition précédente qu'il existe un faisceau inversible $\mathscr{L}$ sur S, engendré par ses sections, dont la section générale est une courbe lisse connexe de degré $d(r)$ et de genre $g(r)$. Comme $r(c-\omega_S)$ est aussi engendré par ses sections et a une

section générale connexe, et comme $(\mathscr{L}, r(c-\omega_S))>0$, il est bien connu que $\mathscr{L}+r(c-\omega_S)$ est engendré par ses sections et a une section générale lisse connexe. On vérifie immédiatement qu'une telle courbe est de genre g. Comme $(\mathscr{L}+r(c-\omega_S), c-\omega_S)=d$, il suffit pour démontrer le théorème de vérifier qu'une section générale de $\mathscr{L}+r(c-\omega_S)$ ne rencontre pas Γ en deux points involutifs pour $(c-\omega_S)\otimes O_\Gamma$. Pour cela remarquons d'abord que l'application naturelle :

$$H^0(\mathscr{L}+r(c-\omega_S)) \to H^0((\mathscr{L}+r(c-\omega_S))\otimes O_\Gamma)$$

est surjective car $H^1(\mathscr{L}+r(c-\omega_S)+\omega_S)=0$. Il reste alors à rappeler qu'une section générale de $(\mathscr{L}+r(c-\omega_S))\otimes O_\Gamma$ ne se décompose pas en produit d'une section de $(c-\omega_S)\otimes O_\Gamma$ et d'une section de $(\mathscr{L}+(r-1)(c-\omega_S))\otimes O_\Gamma$, pour $r \geqq 1$; mais ceci est bien connu puisque tous les diviseurs, sur la courbe elliptique Γ, considérés ici sont de degré strictement positif.

Remarque 1.12. — On peut montrer que le genre maximal pour les courbes lisses connexes de degré d, tracées sur la surface quartique à droite double considérée, est la partie entière de $1+d(d-2)/8$, sauf pour $d=4$ (c'est alors 1).

2. Courbes tracées sur une surface cubique

Soit S une surface cubique lisse de $\mathbb{P}^3$. Rappelons les faits suivants (*cf.* par exemple [6], chap. V, § 4) :

(1) Le faisceau des formes différentielles de degré 2 est $\omega_S=O_S(-1)$.

(2) Soit Δ un O_S-module inversible tel que $(\Delta, \Delta)=1$ et que $(\Delta, \omega_S)=-3$, alors Δ induit un morphisme $S \to \mathbb{P}^2$ qui est l'éclatement de 6 points en position générale (3 ne sont pas alignés et 6 ne sont pas sur une conique). Si $E_i (1 \leqq i \leqq 6)$ sont les diviseurs exceptionnels correspondants, $(\Delta, -E_1, -E_2, \ldots, -E_6)$ est une base B_Δ de Pic S dans laquelle les coordonnées de ω_S sont $(-3, -1, -1, \ldots, -1)$.

(3) Pour tout module inversible $\mathscr{L}$ sur S, il existe Δ tel que les coordonnées $(\delta, m_1, \ldots, m_6)$ de $\mathscr{L}$ dans la base B_Δ vérifient : $\delta \geqq m_1+m_2+m_3$ et $m_1 \geqq m_2 \geqq \ldots \geqq m_6$. Une telle base est dite adéquate pour $\mathscr{L}$. Avec ces notations, $\mathscr{L}$ est engendré par ses sections si et seulement si $m_6 \geqq 0$. Dans ce cas la section générale de $\mathscr{L}$ est connexe sauf si ses coordonnées sont $(n, n, 0, \ldots, 0)$ avec $n \geqq 2$.

A tout faisceau inversible $\mathscr{L}$ nous attacherons les nombres :

$$d(\mathscr{L})=-(\mathscr{L}, \omega_S) \qquad \text{et} \qquad r(\mathscr{L})$$

défini par :

$$d(\mathscr{L})-r(\mathscr{L})=\max_{(E, E)=(E, \omega_S)=-1} (\mathscr{L}, E).$$

Si $(\delta, m_1, \ldots, m_6)$ sont les coordonnées de $\mathscr{L}$ dans une base adéquate, on vérifie, en calculant les coordonnées des 27 diviseurs exceptionnels dans cette base, que $r(\mathscr{L})=\delta-m_1$.

On a alors $d(\mathscr{L})=3r+2m_1-\sum_{i=1}^{6} m_i$, où $r=r(\mathscr{L})$. Si $\mathscr{L}$ est engendré par ses sections, une section générale C de $\mathscr{L}$ est une courbe lisse de degré $d=d(\mathscr{L})$ et de genre :

$$g=(\delta-1)(\delta-2)/2-\sum_{1}^{6} m_i(m_i-1)/2 \;=1+[(r-1)d-3r^2/4-\sum_{2}^{6}(r/2-m_i)^2]/2.$$

Rappelons que si $g \geqq 0$ la courbe C est nécessairement connexe puisque le cas d'exception signalé est une réunion disjointe de coniques.

Définissons $F_d(r)=1+[(r-1)d-3r^2/4]/2$.

PROPOSITION 2.1. — *Soient d et r deux entiers tels que* $0 \leqq r \leqq 2d/3$. *Pour tout entier positif g contenu dans l'intervalle* $]F_d(r-1),\ F_d(r)]$ *tel que* $8(F_d(r)-g)$ *est somme des carrés de cinq entiers positifs* $\leqq r$, *de même parité, il existe une courbe lisse connexe* C *sur* S *de degré d, genre g et telle que* $r(O_S(C))=r$.

A toute suite d'entiers $m_2, \ldots, m_6$, associons les nombres $m_1=(d-3r+\sum_{2}^{6} m_i)/2$ et $\alpha_i=r/2-m_i\ (2 \leqq i \leqq 6)$.

LEMME 2.2. — $(m_1+r, m_1, \ldots, m_6)$ *est un système de coordonnées dans une base adéquate d'un faisceau inversible engendré par ses sections si et seulement si les nombres* $\alpha_i\ (2 \leqq i \leqq 6)$ *vérifient les conditions suivantes :*

(1) $$2\alpha_i-r \in 2\mathbb{Z} \qquad \textit{pour} \quad 2 \leqq i \leqq 6;$$

(2) $$2\sum_{2}^{6}\alpha_i+r-2d \in 4\mathbb{Z};$$

(3) $$|\alpha_2| \leqq \alpha_3 \leqq \ldots \leqq \alpha_6 \leqq r/2;$$

(4) $$-\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6 \leqq d-3r/2.$$

La première condition exprime que $m_i\ (i \geqq 2)$ est entier; la deuxième que m_1 est entier; la troisième que les inégalités $r \geqq m_2+m_3$ et $m_2 \geqq m_3 \geqq \ldots \geqq m_6 \geqq 0$ sont vérifiées; enfin la dernière traduit $m_1 \geqq m_2$.

Pour démontrer la proposition, posons $\eta=F_d(r)-g$. Trois cas sont possibles :

1er cas : $r \in 2\mathbb{Z}$ et $r-2d \in 4\mathbb{Z}$. On remarque alors que $F_d(r)$ est entier, donc η aussi. Il existe par hypothèse $\alpha_i \in \mathbb{Z}\ (2 \leqq i \leqq 6)$ tels que $0 \leqq \alpha_i \leqq r/2$ et $2\eta=\sum_{2}^{6}\alpha_i^2$. Ces nombres vérifient évidemment la condition (1) du lemme, et la condition (2) car $\sum_{2}^{6}\alpha_i$ est pair. La condition (3) fixe l'ordre. Mais $g>F_d(r-1)$ entraîne $2\eta<d-3\ (2r-1)/4$, donc $\sum_{2}^{6}\alpha_i^2 \leqq d-3r/2$ et *a fortiori* la dernière condition, ce qui démontre la proposition dans ce cas, compte tenu du lemme.

2e cas : $r \in 2\mathbb{Z}$ et $r-2d \equiv 2 \bmod . 4$. Ici 2η est un entier impair, et il existe $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, avec $0 \leqq \alpha_i \leqq r/2$, tels que $2\eta=\sum_{2}^{6}\alpha_i^2$. On voit comme précédemment que les nombres α_i vérifient les conditions (1), (3) et (4) du lemme. Mais la condition (2) est remplie car maintenant $\sum_2^6 \alpha_i$ est impair.

3ᵉ cas : r est impair. Alors il existe cinq entiers impairs β_i, avec $|\beta_i| \leqq r$, qu'on ne fixe d'abord qu'au signe près, tels que $8\eta = \sum_2^6 \beta_i^2$. Posons $\alpha_i = \beta_i/2$. La condition (1) est évidemment vérifiée et la condition (3) détermine l'ordre des α_i ainsi que leur signe pour $i \geqq 3$. La condition (2) fixe alors le signe de α_2. Pour montrer (4), rappelons que la partie fractionnaire de η est la même que celle de $F_d(r)$, soit 5/8, et que $\eta < F_d(r) - F_d(r-1) = (d - 3r/2 + 3/4)/2$. Mais $F_d(r-1)$ est entier ou de partie fractionnaire 1/2, donc la partie fractionnaire de cette dernière valeur est 5/8 ou 1/8. On obtient toujours $\eta \leqq (d - 3r/2 - 1/4)/2$ et $\Sigma \beta_i^2 \leqq 4d - 6r - 1$. Mais $(-\beta_2 - 1)^2 + \sum_3^6 (\beta_i - 1)^2 \geqq 4$ sauf pour $-\beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = \beta_6 = 1$. Dans le premier cas on a $2(-\beta_2 + \beta_3 + \ldots + \beta_6) \leqq \Sigma \beta_i^2 + 1$, donc $-\alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_6 \leqq d - 3r/2$, i. e. la condition (4); dans le deuxième cas la condition (4) est aussi vérifiée sauf lorsque $d - 3r/2 < 5/2$, soit $d - 3r/2 \leqq 3/2$ car r est impair; mais on voit facilement que dans ce cas l'intervalle $]F_d(r-1), F_d(r)]$ ne contient pas d'entier. La proposition est démontrée.

L'énoncé que nous venons d'établir justifie l'introduction des notations suivantes :

Pour r pair, $\varphi_0(r) = \max\{n$, tel que tout entier pair de $[0, 2n]$ est somme des carrés de cinq entiers positifs $\leqq r/2\}$;

$\varphi_1(r) = \max\{n + 1/2$, tel que tout entier impair de $[0, 2n+1]$ est somme des carrés de cinq entiers positifs $\leqq r/2\}$.

Pour r impair, $\varphi(r) = \max\{n + 5/8$, tel que tout entier de la forme $8m + 5$, avec $0 \leqq m \leqq n$, est somme des carrés de cinq entiers impairs positifs $\leqq r\}$.

Enfin,

$$\varphi_d(r) = \begin{cases} \varphi_0(r) & \text{si } r - 2d \in 4\mathbb{Z} \qquad \text{i. e. si } F_d(r) \in \mathbb{Z}, \\ \varphi_1(r) & \text{si } r - 2d \equiv 2 \bmod. 4 \qquad \text{i. e. si } F_d(r) - 1/2 \in \mathbb{Z}, \\ \varphi(r) & \text{si } r \text{ est impair} \qquad \text{i. e. si } F_d(r) - 5/8 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

On remarque que $F_d(r) - \varphi_d(r)$ est toujours entier.

COROLLAIRE 2.3. — *Si d et g sont deux entiers positifs tels que $(d-1)^2/8 \leqq g \leqq 1 + d(d-3)/6$, il existe une courbe lisse connexe de degré d et genre g tracée sur une surface cubique lisse.*

On connaît (Gauss) les sommes de trois carrés entiers; on vérifie immédiatement que tout entier positif n est somme de cinq carrés, impairs si $n \equiv 5 \bmod. 8$. Donc $\varphi_d(r) \geqq r^2/8$ et $F_d(r) - \varphi_d(r) \leqq (r-1)d/2 - r^2/2 + 1$. Comme cette dernière valeur est toujours $\leqq (d-1)^2/8$ (sauf pour $d = 1$ et $r = 0$), et comme $F_d(r) \leqq (d-1)^2/8$ pour r suffisamment petit, le corollaire est une conséquence immédiate de la proposition. Combinant 2.3 et 1.1, on a démontré le résultat annoncé dans l'introduction :

THÉORÈME 2.4. — *Pour* $0 \leqq g \leqq 1+d(d-3)/6$, *il existe une courbe lisse connexe de degré* d *et genre* g *dans* $\mathbb{P}^3$.

Montrons maintenant que la proposition 2.1 admet une réciproque qui permet, théoriquement, de déterminer les lacunes sur les surfaces cubiques lisses.

THÉORÈME 2.5. — *Soient* d *et* g *des entiers positifs tels que* $g \leqq 1+d(d-3)/6$. *Soit* r *le plus petit entier positif tel que* $g \leqq F_d(r)$. *Sauf pour les trois cas d'exception signalés plus bas, il existe une courbe lisse connexe de degré* d *et genre* g *tracée sur une surface cubique lisse si et seulement si* $8(F_d(r)-g)$ *est somme des carrés de cinq entiers positifs,* $\leqq r$, *de même parité. Pour les courbes exceptionnelles on a* $(d, g, r)=(9, 1, 2)$; $(23, 22, 4)$; $(27, 28, 4)$.

Nous avons vu (2.1) que la condition est suffisante; prouvons qu'elle est nécessaire. Remarquons que $F_d(1)=5/8$, et que d'après (2.1) il existe des courbes rationnelles de tous degrés sur une surface cubique lisse. Nous ne reviendrons pas sur ce cas évident et supposerons toujours $g \geqq 1$, donc $r \geqq 2$.

Supposons donc que $8(F_d(r)-g)$ ne vérifie pas la condition. Il faut montrer que sauf pour les trois cas d'exception signalés, g ne peut pas être le genre d'une courbe d'invariants (d, r') avec $r' \geqq r$. Pour cela, définissons $M_d(r')$ comme le maximum de la fonction $\sum_2^6 \alpha_i^2$ lorsque α_i $(2 \leqq i \leqq 6)$ vérifient les quatre conditions du lemme 2.2, et $m_d(r')$ comme le maximum de cette fonction lorsque α_i $(2 \leqq i \leqq 6)$ vérifient les conditions (3) et (4) de ce lemme. On a évidemment $m_d(r') \geqq M_d(r')$. Il est clair que $F_d(r')-M_d(r')$ est le minimum des genres des courbes d'invariants (d, r') fixés. Il suffit donc de montrer $g<F_d(r')-m_d(r')$ pour $r'>r$. Prouvons d'abord $g<F_d(r+1)-m_d(r+1)$, sauf dans trois cas qu'on expliquera.

LEMME 2.6. — *On a :* (1) $m_d(t)=5t^2/8$ *pour* $t \leqq d/3$;

(2) $m_d(t)=5(d-3t/2)^2/9$ *pour* $d/3 \leqq t \leqq 4d/9$;

(3) $m_d(t)=t^2/4+(d-t)^2$ *pour* $4d/9 \leqq t \leqq d/2$;

(4) $m_d(t)=(d-3t/2)^2$ *pour* $d/2 \leqq t \leqq 2d/3$.

(1) est évident. Pour (2), (3) et (4), on se ramène à étudier le maximum de la fonction $3x^2+y^2+z^2$ dans le domaine $0 \leqq x \leqq y \leqq z < t/2$ et $x+y+z<d-3t/2$.

LEMME 2.7. — *Si* k *est pair (resp. impair), tout entier* $n \leqq 3k^2$, *divisible par* 4 *(resp. congru à* 5 *mod.* 8) *est somme des carrés de cinq entiers positifs* $\leqq k$, *de même parité.*

Ce lemme est sans doute conséquence de résultats classiques, mais faute de référence nous en donnons une démonstration abrégée dans le premier appendice.

Remarque 2.8. — On améliore immédiatement la borne $3k^2$ de ce lemme en $3k^2+11$, pour k pair non nul, et en $3k^2+17$ pour k impair, $k \geqq 3$.

Compte tenu de cette remarque, il existe λ ($\lambda=12$ pour r pair, et $\lambda=18$ pour r impair) tel que $8(F_d(r)-g) \geqq 3r^2+\lambda$. Mais $g>F_d(r-1)$ implique $8(g-F_d(r-1)) \geqq 3$, car la partie fractionnaire de $F_d(r-1)$ est $\leqq 5/8$. Donc,

$$8(F_d(r)-F_d(r-1)) \geqq 3r^2+\lambda+3,$$

et :

$$8(F_d(r+1)-F_d(r)) \geqq 3r^2+\lambda-3.$$

Finalement $8(F_d(r+1)-g) \geqq 6r^2+2\lambda-3$ et $8(F_d(r+1)-g)>5(r+1)^2$ pour $\lambda \geqq 17$ ou pour $r \notin [2, 9]$; ceci implique, d'après 2.6, $g<F_d(r+1)-m_d(r+1)$ sauf pour $r=2, 4, 6, 8$, Pour $r=6{,}8$ on vérifie directement qu'on peut prendre $\lambda=20$ et la conclusion reste valable dans ce cas. Pour $r=2$, on a $g \leqq F_d(2)-3=(d-3)/2-2$; alors $g \geqq F_d(3)-5\times 9/8$ entraîne $d=9$ et $g=1$, c'est la première exception. Pour $r=4$, on vérifie aussi simplement que les seules exceptions à $g<F_d(5)-m_d(5)$ sont, compte tenu de $g>F_d(3)$, données par $d=23$, $g=22$ et $d=21$, $g=19$. Le couple (23, 22) est la deuxième exception signalée dans le théorème; quant au couple (21, 19), nous verrons plus loin qu'il correspond effectivement à une lacune sur les surfaces cubiques lisses.

On vérifie alors directement, au moyen de 2.6, que si $r'>r$ on a $F_d(r')-m_d(r') \geqq F_d(r+1)-m_d(r+1)$ pour $r+1 \leqq d/6$. De plus, nous venons de voir, comme conséquence de 2.7 et 2.8, que puisque $8(F_d(r)-g)$ ne vérifie pas la condition, on doit avoir $8(F_d(r)-F_d(r-1)) \geqq 3r^2+\delta$ où $\delta=15$ si r est pair, et $\delta=21$ si r est impair. Comme $8(F_d(r)-F_d(r-1))=4d-3(2r-1)$ on en déduit le résultat suivant par un simple calcul :

LEMME 2.9. — *Si g est une lacune pour d, et si r est minimal tel que $F_d(r) \geqq g$, on a :*
$r+1 \leqq (\sqrt{12d-27})/3$ *lorsque r est pair;*
$r+1 \leqq (\sqrt{12d-45})/3$ *lorsque r est impair.*

Comme pour $d \geqq 42$ ces inégalités entraînent $r+1 \leqq d/6$, le théorème est démontré dans ce cas. En particulier, $g<F_d(d/6)-5(d/6)^2/8$ pour $d \geqq 42$, ce qui prouve, toujours pour $d \geqq 42$, le résultat suivant dont la démonstration sera complétée, ainsi que celle du théorème d'ailleurs, par la classification des lacunes pour $d \leqq 41$.

PROPOSITION 2.10. — *Si g est une lacune pour d, on a $g<1+d(d-9)/18$, sauf pour $d=21$, $g=19$; $d=24$, $g=22$; $d=g=25$.*

Décrivons enfin les méthodes utilisées pour donner la liste des lacunes pour $d \leqq 41$. D'après 2.9, il existe pour tout d un nombre $r_0(d)$ tel que si g est une lacune pour d on a $g \leqq F_d(r_0(d))$ [on vérifie que $d \leqq 41$ entraîne $r_0(d) \leqq 6$]. Ce nombre étant calculé, on détermine tous les entiers g tels qu'il existe $r \leqq r_0$ vérifiant $F_d(r-1)<g \leqq F_d(r)$ et $8(F_d(r)-g)$ n'est pas somme des carrés de cinq entiers positifs $\leqq r$, de même parité. Il reste à vérifier pour chaque tel g s'il existe r', avec $r<r' \leqq 2d/3$, tel que $8(F_d(r')-g)$ est somme des carrés... On trouve alors le tableau ci-après de lacunes, et en particulier la 3e exception signalée dans l'énoncé 2.5.

Donnons enfin les lacunes du degré, cher à Halphen, $d=120$:

[1, 56]; [60, 111]; [122, 164], 166; [176, 215], 217; [232, 264], [266, 268], 271; [288, 311], 313, 314, 316, 319; [343, 356], [358, 361], 363, 364, 366, 367; 398, 399, [401, 403], 405, 406; 452, 454, 455, 459, 460, 463.

Ce tableau et cette dernière liste illustrent la distribution irrégulière des plus grandes lacunes pour un degré donné. Ceci n'est pas surprenant puisque déterminer la plus grande lacune est équivalent à décrire la fonction $\varphi_d(r)$. Nous étudierons plus loin le comportement asymptotique de cette fonction.

Terminons ce paragraphe en montrant que les surfaces cubiques singulières n'apportent pas de modification à la classification précédente.

Tableau des lacunes pour $d \leqq 41$.

d	0	Lacunes $F_d(2)$	Lacunes $F_d(3)$	Lacunes $F_d(4)$	Lacunes $F_d(5)$
10		1			
11		1, 2			
12		1, 2			
13		1, 2, 3			
14		1, 2, 3			
15		[1, 4]			
16		[1, 4]			
17		[1, 5]			
18		[1, 5]	9		
19		[1, 6]	10		
20		[1, 6]	10, 11		
21		[1, 7]	11, 12	19	
22		[1, 7]	[11, 13]		
23		[1, 8]	[12, 14]		
24		[1, 8]	[12, 15]	22	
25		[1, 9]	[13, 16]	23, 25	
26		[1, 9]	[13, 17]	25	
27		[1, 10]	[14, 18]	25, 26	
28		[1, 10]	[14, 19]	26, 28	
29		[1, 11]	[15, 20]	[27, 29], 31	
30		[1, 11]	[15, 21]	28, 29, 31	
31		[1, 12]	[16, 22]	[29, 32], 34	
32		[1, 12]	[16, 23]	[30, 32], 34	
33		[1, 13]	[17, 24]	[31, 35], 37	
34		[1, 13]	[17, 25]	[32, 35], 37	
35		[1, 14]	[18, 26]	[33, 38], 40	
36		[1, 14]	[18, 27]	[34, 38], 40	
37		[1, 15]	[19, 28]	[35, 41], 43	51
38		[1, 15]	[19, 29]	[36, 41], 43	53
39		[1, 16]	[20, 30]	[37, 44], 46	55
40		[1, 16]	[20, 31]	[38, 44], 46	57
41		[1, 17]	[21, 32]	[39, 47], 49	59

THÉORÈME 2.11. — *S'il existe une courbe lisse connexe de degré d et genre g sur une surface cubique* S, *il en existe une tracée sur une surface cubique lisse.*

Remarque. — Nous verrons dans le deuxième appendice qu'une courbe (lisse connexe) tracée sur une surface cubique intègre n'est pas toujours cas particulier d'une courbe tracée sur une surface cubique lisse.

Supposons d'abord que S est une surface normale non réglée. On sait alors qu'il existe une surface de Del Pezzo S', éventuellement dégénérée, telle que S est l'image du morphisme de S' dans $\mathbb{P}^3$ défini par le faisceau anticanonique. Identifions la courbe C à sa transformée propre dans S', et soit $\mathscr{L}$ le faisceau inversible sur S' dont C est une section. Les éléments R de Pic S' tels que $(R, R) = -2$ et $(R, \omega_{S'}) = 0$ forment un système de racines de type E_6. Il ressort clairement de (Bourbaki, Alg. de Lie, Chap. 6, § 1, démonstration de prop. 22) qu'il existe un système positif R_+ de racines, compris entre l'ensemble des racines R telles que $(R, \mathscr{L}) \geqq 0$ et l'ensemble R_e des racines effectives. Mais d'après ([1], prop. 4, p. 49), il existe une suite d'éléments exceptionnels deux à deux orthogonaux $\tilde{E} = (E_1, \ldots, E_6)$, telle que $R_+ = R(\tilde{E})$. De plus ([1], th. 3, p. 49), $\tilde{E}$ est une suite contractable : il existe un morphisme birationnel $S' \to \mathbb{P}^2$, contractant les E_i. Si Δ est le $O_{S'}$-module inversible définissant ce morphisme, soient $(\delta, m_1, \ldots, m_6)$ les coordonnées de $\mathscr{L}$ dans la base $(\Delta, -E_1, \ldots, -E_6)$ de Pic S'. Le fait que $\mathscr{L}$ rencontre positivement tous les éléments de $R(\tilde{E})$ se traduit par les inégalités $m_1 \geqq m_2 \geqq \ldots \geqq m_6$ et $\delta \geqq m_1 + m_2 + m_3$. On peut évidemment supposer que C n'est pas une droite de $\mathbb{P}^3$, donc $(\mathscr{L}, -\omega_{S'}) > 1$ et C ne peut pas être une composante irréducible de E_6; ceci entraîne $m_6 \geqq 0$. Par conséquent, on sait que $(\delta, m_1, \ldots, m_6)$ sont les coordonnées, dans une base adéquate, d'un faisceau inversible sur une surface cubique lisse admettant une section lisse connexe dont le degré et le genre sont identiques à ceux de C.

Les autres surfaces cubiques que nous devons considérer sont toutes réglées; nous utiliserons le résultat suivant :

THÉORÈME (C. Segre). — *Soit* S *une surface de degré s de* $\mathbb{P}^3$, *réglée au-dessus d'une courbe* Γ *de genre géométrique* σ *de la grassmannienne. Si* C *est une courbe lisse connexe tracée sur* S, *de degré d et genre g, rencontrant k fois une génératrice générale, et non contenue dans le lieu singulier de* S, *on a* $2g-2 = (k-1)(2d-ks) + k(2\sigma - 2)$.

Soit $\tilde{\Gamma}$ le modèle non singulier de Γ. Si Q est l'image réciproque sur $\tilde{\Gamma}$ du fibré tautologique de la grassmannienne, posons $\tilde{S} = P(Q)$. Soit $\mathscr{L}$ le faisceau inversible sur $\tilde{S}$, ample relativement à $\tilde{\Gamma}$; c'est l'image réciproque de $O_S(1)$ par le morphisme birationnel naturel $\tilde{S} \to S$. Identifions Pic $\tilde{S}$ à (Pic $\tilde{\Gamma}) \oplus \mathbb{Z} . \mathscr{L}$. Si $\tilde{C}$ est la transformée propre de C dans $\tilde{S}$, on a $O_{\tilde{S}}(\tilde{C}) = (N, k\mathscr{L})$, où N est un élément de degré d-ks de Pic $\tilde{\Gamma}$. Comme le diviseur canonique sur $\tilde{S}$ est $(\omega_{\tilde{\Gamma}} + \overset{2}{\Lambda} Q, -2\mathscr{L})$, la formule annoncée se déduit immédiatement du théorème de Riemann-Roch.

Supposons maintenant que S est une surface cubique à droite double, mais n'est pas un cône. C'est une surface réglée de genre géométrique nul, réunion des droites intersections résiduelles de S et d'un plan passant par la droite double. Si C rencontre k fois une telle droite générale, le théorème de Segre donne $g = 1 + (-3k^2 + 2d(k-1) + k)/2$. On peut évidemment supposer que C n'est pas une droite, et on a $0 < k \leqq d/2$, car par un point de la droite double passent deux génératrices. Si $7k < d+3$, posons $r = 2k-1$. On vérifie $r \leqq 2d/3$, et $F_d(r) \geqq g > F_d(r-1)$. De plus, $8(F_d(r) - g) = 8r + 5$. On peut supposer $k > 1$, car la proposition est bien connue si C est rationnelle, donc $r \geqq 3$. Mais dans ce cas $8r + 5 \leqq 3r^2 + 17$ et il existe une courbe lisse connexe de degré d et genre g tracée sur une surface cubique lisse, en vertu de 2.5 et 2.8. Si $(d+3)/7 \leqq k \leqq d/2$, montrons que g est strictement supérieur à la plus grande lacune pour d. Sur l'intervalle considéré, la fonction $1 + (-3k^2 + 2d(k-1) + k)/2$ atteint son minimum en $k = (d+3)/7$ ou $k = d/2$. On vérifie alors directement que les deux valeurs obtenues sont supérieures à $1 + d(d-9)/18$ et on conclut par 2.10 en remarquant que les trois cas d'exception sont aussi exclus sur cette surface cubique.

Lorsque S est un cône cubique, on vérifie facilement les assertions suivantes au moyen du théorème de Segre.

PROPOSITION 2.12. — *Lorsque* S *n'a pas de droite double :*

(*a*) *Si* C *ne passe pas par le sommet du cône,* $g=1+d(d-3)/6$ *et* C *est intersection complète de* S *et d'une surface de degré* $d/3$.

(*b*) *Si* C *passe par le sommet du cône,* $g=1+d(d-3)/6-2/3$ *et* C *est liée par* S *et une surface de degré* $(d+2)/3$ *à la courbe plane formée par* 2 *génératrices du cône.*

Lorsque S *a une droite double :*

(*c*) *Si* C *ne passe pas par le sommet du cône,* $g=1+d(d-5)/6$.

(*d*) *Si* C *passe par le sommet du cône,* $g=1+[d(d-5)-2]/6$.

Il est clair qu'aucun de ces quatre genres n'est une lacune sur les surfaces cubiques lisses.

Remarque 2.13. — La plus grande lacune pour les genres des courbes de degré d tracées sur une surface cubique est d'ordre $d\,(d/5)^{1/2}+\mathrm{O}\,(d^{5/4})$.

Compte tenu de 2.11, cette plus grande lacune est atteinte sur les surfaces cubiques lisses; d'après 2.5, c'est donc $\mathrm{F}_d(r_m)-\varphi_d(r_m)-1$, où r_m est le plus grand entier $r\leqq 2d/3$ tel que $\mathrm{F}_d(r)-\varphi_d(r)-1>\mathrm{F}_d(r-1)$. Il résulte de A.6 qu'il existe une constante K, indépendante de d et r, telle que $5r^2/8-\mathrm{K}\,r^{3/2}<\varphi_d(r)\leqq 5r^2/8$. Donc r_m est compris entre les valeurs de la plus grande racine de l'équation $5r^2/8-\mathrm{A}r^{3/2}=\mathrm{F}_d(r)-\mathrm{F}_d(r-1)$ pour $\mathrm{A}=0$, K. Comme $\mathrm{F}_d(r)-\mathrm{F}_d(r-1)=(d-3r/2+3/4)/2$, on en déduit que

$$r_m=[(4d/5)^{1/4}+\mathrm{O}(1)]^2=(4d/5)^{1/2}+\mathrm{O}(d^{1/4}),$$

et enfin que

$$\mathrm{F}_d(r_m)-\varphi_d(r_m)=(4d/5)^{1/2}.d/2+\mathrm{O}(d^{5/4}).$$

APPENDICE A

ÉTUDE DE LA FONCTION $\varphi_d(r)$

LEMME A.1. — *La forme quadratique* $4(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)^2$ *sur* Z^3 *représente tout entier positif congru à* 3 *mod* 8.

En effet, $4(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)^2=(-x+y+z)^2+(x-y+z)^2+(x+y-z)^2$. Soit n un entier positif, $n\equiv 3$ mod. 8, on sait (Gauss, *cf.* par exemple [8], p. 79) qu'il existe trois entiers, nécessairement impairs, a, b et c tels que $n=a^2+b^2+c^2$. On prend alors $x=(b+c)/2$, $y=(c+a)/2$ et $z=(a+b)/2$.

LEMME A.2. — *La forme quadratique* $5(x^2+y^2+z^2+t^2)-(x+y+z+t)^2$ *sur* Z^4 *représente tout entier pair positif* n *tel que* $n\equiv -1$, 0 *ou* 1 *mod.* 5.

Posons $s=x+y+z+t$, $a=x-t$, $b=y-t$ et $c=z-t$. On a $5(x^2+y^2+z^2+t^2)-(x+y+z+t)^2=5[$

$4(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2]/4+s^2/4$. Si $n\neq 0$ est un entier vérifiant les conditions de l'énoncé, soit s un entier impair tel que $4n-s^2$ soit positif et divisible par 5. Soit m le nombre tel que $5m=4n-s^2$. Comme n est pair, $m\equiv 3$ mod. 8, donc il existe des entiers a, b et c tels que $m=4(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2$. Comme s et $a+b+c$ sont impairs, on peut, en remplaçant éventuellement (a, b, c) par $(-a, -b, -c)$, supposer que $s-(a+b+c)$ est divisible par 4. Donc il existe des entiers x, y, z et t tels que $x+y+z+t=s$, $x-t=a$, $y-t=b$ et $z-t=c$. On a alors $n=5(x^2+y^2+z^2+t^2)-(x+y+z+t)^2$.

LEMME A.3. — *Soient s et k des entiers tels que $0\leqq s\leqq 5k$. Si n est un entier de même parité que s vérifiant $s^2/5\leqq n\leqq k^2+(s-k)^2/4$, il existe cinq entiers x_i $(1\leqq i\leqq 5)$, vérifiant $|x_i|\leqq k$ pour $i=1, \ldots, 5$ et $\sum_1^5 x_i=s$, tels que $n=\sum_1^5 x_i^2$.*

Posons $m=5n-s^2$; c'est un nombre pair congru à -1,0 ou 1 mod. 5. Il existe donc (A.2) des entiers y_i tels que $5(y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2)-(y_1+\ldots+y_4)^2=m$. Comme on a $(y_1+\ldots+y_4)^2\equiv s^2$ mod. 5, on peut, en remplaçant éventuellement $(y_1, \ldots, y_4)$ par $(-y_1, \ldots, -y_4)$, supposer $s-(y_1+\ldots+y_4)\equiv 0$ mod. 5. Posons alors $5x_5=s-(y_1+\ldots+y_4)$ et $x_i-x_5=y_i$. On a $\sum_1^5 x_i=s$, et $\sum_1^5 x_i^2=n$. Montrons $|x_i|\leqq k$, pour tout i. Considérons dans $\mathbb{R}^5$ l'hyperplan H d'équation $\sum_1^5 X_i=s$. Soit P_i la projection du point $\omega=(s/5, \ldots, s/5)$ de H sur l'intersection de H avec l'hyperplan $X_i=k$. Le point P_i a sa i-ième coordonnée égale à k, et les autres à $(s-k)/4$. Comme $(x_1, \ldots, x_5)$ est de norme $\sqrt{n}$, il est dans la sphère centrée à l'origine passant par les points P_i, donc dans la trace de cette sphère sur H, i. e. la sphère de centre ω tangente aux hyperplans $H\cap(X_i=k)$; ceci entraîne $x_i\leqq k$ pour tout i. Par symétrie, on a $2s/5-x_i\leqq k$, donc $|x_i|\leqq k$ pour tout i.

COROLLAIRE A.4. — *Lemme* 2.7.

Remarquons d'abord que lorsque k est impair et $n\equiv 5$ mod. 8 le résultat est une conséquence évidente du théorème de Gauss sur les sommes de trois carrés. En effet, si $n\leqq 3k^2$ il existe évidemment deux entiers impairs k' et k'' tels que $0\leqq n-k'^2-k''^2\leqq k^2$; comme $n-k'^2-k''^2\equiv 3$ mod. 8, on conclut immédiatement. Montrons maintenant que tout nombre $n\leqq 3k^2$ est somme des carrés de cinq entiers positifs $\leqq k$, ce qui clairement démontre le lemme. La preuve qui suit n'est valable que pour $k\geqq 45$ (nous avons dû faire une vérification cas par cas pour $k<45$, que nous ne présenterons pas ici). Soit s le plus grand entier tel que $k^2+(s-k)^2/4\geqq(s+2)^2/5$. Alors, d'après A.3, tout nombre entier $\leqq k^2+(s+1-k)^2/4$ a la propriété demandée, donc aussi tout nombre entier $\leqq k^2+(x+1-k)^2/4$ où $x=5k+8-4\sqrt{5(k+1)}$ est la plus petite racine de l'équation $k^2+(X-k)^2/4=(X+2)^2/5$. On vérifie directement $k^2+(x+1-k)^2/4\geqq 3k^2$ pour $k\geqq 45$.

LEMME A.5. — *Soient s et k deux entiers tels que $0\leqq s\leqq 5k+2$. Si n est un entier pair vérifiant :*

$$(s-2)(s+3)/5\leqq n\leqq k(k+1)+(s-k-2)(s-k+2)/4,$$

il existe cinq entiers impairs x_i, *vérifiant* $|x_i| \leqq 2k+1$ *et* $\sum_1^5 x_i = 2s+1$, *tels que* $\sum_1^5 x_i^2 = 4n+5$.

Posons $m = 5n-(s-2)(s+3)$; c'est un nombre congru à -1, 0 ou 1 mod. 5. Il existe donc (A.2) quatre entiers y_i tels que $5(y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2)-(y_1+\ldots+y_4)^2 = m$. On a $(y_1+\ldots+y_4)^2 \equiv (s-2)^2$ mod. 5. Remplaçant éventuellement $(y_1, \ldots, y_4)$ par $(-y_1, \ldots, -y_4)$, on peut supposer $y_1+\ldots+y_4 \equiv (s-2)$ mod. 5. Posons alors $x_5 = (1+2s-2\sum_1^4 y_i)/5$, et $x_i = x_5 + 2y_i$ pour $i=1, \ldots, 4$, ce sont des entiers impairs vérifiant $\sum_1^5 x_i = 2s+1$ et tels que $\sum_1^5 x_i^2 = 4n+5$. La démonstration de $|x_i| \leqq 2k+1$ est analogue à celle fournie pour A.3.

Corollaire A.6. — $\varphi_d(r) \geqq 5r^2/8 - O(r^{3/2})$.

On doit distinguer 3 cas suivant les parités de r et d. Les principes de démonstration étant toujours les mêmes, traitons par exemple le cas r impair. Posons $r=2k+1$. Soit x la plus petite racine de l'équation $k(k+1)+(x-k-2)(x-k+2)/4 = (x-1)(x+4)/5$. D'après le lemme précédent, pour tout entier positif pair $n \leqq (x-1)(x+4)/5$ le nombre $4n+5$ est somme des carrés de cinq entiers impairs positifs $\leqq r$; donc $\varphi_d(r) > (4(x-1)(x+4)/5+5)/8$. Comme $x = 5k+6-2\sqrt{10(k+1)}$, l'énoncé se vérifie directement.

APPENDICE B

Complément sur les courbes tracées sur une surface cubique

Nous montrons ici que les courbes tracées sur une surface cubique réglée (qui n'est pas un cône) ne sont pas toujours cas particulier de courbes tracées sur une surface cubique lisse. Cette question est naturellement suggérée par l'étude faite au paragraphe 2. Nous exhibons de plus une série de composantes irréductibles non réduites du schéma de Hilbert oubliées par Halphen dans sa classification.

Proposition B.1. — *Les courbes lisses connexes de degré* $d\,(\geqq 10)$ *et genre* g *tracées sur une surface cubique lisse (variable) forment une réunion finie de localement fermés irréductibles de dimension* $d+g+18$, *du schéma de Hilbert.*

Les faisceaux inversibles sur une surface cubique lisse ayant pour section une courbe de degré d et genre g sont en nombre fini. Soit L un tel faisceau; si la courbe est lisse connexe, on a $h^1(\mathrm{L}) = h^1(\mathrm{L}^{-1}(-1)) = 0$, donc $h^0(\mathrm{L}) = \chi(\mathrm{L}) = 1 + (\mathrm{L}, \mathrm{L}-\omega)/2 = g+d$. Les surfaces cubiques lisses formant une famille irréductible de dimension 19, l'énoncé est démontré.

Proposition B.2. — *Les courbes lisses connexes de degré* $d\,(\geqq 10)$ *et genre* g *tracées sur une surface cubique réglée (variable) qui n'est pas un cône, rencontrant* k *fois une génératrice* *générale de cette surface, forment un localement fermé irréductible de dimension* $2d+g+12-k$, *du schéma de Hilbert, lorsque* $0<k\leqq d/2$.

Pour $3\leqq k\leqq (d-3)/2$, *la dimension de l'espace tangent de Zariski au schéma de Hilbert en un point de ce localement fermé est* $2d+g+14-k$.

Remarque. — Le lecteur sourcilleux pourra bien sûr remplacer g par son expression en d et k donnée par le théorème de Segre.

Soient S une surface cubique réglée, $\tilde{S}$ sa normalisée et $\mathscr{L}$ le faisceau inversible image réciproque sur $\tilde{S}$ de $O_S(1)$. Nous savons que $\tilde{S}$ est fibré en droites au-dessus d'une courbe rationnelle $\tilde{\Gamma}$ de la grassmannienne et qu'on peut donc identifier Pic $\tilde{S}$ à Pic $\tilde{\Gamma}\oplus\mathbb{Z}\mathscr{L}\simeq\mathbb{Z}^2$. Il est bien connu que le faisceau inversible de coordonnées $(-1, +1)$, dans cette base, induit un morphisme $\tilde{S}\to\mathbb{P}^2$ qui est l'éclatement d'un point; le diviseur exceptionnel est alors $(-2, +1)$. On en déduit facilement l'assertion suivante :

LEMME B.3. — *Pour* $-1\leqq k\leqq (d+1)/2$, *on a* $h^0(O_{\tilde{S}}(d-3k, k)=(k+1)(2d+2-3k)/2$. *De plus, pour* $0<k\leqq d/2$, *le faisceau* $O_{\tilde{S}}(d-3k, k)$ *a une section lisse connexe.*

Mais si C est une courbe lisse connexe de degré d, tracée sur S, rencontrant k fois une génératrice générale, sa transformée propre dans $\tilde{S}$ est nécessairement une section de $O_{\tilde{S}}(d-3k, k)$, et son genre vérifie $2d+g-k=(k+1)(2d+2-3k)/2$ d'après le théorème de Segre. La première partie de la proposition est alors démontrée, si on remarque que les cubiques gauches de la grassmannienne forment une famille de dimension 13 donc les surfaces du type étudié aussi. Calculons maintenant la dimension de l'espace tangent au schéma de Hilbert. Notons N le fibré normal de C dans $\mathbb{P}^3$. On vérifie facilement que l'application naturelle $O_{\tilde{S}}(d-3k, k)\otimes O_C\to N$ est non nulle et localement scindée. Soit N_1 son conoyau. Comme $O_{\tilde{S}}(d-3k, k)\otimes O_C\simeq\omega_C\otimes\omega_{\tilde{S}}^{-1}$, et comme $\omega_{\tilde{S}}^{-1}$ est très ample sur $\tilde{S}$ on a $h^1(O_{\tilde{S}}(d-3k, k)\otimes O_C)=O$, donc $h^1(N)=h^1(N_1)$. Mais $\overset{2}{\Lambda} N=\omega_C(4)$ entraîne

$$N_1\otimes O_{\tilde{S}}(d-3k, k)\simeq\omega_C(4),$$

donc

$$h^1(N_1)=h^0(O_{\tilde{S}}(d-3k, k-4)\otimes O_C)=h^0$$
$$(O_{\tilde{S}}(d-3k, k-4))=h^0(O_{\tilde{S}}(d-12-3(k-4), k-4)).$$

Comme $3\leqq k\leqq (d-3)/2$ implique $-1\leqq (k-4)\leqq (d-12+1)/2$, on trouve, en utilisant B.3,

$$h^1(N)=(k-3)(2d-10-3k)/2 \quad \text{et} \quad h^0(N)=2d+g+14-k \text{ car } \chi(N)=4d.$$

COROLLAIRE B.4. — *Soit* C *une courbe lisse connexe d'invariants* (d, k) *avec* $0<k\leqq\inf(d-6, d/2)$, *tracée sur une surface cubique réglée qui n'est pas un cône. Si* C *est suffisamment générale dans le localement fermé du schéma de Hilbert décrit en* B.2, *alors* C *n'est pas cas particulier d'une courbe tracée sur une surface cubique lisse.*

Cela résulte immédiatement de la comparaison des dimensions calculées dans les propositions B.1 et B.2.

Terminons cet appendice en donnant des conditions pour que l'adhérence d'un des localement fermés décrits en B.2 soit une composante irréductible non réduite du schéma de Hilbert et en étudiant quelques exemples de bas degré.

PROPOSITION B.5. — *Pour :*

$$(2d+1-\sqrt{d^2-20d+1})/6<k<\min\{(2d+1+\sqrt{d^2-20d+1})/6,\ d-5,\ (d-2)/2)\},$$

les courbes de degré d tracées sur une surface cubique réglée qui n'est pas un cône, rencontrant k fois une génératrice générale, forment un localement fermé dont l'adhérence est une composante irréductible non réduite du schéma de Hilbert.

La condition $(2d+1-\sqrt{d^2-20d+1})/6<k<(2d+1+\sqrt{d^2-20d+1})/6$ entraîne qu'une telle courbe a un genre $g>1+d^2/8$, donc n'est pas spécialisation d'une courbe non contenue dans une cubique ([2]; th. 3.1). On conclut alors au moyen de B.2 et B.4.

Remarque. — L'exemple de plus bas degré illustrant cet énoncé est donné par $d=21$ et $k=7$; on a alors $g=57$. La dimension de la composante irréductible non réduite du schéma de Hilbert exhibée est dans ce cas 104.

Enfin l'exemple de degré minimal d'une composante irréductible non réduite du schéma de Hilbert fournie par B.2 est, à notre connaissance, celui des courbes de degré 13 et genre 18. De telles courbes tracées sur une surface cubique réglée et rencontrant 4 fois une génératrice générale forment un localement fermé irréductible de dimension 52 dans H_{13}^{18}, et l'espace tangent à H_{13}^{18} en un point de ce localement fermé est de dimension 54. On peut alors montrer que les courbes lisses connexes de degré 13 et genre 18, non tracées sur une surface cubique réglée, forment un ouvert d'une composante irréductible réduite de dimension 52 de H_{13}^{18}. Celle-ci contient nécessairement le localement fermé (de dimension 51) de H_{13}^{18} formé par les courbes lisses connexes tracées sur une surface cubique réglée rencontrant 5 fois une génératrice générale, car la dimension de l'espace tangent à H_{13}^{18} en un point de ce localement fermé est 53.

Dans le même ordre d'idée, on vérifie que H_{16}^{30} se compose des cinq composantes irréductibles suivantes :

(1) Une composante irréductible réduite de dimension 64 dont la courbe générale est arithmétiquement normale, admettant une résolution :

$$O\to O_{\mathbb{P}}(-7)\oplus O_{\mathbb{P}}^3(-6)\to O_{\mathbb{P}}^5(-5)\to O_{\mathbb{P}}\to O_C\to O.$$

(2) Deux composantes dont les courbes générales sont tracées sur des surfaces cubiques lisses. L'une correspond aux sections du diviseur de coordonnées (12, 5, 3, ..., 3) dans une base adéquate et est réduite; l'autre aux sections du diviseur (12, 4, 4, 4, 3, 3, 2) et n'est pas réduite. Elles sont bien sûr toutes deux de dimension 64.

(3) Deux composantes non réduites de dimensions respectives 68 et 69, dont les courbes générales sont tracées sur des surfaces cubiques réglées, le nombre de points d'intersection avec une génératrice générale étant 6 pour la première et 5 pour l'autre.

Pour ce faire, on montre d'abord qu'une courbe de H_{16}^{30} non contenue dans une quartique est nécessairement projectivement normale du type décrit en (1); ensuite qu'une courbe tracée sur une quartique irréductible n'est pas générale dans sa composante irréductible; enfin la présence des quatre composantes irréductibles formées de courbes contenues dans une surface cubique se déduit péniblement des considérations précédentes de cet appendice.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. DEMAZURE, *Surfaces de Del Pezzo* (*Séminaire sur les singularités des surfaces, Lecture Notes in math.*, n° 777, Springer).

[2] L. GRUSON et C. PESKINE, *Genre des courbes de l'espace projectif, Algebraic Geometry* (*Lecture Notes in Math.*, n° 687, Springer).

[3] G. HALPHEN, *Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques* (*Oeuvres complètes*, t. III).

[4] R. HARTSHORNE, *Curves with High Self-Intersection on Algebraic Surfaces* (*Publ. Math. I.H.E.S.*, vol. 36, 1969).

[5] R. HARTSHORNE, *On the Classification of Algebraic Space Curves*. In *Vector Bundles and Differential Equations, Nice*, 1979, Birkhauser, Boston, 1980.

[6] R. HARTSHORNE, *Algebraic Geometry, Graduate Texts in Mathematics*, vol. 52, Springer Verlag, New York.

[7] D. MUMFORD, *Pathologies III* (*Amer. J. Math.*, vol. 89, 1967).

[8] J. P. SERRE, *Cours d'arithmétique*, Collection SUP, 1970, P.U.F.

(Manuscrit reçu le 15 mai 1981,
révisé le 19 mars 1982.)

L. GRUSON
Université des Sciences
et des Techniques de Lille
U.E.R. de Mathématiques
59655 Villeneuve d'Ascq Cedex

C. PESKINE
Universitet I Oslo,
Matematisk Institutt
Blindern Oslo 3 Sweden.