

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

J. LE POTIER

Sur le groupe de Picard de l'espace de modules des fibrés stables sur \mathbb{P}_2

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 14, n° 2 (1981), p. 141-155

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1981_4_14_2_141_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LE GROUPE DE PICARD DE L'ESPACE DE MODULES DES FIBRÉS STABLES SUR \mathbb{P}_2

PAR J. LE POTIER

0. Introduction	141
1. Groupes réductifs	142
2. Structure algébrique sur $M = M(0, c_2)$	144
3. Description de $\text{Pic } M$	147
4. Fonctions inversibles et groupe de Picard de P	150
5. Fibré universel et fibré canonique sur M	152

0. Introduction

Soit c_2 un entier ≥ 2 . On désigne par $M = M(0, c_2)$ l'espace de modules des fibrés vectoriels algébriques E stables de rang 2 de classes de Chern $c_1(E) = 0$ et $c_2(E) = c_2$ sur $\mathbb{P}_2(\mathbb{C}) = \mathbb{P}_2$. On sait d'après Maruyama [8] que c'est une variété algébrique lisse de dimension $4c_2 - 3$, et on se propose de décrire le groupe de Picard $\text{Pic } M$ des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels algébriques L de rang un sur M . Le résultat obtenu est le suivant :

THÉORÈME 1. — *On a :*

$$\text{Pic } M = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } c_2 > 2, \\ \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} & \text{si } c_2 = 2. \end{cases}$$

Ce théorème sera démontré au paragraphe 3. On vérifiera en même temps que les seules fonctions régulières inversibles sur M sont les constantes.

Soit E un fibré vectoriel algébrique stable de rang 2 sur \mathbb{P}_2 , de classes de Chern $(0, c_2)$. Les droites de \mathbb{P}_2 sur lesquelles E n'est pas trivial, dites droites de saut de E , sont obtenues par l'annulation d'un polynôme homogène de degré c_2 , défini à homothétie près, sur le plan projectif dual \mathbb{P}_2^\vee . Ceci détermine un morphisme :

$$\sigma : M \rightarrow \mathbb{P}_N(\mathbb{C}),$$

avec $N = (1/2)(c_2 + 1)(c_2 + 2) - 1$. On vérifiera (prop. 11) que si c_2 est impair, le fibré $L_0 = \sigma^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_N}(1)$ est un des deux générateurs de $\text{Pic } M$. Dans le cas où c_2 est pair, le fibré $\sigma^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_N}(1)$ est le carré d'un générateur L_0 de $\text{Pic } M$. On peut en déduire (prop. 12) que le morphisme défini par la classe de Chern en cohomologie singulière :

$$\text{Pic } M \rightarrow H^2(M, \mathbb{Z})$$

est un isomorphisme.

Ce générateur étant parfaitement décrit, nous pouvons déterminer le fibré canonique $\det T^*(M)$:

THÉORÈME 2. — On a :

$$\det T^*(M) = \begin{cases} L_0^{\otimes -12} & \text{si } c_2 \text{ est pair,} \\ L_0^{\otimes -6} & \text{si } c_2 \text{ est impair.} \end{cases}$$

En particulier, ce fibré est trivial pour $c_2 = 2$, et c'est le seul cas où il est trivial. La démonstration de ce théorème nécessite une description précise du fibré tangent à M faisant intervenir les monades universelles déjà utilisées dans [7]. Cette description sera donnée au paragraphe 5. En même temps, nous montrerons (cor. 19) que dans le cas où c_2 est impair, il existe un fibré universel et un seul $\mathbb{U} \rightarrow \mathbb{P}_2 \times M$ vérifiant la condition suivante :

$$\det \mathbb{U} = \text{pr}_2^* L_0,$$

où $\text{pr}_2 : \mathbb{P}_2 \times M \rightarrow M$ est la seconde projection. Dans le cas où c_2 est pair, on sait qu'il n'existe pas de fibré universel [7].

Pour les fibrés stables de rang 2 de classes de Chern $c_1 = -1$ et c_2 , le calcul de $\text{Pic } M(-1, c_2)$ a été obtenu par G. Ellingsrud et S. A. Strømme [5].

1. Groupes réductifs ([4], [9])

Soit G un groupe algébrique sur \mathbb{C} . On dit que G est *réductif* s'il est affine et si son radical est un tore, c'est-à-dire un groupe de la forme \mathbb{C}^m . D'après un théorème classique de H. Weyl, ceci équivaut à dire que toute représentation rationnelle de G dans un espace vectoriel de dimension finie est complètement réductible. Si $\rho : G \rightarrow GL(E)$ est une représentation rationnelle d'un groupe réductif G dans un espace vectoriel E de dimension finie, il existe une rétraction canonique appelée opérateur de Reynolds :

$$R : E \rightarrow E^G$$

de E sur l'espace vectoriel E^G des points invariants par G , et cette rétraction dépend fonctoriellement du couple (E, ρ) .

Soit X une variété algébrique, muni d'une action à gauche d'un groupe réductif G , \mathcal{O}_X son faisceau structural. L'espace quotient X/G des orbites sous l'action de G sera équipé de la topologie quotient de la topologie de Zariski et du faisceau $\mathcal{O}_X^G \subset \mathcal{O}_X$ des sections de \mathcal{O}_X G -invariantes.

PROPOSITION 3. — Si X est une variété affine, et si les orbites sont fermées, alors le quotient $Y = X/G$ est une variété affine, et la projection canonique $X \rightarrow X/G$ est un morphisme affine.

Une démonstration est donnée par exemple dans A. Borel ([4], § 7.10).

PROPOSITION 4. — Soit G un groupe réductif opérant librement sur une variété algébrique X ; on suppose que X/G est une variété algébrique, et que le morphisme $X \rightarrow X/G$ est affine. Si E est un G -fibré vectoriel algébrique sur X , le quotient E/G est un G -fibré vectoriel algébrique sur $Y = X/G$.

Démonstration. — La question est locale sur Y ; par suite, on peut supposer que X est une variété affine. Il résulte de la proposition 3 que le quotient $F = E/G$ est une variété algébrique affine. La projection canonique :

$$F = E/G \rightarrow X/G = Y$$

est alors un morphisme de variétés algébriques dont les fibres sont des espaces vectoriels; il suffit de montrer que ce morphisme a des sections locales.

Soient $a \in Y$, et X_a la fibre de X au-dessus de a ; il existe une trivialisation G -invariante de E au-dessus de X_a :

$$u = (u_1, \dots, u_r) : X_a \times \mathbb{C}^r \xrightarrow{\sim} E|_{X_a}.$$

Puisque X est une variété affine, chacune des sections u_i s'étend en une section v_i de E sur X . L'espace des sections de E sur X , $\Gamma(X, E)$, est un G -module sur lequel on peut encore définir l'opérateur de Reynolds, bien qu'il ne soit pas de dimension finie :

$$R : \Gamma(X, E) \rightarrow \Gamma(X, E)^G$$

et, par fonctorialité, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(X, E) & \xrightarrow{R} & \Gamma(X, E)^G \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma(X_a, E) & \xrightarrow{R} & \Gamma(X_a, E)^G \end{array}$$

où les flèches verticales sont les restrictions canoniques. Il en résulte que $(R(v_1), \dots, R(v_r)) : X \times \mathbb{C}^r \rightarrow E$ est un isomorphisme au-dessus de X_a , et donc au-dessus d'un voisinage ouvert G -invariant de X_a . Ces sections définissent une trivialisation de $F \rightarrow Y$ au voisinage de a , ce qui démontre la proposition.

Soit X une variété algébrique, sur laquelle un groupe réductif G opère librement. Cette action induit une action sur le groupe $\mathcal{O}^*(X)$ des sections inversibles de \mathcal{O}_X au-dessus de X . On désigne par $\text{Mor}(G, \mathcal{O}^*(X))$ le groupe des morphismes croisés $\chi : G \rightarrow \mathcal{O}^*(X)$, c'est-à-dire des applications $g \mapsto \chi_g$ vérifiant les conditions suivantes :

- (1) l'application χ provient d'un morphisme de variétés algébriques :

$$G \times X \rightarrow \mathbb{C}^*;$$

- (2) pour tout g et $g' \in G$, $\chi_{gg'} = g'^*(\chi_g) \chi_{g'}$.

PROPOSITION 5. — Avec les hypothèses de la proposition 4, on a une suite exacte :

$$\mathcal{O}^*(X) \rightarrow \text{Mor}(G, \mathcal{O}^*(X)) \rightarrow \text{Pic}(Y) \rightarrow \text{Pic}(X).$$

Démonstration. — Pour simplifier l'écriture, nous supposons X réduit. A tout morphisme croisé $\chi \in \text{Mor}(G, \mathcal{O}^*(X))$ on associe un G -fibré vectoriel L'_χ de rang un sur X en considérant le fibré trivial $X \times \mathbb{C}$ muni de l'action à gauche $G \times X \times \mathbb{C} \rightarrow X \times \mathbb{C} : (g, x, v) \mapsto (gx, \chi_g(x)v)$. D'après la proposition 4, le quotient $L_\chi = L'_\chi/G$ est un G -fibré vectoriel de rang un sur Y ; on a ainsi obtenu un homomorphisme de groupes :

$$\text{Mor}(G, \mathcal{O}^*(X)) \rightarrow \text{Pic}(Y)$$

qui à χ associe la classe d'isomorphisme de L_χ . Considérons d'autre part le morphisme $\mathcal{O}^*(X) \rightarrow \text{Mor}(G, \mathcal{O}^*(X))$ qui à $f \in \mathcal{O}^*(X)$ associe le morphisme croisé χ défini par :

$$f(gx) = \chi_g(x) f(x)$$

pour $x \in X$ et $g \in G$. Il est évident que ce morphisme et le morphisme image réciproque : $\text{Pic}(Y) \rightarrow \text{Pic}(X)$ rendent exacte la suite de la proposition.

2. Structure algébrique sur $M = M(0, c_2)$

On utilise l'essentiel des notations de [7]. En particulier, on désigne par Q le fibré vectoriel quotient canonique de rang 2 de $\mathcal{O}^3 = \mathbb{P}_2 \times \mathbb{C}^3$ sur \mathbb{P}_2 , et on pose $V = \Gamma(\mathbb{P}_2, Q)$; le dual V^* de V s'identifie à l'espace vectoriel $\Gamma(\mathbb{P}_2, \mathcal{O}(1))$ des sections de $\mathcal{O}(1)$.

Soient H un espace vectoriel de dimension c_2 , S^2H^* l'espace des formes quadratiques sur H , identifié à l'espace des applications linéaires symétriques $H \rightarrow H^*$. A toute application linéaire $\alpha : V^* \rightarrow S^2H^*$ on associe un morphisme de fibrés vectoriels :

$$a : \Lambda^2 Q^* \otimes H \rightarrow Q^* \otimes H^*$$

défini au-dessus du point $x \in \mathbb{P}_2$ par la formule suivante : pour $z', z'' \in Q_x^* \subset V^*$ et $h \in H$, on pose :

$$a(z' \wedge z'' \otimes h) = z'' \otimes \alpha(z')h - z' \otimes \alpha(z'')h.$$

On désigne par P l'espace des applications linéaires $\alpha : V^* \rightarrow S^2H^*$ qui satisfont aux conditions suivantes :

- (1) le morphisme associé a est injectif, c'est-à-dire que pour tout $h \in H$, $h \neq 0$, l'application linéaire $V^* \rightarrow H^* : z \mapsto \alpha(z)h$ est de rang ≥ 2 ;
- (2) il existe une base (z_0, z_1, z_2) de V^* telle que $\alpha(z_0)$ soit non dégénérée et que l'application linéaire antisymétrique $H \rightarrow H^*$:

$$\theta(z_0, z_1, z_2) = \alpha(z_1)\alpha(z_0)^{-1}\alpha(z_2) - \alpha(z_2)\alpha(z_0)^{-1}\alpha(z_1)$$

soit de rang 2.

Dans l'ouvert défini par la condition (1), la condition (2) exprime qu'il existe un épimorphisme $b : Q^* \otimes H^* \rightarrow \mathcal{O} \otimes K$ sur un fibré trivial de fibre K de rang $c_2 - 2$, tel que $b \circ a = 0$. Le fibré $\text{Ker } b$ ne dépend que de α , et le quotient :

$$E(\alpha) = \text{Ker } b / \text{Im } a$$

est alors un fibré stable de rang 2 de classes de Chern $(0, c_2)$. L'espace P est une variété algébrique lisse sur laquelle le groupe $G = \text{GL}(H) / \{\pm 1\}$ opère librement par la formule :

$$(f, \alpha) \mapsto f_* \alpha = {}^t f^{-1} \alpha f^{-1}$$

pour $f \in \text{GL}(H)$ et $\alpha \in P$. L'espace quotient P/G est en bijection avec l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels stables de rang 2 sur \mathbb{P}_2 , de classes de Chern $(0, c_2)$ ([2], [7]). On se propose de montrer que $M = P/G$ est une variété algébrique, et que le morphisme canonique $P \rightarrow P/G$ est affine.

Soit $L(V^*, S^2 H^*)$ l'espace vectoriel des applications linéaires $\alpha : V^* \rightarrow S^2 H^*$; l'opération de G ci-dessus provient de l'action évidente de $\text{GL}(H)$ sur $L(V^*, S^2 H^*)$, notée encore $(f, \alpha) \mapsto f_* \alpha$. Un élément $\alpha \in L(V^*, S^2 H^*)$ est dit *stable* (au sens de Mumford) sous le groupe $\text{SL}(H)$ si le morphisme :

$$\text{SL}(H) \rightarrow L(V^*, S^2 H^*)$$

défini par $f \mapsto f_* \alpha$ est propre. Soient $\alpha : V^* \rightarrow S^2 H^*$ une application linéaire, et L un sous-espace vectoriel de H ; on appelle orthogonal de L relatif à α le sous-espace L^\perp de H défini par les vecteurs $v \in H$ tels que pour tout $z \in V^*$ et tout $u \in L$, $\langle \alpha(z)u, v \rangle = 0$. Un tel sous-espace sera dit totalement isotrope relativement à α si $L \subset L^\perp$. La proposition qui suit, due à C.T.C. Wall, caractérise les éléments $\alpha \in L(V^*, S^2 H^*)$ stables sous le groupe $\text{SL}(H)$, en termes de sous-espaces totalement isotropes.

PROPOSITION 6 [10]. — Soit $\alpha \in L(V^*, S^2 H^*)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (a) α est stable sous $\text{SL}(H)$;
- (b) pour tout sous-espace vectoriel non nul $L \subset H$ totalement isotrope relativement à α , on a :

$$\dim L + \dim L^\perp < \dim H,$$

L^\perp désignant l'orthogonal de L relatif à α .

La démonstration est donnée dans C.T.C. Wall ([10], th. 0.1). On voit en particulier que si α est stable sous le groupe $\text{SL}(H)$, pour tout sous-espace $L \subset H$ totalement isotrope relativement à α on a $\dim L < (1/2) \dim H$. Cependant, cette condition ne suffit pas pour assurer que α soit stable : par exemple, si $\dim H = 3$, et si α est donné par un réseau de coniques de $\mathbb{P}(H)$ tangentes en un point $p \in \mathbb{P}(H)$ à une droite d , il existe une base de H dans laquelle la matrice de $\alpha(z)$ est de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \times \\ 0 & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{pmatrix}.$$

Si on fait opérer le groupe à un paramètre $f_\lambda \in \text{SL}(H)$ donné dans la même base par la matrice :

$$f_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{C}^*$$

on voit que le morphisme $\lambda \mapsto (f_\lambda)_* \alpha$ n'est pas propre, et par suite que α n'est pas stable, bien que vérifiant en général la condition $\dim L < (1/2) \dim H$ pour tout sous-espace totalement isotrope L .

PROPOSITION 7 [3]. — *Tout élément $\alpha \in P$ est stable sous $\text{SL}(H)$.*

Démonstration. — La démonstration que nous donnons ici est une version simplifiée de la démonstration déjà donnée par Barth et Elencwajg [3]. Soit $L \subset H$ un sous-espace vectoriel non nul. Si $\alpha \in P$, il existe une base (z_0, z_1, z_2) de V^* telle que $\alpha(z_0)$ soit non dégénérée. Alors :

$$\dim L^\perp \leq \dim H - \dim L.$$

Supposons que l'on ait l'égalité : il existe alors un sous-espace $K \subset H^*$ tel que pour tout $z \in V^*$ $\alpha(z)(L) \subset K$, et que $\alpha(z_0)$ induise un isomorphisme $L \rightarrow K$. Si l'on pose $A = \alpha(z_0)^{-1} \alpha(z_1)$, $B = \alpha(z_0)^{-1} \alpha(z_2)$, A et B sont des endomorphismes de H , symétriques pour la forme quadratique $\alpha(z_0)$, qui laissent stable L . La condition (2) s'écrit $\text{rang}[A, B] = 2$.

Si $\text{rang}[A, B]|_L \leq 1$, d'après un lemme d'algèbre linéaire dû à Barth et Elencwajg, $A|_L$ et $B|_L$ auraient en commun un vecteur propre $h \in H$; les vecteurs $\alpha(z_0)h$, $\alpha(z_1)h$, $\alpha(z_2)h$ seraient alors liés, ce qui contredit la condition (1).

Si $\text{rang}[A, B]|_L = 2$, alors $\text{Im}[A, B] \subset L$ et donc $L^\perp \subset \text{Ker}[A, B]$. Par suite, si $L^\perp \neq 0$, $A|_{L^\perp}$ et $B|_{L^\perp}$ sont encore un vecteur propre en commun, ce qui contredit à nouveau (1).

Par suite, $\dim L^\perp < \dim H - \dim L$; cette inégalité est vraie *a fortiori* pour les sous-espaces L totalement isotropes relativement à α , et donc α est stable sous $\text{SL}(H)$ d'après la proposition 6.

PROPOSITION 8. — *Le quotient P/G est une variété algébrique, et le morphisme canonique $P \rightarrow P/G$ est affine.*

Démonstration. — Montrons d'abord que P/G est localement une variété algébrique : du fait que le morphisme $P \times G \rightarrow P \times P$ donné par l'action de $G : (\alpha, f) \mapsto (\alpha, f_* \alpha)$ est propre, il en résultera que P/G est une variété algébrique séparée.

D'après la proposition 3, il suffit, puisque G est un groupe réductif, de vérifier que chaque trajectoire dans P a un voisinage ouvert affine W invariant par l'action de G . Soit $z_0 \in V^* - \{0\}$; on désigne par X_0 l'ouvert G -invariant de $X = L(V^*, S^2 H^*)$ défini par les $\alpha \in X$ tels que $\det \alpha(z_0) \neq 0$, et par P_0 l'ouvert de P défini par $P \cap X_0$.

LEMME 9. — *Soit $\alpha \in P_0$. Alors le morphisme $G \rightarrow X_0$ donné par $f \mapsto f_* \alpha$ est propre.*

Démonstration. — Il revient au même de vérifier que la flèche composée :

$$\begin{aligned} \text{SL}(H) \times \mathbb{C}^* &\rightarrow \text{GL}(H) \rightarrow X_0 \rightarrow X \times \mathbb{C}^*, \\ (f, \lambda) &\mapsto \lambda f, & \beta &\mapsto (\beta, \det \beta(z_0)) \end{aligned}$$

est encore propre; elle donnée par le morphisme Φ défini par :

$$(f, \lambda) \mapsto (\lambda^{-2} f_* \alpha, \lambda^{-2c_2} \det \alpha(z_0))$$

et se factorise suivant le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SL}(H) \times \mathbb{C}^* & \xrightarrow{\Psi} & X \times \mathbb{C}^* \\ & \searrow \Phi & \downarrow \\ & & X \times \mathbb{C}^* \end{array} \quad \begin{array}{c} (\beta, \lambda) \\ \downarrow \\ (\lambda^{-2} \beta, \lambda^{-2c_2} \det \alpha(z_0)) \end{array}$$

où Ψ est donné par $(f, \lambda) \mapsto (f_* \alpha, \lambda)$ et donc propre d'après la proposition 7; le morphisme vertical est fini, et par suite Φ est propre. Ceci démontre le lemme.

Fin de la démonstration de la proposition 8. — Soient $\mathcal{O}(X_0)$ l'algèbre des fonctions régulières sur l'ouvert affine X_0 , et $\alpha \in P_0$. Puisque la trajectoire de α est fermée dans X_0 d'après le lemme 9, il existe $u \in \mathcal{O}(X_0)$ tel que $u = 1$ sur la trajectoire de α sous G , et $u = 0$ sur le fermé F de X_0 défini par les applications $\beta : V^* \rightarrow S^2 H^*$ qui ne satisfont pas à la condition (1). Le fermé F étant G -invariant et G un groupe réductif, on peut même, quitte à remplacer u par $R(u)$ (cf. § 1), supposer que la fonction u est G -invariante. L'ouvert $W = \{ \beta \in X_0, u(\beta) \neq 0 \}$ est alors un ouvert affine G -invariant qui ne rencontre pas F ; par suite $P_0 \cap W$ est fermé dans W , et c'est donc encore un ouvert affine G -invariant de P contenant la trajectoire de α . Ceci permet d'expliquer la proposition 3, et termine la démonstration de la proposition 8.

Remarque. — Une légère modification de la démonstration donnée ci-dessus permet de vérifier que $M = P/G$ est quasi projective. C'est un cas particulier du résultat qu'obtient Maruyama [8] sur les surfaces algébriques lisses projectives, par les méthodes de Mumford et Seshadri.

3. Description de $\mathrm{Pic} M$

3.1. Dans le cas $c_2 = 2$, le morphisme obtenu en associant à un fibré stable de rang 2 de classes de Chern (0,2) la courbe de \mathbb{P}_2^\vee de ses droites de saut (cf. introduction) :

$$\sigma : M(0,2) \rightarrow \mathbb{P}_5(\mathbb{C}) = \text{espace des coniques de } \mathbb{P}_2^\vee$$

est un isomorphisme sur l'ouvert complémentaire de l'hypersurface de degré 3 de \mathbb{P}_5 correspondant aux coniques dégénérées [2]; cette hypersurface est irréductible et réduite. Par conséquent :

$$\mathrm{Pic} M(0,2) \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z},$$

avec pour générateur $\sigma^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_5}(1)$.

3.2. Dans le cas $c_2 > 2$, pour obtenir le théorème 1, il suffit de vérifier la proposition suivante, avec les notations du paragraphe 2 :

PROPOSITION 10. — Pour $c_2 > 2$, on a $\mathcal{O}^*(P) = \mathbb{C}^*$ et $\text{Pic } P = 0$.

Cette proposition sera démontrée au paragraphe 4. La proposition 5 montre alors que $\text{Pic } M$ s'identifie au groupe des caractères de G ; ce groupe est isomorphe à \mathbb{Z} ; pour générateur, nous choisirons le caractère :

$$f \mapsto \begin{cases} (\det f)^{-1} & \text{si } c_2 \text{ est pair,} \\ (\det f)^{-2} & \text{si } c_2 \text{ est impair} \end{cases}$$

et nous noterons L_0 le fibré de rang un sur M associé à ce caractère.

PROPOSITION 11. — On a, avec les notations ci-dessus :

$$\sigma_{\mathbb{P}_N}^*(1) \simeq \begin{cases} L_0 & \text{si } c_2 \text{ est impair,} \\ L_0^{\otimes 2} & \text{si } c_2 \text{ est pair.} \end{cases}$$

Démonstration. — Il suffit de rappeler la description du morphisme σ . Chaque point $\alpha \in P$ détermine un morphisme de fibrés vectoriels sur le plan projectif dual \mathbb{P}_2^\vee :

$$H(-1) \rightarrow H^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^\vee}$$

dont le déterminant est une section non nulle du fibré $(\det H)^{\otimes -2} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^\vee}(c_2)$; le lieu des zéros de cette section correspond exactement aux droites de saut du fibré $E(\alpha)$. Ceci donne un élément $s(\alpha) \in (\det H)^{\otimes -2} \otimes S^{c_2} V$ non nul et tel que :

$$s(f_* \alpha) = (\det f)^{-2} s(\alpha)$$

pour $f \in G$. Ceci définit donc un morphisme $P \rightarrow \mathbb{P}(S^{c_2} V)$ G -invariant, et qui par conséquent se factorise suivant le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} P & & \\ \downarrow & \searrow s & \\ M & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{P}(S^{c_2} V) = \mathbb{P}_N \end{array}$$

ce qui définit σ . En fait, s définit une section G -invariante du G -fibré de rang un sur P : $P \times (\det H)^{\otimes -2} \otimes s^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_N}(-1)$, section partout non nulle et qui donne par passage au quotient sur M un isomorphisme :

$$\sigma^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_N}(1) \simeq P \times (\det H)^{\otimes -2} / G.$$

Le fibré qui figure au membre de droite n'est autre que L_0 si c_2 est impair, et $L_0^{\otimes 2}$ si c_2 est pair. D'où la proposition 11.

3.3. On désigne par $H^q(M, \mathbb{Z})$ le q -ième groupe de cohomologie singulière de la variété M munie de la topologie usuelle.

PROPOSITION 12. — *Le morphisme canonique :*

$$\text{Pic } M \rightarrow H^2(M, \mathbb{Z})$$

donné par la classe de Chern est un isomorphisme.

Démonstration. — Dans le cas $c_2 = 2$, le complémentaire de M dans \mathbb{P}_5 est une hypersurface irréductible de \mathbb{P}_5 , par conséquent :

$$H^q(\mathbb{P}_5, M; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } q=2, \\ 0 & \text{si } q=3 \end{cases}$$

et l'image d'un générateur de $H^2(\mathbb{P}_5; M; \mathbb{Z})$ dans $H^2(\mathbb{P}_5, \mathbb{Z})$ est au signe près la classe fondamentale de l'hypersurface $\mathbb{P}_5 - M$, c'est-à-dire $c_1(\mathcal{O}(3))$. La suite exacte :

$$H^2(\mathbb{P}_5; M; \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(\mathbb{P}_5; \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(M, \mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

montre que $H^2(M, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, avec pour générateur $\sigma^* c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_5}(1)) = -c_1(L_0)$.

Supposons maintenant $c_2 > 2$. On considère le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{s} & S \\ \pi \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{P}(S^{c_2} V) = \mathbb{P}_N \end{array}$$

où S est l'espace total, privé de la section nulle, du fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_N}(-1)$ sur \mathbb{P}_N . Sur chaque fibre de π , le morphisme s est donné par l'application $G \rightarrow \mathbb{C}^*$ définie par $f \mapsto (\det f)^{-2}$. On sait que P est 2-connexe et que M est simplement connexe ([7], prop. 5 et 6). La suite spectrale de Cartan-Serre donne alors, en cohomologie singulière l'isomorphisme $H^1(G, \mathbb{Z}) \simeq H^2(M, \mathbb{Z})$. De même, la variété S est isomorphe à $\mathbb{C}^{N+1} - \{0\}$, et par suite $2N$ -connexe, et $N \geq 9$. Par conséquent, on a aussi l'isomorphisme $H^1(\mathbb{C}^*, \mathbb{Z}) \simeq H^2(\mathbb{P}_N, \mathbb{Z})$, et la fonctorialité de la suite spectrale de Cartan-Serre donne le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^1(\mathbb{C}^*, \mathbb{Z}) & \rightarrow & H^1(G, \mathbb{Z}) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ H^2(\mathbb{P}_N, \mathbb{Z}) & \rightarrow & H^2(M, \mathbb{Z}) \end{array}$$

dans lequel la première flèche horizontale est induite par l'application $f \mapsto (\det f)^{-2}$. Pour c_2 pair, le morphisme $\det : G \rightarrow \mathbb{C}^*$ induit un épimorphisme au niveau du π_1 , de noyau $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ([7], prop. 57), et par conséquent un isomorphisme $H^1(G, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ en cohomologie. Le diagramme commutatif ci-dessus montre que $H^2(M, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ et que $\sigma^* c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_N}(1)) = 2u$, où u est un générateur de $H^2(M, \mathbb{Z})$. Il résulte de la proposition 11 que $c_1(L_0)$ est un générateur de $H^2(M, \mathbb{Z})$.

Pour c_2 impair, le morphisme $f \mapsto (\det f)^2 : G \rightarrow \mathbb{C}^*$ induit un isomorphisme au niveau du π_1 , et donc le morphisme $H^1(\mathbb{C}^*, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(G, \mathbb{Z})$ ci-dessus est un isomorphisme. Il en résulte l'isomorphisme $\sigma^* : H^2(\mathbb{P}_N, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(M, \mathbb{Z})$; par suite, $H^2(M, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, avec pour générateur $\sigma^* c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_N}(1)) = c_1(L_0)$. Ceci démontre la proposition 12.

4. Fonctions inversibles et groupe de Picard de P.

On se propose dans ce paragraphe de démontrer la proposition 10. On posera $n = c_2$ et on garde les notations du paragraphe 2.

4.1. Soit $\Lambda \subset \Lambda^2 H^*$ l'espace des formes symplectiques de rang 2 sur H . C'est une variété algébrique lisse de dimension $2n - 3$, localement fermé dans l'espace vectoriel $\Lambda^2 H^*$.

PROPOSITION 13. — On a pour $n > 2$, $\mathcal{O}^*(\Lambda) = \mathbb{C}^*$ et $\text{Pic } \Lambda = 0$.

Démonstration. — Soit (e_1, e_2) la base canonique de \mathbb{C}^2 . Le morphisme $f \mapsto f(e_1) \wedge f(e_2) : L(\mathbb{C}^2, H^*)^0 \rightarrow \Lambda$ de l'ouvert $L(\mathbb{C}^2, H^*)^0$ des applications linéaires injectives $\mathbb{C}^2 \rightarrow H^*$ à valeurs dans Λ est surjectif et a pour fibres les trajectoires sous l'action du groupe $\text{SL}(2, \mathbb{C})$. De plus, ce morphisme a des sections locales, et l'action de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ sur $L(\mathbb{C}^2, H^*)^0$ est libre : ainsi, la flèche ci-dessus est un fibré principal algébrique localement trivial de groupe structural $\text{SL}(2, \mathbb{C})$.

Or, le complémentaire de $L(\mathbb{C}^2, H^*)^0$ dans $L(\mathbb{C}^2, H^*)$ est de codimension $n - 1 > 2$. Par conséquent :

$$\mathcal{O}^*(L(\mathbb{C}^2, H^*)^0) = \mathbb{C}^*,$$

$$\text{Pic } L(\mathbb{C}^2, H^*)^0 = 0.$$

La proposition 13 résulte de cette remarque et de la proposition 5, compte tenu du fait que le groupe des caractères de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ est trivial.

4.2. Soit (z_0, z_1, z_2) une base de V^* . On désigne par \tilde{P}_0 le sous-espace de $L(V^*, S^2 H^*)$ des applications linéaires $\alpha : V^* \rightarrow S^2 H^*$ qui satisfont aux conditions suivantes :

(3) $\det \alpha(z_0) \neq 0$;

(4) le polynôme minimal de $A = \alpha(z_0)^{-1} \alpha(z_1)$ est de degré n ;

(5) $\text{rang } \theta(z_0, z_1, z_2) = 2$.

L'espace \tilde{P}_0 est un sous-espace localement fermé de $L(V^*, S^2 H^*)$; en fait, comme on le verra au cours de la démonstration de la proposition qui suit, c'est une sous-variété lisse.

PROPOSITION 14. — (a) le groupe $\mathcal{O}^*(\tilde{P}_0)/\mathbb{C}^*$ est un groupe cyclique engendré par la fonction $\alpha \mapsto \det \alpha(z_0)$:

(b) on a $\text{Pic } \tilde{P}_0 = 0$.

Démonstration. — Soit W l'ouvert de $S^2 H^* \times S^2 H^*$ des couples (α_0, α_1) tels que α_0 soit non dégénérée, et que le polynôme minimal de $\alpha_0^{-1} \alpha_1$ soit de degré n . Si $(S^2 H^*)^0$ est l'ouvert de $S^2 H^*$ des formes quadratiques non dégénérées, il résulte de [7], prop. 37, que le complémentaire de W dans $(S^2 H^*)^0 \times S^2 H^*$ est de codimension 2. Puisque le polynôme $\alpha_0 \mapsto \det \alpha_0$ sur $S^2 H^*$ est irréductible, il en résulte que le groupe $\mathcal{O}^*(W)/\mathbb{C}^*$ est un groupe cyclique, engendré par la fonction $(\alpha_0, \alpha_1) \mapsto \det \alpha_0$.

Au-dessus de W , l'ouvert $\mathcal{W} \subset L(V^*, S^2 H^*)$ des α qui satisfont aux conditions (3) et (4) est un fibré vectoriel, et le morphisme $\mathcal{W} \rightarrow W \times \Lambda^2 H^*$:

$$\alpha \mapsto (\alpha(z_0), \alpha(z_1), \theta(z_0, z_1, z_2))$$

est un épimorphisme de fibrés vectoriels au-dessus de W . Il en résulte que l'image réciproque \tilde{P}_0 de $W \times \Lambda$ par ce morphisme est un fibré localement trivial en espaces affines au-dessus de $W \times \Lambda$. On a donc $\mathcal{O}^*(\tilde{P}_0) \simeq \mathcal{O}^*(W \times \Lambda)$. D'après la proposition 13, ce dernier groupe s'identifie encore à $\mathcal{O}^*(W)$, ce qui démontre (a).

Soit $p : \tilde{P}_0 \rightarrow W \times \Lambda$ la projection induite par le morphisme ci-dessus. Puisque ce fibré est localement isomorphe à un fibré vectoriel, on voit que :

$$\begin{aligned} R^1 p_* (\mathcal{O}_{\tilde{P}_0}^*) &= 0, \\ \mathcal{O}_{W \times \Lambda}^* &\simeq p_* (\mathcal{O}_{\tilde{P}_0}^*). \end{aligned}$$

De la suite spectrale de Leray pour les images directes on tire la suite exacte :

$$0 \rightarrow H^1(W \times \Lambda, p_* (\mathcal{O}_{\tilde{P}_0}^*)) \rightarrow H^1(\tilde{P}_0, \mathcal{O}_{\tilde{P}_0}^*) \rightarrow H^0(W \times \Lambda, R^1 p_* (\mathcal{O}_{\tilde{P}_0}^*))$$

et par conséquent l'isomorphisme $\text{Pic}(W \times \Lambda) \simeq \text{Pic } \tilde{P}_0$. L'espace $W \times \Lambda$ est un ouvert d'un fibré vectoriel au-dessus de Λ , par conséquent le morphisme induit par la seconde projection $W \times \Lambda \rightarrow \Lambda$:

$$\text{Pic } \Lambda \rightarrow \text{Pic}(W \times \Lambda) \simeq \text{Pic } \tilde{P}_0$$

est surjectif. L'assertion (b) résulte donc de la proposition 13.

4.3. Démontrons maintenant la proposition 10. On rappelle que P_0 désigne l'ouvert de P des α tels que $\det \alpha(z_0) \neq 0$. Il résulte de [7], lemmes 45 et 46, que $P_0 \cap \tilde{P}_0$ est un ouvert de Zariski de P_0 (resp. \tilde{P}_0) dont le complémentaire est de dimension 2. On obtient donc les isomorphismes :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^*(P_0) &\simeq \mathcal{O}^*(P_0 \cap \tilde{P}_0) \simeq \mathcal{O}^*(\tilde{P}_0), \\ \text{Pic } P_0 &\simeq \text{Pic}(P_0 \cap \tilde{P}_0) \simeq \text{Pic } \tilde{P}_0. \end{aligned}$$

D'après la proposition 14, le groupe $\mathcal{O}^*(P_0)/\mathbb{C}^*$ est donc cyclique et engendré par la fonction $\alpha \mapsto \det \alpha(z_0)$, et $\text{Pic } P_0 = 0$. D'après Hartshorne [6], chap. 2, prop. 6.5, il ne reste plus pour obtenir la proposition 10 qu'à vérifier le lemme suivant :

LEMME 15. — *La fonction $\alpha \mapsto \det \alpha(z_0)$ s'annule en au moins un point $\alpha \in P$; l'hypersurface Σ_0 de P définie par l'équation $\det \alpha(z_0) = 0$ est intègre.*

Démonstration. — Le groupe $\text{GL}(V)$ opère sur P par la formule $(\varphi, \alpha) \mapsto \alpha \circ {}^t\varphi$ pour $\varphi \in \text{GL}(V)$, $\alpha \in P$. Si $\varphi \in \text{GL}(V)$ et $z \in V^*$, on a la formule :

$$\det(\alpha \circ {}^t\varphi)(z) = \det(\alpha({}^t\varphi(z)))$$

ce qui montre que si la fonction $\alpha \mapsto \det \alpha(z)$ s'annule sur P , il en est de même de la fonction $\alpha \mapsto \det(\alpha({}^t\varphi(z)))$. Puisque $\text{GL}(V)$ opère transitivement sur $V^* - \{0\}$, ceci démontre la première partie du lemme.

Soit $z_1 \in V^* - \{0\}$. D'après [7], § 5.6, l'hypersurface Σ_0 définie par l'équation $\det \alpha(z_0) = 0$ est intègre dans l'ouvert P_1 de P défini par $\det \alpha(z_1) \neq 0$. Ces ouverts recouvrent P , par

conséquent l'hypersurface Σ_0 est réduite. De plus, si z_0 et z_1 sont indépendants, le sous-espace de P défini par les équations :

$$\det \alpha(z_0) = 0, \quad \det \alpha(z_1) = 0$$

est de codimension 2 ([7], cor. 53). Par conséquent, l'hypersurface Σ_0 est irréductible, ce qui démontre le lemme 15.

5. Fibré universel et fibré canonique sur M

5.1. Soient K un espace vectoriel de dimension $c_2 - 2$, et $\beta : V^* \rightarrow L(H^*, K)$ une application linéaire. A cette application linéaire on associe un morphisme de fibrés vectoriels :

$$b : Q^* \otimes H^* \rightarrow \mathcal{O} \otimes K$$

en posant $b(z \otimes h) = \beta(z)h$ pour $z \in Q^*$, $h \in H^*$. On désigne par P' le sous-espace de $L(V^*, S^2 H^*) \times L(V^*, L(H^*, K))$ des couples (α, β) tels que la suite de morphismes de fibrés vectoriels associés :

$$\Lambda^2 Q^* \otimes H \xrightarrow{a} Q^* \otimes H^* \xrightarrow{b} \mathcal{O} \otimes K$$

soit une monade $D^*(\alpha, \beta)$, c'est-à-dire satisfasse aux conditions suivantes :

(6) a est injectif, b est surjectif;

(7) $b \circ a = 0$.

L'espace P' est une sous-variété localement fermée sur laquelle le groupe réductif $G' = (GL(H) \times GL(K)) / \{\pm 1\}$ opère librement par la formule :

$$((f, g), (\alpha, \beta)) \mapsto ({}^t f^{-1} \alpha f, g \beta {}^t f)$$

pour $f \in GL(H)$, $g \in GL(K)$, $(\alpha, \beta) \in P'$. La projection $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha : P' \rightarrow P$ induit un isomorphisme :

$$P'/G' \simeq M = P/G.$$

On considère sur $\mathbb{P}_2 \times P'$ la monade universelle \mathbb{D}^* :

$$\Lambda^2 Q^* \boxtimes H \rightarrow Q^* \boxtimes H^* \rightarrow \mathcal{O} \boxtimes K$$

où H (resp. K) désigne le fibré trivial de fibre H (resp. K) sur P' , et où \boxtimes désigne le produit tensoriel externe : cette monade induit au-dessus du point $(\alpha, \beta) \in P'$ la monade $D^*(\alpha, \beta)$. Le groupe $GL(H) \times GL(K)$ opère sur \mathbb{D}^* , et donc sur le fibré de cohomologie $\mathbb{E} = H(\mathbb{D}^*)$. Le fibré $\det \mathbb{E}$ est en particulier un G' -fibré, isomorphe à :

$$\mathbb{P}_2 \times P' \times (\det H)^{\otimes -3} \otimes \det K^*.$$

PROPOSITION 16. — Sur $\mathbb{P}_2 \times M$, le fibré $\det \mathbb{E}/G'$ est trivial.

Démonstration. — Soit U l'ouvert de $\mathbb{P}_2^\vee \times P'$ défini par les couples $(z, (\alpha, \beta)) \in V^* \times P'$ tels que $\det \alpha(z) \neq 0$. Il résulte du théorème de Grauert-Mulich [1] que le morphisme $U \rightarrow P'$ induit par la seconde projection est surjectif. Soit $Q_{\mathbb{P}_2^\vee}$ le fibré quotient canonique de rang 2 de $\mathbb{P}_2^\vee \times V^*$ sur \mathbb{P}_2^\vee . On a un morphisme au-dessus de l'ouvert U :

$$\theta : \Lambda^2 Q_{\mathbb{P}_2^\vee} \boxtimes \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^\vee}(-1) \boxtimes \mathbb{H}^*$$

défini au-dessus du point $((z), (\alpha, \beta)) \in \mathbb{P}_2^\vee \times P'$ par :

$$z_1 \wedge z_2 \otimes h \mapsto z \otimes \theta(z, z_1, z_2) h$$

pour z_1 et $z_2 \in V^*/(z)$ et $h \in H$ (cf. § 2). Choisissons un élément non nul de $\Lambda^3 V^*$, auquel on associe un isomorphisme $\Lambda^2 Q_{\mathbb{P}_2^\vee} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^\vee}(1)$. Le morphisme θ peut alors être considéré comme un morphisme symplectique : $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^\vee}(1) \boxtimes \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^\vee}(-1) \boxtimes \mathbb{H}^*$ au-dessus de U . Soit, au-dessus de $\mathbb{P}_2^\vee \times P'$, B le morphisme :

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^\vee}(-1) \boxtimes \mathbb{H}^* \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^\vee} \boxtimes \mathbb{K}$$

défini par $z \otimes h \mapsto \beta(z) h$.

LEMME 17. — Sur l'ouvert U , on a la suite exacte de $GL(H) \times GL(K)$ -fibrés vectoriels :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^\vee} \boxtimes \mathbb{K}^* \xrightarrow{t_B} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^\vee}(1) \boxtimes \mathbb{H} \xrightarrow{\theta} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^\vee}(-1) \boxtimes \mathbb{H}^* \xrightarrow{B} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^\vee} \boxtimes \mathbb{K} \rightarrow 0.$$

Démonstration. — Pour tout couple $(z, (\alpha, \beta)) \in V^* \times P'$ tel que $\det \alpha(z) \neq 0$, on a les propriétés suivantes ([7], § 3.3) :

- $\beta(z)$ est surjectif, ce qui donne la surjectivité de B ;
- le noyau de $\beta(z)$ est l'image de $\theta(z, z_1, z_2)$ pour toute base (z, z_1, z_2) de V^* . Ceci donne l'exactitude au niveau $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^\vee}(-1) \boxtimes \mathbb{H}^*$. Le reste s'obtient en transposant, compte tenu du fait que θ est symplectique.

LEMME 18. — Le morphisme B est surjectif en dehors d'un sous-ensemble algébrique Z de codimension ≥ 2 de $\mathbb{P}_2^\vee \times P'$.

Démonstration. — On sait qu'il existe des fibrés stables de rang 2 de classes de Chern $(0, c_2)$ tels que sur toute droite $l \subset \mathbb{P}_2$ on ait :

$$E|l \simeq \begin{cases} \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}, \\ \text{ou :} \\ \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(-1). \end{cases}$$

C'est par exemple le cas pour les fibrés de Hulsbergen, obtenus comme extension $0 \rightarrow \mathcal{O}(-1) \rightarrow E \rightarrow \mathcal{I}(1) \rightarrow 0$, où \mathcal{I} est l'idéal de $c_2 + 1$ points de \mathbb{P}_2 en position générale ([2], § 5). Pour un tel fibré, $\beta(z)$ est surjectif pour tout $z \in V^* - \{0\}$.

Soit Z le fermé de $\mathbb{P}_2^\vee \times P'$ défini par les couples $(z, (\alpha, \beta))$ tels que $\beta(z)$ ne soit pas surjectif. La projection canonique $Z \rightarrow P'$ a pour image un sous-ensemble algébrique de codimension ≥ 1 , et les fibres sont de dimension ≤ 1 . Par conséquent $\dim Z \leq \dim P'$, d'où le lemme 18.

Fin de la démonstration de la proposition 16. — On considère sur $\mathbb{P}_2^\vee \times P'$ le morphisme ξ défini au-dessus $((z), (\alpha, \beta))$ par $\theta \det \alpha(z)$:

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^\vee}(-c_2+1) \boxtimes \mathbb{H} \otimes \det \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^\vee}(-1) \boxtimes \mathbb{H}^* \otimes \det \mathbb{H}^*.$$

Il est clair ce morphisme est bien défini sur $\mathbb{P}_2^\vee \times P'$; sur l'ouvert $\mathbb{P}_2^\vee \times P' - Z$, il induit un morphisme G' -invariant :

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^\vee}(-c_2) \boxtimes (\det \mathbb{H})^{\otimes 3} \otimes \det \mathbb{K} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^\vee}(-c_2) \boxtimes (\det \mathbb{H})^{\otimes -3} \otimes (\det \mathbb{K})^{\otimes -1}$$

qui d'après le lemme 18 provient d'un morphisme G' -invariant sur $\mathbb{P}_2^\vee \times P'$; d'après le lemme 17, c'est un isomorphisme sur U . Ce morphisme est en fait donné par une section G' -invariante du fibré $(\det \mathbb{H})^{\otimes -6} \otimes (\det \mathbb{K})^{\otimes -2}$ sur P' ; cette section est partout non nulle puisque l'application $U \rightarrow P'$ est surjective. Par conséquent le fibré $(\det \mathbb{E})^{\otimes 2}/G'$ est trivial. Ceci donne la proposition 16, puisque $\text{Pic } M$ n'a pas de 2-torsion.

COROLLAIRE 19. — Si c_2 est impair, il existe un et un seul fibré universel algébrique \mathbb{U} sur $\mathbb{P}_2 \times M$ tel que :

$$\det \mathbb{U} = \text{pr}_2^*(L_0).$$

Dans cet énoncé, L_0 désigne le générateur de $\text{Pic } M$ décrit dans l'introduction, ou au paragraphe 3.

Démonstration. — L'unicité est évidente, car si \mathbb{U}' est un autre fibré universel, on peut écrire $\mathbb{U}' = \mathbb{U} \otimes \text{pr}_2^* L$, avec L fibré de rang un sur M . Si \mathbb{U} et \mathbb{U}' satisfont à la condition du lemme, $L^{\otimes 2}$ sera trivial, et par suite, puisque $\text{Pic } M$ est sans torsion, L sera aussi trivial.

Pour voir l'existence, il suffit de considérer le G' -fibré vectoriel sur $\mathbb{P}_2 \times P'$ défini par $\mathbb{E} \otimes \text{pr}_2^*(\det \mathbb{H})^{-1}$; le fibré sur $\mathbb{P}_2 \times M$:

$$\mathbb{U} = \mathbb{E} \otimes \text{pr}_2^*(\det \mathbb{H})^{-1}/G'$$

est un fibré vectoriel qui convient, puisque $\det \mathbb{U} = \text{pr}_2^*(\det \mathbb{H})^{\otimes -2}/G'$ et donc $\det \mathbb{U} = \text{pr}_2^*(L_0)$ par définition de L_0 .

5.2. Démonstration du théorème 2. — Si $\text{pr}_2 : \mathbb{P}_2 \times P' \rightarrow P'$ est la seconde projection, la projection canonique $P' \rightarrow M$ induit un isomorphisme :

$$R^1 \text{pr}_{2*}(\underline{\text{Hom}}(\mathbb{E}, \mathbb{E}))/G' \simeq T(M),$$

où $\underline{\text{Hom}}(\mathbb{E}, \mathbb{E})$ désigne le fibré des endomorphismes de \mathbb{E} ([7], prop. 32); pour obtenir le théorème 2, il suffit de décrire le G' -fibré vectoriel sur P' $\det R^1 \text{pr}_{2*}(\underline{\text{Hom}}(\mathbb{E}, \mathbb{E}))$. Soit

$\underline{\text{Hom}}^*(\mathbb{D}^*, \mathbb{D}^*)$ le complexe de G' -fibrés vectoriels d'homomorphismes de \mathbb{D}^* dans \mathbb{D}^* , défini par :

$$\underline{\text{Hom}}^q(\mathbb{D}^*, \mathbb{D}^*) = \bigoplus_i \underline{\text{Hom}}(\mathbb{D}^i, \mathbb{D}^{i+q})$$

et muni des différentielles évidentes. Comme dans [7], lemme 23, on a un isomorphisme canonique de G' -fibrés vectoriels :

$$H^q(\text{pr}_{2*} \underline{\text{Hom}}^*(\mathbb{D}^*, \mathbb{D}^*)) \simeq R^q \text{pr}_{2*}(\underline{\text{Hom}}(\mathbb{E}, \mathbb{E})).$$

En particulier, on obtient pour $q=0$ le fibré trivial de rang un, et pour $q \neq 0$ et 1, les deux membres sont nuls. Il en résulte :

$$(\det R^1 \text{pr}_{2*}(\underline{\text{Hom}}(\mathbb{E}, \mathbb{E})))^{-1} = \bigotimes_q (\det \text{pr}_{2*} \underline{\text{Hom}}^q(\mathbb{D}^*, \mathbb{D}^*))^{(-1)^q}.$$

Or, $\text{pr}_{2*} \underline{\text{Hom}}^q(\mathbb{D}^*, \mathbb{D}^*) = 0$, sauf pour $q=0, 1, 2$, où l'on a les isomorphismes de G' -fibrés vectoriels :

$$\text{pr}_* \underline{\text{Hom}}^0(\mathbb{D}^*, \mathbb{D}^*) \simeq \underline{\text{Hom}}(\mathbb{H}, \mathbb{H}) \oplus \underline{\text{Hom}}(\mathbb{H}^*, \mathbb{H}^*) \oplus \underline{\text{Hom}}(\mathbb{K}, \mathbb{K}),$$

$$\text{pr}_* \underline{\text{Hom}}^1(\mathbb{D}^*, \mathbb{D}^*) \simeq \underline{\text{Hom}}(\mathbb{H}, \mathbb{H}^* \otimes \mathbb{V}) \oplus \underline{\text{Hom}}(\mathbb{H}^*, \mathbb{K} \otimes \mathbb{V}),$$

$$\text{pr}_* \underline{\text{Hom}}^2(\mathbb{D}^*, \mathbb{D}^*) \simeq \underline{\text{Hom}}(\mathbb{H}, \mathbb{K} \otimes \Lambda^2 \mathbb{V}).$$

Par suite $(\det R^1 \text{pr}_{2*} \underline{\text{Hom}}(\mathbb{E}, \mathbb{E}))^{-1} \simeq (\det \mathbb{H})^{\otimes 12}$; ceci donne le théorème, compte tenu de la description du générateur L_0 donnée au paragraphe 3.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] W. BARTH, *Some Properties of Rank-2 Vector Bundles on \mathbb{P}_n* (*Math. Ann.*, vol. 226, 1977, p. 125-150).
- [2] W. BARTH, *Moduli of Vector Bundles on the Projective Plane* (*Invent. math.*, vol. 42, 1977, p. 63-91).
- [3] W. BARTH, et ELENCAWAG, *Concernant la cohomologie des fibrés algébriques stables sur $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$, Variétés analytiques complexes*, Nice, 1977, (*Lecture Notes in Math*, n° 683, 1978, p. 1-24, Springer, Berlin).
- [4] A. BOREL, *Introduction aux groupes arithmétiques*, Hermann, Paris, 1969.
- [5] G. ELLINGSRUD et S. A. STRØMME, *The Picard Group of the Moduli Space for Stable Rank-2 Vector Bundles on \mathbb{P}_2 with odd First Chern Class*, Preprint Series, Oslo, 1979.
- [6] R. HARTSHORNE, *Algebraic Geometry*, Springer, Berlin, 1977.
- [7] J. LE POTIER, *Fibrés stables de rang 2 sur $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$* (*Math. Ann.*, vol. 241, 1979, p. 217-256).
- [8] M. MARUYAMA, *Stables Vector Bundles on an Algebraic Surface* (*Nagoya math. J.*, vol. 58, 1975, p. 25-68).
- [9] C. S. SESHADRI, *Mumford's Conjecture for $GL(2)$ and Applications* (*Algebraic Geometry*, Bombay, Colloquium, 1968-1969, p. 347-371).
- [10] C. T. C. WALL, *Nets of Quadrics, and Theta-Characteristics of Singular Curves*, (*Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, vol. 81, 1977, p. 351-364).

J. LE POTIER,
Université Paris-VII,
U.E.R. de Mathématiques,
tour 45-55,
2, place Jussieu,
75251 Paris Cedex 05.

(Manuscrit reçu le 26 février 1980,
révisé le 3 décembre 1980.)