

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JEAN-LUC BRYLINSKI

**Propriétés de ramification à l'infini du groupe modulaire de Teichmüller.
With an appendix in English by Ken Baclawski**

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 12, n° 3 (1979), p. 295-333

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1979_4_12_3_295_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROPRIÉTÉS DE RAMIFICATION À L'INFINI DU GROUPE MODULAIRE DE TEICHMÜLLER

PAR JEAN-LUC BRYLINSKI

*Une belle baleine aux yeux bleus
Un animal comme on en voit peu
(Jacques Prévert)*

Introduction

Une variété algébrique X de dimension n est dite *de type général* si pour une variété lisse complète \bar{X} birationnellement équivalente à X , le degré de transcendance de l'algèbre $\bigoplus_{N=0}^{\infty} \Gamma(\bar{X}, (\Omega_{\bar{X}}^n)^{\otimes N})$ est égal à $(n+1)$ (en fait, ce degré de transcendance ne dépend pas du choix de \bar{X}).

Y. S. Tai démontre dans [A] le théorème suivant :

THÉORÈME DE TAI. — Soit Γ un groupe arithmétique agissant sur un domaine symétrique borné D . Il existe un sous-groupe $\Gamma_0 \subset \Gamma$ d'indice fini tel que, pour tout $\Gamma_1 \subset \Gamma_0$ d'indice fini, le quotient D/Γ_1 est une variété algébrique de type général.

On peut d'ailleurs imposer à Γ_0 d'être un sous-groupe de congruence de Γ .

Mumford donne dans [M3] une nouvelle démonstration du théorème de Tai, qui comprend deux étapes :

ÉTAPE 1. — Si Γ est net (voir [A] ou [M3]), la variété D/Γ est de type général logarithmique.

ÉTAPE 2. — La tour de revêtements $D/\Gamma' \rightarrow D/\Gamma$ pour $\Gamma' \subset \Gamma$ d'indice fini est localement universellement ramifiée au-dessus de $\overline{D/\Gamma} - D/\Gamma$, si $\overline{D/\Gamma}$ est une compactification de D/Γ décrite dans [A].

Pour la 1^{re} étape, nous renvoyons le lecteur à [M3], § 4. Pour la 2^e étape, rappelons que pour Y variété lisse quasi projective, \bar{Y} une compactification lisse (ou, plus généralement « toroïdale » au sens de [K]) de Y avec croisements normaux à l'infini, une tour $\{\pi_\alpha: Y_\alpha \rightarrow Y\}$ de revêtements étales galoisiens finis de Y est dite *localement universellement ramifiée* au-dessous de $\bar{Y} - Y$, si pour tout $x \in \bar{Y} - Y$ et tout voisinage \mathcal{U} assez petit convenable de x dans \bar{Y} , la famille de revêtements étales

$$\pi_\alpha: V_\alpha \rightarrow \mathcal{U} \cap Y$$

$[V_\alpha$ étant une composante connexe de $\pi_\alpha^{-1}(\mathcal{U} \cap Y)]$ est cofinale dans la famille des revêtements étales finis de $\mathcal{U} \cap Y$ (cf. [M3], p. 270).

Mumford annonce dans [M3], § 4, que la même méthode permet de montrer que pour tout entier $g \geq 2$, il existe un *niveau géométrique* fini λ pour le genre g tel que M_g^λ , le schéma de modules de courbes lisses de genre g munies d'une structure de niveau λ , soit une variété de type général.

Rappelons que Mumford [M1] a construit l'espace de modules grossier M_g des courbes lisses de genre g , et que l'espace de Teichmüller T_g est un revêtement holomorphe infini ramifié de M_g . Le groupe Γ_g de ce revêtement ramifié est le *groupe modulaire de Teichmüller* de genre g . Si π_g est le premier groupe d'homotopie d'une courbe lisse de genre g , Γ_g est un sous-groupe d'indice 2 du groupe $\text{Aut}_{\text{ext}}(\pi_g)$ des automorphismes extérieurs de π_g .

Un *niveau* est un sous-groupe de Γ_g ; un niveau est dit *géométrique* si le sous-groupe en question est noyau d'un homomorphisme $\text{Aut}_{\text{ext}}(\pi_g) \rightarrow \text{Aut}_{\text{ext}}(\pi_g|H)$ associé à un sous-groupe H de π_g stable par tout automorphisme de π_g . Un niveau est fini si le sous-groupe de Γ_g est d'indice fini.

Les niveaux abéliens correspondent au cas où le quotient $\pi_g|H$ est abélien; on note ainsi (n) le niveau abélien obtenu pour $\pi_g|H \cong (\mathbb{Z}/n)^{2g}$.

Si λ est un niveau fini, on appelle M_g^λ le revêtement ramifié de M_g correspondant; une courbe lisse de genre g munie d'une structure de niveau λ est, par définition, un point de M_g^λ ; pour le cas du niveau abélien (n) , une structure de niveau (n) sur une courbe lisse complexe C n'est autre qu'un isomorphisme $H_1(C, \mathbb{Z}/n) \cong (\mathbb{Z}/n)^{2g}$ « symplectique » en un certain sens.

Si $n \geq 3$, on sait que $M_g^{(n)}$ est lisse (voir [Se]) et que le revêtement $T_g \rightarrow M_g^{(n)}$ est égale. On veut montrer que M_g^λ est de type général pour un niveau géométrique fini λ qui domine (n) . L'étape 1 de la démonstration est traitée dans [M2] et [M3]. L'étape 2, qui est triviale dans le cas hermitien localement symétrique de [M3] ne l'est plus maintenant.

Elle ne peut être franchie si l'on prend comme tour de revêtements de $M_g^{(n)}$ la famille des $M_g^{(mn)} \rightarrow M_g^{(n)}$. Il faut considérer des niveaux λ correspondant à des quotients *diédraux* de π_g ; on dira que de tels niveaux λ sont des *niveaux diédraux*. La démonstration que la famille des revêtements $M_g^\lambda \rightarrow M_g^{(n)}$ pour λ diédral est localement universellement ramifiée à l'infini, est donnée dans ce travail. Elle nécessite :

- une connaissance assez précise d'une compactification \overline{M}_g de M_g , telle qu'elle est décrite dans [D-M] comme schéma de modules grossier des *courbes stables* de genre g ;
- la transcription d'un problème de ramification à l'infini des revêtements M_g^λ en terme de *twists de Dehn* [De] associés à une famille de lacets disjoints sur une surface topologique de genre g ;
- une technique pour étudier l'action de ces twists de Dehn sur des quotients diédraux de π_g en « remontant » des lacets dans un revêtement étale de degré 2.

Un outil essentiel est fourni par les graphes que Deligne et Mumford attachent aux courbes stables [D-M]. Nous utilisons à un endroit crucial certaines matrices *totalelement unimodulaires* associées à un graphe, de manière à pouvoir appliquer un théorème de Ken Baclawski. La démonstration de ce théorème est reproduite en appendice, avec l'autorisation de Baclawski. Ce dernier a généralisé son étude dans [B-W].

Ce travail a également été influencé par les remarquables conférences de Joan Birman à Cambridge en août 1975, partiellement rédigées dans [Bi]. C'est de là que s'est née l'idée de transcrire des propriétés d'un système de lacets d'une surface topologique en termes de la connexité du complémentaire.

La topologie mise en œuvre ici ressemble étrangement à celle que manient avec art Douady et Hubbard dans leur étude des différentielles de Strebel [D-H]. Nous ne savons pas bien ce que signifie cette ressemblance. Le choix des niveaux diédraux n'est pas seulement dû à la paresse de l'auteur et à son incapacité à résoudre des problèmes de conjugaison difficiles dans le groupe π_g . Il est évidemment inspiré par les travaux anciens de Schottky-Jung sur les revêtements de degré 2 de courbes et les relations entre « thetanullwerte » que leur étude permet de découvrir. La théorie moderne des revêtements de degré 2 des courbes stables et d'ailleurs entreprise dans [Be].

Le résultat que M_g^λ est de type général peut s'interpréter comme un théorème d'existence de fonctions « modulaires » d'un certain type. Il n'est pas impossible que certaines de ces fonctions modulaires puissent être trouvées à partir de la considération de fonctions modulaires de Siegel de genre $2g-1$. Cela mériterait sans doute d'être tenté.

Pour finir ce travail a été suggéré et lucidement guidé par David Mumford, qui a bien voulu corriger une première version erronée en plusieurs points. La définition correcte des niveaux diédraux a été proposée par lui en remplacement de la définition douteuse précédente. Je remercie aussi Pierre Deligne de m'avoir gratifié de discussions éclairantes.

Dans tout ce travail, nous prendrons \mathbb{C} comme corps de base pour toutes les variétés algébriques étudiées. Notre terminologie s'inspire de Joan Birman et de David Mumford. Certains termes ont dû être traduits de l'anglais : nous espérons que ces traductions ne sont pas trop malsonnantes. Le signe ■ indique la fin d'une démonstration ou son absence.

1. Schéma de modules de courbes stables

Soit g un entier ≥ 2 . Dans [M1], Mumford a construit un *schéma de modules grossier* M_g pour les courbes propres et lisses de genre g . C'est une variété algébrique quasi projective (qui n'est ni propre ni lisse). Dans [D-M], p. 104, Deligne et Mumford construisent un espace algébrique \overline{M}_g , propre et de type fini sur \mathbb{C} , qui est un espace de modules grossier pour les *courbes stables* de genre g .

Rappelons qu'une courbe stable de genre g est une courbe connexe réduite C telle que :

- (i) C n'a que des points doubles ordinaires pour singularités;
- (ii) si E est une composante de C , non singulière et de genre 0, alors E rencontre l'adhérence de $C-E$ en au moins trois points;
- (iii) $\dim H^1(C, \mathcal{O}_C) = g$.

Il est démontré dans [D-M], p. 77 que si ω_C est le faisceau dualisant d'une courbe stable C , alors $\omega_C^{\otimes 3}$ est très ample et $\dim \Gamma(C, \omega_C^{\otimes 3}) = 5(g-1)$. On en déduit qu'il existe un sous-schéma

localement fermé H_g de $\text{Hilb}_{\mathbb{P}^3, g-6}$, paramétrant les courbes stables munies d'une immersion tricanonique. Le sous-schéma H_g^0 de H_g paramétrant les courbes lisses tricanoniques est dense dans H_g . De plus, le groupe $\text{PGL}(5g-6)$ agit naturellement sur H_g^0 et sur H_g . Dans [M1], Mumford construit M_g comme quotient géométrique de H_g^0 par l'action de $\text{PGL}(5g-6)$. Dans [M2], p. 56, Mumford déduit de l'analyse de la stabilité asymptotique des courbes stables, le résultat que \overline{M}_g est une variété projective. La situation actuelle du sujet est bien décrite dans [P], lectures 7, 9, 10.

Soit $S^* = H_g - H_g^0$; soit $Z_g \rightarrow H_g$ la courbe stable tricanonique universelle dont l'existence résulte de la définition de H_g . Soit S le lieu critique de $Z_g \rightarrow H_g$. Le corollaire (1.9) de [D-M] dit que Z_g et S sont lisses, que la projection $S \rightarrow S^*$ est la normalisation de S^* , et que S^* est un *diviseur à croisements normaux* de H_g .

Le complémentaire Δ de M_g dans \overline{M}_g est le quotient de S^* par $\text{PGL}(5g-6)$, mais n'est pas à croisements normaux dans \overline{M}_g . Un point x de Δ correspond à une courbe stable C_x . Supposons que C_x ait k points doubles. D'après [D-M], p. 79, il existe une déformation formelle verselle $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{M}$ de C_x , où $\mathcal{M} = \text{Spec } \mathbb{C}[[t_1, \dots, t_{3g-3}]]$. Cette déformation ayant des sections, elle porte un fibré relativement ample, donc est algébrisable d'après E.G.A. III. Restreignons le morphisme algébrique $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{M}$ à un polydisque ouvert \mathcal{U} de \mathbb{C}^{3g-3} . Soit $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{U}$ le morphisme ainsi obtenu. Le lieu $\Delta^{\mathcal{U}}$ des points y de \mathcal{U} tels que la fibre \mathcal{C}_y soit singulière, est un diviseur de \mathcal{U} . D'après [D-M], p. 79, si \mathcal{U} est choisi assez petit, il existe un système de coordonnées z_1, \dots, z_{3g-3} sur \mathcal{U} tel que $\Delta^{\mathcal{U}}$ ait pour équation $\prod_{i=1}^k z_i = 0$. Pour toute partie I de $\{1, \dots, k\}$, on note Δ_I la sous-variété de \mathcal{U} définie par $z_i = 0$ pour $i \in I$. On pose : $\Delta_I^0 = \Delta_I - (\bigcup_{I \subsetneq I'} \Delta_{I'})$. La restriction $\mathcal{C}_I \rightarrow \Delta_I^0$ de \mathcal{C} à Δ_I^0 est une fibration topologique localement triviale dont les fibres sont des courbes stables à $(\# I)$ points doubles.

A noter l'existence d'une application naturelle $\mathcal{U} \rightarrow \overline{M}_g$ qui n'est même pas nécessairement étale au-dessus de M_g .

La description topologique des courbes stables et de leurs déformations utilise la notion de *graphe d'une courbe stable*. Soit C une courbe stable, et soit $C = \bigcup_{\alpha \in A} C_\alpha$ sa décomposition en composantes irréductibles. Le graphe $\underline{\Gamma}$ associé à C a A pour ensemble de sommets (on notera s_α le sommet associé à la composante C_α). A un point double y_i de C par où passent deux composantes C_α et $C_{\alpha'}$ correspond une arête v_i de $\underline{\Gamma}$ joignant s_α à $s_{\alpha'}$ (on n'exclut pas $\alpha = \alpha'$, auquel cas v_i est un lacet d'origine s_α). Il faut préciser que $\underline{\Gamma}$ diffère en général du graphe défini dans [D-M], p. 86.

Le graphe $\underline{\Gamma}$ peut être *pondéré* en affectant à un sommet s_α le genre g_α de la normalisée de la composante C_α .

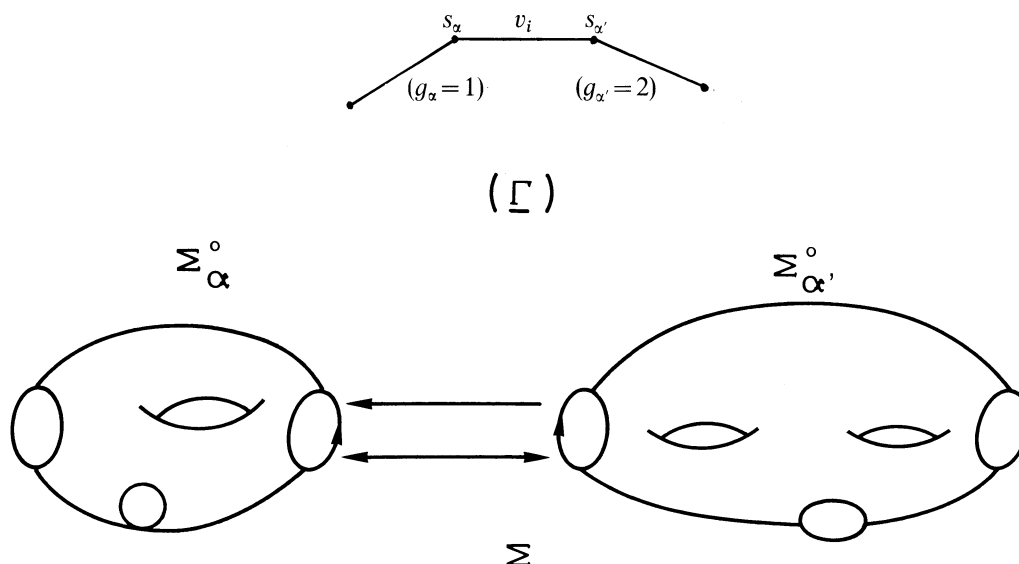
Exemple. — Pour $g=2$, nous donnons tous les types topologiques possibles de courbes stables C et les graphes $\underline{\Gamma}$ pondérés correspondants.

Il est facile de décrire topologiquement une courbe stable C à partir de son graphe $\underline{\Gamma}$. Pour chaque sommet s_α de $\underline{\Gamma}$, on considère une surface compacte orientée Σ_α de genre g_α ;

	C	Γ
(a)		2 •
(b)		1 •
(c)		1 — 1
(d)		1 — 0
(e)		
(f)		0 0
(g)		0 0

C s'obtient à partir de $\coprod_{\alpha \in A} \Sigma_\alpha$, par l'identification d'un point de Σ_α à un point de $\Sigma_{\alpha'}$ pour toute arête v_i d'extrémités s_α et $s_{\alpha'}$ (ici encore, on n'exclut pas $\alpha = \alpha'$). L'exemple précédent éclaire le cas $g=2$.

$\underline{\Gamma}$ permet aussi de décrire topologiquement la déformation universelle de C . Soit d'abord Σ la fibre générique de cette déformation. Pour l'obtenir, on considère la surface ouverte Σ_α^0 , qui est le complément dans Σ_α d'une réunion de petits disques D_i , un pour chaque arête v_i ayant s_α pour extrémité (toutefois, si v_i est un lacet d'extrémité s_α , on doit enlever deux disques). Le bord $\partial \Sigma_\alpha^0$ est l'union des cercles ∂D_i correspondant aux arêtes v_i d'extrémité s_α . On obtient Σ en identifiant dans $\coprod_{\alpha \in A} \Sigma_\alpha^0$ les cercles ∂D_i de Σ_α^0 et $\Sigma_{\alpha'}^0$, pour chaque arête v_i d'extrémités s_α et $s_{\alpha'}$, de manière compatible avec les orientations naturelles de ces deux cercles.

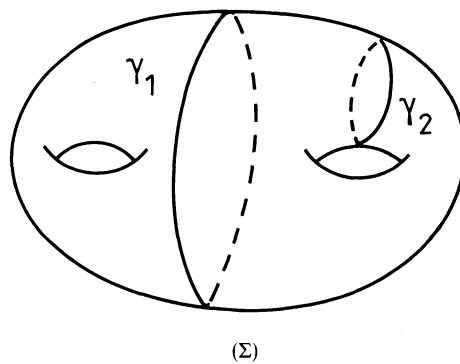


De par cette description, la surface Σ de genre g contient un lacet simple γ_i (défini à l'orientation près) associé à chaque arête v_i de $\underline{\Gamma}$, à savoir $\gamma_i = \partial D_i \subset \Sigma_\alpha^0$ pour s_α une extrémité s_α de v_i . L'application $p: \Sigma \rightarrow C$ connue sous le nom de *spécialisation* se définit par la contraction de chaque lacet γ_i en un point. Plus généralement, pour tout $I \subset \{1, \dots, k\}$ comme plus haut, la fibre typique de \mathcal{C} au-dessus de Δ_I est une courbe stable à k points doubles, obtenue en contractant dans Σ les lacets γ_i pour $i \in I$.

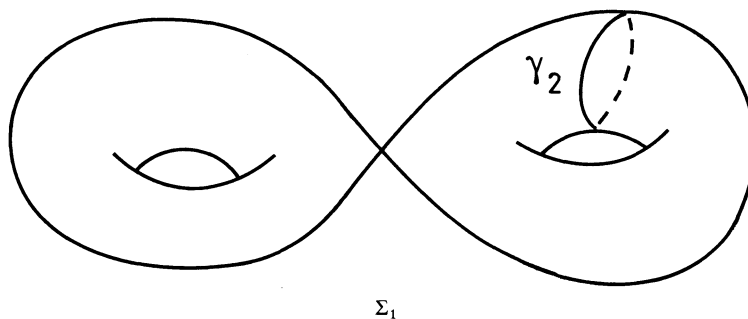
Nous aurons besoin plus loin d'une projection $q: \Sigma \rightarrow \Gamma$. Il suffit pour cela, au lieu d'identifier deux cercles de Σ_α^0 et $\Sigma_{\alpha'}^0$, pour chaque arête v_i d'extrémités s_α et $s_{\alpha'}$, de joindre ces deux cercles par un cylindre C_i . On définit alors q par $q(\Sigma_\alpha^0) = s_\alpha$ et $q: C_i \rightarrow v_i$ comme la projection d'un cylindre sur son axe.

Exemple. — Pour $g=2$, soit C une courbe stable du type (d) . On a alors $\Delta^{\mathcal{U}} = \Delta_1 \cup \Delta_2$. Décrivons les fibres de la déformation universelle $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{U}$.

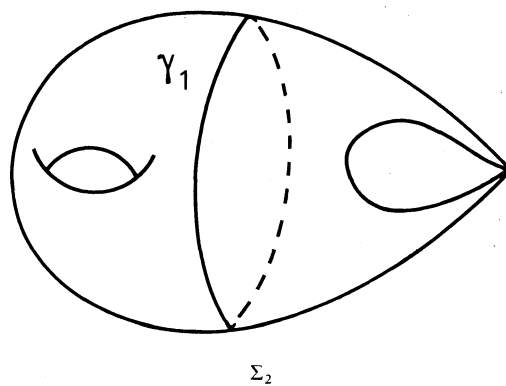
Pour $y \in \mathcal{U} - \Delta$, la fibre \mathcal{C}_y est, du point de vue topologique, une surface Σ de genre 2, munie de deux lacets γ_1 et γ_2 :



Au-dessus de $y \in \Delta_1^0$ la fibre \mathcal{C}_y s'obtient topologiquement à partir de Σ en contractant γ_1 ; c'est une courbe stable de type \textcircled{c} :

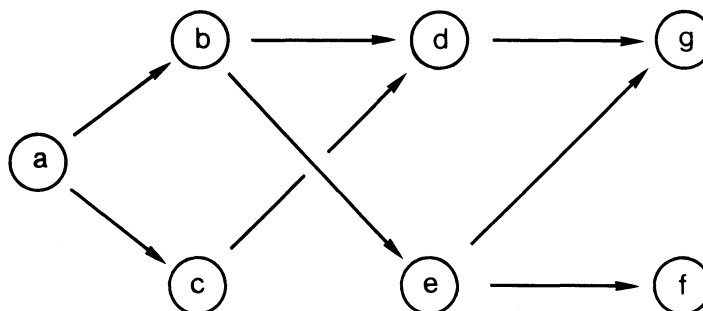


Au-dessus de $y \in \Delta_2^0$ la fibre \mathcal{C}_y s'obtient en contractant γ_2 dans Σ ; c'est une courbe stable de type \textcircled{b} :



Au-dessus de $y \in \Delta_{\{1,2\}} = \Delta_1 \cap \Delta_2$, la fibre \mathcal{C}_y s'obtient à partir de Σ en contractant γ_1 et γ_2 .

On trouve facilement, par cette méthode, le diagramme des spécialisations possibles de courbes stables de genre 2 :



Avec les notations précédentes, on va calculer $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ et $H_1(C, \mathbb{Z})$ en termes du graphe $\underline{\Gamma}$. Avec les notions standard pour les chaînes, cycles, etc, simpliciaux, on a deux suites exactes duales :

$$0 \rightarrow H_1(\underline{\Gamma}, \mathbb{Z}) \rightarrow C_1(\underline{\Gamma}) \xrightarrow{\partial} C_0(\underline{\Gamma}) \rightarrow H_0(\underline{\Gamma}, \mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

et

$$0 \leftarrow H^1(\underline{\Gamma}, \mathbb{Z}) \leftarrow C^1(\underline{\Gamma}) \xleftarrow{\partial^*} C^0(\underline{\Gamma}) \leftarrow H^0(\underline{\Gamma}, \mathbb{Z}) \leftarrow 0.$$

PROPOSITION 1. — On a une suite exacte

$$0 \rightarrow H^1(\underline{\Gamma}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{j} H_1(\Sigma, \mathbb{Z}) \xrightarrow{p_*} H_1(C, \mathbb{Z}) \rightarrow 0,$$

où j est tel que pour toute arête v_i de $\underline{\Gamma}$, dont on note encore v_i l'image dans $H^1(\underline{\Gamma}, \mathbb{Z}) = C^1(\underline{\Gamma}) / \partial^* C^0(\underline{\Gamma})$, on ait : $j(v_i) =$ classe de γ_i .

On a de plus une suite exacte canonique :

$$0 \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in A} H_1(\Sigma_\alpha, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(C, \mathbb{Z}) \xrightarrow{q_*} H_1(\underline{\Gamma}, \mathbb{Z}) \rightarrow 0.$$

La filtration à trois crans sur $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ ainsi obtenue est sa propre duale pour le cup-produit.

Démonstration. — On a un recouvrement de Σ par les Σ_α^0 et de C par les Σ_α ($\alpha \in A$), d'où des suites exactes de Mayer-Vietoris. Comme $p(\Sigma_\alpha^0) = \Sigma_\alpha$, on a un diagramme de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \bigoplus H_1(\partial D_i) & \rightarrow & \bigoplus_{\alpha \in A} H_1(\Sigma_\alpha^0) & \rightarrow & H_1(\Sigma) & \rightarrow & \bigoplus_{i \in I} H_0(\partial D_i) \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in A} H_0(\Sigma_\alpha^0) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow p_* & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{\alpha \in A} H_1(\Sigma_\alpha) & \rightarrow & H_1(C) & \rightarrow & \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z} \longrightarrow \bigoplus_{\alpha \in A} H_0(\Sigma_\alpha)
 \end{array}$$

où tous les groupes d'homologie sont à valeurs dans \mathbb{Z} . On a appelé I l'ensemble des arêtes de Γ , et utilisé :

$$\Sigma_\alpha^0 \cap \Sigma_{\alpha'}^0 = \bigcup_{\substack{i \in I \\ s_\alpha, s_{\alpha'} \in v_i}} (\gamma_i) \quad \text{et} \quad \Sigma_\alpha \cap \Sigma_{\alpha'} = \bigcup_{\substack{i \in I \\ s_\alpha, s_{\alpha'} \in v_i}} (\gamma_i).$$

Bien entendu $H_0(\Sigma_\alpha) = \mathbb{Z}$ et la flèche : $\bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z} \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in A} \mathbb{Z}$ s'identifie à ∂ ; son noyau est donc $H_1(\Gamma, \mathbb{Z})$ et la deuxième ligne se lit :

$$0 \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in A} H_1(\Sigma_\alpha, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(C, \mathbb{Z}) \xrightarrow{q_*} H_1(\Gamma, \mathbb{Z}) \rightarrow 0.$$

Et q_* est canonique, de même que le type d'homotopie que q .

Par ailleurs, comme $\Sigma_\alpha^0 = \Sigma_\alpha - (\bigcup_{\substack{i \in I \\ s_\alpha \in v_i}} D_i)$, on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \bigoplus_{s_\alpha \in v_i} \mathbb{Z} \cdot \gamma_i \rightarrow H_1(\Sigma_\alpha^0) \rightarrow H_1(\Sigma_\alpha) \rightarrow 0.$$

On a $H_1(\partial D_i) = \mathbb{Z}$ et la flèche : $\bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z} \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in A} H_1(\Sigma_\alpha^0)$ se factorise par $\bigoplus_{\alpha \in A} (\bigoplus_{s_\alpha \in v_i} \mathbb{Z} \cdot \gamma_i)$, de sorte que

le conoyau est isomorphe à $\bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z} = C^1(\Gamma)$. D'où une suite exacte :

$$C^0(\Gamma) \rightarrow C^1(\Gamma) \rightarrow H_1(\Sigma, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(C, \mathbb{Z}) \rightarrow 0,$$

et la flèche $C^0(\Gamma) \rightarrow C^1(\Gamma)$ n'est autre que ∂^* , donc son conoyau est $H^1(\Gamma, \mathbb{Z})$. L'inclusion $j : H^1(\Gamma, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ envoie l'image de v_i sur la classe de γ_i .

Enfin, il est immédiat que $j(H^1(\Gamma, \mathbb{Z}))$ est un sous-groupe isotrope de $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ pour le cup-produit, et même que $j(H^1(\Gamma, \mathbb{Z}))$ est orthogonal à l'image réciproque dans $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ du sous-groupe $\bigoplus_{\alpha \in A} H_1(\Sigma_\alpha, \mathbb{Z})$ de $H_1(C, \mathbb{Z})$. Dans la filtration à trois crans de $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$, le premier cran est donc l'orthogonal du second. ■

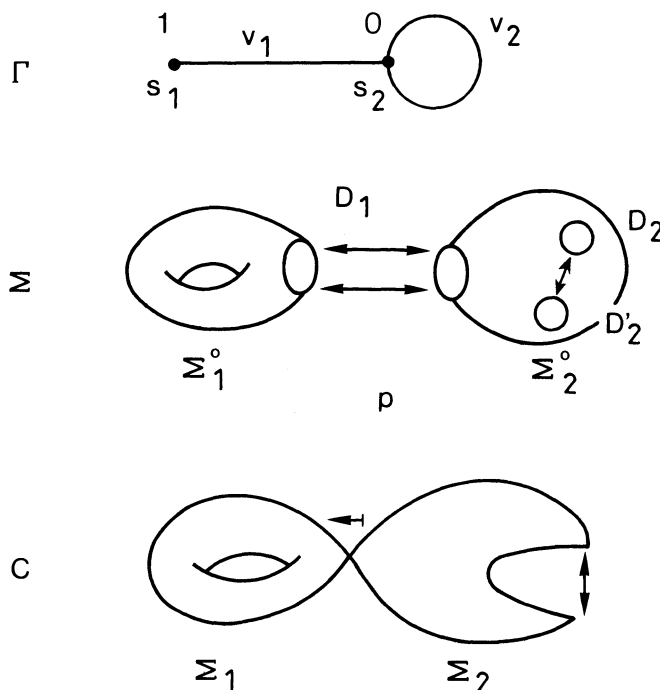
Remarque. — Le lecteur aura reconnu dans cette filtration à trois crans de $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ la filtration par le poids provenant de la monodromie sur $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ telle qu'elle est calculée par Steenbrink [St].

Exemple (voir schéma p.) :

PROPOSITION 1 bis. — *Les assertions de la proposition 1 sont encore vraies si l'homologie est prise à coefficients \mathbb{Z}/n .*

Démonstration. — En effet, l'homologie et la cohomologie de Σ , de C et de Γ sont libres sur \mathbb{Z} . ■

Remarque. — Toute courbe stable de genre g a au plus $3g - 3$ points doubles. Les courbes stables qui ont $3g - 3$ points doubles ont pour graphe Γ un graphe dont tous les poids sont



nuls, qui a $2g-2$ sommets et $3g-3$ arêtes, chaque sommet appartenant à trois arêtes exactement (on a un lacet et une arête). De telles courbes stables sont indéformables. On voit facilement que toute courbe stable peut se spécialiser en une courbe stable à $3g-3$ points doubles. On pourrait se borner à elles dans tout ce travail, mais on n'y gagnerait rien.

2. Les niveaux de genre g et leur comportement « à l'infini »

Nous commençons par définir T_g , l'espace de Teichmüller de genre g . Décrivons d'abord l'ensemble T_g . Nous nous donnons pour cela une variété différentiable Σ de dimension 2, orientée, compacte, de genre g . On dit que deux métriques riemanniennes sur Σ sont équivalentes si elles sont proportionnelles en tout point de Σ . Une *structure conforme* sur Σ est une classe de métriques riemanniennes sur Σ , pour cette relation d'équivalence. Il est clair que les structures conformes sur Σ correspondent biunivoquement aux structures complexes compatibles à l'orientation de Σ . Soit $\mathcal{M}(\Sigma)$ l'ensemble de ces structures conformes. Soit $\text{Diff}^+(\Sigma)$ le groupe des difféomorphismes de Σ qui en préservent l'orientation. $\text{Diff}^+(\Sigma)$ agit naturellement sur $\mathcal{M}(\Sigma)$; on écrira cette action « à gauche ». Comme M_g , l'ensemble des points complexes du schéma du même nom, paramétrise les surfaces de Riemann de genre g , M_g s'identifie au quotient $\text{Diff}^+(\Sigma)/\mathcal{M}(\Sigma)$.

Soit maintenant $\text{Diff}_0(\Sigma)$ le sous-groupe de $\text{Diff}^+(\Sigma)$ formé des difféomorphismes g homotopes à l'identité. On définit l'ensemble T_g comme $T_g = \text{Diff}_0(\Sigma)/\mathcal{M}(\Sigma)$. Comme

$\text{Diff}_0(\Sigma)$ est un sous-groupe distingué de $\text{Diff}^+(\Sigma)$, on obtient une action sur l'ensemble T_g du groupe $\Gamma_g = \text{Diff}^+(\Sigma) / \text{Diff}_0(\Sigma)$, de sorte que M_g apparaît comme quotient de T_g par l'action de Γ_g .

On appelle Γ_g *groupe modulaire de Teichmüller* pour le genre g . Ce groupe admet une définition algébrique que voici. Pour $f \in \text{Diff}^+(\Sigma)$ et pour $s \in \Sigma$, on a un isomorphisme :

$$f_* : \pi_1(\Sigma, s) \rightarrow \pi_1(\Sigma, f(s)).$$

A tout chemin l de s vers $f(s)$ dans Σ est associé un isomorphisme $[l] : \pi_1(\Sigma, f(s)) \rightarrow \pi_1(\Sigma, s)$ de la façon habituelle, d'où un isomorphisme composé

$$[l] \circ f_* : \pi_1(\Sigma, s) \rightarrow \pi_1(\Sigma, s).$$

Supposons fixés le point s de Σ ainsi qu'une identification de $\pi_1(\Sigma, s)$ au groupe π_g , quotient du groupe libre de base $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g$ par la relation

$$(a_1, b_1), \dots, (a_g, b_g) = 1,$$

$[l] \circ f_*$ apparaît donc comme un élément du groupe $\text{Aut}(\pi_g)$ des automorphismes du groupe π_g ; si l'on change le chemin, $[l] \circ f_*$ se trouve multiplié à gauche par un automorphisme intérieur de π_g . Il en résulte que $[l] \circ f_*$ a une image indépendante de l dans $\text{Aut}(\pi_g) / \text{Aut}_{\text{int}}(\pi_g) = \text{Aut}_{\text{ext}}(\pi_g)$, que nous appelons *groupe des automorphismes extérieurs de π_g* . Si on note encore f_* l'élément de $\text{Aut}_{\text{ext}}(\pi_g)$ ainsi associé à $\text{Diff}^+(\Sigma)$ on sait que $f \mapsto f_*$ est un homomorphisme de groupes de $\text{Diff}^+(\Sigma) / \text{Diff}_0(\Sigma) = \Gamma_g$ vers $\text{Aut}_{\text{ext}}(\pi_g)$. Cet homomorphisme ne dépend pas du point $s \in \Sigma$.

Nous référons à [N] pour la démonstration que cet homomorphisme est un isomorphisme du groupe Γ_g sur un sous-groupe d'indice 2 de $\text{Aut}_{\text{ext}}(\pi_g)$.

Pour revenir à la description de T_g , nous définissons une *structure de Teichmüller* sur une surface de Riemann S comme une classe d'équivalences de couples (s, φ) où s est un point de S et φ un isomorphisme $\varphi : \pi_g \cong \pi_1(S, s)$ pour la relation d'équivalence telle que (s, φ) et (s', φ') sont équivalents si et seulement s'il existe un chemin l d'origine s et d'extrémité s' dans S tel que : $\varphi' = [l] \circ \varphi$.

On appelle *surface de Teichmüller* une surface de Riemann S munie d'une structure de Teichmüller.

C'est la définition classique (voir [W]). Il est clair que si S est une surface de Riemann, l'ensemble des structures de Teichmüller sur S est un espace homogène principal sous Γ_g . On définit sans peine la notion de surface de Teichmüller relative (au-dessus d'un espace analytique).

PROPOSITION 2. — (1) T_g est l'ensemble des classes d'isomorphisme de surfaces de Teichmüller.

(2) Il existe une structure de variété analytique complexe sur T_g telle que T_g représente dans la catégorie des espaces analytiques le foncteur des surfaces de Teichmüller relatives à isomorphisme près.

(3) $p : T_g \rightarrow M_g$ est un revêtement holomorphe infini ramifié de groupe Γ_g (voir [G]).

On sait de plus :

- que T_g peut être réalisé comme domaine d'holomorphie dans \mathbb{C}^{3g-3} (c'est donc une variété de Stein);
- que T_g est difféomorphe à la boule de dimension $6g-6$;
- que le groupe des automorphismes analytiques de T_g se réduit à Γ_g (voir Royden [R]).

Nous pouvons maintenant introduire les niveaux de genre g . Un *niveau* est un sous-groupe Γ' de Γ_g , et est dit fini si Γ' est d'indice fini. Nous ne nous intéressons en fait qu'aux *niveaux géométriques*. Pour les définir, on considère Γ_g comme sous-groupe d'indice 2 de $\text{Aut}_{\text{ext}}(\pi_g)$.

DÉFINITION. — Un sous-groupe H d'un groupe G est dit *caractéristique* si H est stable par tout automorphisme de G .

Remarque. — Les sous-groupes caractéristiques d'un groupe G forment un sous-treillis du treillis des sous-groupes distingués. Comme sous-groupes caractéristiques de G , citons :

- les groupes de la série centrale;
- les groupes de la série descendante;
- pour n entier, le sous-groupe $G^{(n)}$ engendré par les x^n pour $x \in G$.

Soit H un sous-groupe caractéristique de π_g . Tout automorphisme de π_g induit un automorphisme de $\pi_g|_H$. On a donc un homomorphisme de groupes

$$\Gamma_g \hookrightarrow \text{Aut}_{\text{ext}}(\pi_g) \rightarrow \text{Aut}_{\text{ext}}(\pi_g|_H).$$

Le noyau Γ' de cet homomorphisme est le *niveau géométrique* correspondant au groupe caractéristique de H .

Exemple. — Le sous-groupe des commutateurs de π_g , habituellement noté $[\pi_g, \pi_g]$ est caractéristique. Si Σ est notre surface de genre g , on a : $\pi_g|_{[\pi_g, \pi_g]} \cong H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$. Le niveau correspondant est le noyau de l'homomorphisme

$$\varphi : \Gamma_g \rightarrow \text{Aut}(H_1(\Sigma, \mathbb{Z})).$$

On l'appelle *niveau abélien d'ordre infini*. On sait d'après Manger [Man] que l'image de φ est le sous-groupe $\text{Sp}(H_1(\Sigma, \mathbb{Z}))$ des automorphismes qui préservent la forme symplectique qu'est le cup-produit.

L'image de $\text{Aut}_{\text{ext}}(\pi_g)$ dans $\text{Aut}(H_1(\Sigma, \mathbb{Z}))$ est l'ensemble des automorphismes Φ qui vérifient $\langle \Phi x, \Phi y \rangle = \langle x, y \rangle$ ou bien $\langle \Phi x, \Phi y \rangle = -\langle x, y \rangle$ si l'on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le cup-produit. Cela est lié au fait que Γ_g est d'indice 2 dans $\text{Aut}_{\text{ext}}(\pi_g)$.

De la même façon, pour tout entier m , on a un sous-groupe caractéristique de π_g , noyau de $\pi_g \rightarrow H_1(\Sigma, \mathbb{Z}/m)$ et l'homomorphisme correspondant $\varphi_m : \Gamma_g \rightarrow \text{Sp}(H_1(\Sigma, \mathbb{Z}/m))$ est surjectif (voir [D-M], § 5). Ce niveau est le *niveau abélien d'ordre m* .

Soit λ un niveau. On pose : $M_g^\lambda = T_g|_{\Gamma_g^\lambda}$ où Γ_g^λ est le sous-groupe de Γ_g définissant λ . On note (m) le niveau abélien d'ordre m . Par définition, une *structure de niveau λ* sur une surface de Riemann S est une Γ_g^λ -orbite de structures de Teichmüller sur S . On montre que M_g^λ est un

espace de modules grossier pour les surfaces de Riemann de genre g munies d'une structure de niveau λ (si λ est un niveau fini, la même assertion vaut dans la catégorie des variétés algébriques).

On voit facilement qu'une structure de niveau (n) sur une surface de Riemann s est un isomorphisme $H_1(S, \mathbb{Z}(n)) \cong (\mathbb{Z}/n)^{2g}$ qui transforme le cup-produit en la forme symplectique standard de matrice $\begin{bmatrix} 0 & -I_g \\ I_g & 0 \end{bmatrix}$.

On dit qu'un niveau λ_1 domine un niveau λ_2 si $\Gamma_g^{\lambda_1} \subset \Gamma_g^{\lambda_2}$; on a alors un revêtement $M_g^{\lambda_1} \rightarrow M_g^{\lambda_2}$ (et $M_g^{\lambda_1}$ domine $M_g^{\lambda_2}$, ce qui justifie cette terminologie).

Pour tout niveau fini λ , on définit une compactification \overline{M}_g^λ de M_g^λ comme la normalisation de \overline{M}_g dans le corps de fonctions méromorphes de M_g^λ . On a donc une projection $P_\lambda : \overline{M}_g^\lambda \rightarrow \overline{M}_g$, et $(p_\lambda)_* (\mathcal{O}_{\overline{M}_g^\lambda})$ est le normalisé de $\mathcal{O}_{\overline{M}_g}$ dans $K(M_g^\lambda)$. On note $\Delta^\lambda = (p_\lambda)^{-1}(\Delta)$, le diviseur des courbes stables singulières.

Le résultat suivant est capital.

PROPOSITION 3. — Si λ est un niveau fini qui domine un niveau abélien (m) avec $m \geq 3$, alors :

(i) M_g^λ est lisse, le revêtement infini $T_g \rightarrow M_g^\lambda$ est étale de groupe Γ_g^λ , et M_g^λ représente le foncteur des courbes lisses de genre g avec structure de niveau λ (autrement dit, M_g^λ est un espace de modules fin [M 1];

(ii) la courbe universelle de genre g sur M_g^λ se prolonge en une courbe stable sur \overline{M}_g^λ ;

(iii) l'inclusion $M_g^\lambda \hookrightarrow \overline{M}_g^\lambda$ est une immersion toroïdale au sens de [K]; le diviseur Δ^λ est à croisements normaux dans \overline{M}_g^λ .

Démonstration. — Montrons d'abord que si $m \geq 3$, le groupe $\Gamma_g^{(m)}$ agit sur T_g sans point fixe. Supposons $\alpha \neq 1$, $\alpha \in \Gamma_g^{(m)}$ et soit un point fixe de α dans T_g , donné par une structure de Teichmüller $\varphi : \pi_g \cong \pi_1(S, s)$ sur une surface de Riemann S . Les surfaces de Teichmüller (S, φ) et $(S, \alpha \circ \varphi)$ étant isomorphes, il doit exister un automorphisme τ de S tel que $\alpha \circ \varphi = \varphi \circ \tau$. Dire que α est dans $\Gamma_g^{(m)}$ signifie que α agit trivialement sur $H_1(S, \mathbb{Z}/m)$: il en est donc de même de τ ; d'après [Se] on a $\tau = \text{Id}$ ce qui implique $\alpha = 1$.

Donc sous les hypothèses (i), $T_g \rightarrow M_g^\lambda$ est étale et M_g^λ lisse; c'est un simple problème de descente que de déduire la courbe universelle avec structure de niveau λ sur M_g^λ de la courbe de Teichmüller universelle sur T_g . On a donc (i).

Pour démontrer (ii), on revient aux sous-schémas H_g^0 et H_g de $\text{Hilb}_{\mathbb{P}^{5g-6}}$. Comme il est dit dans [D-M], p. 78, H_g représente le foncteur :

$$\text{Hom}(S, H_g) = \left\{ \begin{array}{l} \text{courbes stables relatives } \pi : C \rightarrow S, \text{ avec isomorphisme} \\ \mathbb{P}(\pi_*(\omega_{C/S}^{\otimes 3})) \cong \mathbb{P}^{5g-6} \times S \\ \text{(modulo isomorphisme)} \end{array} \right\}$$

On a une courbe stable $Z_g \rightarrow H_g$ avec polarisation tricanonique universelle. Construisons le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} H_g^\lambda & \longrightarrow & H_g \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overline{M}_g^\lambda & \longrightarrow & \overline{M}_g \end{array}$$

On a une action de $\mathrm{PGL}(5g-6)$ sur H_g^λ , et le quotient géométrique est \overline{M}_g^λ .

LEMME 1. — $\mathrm{PGL}(5g-6, \mathbb{C})$ opère sans points fixes sur H_g^λ .

Le lemme 1 entraîne l'assertion (ii), car la courbe stable sur H_g^λ est munie d'une donnée de descente relative au morphisme $H_g^\lambda \rightarrow \overline{M}_g^\lambda$. Or le lemme 1 entraîne que l'action de $\mathrm{PGL}(5g-6)$ sur H_g^λ est libre, donc H_g^λ est un fibré principal homogène de groupe $\mathrm{PGL}(5g-6)$ et de base \overline{M}_g^λ , d'après [M 1], prop. 0.9, et cette donnée de descente est effective.

Démontrons donc le lemme 1. — Soit $\alpha \in \mathrm{PGL}(5g-6, \mathbb{C})$ qui ait dans H_g^λ un point fixe, donné par une courbe stable C , une immersion tricanonique $i : C \hookrightarrow \mathbb{P}^{5g-6}$ et un point z de \overline{M}_g^λ représentant C . L'action de α change seulement i en $\alpha \circ i$. Dire que (C, i, z) est un point fixe de α signifie qu'il existe un automorphisme τ de C tel que : $\alpha \circ i = i \circ \tau$ et $z = \tau(z)$. On peut supposer $\lambda = (m)$ avec $m \geq 3$. Comme C engendre \mathbb{P}^{5g-6} , il suffit de montrer que $\tau = \mathrm{Id}$, ce qui résulte du :

LEMME 2. — Soit C une courbe stable, z un point de $M_g^{(m)}$ représentant C_1 et soit τ un isomorphisme de C tel que $\tau(z) = z$. Alors $\tau = \mathrm{Id}$.

On commence par montrer le :

LEMME 3. — Sous les hypothèses du lemme 2, τ agit trivialement sur $H_1(C, \mathbb{Z}/m)$. On rappelle qu'une structure de niveau (m) sur une courbe lisse C est un isomorphisme symplectique : $(\mathbb{Z}/m)^{2g} \cong H_1(C, \mathbb{Z}/m)$.

Le revêtement ramifié $\overline{M}_g^{(m)} \rightarrow \overline{M}_g$, on l'a vu, est galoisien de groupe $\mathrm{Sp}(\mathbb{Z}/m)^{2g}$. En changeant de base dans ce revêtement par l'intermédiaire de $H_g \rightarrow \overline{M}_g$, on ne change pas le groupe du revêtement, mais on gagne le fait que le diviseur $S^* = H_g - H_g^0$ est à croisements normaux en tout point x correspondant à un plongement tricanonique de C . Considérons τ comme élément du groupe $\mathrm{Sp}(\mathbb{Z}/m)^{2g}$. Par hypothèse τ est dans le groupe de ramification en x du revêtement $H_g^{(m)} \rightarrow H_g$. Or ce revêtement est ramifié seulement le long de S^* .

Or supposons que C a exactement k points doubles. D'après [D-M] ou bien le paragraphe 1, on voit que localement en x , S^* est défini par l'équation $\prod_{i=1}^k z_i = 0$. Donc le groupe local d'homotopie en x de $H_g - S^*$ est \mathbb{Z}^k . Or l'image dans $\mathrm{Sp}((\mathbb{Z}/m)^{2g})$ du i -ième générateur est obtenu comme twist de Dehn relativement au cycle évanescant γ_i (voir [M 2], p. 67, [Bi]). En particulier, d'après la formule de Picard-Lefschetz, cet élément du groupe symplectique agit sur $H_1(\Sigma, \mathbb{Z}/m) \cong (\mathbb{Z}/m)^{2g}$ par $l \mapsto l \pm \langle \gamma_i, l \rangle \cdot \gamma_i$. Rappelons la suite exacte de la proposition 1 bis :

$$0 \rightarrow H^1(\Gamma, \mathbb{Z}/m) \rightarrow H_1(\Sigma, \mathbb{Z}/m) \rightarrow H_1(C, \mathbb{Z}/m) \rightarrow 0.$$

Comme γ_i est dans l'image de $H^1(\Gamma, \mathbb{Z}/m)$, il a une image nulle dans $H_1(C, \mathbb{Z}/m)$, et la formule de Picard-Lefschetz montre que l'élément en question de $\mathrm{Sp}(H_1(\Sigma, \mathbb{Z}/m))$ agit trivialement sur $H_1(C, \mathbb{Z}/m)$. Comme τ est dans le groupe de ramification local en x , il en est de même de τ , ce qui démontre le lemme 3.

LEMME 4. — Soit C une courbe stable, τ un automorphisme de C . Si τ agit trivialement sur $H_1(C, \mathbb{Z}/m)$, alors $\tau = \mathrm{Id}$.

La proposition 1 bis nous donne une suite exacte canonique

$$0 \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in A} H_1(\Sigma_\alpha, \mathbb{Z}/m) \rightarrow H_1(C, \mathbb{Z}/m) \rightarrow H_1(\underline{\Gamma}, \mathbb{Z}/m) \rightarrow 0,$$

où $\underline{\Gamma}$ est le graphe pondéré de C , et où les Σ_α sont les normalisées des composantes C_α de C .

Si τ agit trivialement sur $H_1(C, \mathbb{Z}/m)$, il agit trivialement sur $\bigoplus_{\alpha \in A} H_1(\Sigma_\alpha, \mathbb{Z}/m)$ et sur $H_1(\underline{\Gamma}, \mathbb{Z}/m)$.

Si le genre g_α de Σ_α est ≥ 1 , le groupe $H_1(\Sigma_\alpha, \mathbb{Z}/m)$ est non nul, et ceci entraîne que $\tau(C_\alpha) = C_\alpha$.

L'automorphisme τ du graphe $\underline{\Gamma}$ vérifie donc $\tau(s_\alpha) = s_\alpha$. Soit C une boucle de $\underline{\Gamma}$ de sommet s , notons encore c le cycle correspondant dans $H_1(\underline{\Gamma}, \mathbb{Z}/m)$. Deux boucles distinctes ayant des images distinctes dans $H_1(\underline{\Gamma}, \mathbb{Z}/m)$, on a nécessairement $\tau(c) = c$ et $\tau(s) = s$. Soit alors $\underline{\Gamma}'$ le graphe obtenu à partir de $\underline{\Gamma}$ en supprimant toutes les boucles ($\underline{\Gamma}'$ est le graphe considéré dans [D-M]). Il est clair que τ agit encore sur $\underline{\Gamma}'$. Si s_α est un sommet de $\underline{\Gamma}'$ tel que $\tau(s_\alpha) \neq s_\alpha$ alors Σ_α est de genre 0 et C_α n'a pas de points doubles, donc rencontre $\overline{C} - C_\alpha$ au moins trois points; donc s_α est extrémité d'au moins trois arêtes de $\underline{\Gamma}'$. Les trois assertions du lemme 1.17 de [D-M], p. 86, sont donc vérifiées, à ceci près qu'on doit remplacer $H^1(\underline{\Gamma}, \mathbb{Z})$ par $H^1(\underline{\Gamma}, \mathbb{Z}/m)$ dans la troisième assertion. Le raisonnement de *loc. cit.* s'applique toutefois sans changement et montre que τ agit trivialement sur $\underline{\Gamma}'$, donc sur $\underline{\Gamma}$. On a donc $\tau(C_\alpha) = C_\alpha$ pour toute composante C_α de C . De plus τ agit trivialement sur $H_1(\Sigma_\alpha, \mathbb{Z}/m)$. On en déduit que τ agit trivialement sur chaque Σ_α . En effet :

- (a) si Σ_α est de genre ≥ 2 , cela résulte de [Se];
- (b) si Σ_α est de genre 1, d'après [Se] τ agit par translations, mais doit laisser fixe un point de $C_\alpha \cap (\overline{C} - C_\alpha)$, donc τ agit trivialement sur Σ_α ;
- (c) Σ_α est de genre 0 et τ doit laisser fixes trois points de Σ_α , donc τ agit trivialement sur Σ_α .

Ceci achève la démonstration du lemme 4, donc du lemme 1 et de l'énoncé (ii) de la proposition 3.

Soit x un point de Δ^λ ; et soit V un voisinage de x dans \overline{M}_g^λ . L'existence d'après (ii) d'une courbe stable au-dessus de V permet de définir $\pi : V \rightarrow \mathcal{U}$ pour V convenable, où \mathcal{U} comme dans le paragraphe 1 est un polycylindre de \mathbb{C}^{3g-3} base d'une déformation verselle de la courbe stable C_x .

Dans \mathcal{U} le diviseur $\Delta_{\mathcal{U}}$ correspondant aux courbes singulières a pour équation $\prod_{i=1}^k z_i = 0$, où k est le nombre de points doubles de C_x . On a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\quad} & \Delta^\lambda \\ \pi \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{U} & \xrightarrow{\quad} & \Delta^{\mathcal{U}} \end{array}$$

et π est non ramifié en dehors de Δ^λ . Il en résulte que le revêtement π est dominé pour n assez divisible par le revêtement $\mathcal{U}_n \rightarrow \mathcal{U}$:

$$(z_1, \dots, z_{3g-3}) \rightarrow (z_1^n, \dots, z_k^n, z_{k+1}, \dots, z_{3g-3}).$$

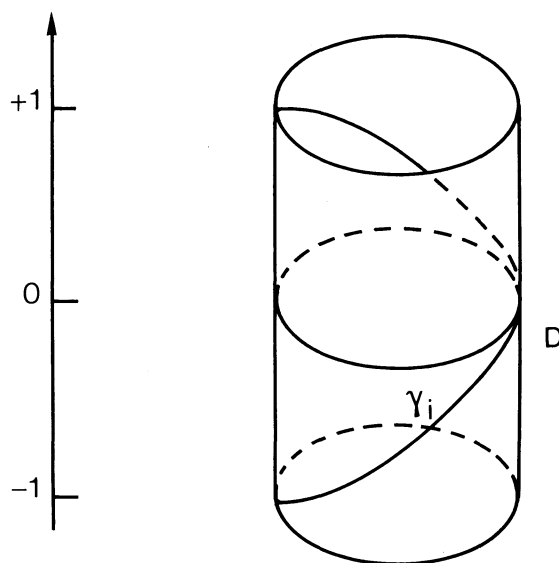
On en déduit que $V = \mathcal{U}_n | H$ pour un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/n)^f$. Ceci établit (iii). ■

Remarque. — Nous n'avons des structures de niveau λ qu'une définition indirecte, *via* la construction de \overline{M}_g^λ . Nous n'en connaissons malheureusement pas d'autre, même dans le cas abélien. La démonstration du lemme 3 donne quand même une idée de ce qu'est une structure de niveau (n) sur une courbe stable.

La démonstration du lemme 3 suggère, pour un point x de Δ , de définir un groupe $\Gamma_x \subset \Gamma_g$, le *groupe de ramification locale en x* (ou encore *groupe de monodromie*). On a vu dans le paragraphe 1 comment la courbe stable C_x à k points doubles s'obtient en contractant k lacets simples disjoints $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ sur une surface Σ de genre g en un point. A chaque lacet γ_i est associé un difféomorphisme $\tau w(\gamma_i)$ de Σ bien défini à homotopie près, le *twist de Dehn* ([De], [M2]). Pour le définir, on considère un voisinage tubulaire D de γ_i dans Σ . On réalise D comme un cylindre $[-1, +1] \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ où γ_i est plongé comme équateur : $\gamma_i = \{0\} \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. $\tau w(\gamma_i)$ conserve D et agit sur D par

$$\begin{aligned} \tau w(\gamma_i) : [-1, +1] \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) &\rightarrow [-1, +1] \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z}), \\ (x, \theta) &\mapsto \left(x, \theta + \frac{1+x}{2} \right). \end{aligned}$$

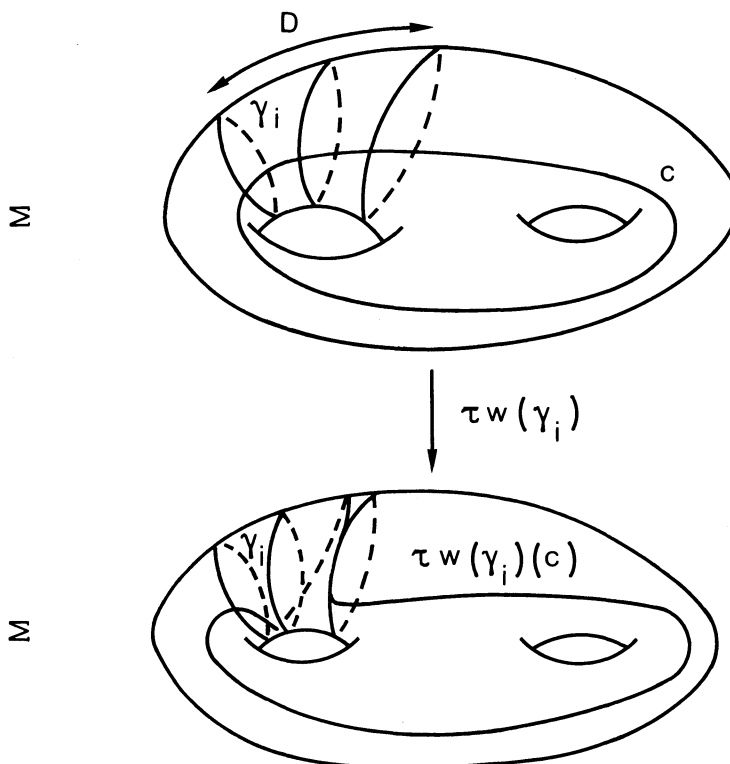
La figure montre l'image par $\tau w(\gamma_i)$ d'une génératrice $[-1, +1] \times \{\theta\}$ du cylindre D , qui est « enroulée d'un tour autour de γ_i ».



On impose à $\tau w(\gamma_i)$ d'agir identiquement sur $\Sigma - D$, ce qui permet de définir un homéomorphisme puisque $\tau w(\gamma_i)$ agit identiquement sur ∂D . Pour obtenir le

difféomorphisme $\tau w(\gamma_i)$ de Σ cherché, il faut « lissifier » $\tau w(\gamma_i)$ au voisinage de ∂D par une méthode classique.

Il est important de remarquer que $\tau w(\gamma_i)$ ne dépend pas de l'orientation de γ_i , et qu'en tant qu'élément de Γ_g , il ne dépend que de la classe d'homotopie libre du lacet γ_i . La figure ci-dessous montre l'image par $\tau w(\gamma_i)$ d'un lacet c .



Notons qu'un twist de Dehn est par définition dextrogyre (les chimistes parleraient de polarisation rotatoire à droite).

Soit alors Γ_x le sous-groupe de Γ_g engendré par les $\tau w(\gamma_i)$. Il est clair que Γ_x est abélien; en effet, deux lacets γ_i et γ_j étant disjoints, les difféomorphismes $\tau w(\gamma_i)$ et $\tau w(\gamma_j)$ commutent si on prend des voisinages tubulaires disjoints de γ_i et de γ_j .

Maskit a démontré dans [Mas] que l'homomorphisme $H^1(\Gamma, \mathbb{Z}) \rightarrow \Gamma_x : v_i \mapsto \tau w(\gamma_i)$ est un isomorphisme. Notre travail permettrait d'ailleurs de retrouver ce résultat.

Soit \mathcal{U} comme précédemment le polycylindre de \mathbb{C}^{3g-3} , base d'une déformation verselle de la courbe C_x . La théorie de la monodromie montre qu'on a $\pi_1(\mathcal{U} - \Delta^{\mathcal{U}}) \cong \Gamma_x$ sans ambiguïté puisque Γ_x est abélien.

Soit λ un niveau fini, et y un point de \overline{M}_g^λ au-dessus de x . D'après la proposition 3, (iii) un voisinage V^λ de y dans \overline{M}_g^λ est un revêtement fini $V^\lambda \rightarrow \mathcal{U}$ étale en dehors de $\Delta^{\mathcal{U}}$; ce revêtement correspond au sous-groupe $\Gamma_x^\lambda = \Gamma_x \cap \Gamma_g^\lambda$ de $\Gamma_x = \pi_1(\mathcal{U} - \Delta^{\mathcal{U}})$ qui s'appelle le *groupe de ramification locale en x du niveau λ* .

Soit (n) un niveau abélien fini avec $n \geq 3$, et soit (λ_m) une tour de niveaux finis dominant (n) . On suppose que deux niveaux de la tour sont dominés par un troisième. On rappelle que $\Delta^{(n)} = \overline{M}_g^{(n)} - M_g^{(n)}$ est à croisements normaux dans $\overline{M}_g^{(n)}$.

DÉFINITION. — Soit Y une variété lisse quasi projective, \overline{Y} une compactification lisse de Y avec croisements normaux à l'infini. Une tour $\{\pi_\alpha : Y_\alpha \rightarrow Y\}$ de revêtements étales galoisiens finis de Y est dite *localement universellement ramifiée* au-dessus de $\overline{Y} - Y$ si pour tout $x \in \overline{Y} - Y$ et tout voisinage \mathcal{U} connexe et simplement connexe assez petit de x dans \overline{Y} , la famille de revêtements étales

$$\pi_\alpha : V_\alpha \rightarrow \mathcal{U} \cap Y$$

$[V_\alpha \text{ étant une composante connexe de } \pi_\alpha^{-1}(\mathcal{U} \cap Y)]$ est cofinale dans la famille des revêtements étales finis de $\mathcal{U} \cap Y$.

PROPOSITION 4. — Soit (λ_m) une tour de niveaux finis dominant un niveau abélien (n) avec $n \geq 3$. La tour des revêtement étales $M_g^{\lambda_m} \rightarrow M_g^{(n)}$ est localement universellement ramifiée au-dessus de $\Delta^{(n)}$ si et seulement si pour tout $x \in \Delta^{(n)}$ et pour tout entier p , il existe m tel que :

$$\Gamma_x^{\lambda_m} = \Gamma_x \cap \Gamma_g^{\lambda_m} \subset p \cdot \Gamma_x.$$

Démonstration. — Soit x un point de $\Delta^{(n)}$, soit $V^{(n)}$ un voisinage convenable de x dans $\overline{M}_g^{(n)}$ et V^{λ_m} une composante connexe de son image inverse dans $\overline{M}_g^{\lambda_m}$. Le groupe fondamental de $V^{(n)} \cap M_g^{(n)}$ est isomorphe à $\Gamma_x^{(n)}$, et le revêtement étale $V^{\lambda_m} \rightarrow V^{(n)} \cap M_g^{(n)}$ correspond au sous-groupe $\Gamma_x^{\lambda_m}$. Ces revêtements sont cofinaux dans la famille des revêtements finis de $V^{(n)} \cap M_g^{(n)}$, si et seulement si les sous-groupes $\Gamma_x^{\lambda_m}$ de Γ_x sont cofinaux dans la famille des sous-groupes d'indice fini de Γ_x . ■

On constate sans surprise que la condition de ramification à l'infini obtenue ne dépend pas du niveau de base (n) .

3. Ramification locale à l'infini des niveaux abéliens

Nous nous donnons une courbe stable C de genre g , à k points doubles. Soit x le point de \overline{M}_g correspondant. Rappelons (voir § 1 et 2) que C s'obtient topologiquement en contractant sur une surface Σ de genre g , k lacets simples, disjoints $\gamma_1, \dots, \gamma_k$. Le groupe Γ_x engendré dans Γ_g par les twists de Dehn $\tau w(\gamma_1), \dots, \tau w(\gamma_k)$ est abélien libre de rang k .

Les niveaux abéliens infini (resp. fini d'ordre m) sont donnés par $\varphi : \Gamma_g \rightarrow \text{Sp}(H_1(\Sigma, \mathbb{Z}))$ [resp. $\varphi^m : \Gamma_g \rightarrow \text{Sp}(H_1(\Sigma, \mathbb{Z}))$]. Considérons les restrictions φ_x (resp. φ_x^m) de ces homomorphismes à Γ_x . D'après la formule de Picard-Lefschetz, $\varphi(\tau w(\gamma_i))$ agit sur $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ par $c \mapsto c + \langle c, \gamma_i \rangle \cdot \gamma_i$.

LEMME 5. — Pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $m \in \mathbb{N}$ telles que

$$\ker(\varphi_x^m) \subset \ker(\varphi_x) + p \cdot \Gamma_x.$$

Démonstration. — Les éléments γ_i de $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ engendrent le sous-groupe $H^1(\Gamma, \mathbb{Z})$. L'endomorphisme $\varphi(\tau w(\gamma_i))$ est donc du type

$$\left[\begin{array}{c|c} \overbrace{H^1(\Gamma, \mathbb{Z})} & \overbrace{H^1(\Gamma, \mathbb{Z})^\perp} \\ \hline \text{I} & * \\ \hline 0 & \text{I} \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} H^1(\Gamma, \mathbb{Z}) \\ (H^1(\Gamma, \mathbb{Z}))^\perp \end{array}$$

Soit H le groupe algébrique des endomorphismes de $H_1(\Sigma)$ de ce type. H est un groupe algébrique unipotent commutatif sur $\text{Sp}(\mathbb{Z})$. On a

$$\varphi_x : \Gamma_x / \ker(\varphi_x) \hookrightarrow H(\mathbb{Z})$$

et

$$\varphi_x^m : \Gamma_x(\ker(\varphi_x)) \xrightarrow{\varphi_x} H(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\rho_m} H(\mathbb{Z}/m),$$

où ρ_m est la « réduction modulo m ». Donc $H \cong \mathbb{G}_a \oplus \dots \oplus \mathbb{G}_a$ et les sous-groupes $\ker(\varphi_m)$ sont évidemment cofinaux dans les sous-groupes d'indice fini de $H(\mathbb{Z})$. ■

LEMME 6. — $\prod_{i=1}^k \tau w(\gamma_i)^{n_i} \in \ker(\varphi)$ si et seulement si

$$\sum_{i=1}^k n_i \gamma_i \otimes \gamma_i = 0 \quad \text{dans} \quad H_1(\Sigma, \mathbb{Z}) \otimes H_1(\Sigma, \mathbb{Z}).$$

Démonstration. — Les γ_i étant disjoints, on a : $\langle \gamma_i, \gamma_j \rangle = 0$. Il résulte de la formule de Picard-Lefschetz que $\sum_{i=1}^k \tau w(\gamma_i)^{n_i}$ agit sur $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ par $c \mapsto c + \sum_{i=1}^k n_i \langle \gamma_i, c \rangle \gamma_i$. Dire que $\prod_{i=1}^k \tau w(\gamma_i)^{n_i} \in \ker(\varphi)$ revient donc à dire que $\sum_{i=1}^k n_i \langle c, \gamma_i \rangle \cdot \gamma_i = 0$ pour tout $c \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$.

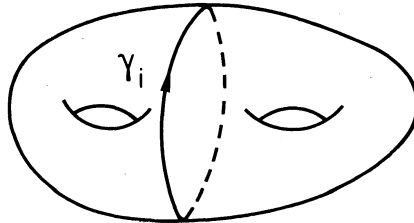
Mais cela équivaut clairement à $\sum_{i=1}^k n_i \gamma_i \otimes \gamma_i = 0$ dans $H_1(\Sigma, \mathbb{Z}) \otimes H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$. ■

Remarque. — S'il était vrai que $\ker(\varphi_x) = 0$, alors d'après le lemme 5 et la proposition 4, la famille des niveaux $M_g(m)$ dominant $M_g^{(n)}$ serait localement universellement ramifiée en x .

Mais on n'a pas toujours $\ker(\varphi_x) = 0$. En effet, il existe des cas :

— où un lacet γ_i est holomorphe à 0 dans Σ .

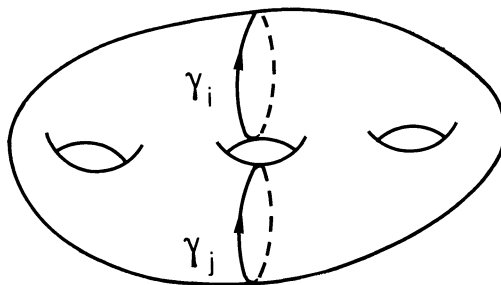
Exemple Σ :



et alors $\tau w(\gamma_i) \in \ker(\varphi_x)$;

— où deux lacets γ_i et γ_j sont homologues dans Σ sans être homologues à 0, et alors $\varphi_x(\tau w(\gamma_i)) = \varphi_x(\tau w(\gamma_j))$ donc $\tau w(\gamma_i) \cdot \tau w(\gamma_j)^{-1} \in \ker(\varphi_x)$.

Exemple :



Ce point sera précisé par la suite.

Nous allons donc étudier : $\Lambda_x = \ker(\varphi_x) = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \ker(\varphi_x^m)$.

Rappelons que Γ_x est isomorphe à $H^1(\underline{\Gamma}, \mathbb{Z})$. Ce groupe contient les images v_1, \dots, v_k des arêtes du graphe $\underline{\Gamma}$.

DÉFINITION. — Soit L un groupe abélien libre de rang fini, et soient x_1, \dots, x_k une famille d'éléments de L qui l'engendrent. On dit que la famille x_1, \dots, x_k est *totalelement unimodulaire* si, pour tout ensemble $J \subset \{1, \dots, k\}$, les deux conditions suivantes sont simultanément vraies ou simultanément fausses :

- (a) les x_i pour $i \in J$ engendrent $L \otimes \mathbb{Q}$ comme espace vectoriel sur \mathbb{Q} ;
- (b) les x_i pour $i \in J$ engendrent L comme groupe abélien.

LEMME 7. — La famille x_1, \dots, x_k d'éléments de L est totalelement unimodulaire si et seulement si, dans une base de L formée d'éléments x_i , la matrice de colonnes x_1, \dots, x_k est totalelement unimodulaire (i.e. tout mineur de la matrice de tout ordre vaut ± 1 , 0, où -1). Si cette condition est vérifiée dans une base de ce type, elle est vraie dans toute base de ce type. ■

On retrouve ainsi une notion coutumière en analyse combinatoire et en mathématiques appliquées.

Le lemme suivant serait dû à Poincaré.

LEMME 8. — La famille v_1, \dots, v_k d'éléments de $H^1(\underline{\Gamma}, \mathbb{Z})$ est totalelement unimodulaire.

Démonstration. — Soit $J \subset \{1, \dots, k\}$ tel que les v_i pour $i \in J$ engendrent $H^1(\underline{\Gamma}, \mathbb{Q})$. On doit montrer que les v_i pour $i \in J$ engendrent $H^1(\underline{\Gamma}, \mathbb{Z})$ comme \mathbb{Z} -module. Il est clair qu'on peut supposer J de cardinal n , où n est le genre de $\underline{\Gamma}$, c'est-à-dire la dimension de $H^1(\underline{\Gamma}, \mathbb{Z})$. Soit $\underline{\Gamma}_J$ le graphe qui a mêmes sommets que $\underline{\Gamma}$, et dont les arêtes sont les v_i pour $i \notin J$. On prétend que $\underline{\Gamma}_J$ est un *arbre maximal* de $\underline{\Gamma}$. Il suffit pour cela de démontrer que $\underline{\Gamma}_J$ est une *forêt* (i.e. une réunion disjointe d'arbres). Dans le cas contraire, $\underline{\Gamma}_J$ contiendrait un cycle c de $\underline{\Gamma}$. Comme pour $i \in J$, c ne rencontre pas v_i , on aurait $\langle c, v_i \rangle = 0$ pour $v_i \in J$ donc $c = 0$ puisque les $v_i (i \in J)$ engendrent $H^1(\underline{\Gamma}, \mathbb{Q})$, ce qui est idiot.

Soit H le sous-groupe de $H^1(\Gamma, \mathbb{Z})$ engendré par les v_i pour $i \in J$. Soit c un sommet de Γ_J ; soient v_{i_1}, \dots, v_{i_r} les arêtes de Γ_J de sommet c , et soient v_{j_1}, \dots, v_{j_s} les arêtes de Γ de sommet c qui ne sont pas arêtes de Γ_J . Si on note $\partial_J^* : C^0(\Gamma_J, \mathbb{Z}) \rightarrow C^1(\Gamma_J, \mathbb{Z})$ le cobord simplicial de Γ_J , on a :

$$\partial^*(c) = \sum_{p=1}^r v_{i_p} + \sum_{q=1}^s v_{j_q} \quad \text{et} \quad \partial_J^*(c) = \sum_{p=1}^r v_{i_p}$$

(en orientant convenablement toutes ces arêtes). Comme v_{j_1}, \dots, v_{j_s} sont dans H , on a : $\partial_J^*(c) \equiv \partial^*(c) \equiv 0$ modulo H . Or toute arête v_i de Γ_J est combinaison linéaire d'éléments $\partial_J^*(c)$, puisque $H^1(\Gamma_J, \mathbb{Z}) = 0$, car Γ_J est un arbre. Donc toute arête v_i de Γ_J est dans H . Comme H contient les autres arêtes de Γ , i.e. les v_i pour $i \in J$, on a : $H = H^1(\Gamma, \mathbb{Z})$. ■

Soit $B \subset \{1, \dots, k\}$ l'ensemble des i tels que $v_i = 0$ dans $H^1(\Gamma, \mathbb{Z})$ ou $\gamma_i = 0$ dans $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$. Considérons le sous-groupe Λ_x de Γ_x engendré par

- $\tau w(\gamma_i)$ pour $i \in B$;
- $\tau w(\gamma_i) \cdot \tau w(\gamma_j)^{-1}$ pour $\gamma_i \sim \pm \gamma_j$.

PROPOSITION 5. — $\Lambda_x \subset \Gamma_x$ est le noyau de ϕ_x .

Démonstration. — La formule de Picard-Lefschetz (ou le lemme 6) montre que $\Lambda_x \subset \ker(\phi_x)$. D'autre part, soit E un sous-ensemble de $\{1, \dots, k\} - B$ tel que l'on ait :

$$\Gamma_x = \Lambda_x \oplus \mathbb{Z}^E,$$

où \mathbb{Z}^E est engendré par les $\tau w(\gamma_i)$ pour $i \in E$. Un tel ensemble, qu'il est facile de construire, donne une famille réduite $\{v_i\}_{i \in E}$ d'éléments de Γ_x . Ceci veut dire que pour $i \in E$, on a : $v_i \neq 0$ et pour $i, j \in E$ et $i \neq j$, on a $v_i \neq \pm v_j$. D'après le lemme 8, la famille $\{v_i\}_{i \in E}$ est totalement unimodulaire dans $H^1(\Gamma, \mathbb{Z})$.

On va montrer que la restriction de ϕ à \mathbb{Z}^E est injective. Supposons en effet $\phi(\prod_{i \in E_1} \tau w(\gamma_i)^{n_i}) = \text{Id}$; d'après le lemme 6 on a $\sum_{i \in E} n_i \gamma_i \otimes \gamma_i = 0$ dans $H^1(\Gamma, \mathbb{Z}) \otimes H^1(\Gamma, \mathbb{Z})$ [ou dans $H_1(\Sigma, \mathbb{Z}) \otimes H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$]. Mais on est maintenant en position d'appliquer le théorème de Baklawski, démontré en Appendice. Donc $n_i = 0, \forall i \in E$.

Il est facile de reconnaître les v_i tels que $v_i \sim 0$ et les v_i, v_j tels que $v_i \sim \pm v_j$.

PROPOSITION 6. — Soit Γ un graphe connexe :

- (i) soit v une arête de Γ . Alors v est nulle dans $H^1(\Gamma, \mathbb{Z})$ si et seulement si le sous-graphe $\Gamma - v$ de Γ a deux composantes connexes;
- (ii) soient v_1, v_2 deux arêtes de Γ telles que $v_1 = \pm v_2$ dans $H^1(\Gamma, \mathbb{Z})$. Le graphe $\Gamma - (v_1 \cup v_2)$ a deux composantes connexes si $v_1 \neq 0$ et trois si $v_1 = 0$;
- (iii) soient v_1, v_2, \dots, v_l des arêtes de Γ telles que $v_1 = \pm v_2 = \dots = \pm v_l \neq 0$ dans $H^1(\Gamma, \mathbb{Z})$.

Alors, pour une numérotation convenable des v_i , le graphe $\Gamma - (\bigcup_{i=1, 2, \dots, l} v_i)$ a l composantes

connexes $\underline{\Gamma}_1, \dots, \underline{\Gamma}_l$ et $\underline{\Gamma}_i$ est une composante connexe de $\underline{\Gamma} - (v_{i-1} \cup v_i)$ (les indices sont considérés comme éléments de \mathbb{Z}/l).

Démonstration :

(i) Supposons que $\underline{\Gamma} - v$ a deux composantes connexes $\underline{\Gamma}_1$ et $\underline{\Gamma}_2$. Soit A_1 l'ensemble des sommets de $\underline{\Gamma}_1$, et considérons $\partial^* (\sum_{s \in A_1} [s])$ comme élément de $C^1(\underline{\Gamma}, \mathbb{Z})$. C'est une somme où chaque arête de $\underline{\Gamma}_1$ apparaît deux fois, avec des coefficients respectifs $+1$ et -1 , et où v apparaît une fois, avec un coefficient ± 1 . On a donc $\partial^*(\Sigma(s)) = \pm v$, donc v est nul dans $H^1(\underline{\Gamma}, \mathbb{Z}) = C^1(\underline{\Gamma}) / \partial^* C^0(\underline{\Gamma})$.

Supposons réciproquement $v=0$ dans $H^1(\underline{\Gamma}, \mathbb{Z})$. On peut alors écrire $v = \partial^* (\sum_{s \in A'} n_s \cdot [s])$, où A' est un ensemble de sommets de $\underline{\Gamma}$, et où $n_s \neq 0$ pour tout $s \in A'$. Soit A l'ensemble de tous les sommets de $\underline{\Gamma}$. On peut supposer $A' \neq A$; en effet on a : $\partial^* (\sum_{s \in A} [s]) = 0$, donc on peut s'arranger pour annuler un coefficient n_s . Soit maintenant v_1 une arête de $\underline{\Gamma}$ dont un sommet s_1 est dans A' , et supposons $v_1 \neq v$. Alors on prétend que l'autre sommet s_2 de v_1 est dans A' . En effet v_1 apparaît dans $\partial^*(s_1)$ avec un coefficient ± 1 . Comme $n_{s_1} \neq 0$, et comme $\partial^* (\sum_{s \in A} n_s \cdot [s]) = v$, il doit exister un $s \in A'$ avec $s \neq s_1$, tel que $\partial^*[s]$ contienne v_1 avec un coefficient ± 1 . Mais cela veut dire que $s = s_2$ donc $s_2 \in A'$. Soit alors $s \in A'$ et $s' \in A - A'$; ils sont donc dans deux composantes connexes distinctes de $\underline{\Gamma} - v$. Donc $\underline{\Gamma} - v$ a deux composantes connexes.

(ii) Soient v_1 et v_2 deux arêtes de $\underline{\Gamma}$ telles que $v_1 \sim \pm v_2$. Montrons que $\underline{\Gamma} - (v_1 \cup v_2)$ n'est pas connexe. Comme en (i), on peut écrire $v_1 \pm v_2 = \partial^* (\sum_{s \in A'} n_s \cdot [s])$ où $A' \subsetneq A$. Si v est une arête de $\underline{\Gamma}$, distincte de v_1 et de v_2 , et si v a un sommet dans A' , l'autre sommet est aussi dans A' . On conclut comme en (i).

Donc $\underline{\Gamma} - (v_1 \cup v_2)$ a au moins deux composantes connexes. Il est clair que $\underline{\Gamma} - (v_1 \cup v_2)$ a trois composantes connexes si et seulement si $\underline{\Gamma} - v_1$ a deux composantes connexes, donc si et seulement si $v_1 = 0$ dans $H^1(\underline{\Gamma}, \mathbb{Z})$.

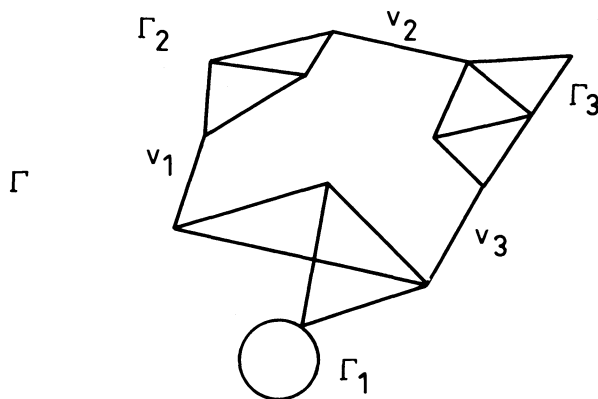
(iii) Soient $\underline{\Gamma}_j$ les composantes connexes du graphe $\underline{\Gamma} - \left(\bigcup_{i=1}^l v_i \right)$. On prétend que pour tout j , exactement deux des arêtes v_i ($1 \leq i \leq l$) ont un sommet dans $\underline{\Gamma}_j$. Soit en effet k le nombre des arêtes v_i qui ont un sommet dans $\underline{\Gamma}_j$.

On a $k \geq 2$, car $\underline{\Gamma}_j$ est une composante connexe de $\underline{\Gamma}$ privé de ces k arêtes, qui serait connexe d'après (ii).

On a $k \leq 2$, car soient v_1, v_2 deux telles arêtes. D'après (ii), le graphe $\underline{\Gamma} - (v_1 \cup v_2)$ a exactement deux composantes connexes, et $\underline{\Gamma}_j$ est forcément l'une d'entre elles. Une troisième arête v_j connecterait $\underline{\Gamma}_j$ à la deuxième composante connexe, ce qui est impossible. On en déduit qu'il y a l composantes $\underline{\Gamma}_j$.

On peut donc numérotter les v_i et les Γ_i par \mathbb{Z}/l de sorte que pour $i \in \mathbb{Z}/l$, les deux arêtes qui ont un sommet dans Γ_i soient v_{i-1} et v_i . Ceci démontre (iii). ■

La signification de l'énoncé (iii) est que les v_1, \dots, v_l forment une *chaîne* comme dans la figure.



COROLLAIRE. — Soient $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ les lacets simples disjoints sur la surface Σ de genre g associés à la courbe stable C .

- (i) On a $\gamma_i = 0$ dans $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ si et seulement si $\Sigma - \gamma_i$ a deux composantes connexes.
- (ii) Supposons : $\gamma_i = \pm \gamma_j$ dans $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$. Alors $\Sigma - (\gamma_i \cup \gamma_j)$ a au moins deux composantes connexes; $\Sigma - (\gamma_i \cup \gamma_j)$ a deux composantes si $\gamma_i \neq 0$ et trois composantes si $\gamma_i = 0$.
- (iii) Supposons $\gamma_1 = \pm \gamma_2 = \dots = \pm \gamma_l$ dans $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$. Alors, pour une numérotation convenable des γ_i , la surface $\Sigma - \left(\bigcup_{i=1}^l \gamma_i \right)$ a exactement l composantes connexes $\Sigma_1, \dots, \Sigma_l$, et Σ_i est une composante connexe de $\Sigma - (\gamma_{i-1} \cup \gamma_i)$.

Démonstration. — Dans le paragraphe 1, on a décrit Σ comme réunion de surfaces de genre g_x trouées Σ_x^0 , avec des identifications entre un cercle de Σ_x^0 et un cercle Σ_x^0 , pour toute arête v de Γ de sommets s_x et $s_{x'}$. Il en résulte que pour tout ensemble I d'arêtes, $\Gamma - \left(\bigcup_{i \in I} v_i \right)$ et $\Sigma - \left(\bigcup_{i \in I} \gamma_i \right)$ ont le même nombre de composantes connexes. D'après la proposition 1, on a : $\gamma_i = j(v_i)$ où j est l'inclusion de $H^1(\Gamma, \mathbb{Z})$ dans $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$. Le corollaire découle donc bien de la proposition 6. ■

4. Niveaux diédraux

Les niveaux abéliens ne permettent pas d'obtenir une famille de revêtements de $M_g^{(n)}$ localement universellement ramifié au-dessus de $\Delta^{(n)}$; cela est dû au fait que Λ_x , le noyau de φ_x , est non nul en général, comme on l'a vu au paragraphe 3. Nous sommes donc conduits à introduire d'autres niveaux.

DÉFINITION. — Le niveau diédral d'ordre infini (noté D_∞) est défini par l'homomorphisme $f : \Gamma_g \rightarrow \text{Aut}_{\text{ext}}(\pi_g | [\pi_g^{(2)}, \pi_g^{(2)}])$ associé au sous-groupe caractéristique $[\pi_g^{(2)}, \pi_g^{(2)}]$ de π_g .

Le niveau diédral d'ordre m (noté D_m) est défini par l'homomorphisme $f_m : \Gamma_g \rightarrow \text{Aut}_{\text{ext}}(\pi_g | [\pi_g^{(2)}, \pi_g^{(2)}] \cdot \pi_g^{(2m)})$ associé au sous-groupe caractéristique $[\pi_g^{(2)}, \pi_g^{(2)}] \cdot \pi_g^{(2m)}$ de π_g .

Remarques. — Comme dans le paragraphe 2, $\pi_g^{(2m)}$ est le sous-groupe de π_g engendré par les x^{2m} pour $x \in \pi_g$. Observons que $\pi_g | [\pi_g^{(2)}, \pi_g^{(2)}]$ est extension de $\pi_g^{(2)} | [\pi_g^{(2)}, \pi_g^{(2)}] \cong \mathbb{Z}^{2g(g-1)+1}$ par $\pi_g | \pi_g^{(2)} \cong (\mathbb{Z}/2)^{2g}$. De même $\pi_g | [\pi_g^{(2)}, \pi_g^{(2)}] \cdot \pi_g^{(2m)}$ est extension de $(\mathbb{Z}/m)^{2g \cdot (g-1)+1}$ par $(\mathbb{Z}/2)^{2g}$. Ceci sera explicité plus loin. On en retiendra que les niveaux D_m sont finis.

Les homomorphismes f et f_m sont d'un maniement mal commode, même si on les restreint à Γ_x . Pourtant nous entendons démontrer le résultat suivant.

THÉORÈME. — Soit $n \geq 3$. La tour des revêtements étales galoisiens finis $M_g^{D_n} \rightarrow M_g^{(n)}$ (pour m multiple de n) est localement universellement ramifiée au-dessus de $\Delta^{(n)}$.

Montrons d'abord que les niveaux diédraux dominent les niveaux abéliens.

LEMME 9. — Le niveau D_m domine le niveau abélien $(2m)$ et le niveau D_∞ domine le niveau abélien infini.

Démonstration. — Il s'agit de montrer que $\ker(f_m) \subset \ker(\varphi^{2m})$. En effet, soit $\gamma \in \pi_g$ tel que $f_m(\gamma) = 1$. Soit $\bar{\gamma}$ un automorphisme γ de π_g qui représente l'élément γ de $\text{Aut}_{\text{ext}}(\pi_g)$. Par hypothèse, $\bar{\gamma}$ induit un automorphisme intérieur de $\pi_g | [\pi_g^{(2)}, \pi_g^{(2)}] \cdot \pi_g^{(2m)}$ donc $\bar{\gamma}(\xi) \cdot \xi^{-1} \in [\pi_g^{(2)}, \pi_g^{(2)}] \cdot \pi_g^{(2m)}$. Comme $[\pi_g^{(2)}, \pi_g^{(2)}] \subset [\pi_g, \pi_g]$, on en déduit que $\bar{\gamma}$ induit un automorphisme intérieur de $\pi_g | [\pi_g, \pi_g] \cdot \pi_g^{(2m)}$, donc que $\gamma \in \ker(\varphi^{2m})$. On montre par la même méthode que $\ker(f) \subset \ker(\varphi)$. ■

Nous allons nous intéresser aux sous-groupes d'indice 2 de π_g . On les décrit comme images réciproques de sous-groupes d'indice 2 de $\pi_g | \pi_g^{(2)}$. Ce dernier groupe est isomorphe à $H_1(\Sigma, \mathbb{Z}/2)$ sur lequel on dispose du cup-produit $\langle \ , \ \rangle$ à valeurs dans $\mathbb{Z}/2$. Un sous-groupe d'indice 2 de $H_1(\Sigma, \mathbb{Z}/2)$ est l'orthogonal (pour $\langle \ , \ \rangle$) d'un unique élément a non nul de $H_1(\Sigma/2)$. On note π_g^a le sous-groupe d'indice 2 de π_g correspondant. On fixe un point x de $\Delta^{(n)}$.

Remarquons que pour $\gamma \in \Gamma_g$ et $\varphi^2(\gamma)$ l'image de γ dans $Sp(H_1(\Sigma, \mathbb{Z}/2))$, on a : $\bar{\gamma}(\pi_g^a) = \pi_g^{\varphi^2(\gamma) \cdot a}$ pour tout automorphisme $\bar{\gamma}$ de π_g représentant γ . En particulier, si $\gamma \in \ker(\varphi^2)$, alors $\bar{\gamma}(\pi_g^a) = \pi_g^a$ pour tout $a \in M_1(\Sigma, \mathbb{Z}/2) - \{0\}$. Or $\gamma \in \ker(\varphi^2)$ si $\gamma \in 2 \cdot \Gamma_x$ d'après la formule de Picard-Lefschetz (voir § 3). Donc tout $\bar{\gamma}$ représentant γ induit un automorphisme de π_g^a , donc du quotient abélien $\pi_g^a | [\pi_g^a, \pi_g^a]$. Bien entendu, $\bar{\gamma}$ n'est pas unique, et peut être remplacé par $\bar{\gamma} \circ c_\xi$ (où $\xi \in \pi_g$ et c_ξ est l'automorphisme intérieur : $\eta \mapsto \xi \cdot \eta \cdot \xi^{-1}$). Et si ξ n'est pas dans π_g^a , on voit que c_ξ induit un automorphisme non trivial de $\pi_g^a | [\pi_g^a, \pi_g^a]$. Mais élevons $\bar{\gamma}$ au carré :

$$(\bar{\gamma} \circ c_\xi)^2 = \bar{\gamma}^2 \cdot (\bar{\gamma}^{-1} \circ c_\xi \circ \bar{\gamma}) \circ c_\xi = \bar{\gamma}^2 \circ c_{\bar{\gamma}(\xi)^{-1} \cdot \xi}.$$

Du fait que $\gamma \in \ker(\varphi^2)$, on a : $\bar{\gamma}(\xi^{-1}) \cdot \xi \in \pi_g^{(2)} \subset \pi_g^a$, donc $c_{\bar{\gamma}(\xi)^{-1} \cdot \xi}$ induit l'identité sur $\pi_g^a | [\pi_g^a, \pi_g^a]$. Nous avons donc démontré le :

LEMME 10. — La restriction de f au sous-groupe $4.\Gamma_x$ de Γ_g permet de définir, par restriction à π_g^a d'un automorphisme de π_g , un homomorphisme

$$h^a : 4.\Gamma_x \rightarrow \text{Aut}(\pi_g^a | [\pi_g^a, \pi_g^a]).$$

De la même façon on définit un homomorphisme :

$$h_m^a : 4.\Gamma_x \rightarrow \text{Aut}(\pi_g^a | [\pi_g^a, \pi_g^a].\pi_g^{a(m)}). \quad \blacksquare$$

Il faut bien prendre garde que les homomorphismes h^a et h_m^a ne correspondent pas à des niveaux. Il est facile toutefois de préciser leur liaison avec les niveaux diédraux.

LEMME 11. — $4.\Gamma_x \cap 2.\ker(f_m) \subset \ker(h_m^a)$ pour $a \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z}/2) = \{0\}$. De même $4.\Gamma_x \cap 2.\ker(f) \subset \ker(h^a)$.

Démonstration. — Considérons $\gamma \in \ker(f_m)$ tel que $\gamma^2 \in 4.\Gamma_x$. Pour $\bar{\gamma}$ un automorphisme de π_g représentant γ , on a donc : $\bar{\gamma} = c_\xi$ (pour $\xi \in \pi_g$) comme automorphisme de $\pi_g | [\pi_g^{(2)}, \pi_g^{(2)}].\pi_g^{(2m)}$. En particulier, on a : $\bar{\gamma}^2 = c_{\xi^2}$ et $\xi^2 \in \pi_g^{(2)} \subset \pi_g^a$, donc $\bar{\gamma}^2$ induit un automorphisme intérieur de $\pi_g^a | [\pi_g^{(2)}, \pi_g^{(2)}].\pi_g^{(2m)}$. Comme $[\pi_g^{(2)}, \pi_g^{(2)}].\pi_g^{(2m)} \subset [\pi_g^a, \pi_g^a].\pi_g^{a(m)}$, a fortiori $\bar{\gamma}^2$ induit un automorphisme intérieur de $\pi_g^a | [\pi_g^a, \pi_g^a].\pi_g^{a(m)}$; cela signifie que $\bar{\gamma}^2 \in \ker(h_m^a)$ d'après la définition de h_m^a . Le même argument montre la deuxième inclusion. \blacksquare

Nous allons réduire le théorème à l'énoncé suivant :

PROPOSITION 8. — Pour tout $x \in \Delta^{(n)}$, la famille des sous-groupes $\bigcap_{\substack{a \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z}/2) \\ a \neq 0}} \ker(h_m^a)$ de $4.\Gamma_x$

est cofinale dans la famille des sous-groupes d'indice fini de $4.\Gamma_x$.

LEMME 12. — La proposition 8 implique le théorème.

Démonstration. — D'après la proposition 4, l'énoncé du théorème équivaut à dire que pour tout $x \in \Delta^{(n)}$, les sous-groupes $\Gamma_x^{\Delta_n}$ de Γ_x définis par $\Gamma_x^{\Delta_n} = \ker(f_m) \cap \Gamma_x$ sont cofinaux dans la famille des sous-groupes d'indice fini de Γ_x . Il résulte du lemme 11 qu'il suffit qu'il en soit ainsi des sous-groupes

$$\bigcap_{\substack{a \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z}/2) \\ a \neq 0}} \ker(h_m^a) \text{ de } 4.\Gamma_x. \quad \blacksquare$$

L'intérêt des homomorphismes h^a est qu'on peut en donner une description géométrique. Rappelons pour cela qu'au sous-groupe π_g^a d'indice 2 de π_g correspond un revêtement étale Σ_a de degré 2 de la surface topologique de genre g . Notons π la projection $\pi : \Sigma_a \rightarrow \Sigma$, soit τ l'involution de ce revêtement double. On a une décomposition : $H_1(\Sigma_a, \mathbb{Q}) = H^+ \oplus H^-$ en espaces propres de τ . Cette décomposition est valable sur $\mathbb{Z}[1/2]$, mais pas sur \mathbb{Z} . On identifie H^+ à $H_1(\Sigma, \mathbb{Q})$ de sorte que la projection de $H_1(\Sigma_a, \mathbb{Q})$ sur $H_1(\Sigma, \mathbb{Q})$ soit π_* et l'inclusion de $H_1(\Sigma, \mathbb{Q})$ dans $H_1(\Sigma_a, \mathbb{Q})$ soit $\pi^*/2$.

Par ailleurs, on choisit un point-base s_a sur Σ_a et un point base s sur Σ avec $s = \pi(s_a)$. On identifie $\pi_1(\Sigma_a, s_a)$ à π_g^a et $\pi_1(\Sigma, s)$ à π_g de sorte que l'homomorphisme π_* de $\pi_1(\Sigma_a, s_a)$ vers $\pi_1(\Sigma, s)$ ne soit autre que l'inclusion $\pi_g^a \subset \pi_g$.

LEMME 13. — Soit γ un lacet simple de Σ , et $\bar{\gamma}$ l'image de γ dans $H_1(\Sigma, \mathbb{Z}/2)$. Alors :

- (i) si $\langle \bar{\gamma}, a \rangle = 1$ dans $\mathbb{Z}/2$, $\pi^{-1}(\gamma) \subset \Sigma_a$ est un lacet connexe;
- (ii) si $\langle \bar{\gamma}, a \rangle = 0$ dans $\mathbb{Z}/2$, $\pi^{-1}(\gamma) \subset \Sigma_a$ est réunion disjointe de deux lacets connexes c_1 et c_2 . De plus si c_1 est homologue à $\pm c_2$ dans Σ_a , alors γ est homologue à 0 dans Σ .

Démonstration. — La restriction de π au lacet γ est un revêtement double de γ ; le groupe de ce revêtement est $\pi_1(\gamma) \cap \pi_g^a \subset \pi_1(\gamma)$. Or γ est un cercle donc $\pi_1(\gamma) \cong \mathbb{Z}$; le groupe du revêtement est égal à $\pi_1(\gamma)$ si et seulement si on a $\gamma \in \pi_g^a$ en tant qu'élément de $\pi_1(\Sigma, s)$, donc si et seulement si $\langle \bar{\gamma}, a \rangle = 0$ dans $\mathbb{Z}/2$, vu la définition de π_g^a . Or cette condition revient aussi à dire que le revêtement double de $\bar{\gamma}$ est trivial (ou décomposé). Ceci démontre (i) et la première phrase de (ii).

Supposons donc $\pi^{-1}(\gamma) = c_1 \cup c_2$, avec $c_2 = \tau(c_1)$, et supposons c_2 homologue à $\pm c_1$ dans Σ_a . Si γ n'est pas homologue à 0 dans Σ , le corollaire de la proposition 6 dit que $\Sigma - \gamma$ est connexe; donc il existe un lacet δ de Σ qui rencontre γ transversalement en un point. On peut supposer de plus $\langle \delta, \alpha \rangle = 0 \pmod{2}$. Alors $\pi^{-1}(\delta) = \delta_1 \cup \delta_2$, où δ_1 et δ_2 sont deux lacets disjoints de Σ_a . $\pi^{-1}(\delta)$ et $\pi^{-1}(\gamma)$ se coupent en deux points dans Σ_a ; supposons par exemple $c_1 \cap \delta_1 \neq \emptyset$; alors en utilisant $c_2 = \tau(c_1)$ et $\delta_2 = \tau(\delta_1)$, on a : $c_2 \cap \delta_2 \neq \emptyset$; mais cela entraîne $c_2 \cap \delta_1 = \emptyset$. Donc on a : $\langle c_1, \delta_1 \rangle = \pm 1$ dans Σ_a alors que $\langle c_2, \delta_1 \rangle = 0$, donc c_1 et c_2 ne peuvent être homologues. ■

Nous passons au calcul de h^a . Rappelons que Γ_x est engendré par les twists de Dehn $\tau w(\gamma_i)$ associés à un ensemble fini de lacets simples disjoints γ_i sur une surface Σ de genre g (voir § 2).

LEMME 14. — L'homomorphisme h^a se factorise à travers $\text{Sp}(H_1(\Sigma_a, \mathbb{Z}))$. Si γ est un lacet simple sur Σ comme plus haut.

- (i) Si $\pi^{-1}(\gamma)$ est un lacet connexe c de Σ_a , on a :

$$h^a(\tau w(\gamma)^4) = \tau w(c)^2$$

dans $\text{Sp}(H_1(\Sigma_a, \mathbb{Z}))$;

- (ii) Si $\pi^{-1}(\gamma)$ est réunion disjointe de deux lacets connexes c_1 et c_2 , on a :

$$h^a(\tau w(\gamma)^4) = \tau w(c_1)^4 \circ \tau w(c_2)^4 = \tau w(c_2)^4 \circ \tau w(c_1)^4$$

dans $\text{Sp}(H_1(\Sigma_a, \mathbb{Z}))$.

Démonstration. — Rappelons qu'on a défini un homomorphisme

$$h^a : 4.\Gamma_x \rightarrow \text{Aut}(\pi_g^a | [\pi_g^a, \pi_g^a])$$

(voir l'énoncé du lemme 10). Or :

$$\pi_g^a \cong \pi_1(\Sigma_a, s_a) \quad \text{donc} \quad \pi_g^a([\pi_g^a, \pi_g^a]) \cong H_1(\Sigma_a, \mathbb{Z}).$$

En tous cas $h^a(\tau w(\gamma)^4)$ est un automorphisme de $H_1(\Sigma_a, \mathbb{Z})$. Si on démontre (i) et (ii), alors c'est un automorphisme symplectique, pour le cup-produit de $H_1(\Sigma_a, \mathbb{Z})$. Or les $\tau w(\gamma_i)^4$ engendrent $4.\Gamma_x$, d'où la première assertion.

Soit δ un lacet de Σ_a , et calculons $h^a(\tau w(\gamma)^4)(\delta)$ dans $H_1(\Sigma_a, \mathbb{Z})$. On suppose que δ est centré au point base s_a . On projette δ sur Σ pour obtenir un lacet $\pi(\delta)$ centré en s . On applique $\tau w(\gamma)^4$ à l'élément $\pi(\delta)$ de $\pi_g \cong \pi_1(S, s)$. On sait alors que $\tau w(\gamma)^4(\pi(\delta))$ est l'image par π d'un lacet η de Σ_a centré en s_a . La classe de η dans $H_1(\Sigma_a, \mathbb{Z})$ n'est autre que le transformé par $h^a(\tau w(\gamma)^4)$ de δ . Ceci est une lecture enfantine de la définition de h^a (cf. lemme 10).

Pour obtenir les formules de l'énoncé, on représente $\tau w(\gamma)$ par un homéomorphisme de Σ comme au paragraphe 2, en choisissant une représentation d'un voisinage tubulaire de γ dans Σ comme un cylindre D . Dans le cas (i), $\pi^{-1}(D)$ est un cylindre D' d'équateur c , le revêtement de degré 2 s'écrit en coordonnées cylindriques :

$$\pi|_{D'} : (x, \theta) \mapsto (x, 2\theta).$$

On a : $\pi \circ \tau w(c) = \tau w(\gamma)^2 \circ \pi$ comme homéomorphismes de Σ . En dehors de D' c'est évident et pour $(x, \theta) \in D'$ on a le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (x, \theta) & \xrightarrow{\tau w(c)} & \left(x, \theta + \frac{1+x}{2}\right) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ (x, 2\theta) & \xrightarrow{\tau w(\gamma)^2} & (x, 2\theta + 1 + x) \end{array}$$

Dans le cas (ii), $\pi^{-1}(D)$ est l'union de deux cylindres D_1 et D_2 . On montre alors sans peine la formule :

$$\pi \circ \tau w(c_1) \circ \tau w(c_2) = \tau w(\gamma) \circ \pi,$$

en regardant successivement dans D_1 , dans D_2 , et dans $\Sigma_a - (D_1 \cup D_2)$. ■

C'est ce lemme qui permet d'utiliser pratiquement les homomorphismes h^a (à valeurs dans $\text{Sp}(H_1(\Sigma_a, \mathbb{Z}))$ et h_m^a [à valeurs dans $\text{Sp}(H_1(\Sigma_a, \mathbb{Z}/m))$].

La figure de la page suivante montre la situation dans le cas (i), le cas (ii) étant sans intérêt graphique.

Nous allons remplacer la proposition 8 par un énoncé plus simple :

PROPOSITION 9 :

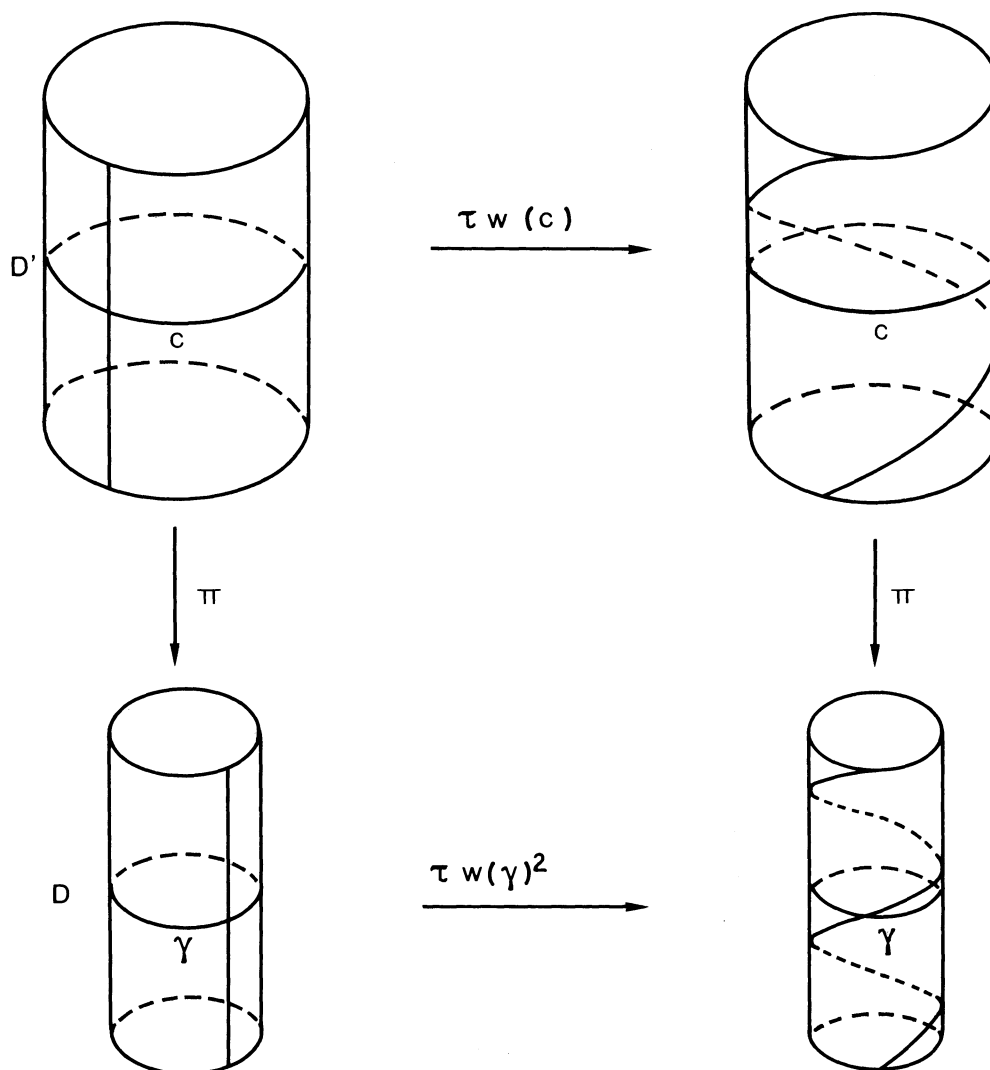
$$\bigcap_{a \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z}/2)} \ker(h^a) = \{0\}.$$

LEMME 15. — La proposition 9 implique la proposition 8.

Démonstration. — Le lemme 14 montre que pour chaque a , il existe un sous-groupe algébrique unipotent commutatif H_a de $\text{Sp}(H_1(\Sigma_a, \mathbb{Z}))$, défini sur \mathbb{Z} , tel que h^a se factorise par $H_a(\mathbb{Z})$ et que l'on ait :

$$h_m^a = \rho_m \circ h^a,$$

où $\rho_m : H_a(\mathbb{Z}) \rightarrow H_a(\mathbb{Z}/m)$ est la « réduction modulo m ».



Si $H = \prod_{\substack{a \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z}/2) \\ a \neq 0}} H_a$, on voit que $\prod h^a$ est à valeurs dans $H(\mathbb{Z})$ et que $\prod h_m^a$ est le

composé $\rho_m \circ \prod h^a$. L'argument se termine comme dans la démonstration du lemme 5. ■

L'avantage de l'énoncé de la proposition 9 est que les niveaux finis ont disparu. Comme $\ker(h^a) \subset \ker(\varphi_x)$ pour tout $a \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z}/2)$, $a \neq 0$, il suffit de montrer que

$$\bigcap_{\substack{a \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z}/2) \\ a \neq 0}} \ker(h_{4\Lambda_x}^a) = \{0\} \quad \text{où} \quad \Lambda_x = \ker(\varphi_x)$$

est décrit par la proposition 5.

Il est commode pour la suite de tracer sur Σ les lacets correspondant à des générateurs de $4\Lambda_x$.

DÉFINITION. — Un défaut connexe d de Σ est un lacet γ_i de Σ homologue à 0 dans Σ . On pose : $T_d = \tau w(\gamma_i)^4 \in 4 \cdot \Lambda_x$.

Un défaut non-connexe d de Σ est l'union de deux lacets γ_i et γ_j tels que $\gamma_i \sim \pm \gamma_j$ mais $\gamma_i \not\sim 0$ dans Σ . On pose : $T_d = \tau w(\gamma_i)^4 \cdot \tau w(\gamma_j)^{-4}$; c'est un élément de $4 \cdot \Lambda_x$ défini au signe près.

Remarque. — La terminologie se justifie si l'on considère que les défauts peuvent être considérés comme responsables du défaut d'injectivité de φ_x .

On va déduire la proposition 9 d'un énoncé qui utilise les $a \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z}/2)$ pour séparer les défauts les uns des autres. On va voir que les défauts connexes peuvent être isolés de tous les autres défauts, mais que les défauts non connexes ne peuvent être isolés que des défauts non connexes disjoints.

PROPOSITION 10. — (i) Pour chaque défaut connexe d de Σ , il existe $a \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z}/2) - \{0\}$ tel que : $h^a(T_d) \neq 1$ mais $h^a(T_{d'}) = 1$ pour tout défaut $d' \neq d$;

(ii) Soit $d = \gamma_i \cup \gamma_j$ un défaut non connexe de Σ . Il existe $a \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z}/2) - \{0\}$ tel que : $h^a(T_d) \neq 1$ mais $h^a(T_{d'}) = 1$ pour tout défaut non connexe de Σ disjoint de γ_i .

LEMME 16. — La proposition 10 entraîne la proposition 9.

Démonstration. — Il suffit de montrer que $\prod_{\substack{a \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z}/2) \\ a \neq 0}} h^a$ a une restriction injective à $4 \cdot \Lambda_x$,

comme on l'a remarqué plus haut. Soit donc $\xi \in 4 \cdot \Lambda_x$ tel que $h^a(\xi) = 1$ pour tout $a \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z}/2)$, $a \neq 0$. Écrivons :

$$\xi = \prod_{\substack{d \text{ défaut} \\ \text{connexe}}} (T_d)^{n_d} \times \prod_{\substack{d \text{ défaut} \\ \text{non connexe}}} (T_d)^{n_d}$$

Soit d un défaut connexe; d'après l'énoncé (i) de la proposition 10, il existe a tel que $h^a(T_d) \neq 1$ et $h^a(T_{d'}) = 1$ pour tout défaut $d' \neq d$. On en déduit : $1 = h^a(\xi) = h^a(T_d)^{n_d}$. Mais il résulte du lemme 14 que l'image de h^a est sans torsion; donc $n_d = 0$.

On a donc :

$$\xi = \prod_{\substack{d \text{ défaut} \\ \text{non connexe}}} (T_d)^{n_d}.$$

Comme dans le corollaire de la proposition 6, répartissons les défauts non-connexes en classes d'équivalence C_1, C_2, \dots, C_r . On a une décomposition : $\xi = \xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \dots \cdot \xi_r$ où

$$\xi_j = \prod_{d \in C_j} (T_d)^{n_d}.$$

Soit $d_j \in C_j$ et soit $a \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z}/2) - \{0\}$ fourni par l'énoncé (ii) de la proposition 10, qui vérifie $h^a(\xi_k) = 1$ pour $k \neq j$. On a alors $h^a(\xi) = h^a(\xi_j) = 1$. Soient $\gamma_1, \dots, \gamma_l$ les lacets homologues (ou anti homologues) dont sont composés les défauts de la classe C_j . Écrivons

$$\xi_j = \prod_{i=1}^l \tau w(\gamma_i)^{4m_i} \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^l m_i = 0.$$

Pour i donné, choisissons le défaut non connexe $d = \gamma_i \cup \gamma_{i+1}$ si α vérifie l'énoncé (ii) de la proposition 10, on a

$$h(\tau w(\gamma_{i_1})^4 \cdot \tau w(\gamma_{i_2})^{-4}) = 1$$

pour $i_1 \neq i$ et $i_2 \neq i$. Donc

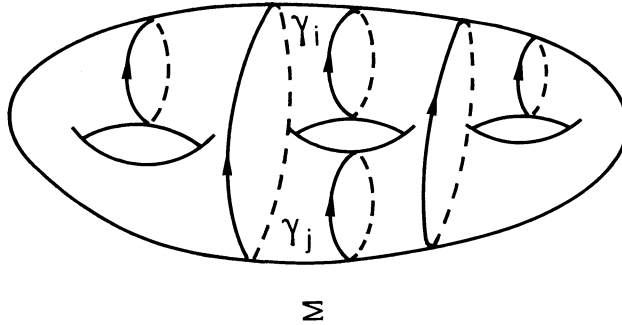
$$1 = h^a(\xi_j) = h^a(\tau w(\gamma_i)^{4m_i}) \times h^a(\tau w(\gamma_{i+1})^{4 \sum_{i \neq i} m_i}).$$

Et puisque $\sum_{i' \neq i} m_{i'} = -m_i$, on a :

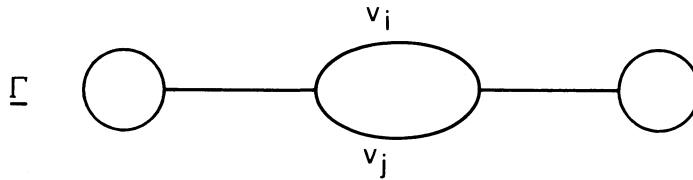
$$1 = h^a(\tau w(\gamma_i)^{4m_i}), \quad \tau w(\gamma_{i+1})^{-4m_i} = h^a(T_d^{m_i}).$$

Mais d'après (ii) de la proposition 18 et le fait que l'image de h^a est sans torsion, cela entraîne $m_i = 0$ donc $\xi_j = 1$. Comme c'est vrai pour toute classe d'équivalence C_j , on a : $\xi = \xi_1 \cdot \xi_j \cdot \dots \cdot \xi_r = 1$. ■

Remarque. — On ne saurait énoncer (i) pour un défaut d non connexe, car c'est faux pour le défaut $\gamma_i \cup \gamma_j$ de la surface Σ ci-dessous



correspondant au graphe



La proposition ci-dessous va fournir la clé topologique pour démontrer la proposition 10.

PROPOSITION 11. — *Les deux conditions suivantes concernant un défaut d de Σ sont équivalentes :*

(i) $\Sigma_a - \pi^{-1}(d)$ a exactement trois composantes connexes ou bien $d = \gamma_i \cup \gamma_j$ avec $\gamma_i = \pm \gamma_j$ dans $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ et $\langle \gamma_i, a \rangle = 1$ dans $\mathbb{Z} \mid 2$.

(ii) $h^a(T_d) = 1$ dans $\text{Sp}(H_1(\Sigma_a, \mathbb{Z}))$.

Démonstration. — 1^{er} cas : d est un défaut connexe. Ceci veut dire $d = \gamma$ avec $\gamma \sim 0$ dans Σ . D'après le lemme 13, $\pi^{-1}(d) = \pi^{-1}(\gamma)$ est réunion disjointe de deux lacets connexes c_1 et c_2

de Σ_a avec $c_2 = \tau(c_1)$. Comme dans $H_1(\Sigma_a, \mathbb{Z})$ on a : $c_1 + c_2 = 2 \cdot \gamma = 0$, on a : $c_2 = \tau(c_1) = -c_1$. On a donc : $\tau w(c_1) \circ \tau w(c_2) = \tau w(c_1)^2$. Le lemme 14 dit que $h^a(T_d) = \tau w(c_1)^8$. Or $\tau w(c_1)$ est trivial dans $\text{Sp}(H_1(\Sigma_a, \mathbb{Z}))$ si et seulement si c_1 est homologue à 0 dans Σ_a . D'après la proposition 6 appliquée aux lacets c_1 et c_2 de Σ_a , on a donc : $h^a(T_d) = 1$ si et seulement si $\pi^{-1}(d)$ sépare Σ_a en trois composantes connexes, d'où l'équivalence entre (i) et (ii) dans ce cas.

2° cas : d est un défaut non connexe $d = \gamma_1 \cup \gamma_2$, avec $\gamma_1 \sim \pm \gamma_2$, $\gamma_1 \sim 0$ dans Σ et $\langle \gamma_1, a \rangle = 1$ dans $\mathbb{Z}/2$.

Dans ce cas (i) est vérifiée. Or d'après le lemme 13, $\pi^{-1}(\gamma_i)$ est un lacet connexe η_i de Σ_a . On a dans $H_1(\Sigma_a, \mathbb{Q})$:

$$\eta_1 = 2\gamma_1 = 2\gamma_2 = \eta_2,$$

donc

$$h^a(T_d) = h^a(\tau_w(\gamma_1)^4 \cdot \tau w(\gamma_2)^{-4}) = \tau_w(\eta_1)^2 \cdot \tau w(\eta_2)^{-2}$$

(d'après le lemme 14).

D'où $h^a(T_d) = 1$ puisque $\eta_1 \sim \eta_2$ dans Σ_a et (ii) est aussi vérifiée.

3° cas : d est un défaut non connexe $d = \gamma_i \cup \gamma_j$ avec $\gamma_i \sim \gamma_j$, $\gamma_i \not\sim 0$ dans Σ et $\langle \gamma_i, a \rangle = 0$ dans $\mathbb{Z}/2$.

Alors $\pi^{-1}(\gamma_i)$ est l'union de deux lacets disjoints connexes η_i et η'_i de Σ_a . On a alors :

$$2\gamma_i = \eta_i + \eta'_i = \eta_i + \tau(\eta_i)$$

dans $H_1(\Sigma_a, \mathbb{Q})$ pour $i = 1, 2$.

Si (ii) est vérifiée, alors d'après le lemme 14 on a :

$$\tau w(\eta_1) \circ \tau w(\eta'_1) = \tau w(\eta_2) \circ \tau w(\eta'_2)$$

dans $\text{Sp}(H_1(\Sigma_a, \mathbb{Z}))$. Les quatre lacets en question étant disjoints, ceci équivaut d'après Picard-Lefschetz (et si on veut le lemme 6) à l'égalité : $\eta_1^2 + \eta'_1{}^2 = \eta_2^2 + \eta'_2{}^2$ dans l'algèbre symétrique de $H_1(\Sigma_a, \mathbb{Q})$. Comme par ailleurs $\eta_1 \neq \eta'_1 = \eta_2 + \eta'_2$ est acquis, ceci équivaut à l'identité formelle :

$$(X - \eta_1) \cdot (X - \eta'_1) = (X - \eta_2) \cdot (X - \eta'_2)$$

entre polynômes à 1 variable X sur cette algèbre symétrique. Cette dernière étant intègre, cela entraîne $\{\eta_1, \eta'_1\} = \{\eta_2, \eta'_2\}$. La condition (ii) équivaut donc à :

$$(iii) \quad \{\eta_1, \eta'_1\} = \{\eta_2, \eta'_2\}.$$

On veut montrer maintenant (i) \Leftrightarrow (iii) dans ce cas. Si (iii) est vérifiée, la proposition 6 (ou plutôt son corollaire) dit que $\eta_1 \cup \eta_2$ sépare Σ_a en deux composantes connexes, et que $\eta'_1 \cup \eta'_2$ a la même propriété (si $\eta_1 = \eta_2$ et $\eta'_1 = \eta'_2$). Il en résulte que $\eta_1 \cup \eta_2 \cup \eta'_1 \cup \eta'_2 = \pi^{-1}(\gamma_1 \cup \gamma_2) = \pi^{-1}(d)$ sépare Σ_a en trois composantes connexes, donc (i) est vérifiée. Si maintenant (i) est vérifiée, la réunion $\eta_1 \cup \eta'_1 \cup \eta_2 \cup \eta'_2$ sépare Σ_a

en trois composantes connexes S_1 , S_2 et S_3 . Parmi les quatre lacets η_1 , η'_1 , η_2 , η'_2 , supposons qu'il y en ait toujours un qui joigne deux composantes S_i et S_j . On peut alors supposer qu'il y a, par exemple :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ lacets entre } S_1 \text{ et } S_2; \\ 1 \text{ lacet entre } S_1 \text{ et } S_3; \\ 1 \text{ lacet entre } S_2 \text{ et } S_3. \end{array} \right.$$

Les deux derniers lacets séparent S_3 de $S_1 \cup S_2$, donc sont homologues (au signe près) d'après la proposition 6. Or d'après le lemme 13, on ne peut avoir ni $\eta_1 \sim \pm \eta'_1$ ni $\eta_2 \sim \pm \eta'_2$. On aura donc par exemple $\eta_1 \sim \pm \eta_2$. Mais alors $\eta'_1 = \tau(\eta_1) \sim \pm \tau(\eta_2)$ et encore d'après la proposition 6, $\eta'_1 \cup \eta'_2$ sépare Σ_a en deux composantes connexes, ce qui est idiot.

On peut donc supposer que parmi ces quatre lacets, deux joignent S_1 et S_3 , et deux autres joignent S_2 et S_3 . Les deux lacets qui joignent S_1 et S_3 sont donc homologues; comme on n'a ni $\eta_1 \sim \pm \eta'_1$ ni $\eta_2 \sim \pm \eta'_2$, on a par exemple $\eta_1 \sim \pm \eta_2$ et $\eta'_1 \sim \pm \eta'_2$, donc (iii) est vérifiée. ■

Pour appliquer la proposition 11, nous considérons un lacet \tilde{a} de Σ qui représente $a \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z} \mid 2) - \{0\}$. On a d'abord donné une condition suffisante sur un défaut d pour que $h^a(T_d) = 1$.

LEMME 17. — *Supposons \tilde{a} disjoint du défaut d de Σ . Alors les conditions (i) et (ii) de la proposition 11 sont vérifiées.*

Démonstration. — D'après la définition des défauts et le corollaire de la proposition 6, on sait que d sépare Σ en deux composantes connexes. Soient Σ_1 et Σ_2 ces composantes. On peut supposer a inclus dans Σ_1 . On sait que la restriction de π à $\Sigma - \tilde{a}$ est triviale, donc $\pi^{-1}(\Sigma_2)$ a deux composantes connexes. De plus tout chemin de Σ_1 qui rencontre \tilde{a} transversalement en un point connecte dans $\Sigma_a - \pi^{-1}(d)$ les deux feuillettes de $\pi^{-1}(\Sigma_1)$, donc $\pi^{-1}(\Sigma_1)$ est connexe. Donc $\pi^{-1}(\Sigma - d)$ a trois composantes connexes. ■

Nous donnons maintenant des conditions suffisantes pour que $h^a(T_d) \neq 1$.

LEMME 18. — *Si d est un défaut connexe, et si \tilde{a} est tel que, si Σ_1 et Σ_2 sont les deux composantes connexes de $\Sigma - d$, il existe un lacet c_i dans Σ_i tel que $c_i \cup \tilde{a} = 1$ (pour $i = 1, 2$), alors les conditions (i) et (ii) de la proposition 11 sont violées.*

Démonstration. — Il suffit de montrer que $\Sigma_a - \pi^{-1}(d)$ a deux composantes connexes, et donc de montrer que pour $i = 1, 2$, $\pi^{-1}(\Sigma_i) \subset \Sigma_a$ est connexe. Or si $\pi^{-1}(\Sigma_i)$ n'était pas connexe, $\pi^{-1}(\Sigma_i)$ aurait deux composantes permutées par τ . Mais soit c_i le lacet de Σ_i dont l'hypothèse garantit l'existence. Le lemme 13 montre que $\pi^{-1}(c_i)$ connecte les deux points de $\pi^{-1}(p)$, pour p point de c_i . Donc $\pi^{-1}(\Sigma_i)$ est bien connexe. ■

LEMME 19. — *Soit $d = \gamma_1 \cup \gamma_2$ un défaut non connexe de Σ . Supposons :*

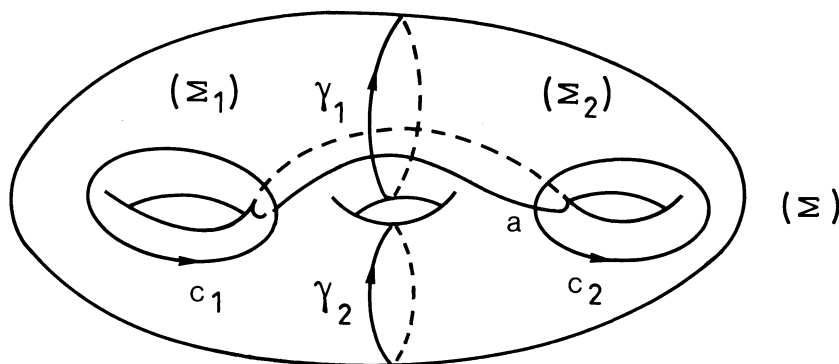
Ⓐ *\tilde{a} est disjoint de γ_2 ;*

Ⓑ *si Σ_1 et Σ_2 sont les deux composantes connexes de $\Sigma - d$, alors pour $i = 1, 2$, il existe un lacet c_i de Σ_i qui rencontre \tilde{a} en un point.*

Alors les conditions (i) et (ii) de la proposition 11 sont violées.

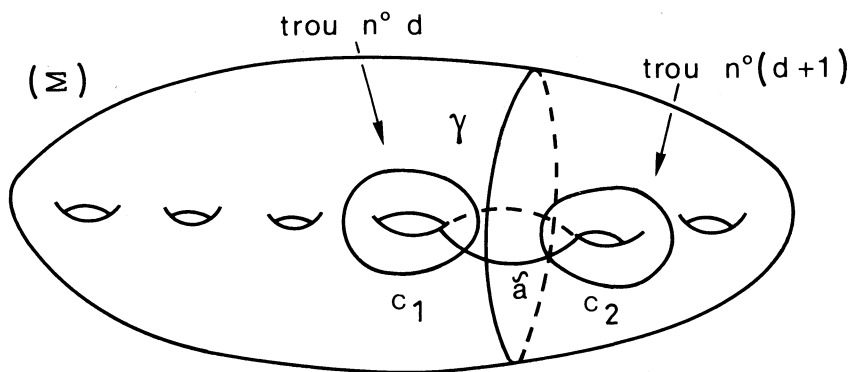
Démonstration. — L'hypothèse (b) entraîne que $\pi^{-1}(\Sigma - d)$ a deux composantes connexes, comme dans la démonstration du lemme 18. Il résulte de (a) que $\langle a, \gamma_2 \rangle = 0$ dans $\mathbb{Z}/2$, donc la condition (i) de la proposition 11 est violée. ■

Figure pour le lemme 19 :



Munis de ces deux armes stratégiques, nous pouvons aborder la :

Démonstration de la proposition 10. — (i) Soit $d = \gamma$ un défaut connexe de Σ . Représentons Σ comme tore à g trous, de sorte que γ sépare le trou n° d du trou n° $(d+1)$. Soit \tilde{a} un lacet de Σ , pincé entre le trou numéro d et le trou numéro $(d+1)$ (cette description est possible grâce à la proposition 6).



Si c_1 (resp. c_2) est un lacet qui fait le tour du trou n° d (resp. n° d) [resp. n° $(d+1)$], alors \tilde{a} rencontre c_1 (resp. c_2) transversalement en un seul point.

Soit a l'image de \tilde{a} dans $H_1(\Sigma, \mathbb{Z}/2)$. Bien sûr $a \neq 0$. D'après le lemme 18, on a : $h^a(T_d) \neq 1$. Par ailleurs, si d' est un défaut de Σ , $d' \neq d$, alors d' ne rencontre pas \tilde{a} de sorte que $h^a(T_{d'}) = 1$ d'après le lemme 17.

Ceci démontre (i).

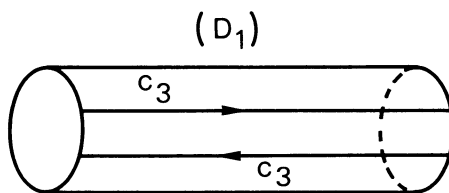
(ii) Soit $d = \gamma_1 \cup \gamma_2$ un défaut non-connexe de Σ . Soient Σ_1 et Σ_2 les deux composantes connexes de $\Sigma - d$. On se réfère aux notions topologiques détaillées au paragraphe 1. On

considérera la projection $q \circ p : \Sigma \rightarrow \Gamma$; si v_1 et v_2 sont les arêtes du graphe Γ correspondant à γ_1 et γ_2 , la proposition 6 dit que $\Gamma - (v_1 \cup v_2)$ a deux composantes connexes $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. La projection $q \circ p$ vérifie :

- $(q \circ p)^{-1}(v_i)$ est un cylindre D_i ;
- $(q \circ p)^{-1}(\Gamma_i) = \Sigma_i$.

On va construire un lacet \tilde{a} de Σ , union d'un chemin c_1 dans Σ_1 , d'un chemin c_2 dans Σ_2 et d'un chemin c_3 dans D_1 .

Tout d'abord c_3 est l'union de deux génératrices de D_1 de sens opposés.



Pour construire c_i ($i = 1, 2$), considérons le sommet s_i de l'arête v_i qui est dans Γ_i . On va commencer par construire dans Γ_i un circuit passant par s_i . Mieux, on regarde les arêtes v_1, v_2, \dots, v_l du graphe Γ telles que $v_1 = \pm v_2 = \dots = \pm v_l$ dans $H^1(\Gamma, \mathbb{Z})$ comme dans l'énoncé de la proposition 6. Soit $\bar{\Gamma}_i$ la composante connexe de $\Gamma - (\cup v_i)$ qui contient s_i . On prétend que $\bar{\Gamma}_i$ n'est pas un arbre. En effet, considérons les deux arêtes v_i et v_j telles que $\bar{\Gamma}_i$ soit une composante connexe de $\Gamma - (v_i \cup v_j)$; s'il n'y avait qu'un chemin dans $\bar{\Gamma}_i$ entre ces deux arêtes, une arête w de ce chemin serait telle que $v_i \cup w$ sépare Γ en deux composantes connexes, donc nécessairement $v_i = \pm w$, mais alors $w \in \{v_1, v_2, \dots, v_l\}$ et w ne peut être une arête de $\bar{\Gamma}_i$.

Donc il existe dans $\bar{\Gamma}_i$ un circuit passant par s_i . On le remonte en un lacet c_i de Σ , qui est inclus dans Σ_i et se recolle avec les deux extrémités de c_3 dans le cercle $C_1 \cap \Sigma_i$. Il est clair que c_i a les propriétés suivantes :

- A. c_i rencontre au moins un lacet de Σ_1 transversalement en un point;
- B. c_i ne rencontre aucun lacet γ_i avec $\gamma_i \sim \pm \gamma_1$;
- C. si c_i rencontre un lacet d'un défaut non connexe, il le coupe transversalement en un point.

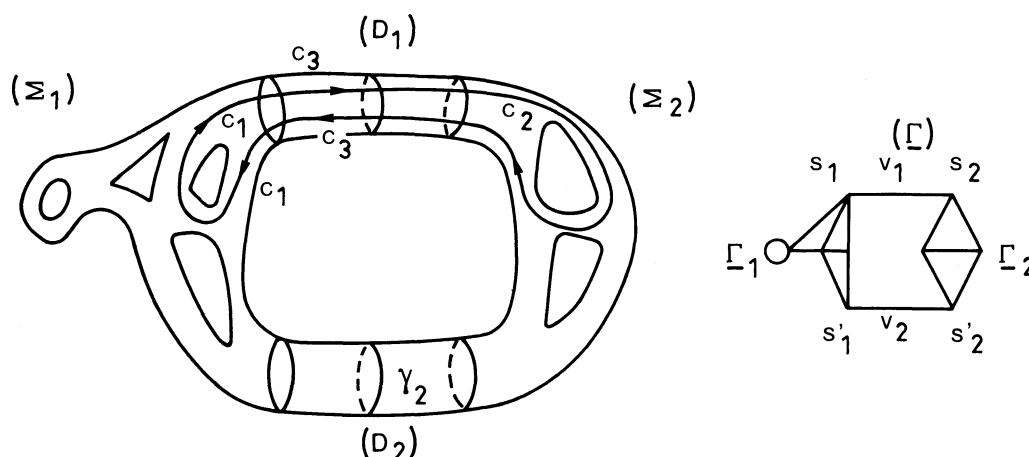
On construit donc le lacet \tilde{a} en mettant bout à bout c_1, c_2 et c_3 . Soit a l'image de \tilde{a} dans $\mathbb{Z}/2$. On a : $a \neq 0$. En effet, comme chemin c_1 a la propriété 1, on a $\langle a, \gamma \rangle = \pm 1$ pour un certain lacet γ inclus dans Σ_1 .

Si d' est un défaut non connexe de Σ disjoint de γ_1 , alors ou bien \tilde{a} ne rencontre pas d' et on a $h^a(T_{d'}) = 1$ d'après le lemme 17 ou bien d'après C \tilde{a} rencontre chaque composante de d' en un point transversalement, donc si $d' = \delta_1 \cup \delta_2$, on a : $\langle \delta_1, \tilde{a} \rangle = \pm 1$ et $h^a(T_{d'}) = 1$ d'après la proposition 11.

En ce qui concerne le défaut $d = \gamma_1 \cup \gamma_2$, on a tout fait pour que \tilde{a} ne rencontre pas γ_2 . La propriété A de c_1 et de c_2 entraîne l'hypothèse (b) du lemme 19. D'après ce lemme, on a donc :

$$h^a(T_{d'}) \neq 1.$$

Ceci achève la démonstration de la proposition 10. ■



Nous avons ainsi achevé la démonstration du théorème.

BIBLIOGRAPHIE

- [A] A. ASH, D. MUMFORD, M. RAPOPORT et Y. TAI, *Smooth Compactifications of Locally Symmetric Varieties*, Math. Science Press, 1975.
- [Be] A. BEAUVILLE, *Prym Varieties and Schottky Problem* (thèse de Doctorat d'État, Université de Paris-VII, 1977).
- [Bi] J. BIRMAN, *The Algebraic Structure of Surface Mapping Class Groups* (lecture notes for a course given at the L.M.S.-N.A.T.O. Conference on Discrete Groups and Automorphic Forms, Cambridge, Summer 1975).
- [B-W] K. BACLAWSKI et N. WHITE, *Higher Order Independence in Matroids*, Preprint, M. I. T., 1977.
- [D-H] A. DOUADY et J. HUBBARD, *On the Density of Strebel Differentials*, Preprint, 1975.
- [D-M] P. DELIGNE et D. MUMFORD, *The Irreducibility of the Space of Curves of Given Genus* (Publ. I. H. E. S., vol. 36, 1969, p. 75-109).
- [De] M. DEHN, *Die Gruppe der Abbildungsklassen* (Acta Math., vol. 69, 1938, p. 135-210).
- [G] A. GROTHENDIECK, Exposés 7-8 au Séminaire Henri-Cartan, 1960-1961.
- [K] G. KEMPF, F. KNUDSEN, D. MUMFORD et B. SAINT-DONAT, *Toroïdal Embeddings* (Springer Lecture Notes, n° 339, 1973).
- [M1] D. MUMFORD, *Geometric Invariant Theory*, Springer, 1975.
- [M2] D. MUMFORD, *Stability of Projective Varieties*, l'enseignement mathématique, 1977.
- [M3] D. MUMFORD, *Hirzebruch Proportionality Theorem in the Non Compact Case* (Inventiones Math., vol. 42, 1977, p. 239-272).

- [Man] W. MANGER, *Die Klassen von topologischen Abbildungen einer geschlossenen Fläche auf sich* (Math. Zeit., vol. 44, 1939, p. 541).
- [Mas] B. MASKIT, *On Boundaries of Teichmüller Spaces III* (Annals of Math., vol. 91, 1970, p. 607-639).
- [N] S. NIELSEN, *Untersuchungen zur Topologie des geschlossenen zweiseitigen Flächen* (Acta Math., vol. 50, 1927, p. 189-358).
- [P] H. POPP, *Moduli Theory and Classification Theory of Algebraic Varieties* (Springer Lecture Notes, n° 620, 1977).
- [R] H. L. ROYDEN, *Automorphism and Isometries of Teichmüller Space*, in *Advances in the Theory of Riemann Surfaces* (Annals of Math. Studies, vol. 66, 1971).
- [Se] J.-P. SERRE, *Rigidité du foncteur de Jacobi d'échelon $n \geq 3$* (Appendice à l'exposé 17 du Séminaire Cartan 1960-1961).
- [St] J. H. STEENBRINK, *Limits of Hodge Structures* (Invent. Math., vol. 31, 1976, p. 229-257).
- [W] A. WEIL, *Modules des surfaces de Riemann* (Séminaire Bourbaki, n° 168, 1957-1958).

APPENDICE

LETTRE DE KEN BACLAWSKI A L'AUTEUR (Boston, 1^{er} octobre 1976)

A matrix M is said to be *totally unimodular* if every square submatrix of M has determinant $+1$, -1 or 0 . We say M is *reduced* if no columns are zero and no column is a multiple of another.

Such a matrix has the property that a maximal linearly independent set of columns forms a basis and when the columns of M are expressed in terms of this new basis, we get a matrix M' which is again totally unimodular. Thus by a suitable totally unimodular change of coordinates we may assume M has the form:

$$(\star) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & & & 1 \end{bmatrix} \quad N$$

THEOREM. — Let $M=(a_{ij})$ be a reduced $n \times m$ totally unimodular matrix. Then the set of polynomials

$$\left\{ \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} X_i \right)^2 \mid 1 \leq j \leq m \right\}$$

is linearly independent in $\mathbb{Q}[X_1, \dots, X_n]$.

Proof. — Clearly the property is invariant under a unimodular change of coordinates. So we may assume M has the above form (\star) . We use induction on n , the result being trivial for $n=1$.

Let M' be obtained by deleting the first row and column of M . Since M is reduced M' has no zero columns. It need not be reduced however.

The results of the theorem is unchanged if we multiply any subset of the columns of M by -1 . Henceforth we shall do so indiscriminately (in effect we identify a column with its negative).

Suppose a column c occurs more than once in M' . It obviously can appear at most three times, the possibilities for its occurrence in M being: $\begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +1 \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ c \end{pmatrix}$.

However the second two cannot occur together; for since c is a nonzero column, we would then have one of the submatrices

$$\begin{pmatrix} +1 & -1 \\ +1 & +1 \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad \begin{pmatrix} +1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

in M , which have determinants 2 and -2 respectively.

Thus the columns of M' fall into two classes: those that occur just once and those that occur twice. Moreover if c occurs twice, one of the columns of M is $\begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$. Let P be the set of columns of M whose part in M' occurs exactly twice. By suitable sign changes and permutation of columns, P has the form (where P' is reduced):

$$\left[\begin{array}{c|c} 0 \dots 0 & 1 \dots 1 \\ \hline P' & P' \end{array} \right]$$

Since P' is totally unimodular we may change coordinates so that it has the form:

$$\left[\begin{array}{c|c} I & Q' \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]$$

where I is an identity matrix of suitable size. Suppose Q' has at least one column. Since P' is reduced, Q' has columns each having at least two nonzero entries. Thus one of the following matrices occurs as a submatrix of P :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \varepsilon & 1 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 1 & \eta & 0 & 1 & \eta \end{pmatrix}$$

where $\varepsilon = \pm 1$, $\eta = \pm 1$. It is easy to verify that this matrix is not totally unimodular:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \varepsilon & 1 & 0 \\ \eta & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\varepsilon - \eta, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 1 & \eta \end{vmatrix} = -\eta + 1, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \varepsilon \\ 1 & 0 & \eta \end{vmatrix} = \varepsilon - 1$$

and not all of these can be $+1$, -1 or 0 . We conclude that Q' is empty.

We now extend P' to a basis of the column space. The original matrix M can therefore be put in the form:

$$(1) \quad \left[\begin{array}{c|c|c|c} & 1 \dots 1 & 0 \dots 0 & 1 \dots 1 \\ \hline I & I & N_0 & N_1 \\ \hline & 0 & & \end{array} \right]$$

(where as usual I denotes an identity matrix of suitable size). The above matrix furthermore has the property that

$$(2) \quad [I \mid N_0 \mid N_1]$$

is reduced.

We now apply induction on n . The theorem holds for (2). For definiteness write

$$N_0 = (b_{ij})_{\substack{2 \leq i \leq n' \\ 1 \leq j \leq q}}, \quad N_1 = (c_{ij})_{\substack{2 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq r}}.$$

Suppose that the second part of (1) has p columns. The inductive hypothesis implies that the polynomials:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{ll} X_i^2, & 2 \leq i \leq n, \\ \left(\sum_{i=2}^n b_{ij} X_i \right)^2, & 1 \leq j \leq q, \\ \left(\sum_{i=2}^n c_{ij} X_i \right)^2, & 1 \leq j \leq r. \end{array} \right.$$

form a linearly independent set in $\mathbb{Q}[X_2, \dots, X_n]$. We want to show that the following set of polynomials is linearly independent in $\mathbb{Q}[X_1, \dots, X_n]$:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{ll} X_i^2, & 1 \leq i \leq n, \\ (X_1 + X_i)^2, & 2 \leq i \leq p, \\ \left(\sum_{i=2}^n b_{ij} X_i \right)^2, & 1 \leq j \leq q, \\ \left(X_1 + \sum_{i=2}^n c_{ij} X_i \right)^2, & 1 \leq j \leq r. \end{array} \right.$$

By partially multiplying out and eliminating some terms we get the equivalent set:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{ll} X_i^2, & 1 \leq i \leq n, \\ 2 X_1 X_i, & 2 \leq i \leq p, \\ \left(\sum_{i=2}^n b_{ij} X_i \right)^2, & 1 \leq j \leq q, \\ \sum_{i=p+1}^n 2 c_{ij} X_1 X_i + \left(\sum_{i=2}^n c_{ij} X_i \right)^2, & 1 \leq j \leq r, \end{array} \right.$$

The conclusion of the theorem now follows from the fact that (3) is linearly independent and from the form of the set (5).

Q.E.D.

COROLLARY. — *The number of columns of a reduced totally unimodular matrix is at most $\binom{n+1}{2}$, where n is the number of rows.*

REFERENCES

- [1] HELLER, *On Linear Systems with Integral Valued Solutions* (*Pac. J. Math.*, Vol. 7, 1957, pp. 1351-1364).

(Manuscrit reçu le 13 décembre 1978,
révisé le 8 mai 1979.)

Jean-Luc BRYLINSKI,
École Polytechnique,
Centre de Mathématiques,
91128 Palaiseau Cedex.