ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

PHILIPPE BLANC

Sur la cohomologie continue des groupes localement compacts

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 12, nº 2 (1979), p. 137-168

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1979_4_12_2_137_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.
4e série, t. 12, 1979, p. 137 à 168.

SUR LA COHOMOLOGIE CONTINUE DES GROUPES LOCALEMENT COMPACTS

PAR PHILIPPE BLANC

SOMMAIRE

Introduction

Ce travail est consacré à l'étude de diverses notions de cohomologie associées à une représentation continue d'un groupe localement compact G dans un espace de Fréchet E.

Cette étude a déjà été abordée par plusieurs auteurs; par exemple G. Mostow a montré [16] que si G est de Lie et U différentiable, la cohomologie continue (i. e. définie à l'aide des cochaînes continues) est identique à la cohomologie différentiable, introduite précédemment par W. Van Est; sa démonstration reposait sur la notion de résolution injective, mais ne donnait pas explicitement la formule de régularisation des cocycles.

Reprenant la méthode de Mostow, nous démontrons l'identité des cohomologies L^p_{loc} et continue, de plus, nous donnons explicitement la formule de régularisation des cocycles, ainsi que l'homotopie simpliciale qui permet d'affirmer que cette formule conduit à un isomorphisme topologique des diverses cohomologies, ces formules ont été explicitées indépendamment par Haefliger dans [10].

Cette méthode pour G de Lie conduit à un isomorphisme topologique entre les cohomologies continues et différentiables sans supposer U différentiable.

Nous étudions ensuite la cohomologie d'une intégrale directe $U=\int^{\oplus} U_t \, d\mu(t)$ de représentations unitaires; la description « L^2_{loc} » de la cohomologie est ici indispensable pour pouvoir désintégrer les cocycles, et démontrer en utilisant la dualité entre chaînes et cochaînes que si pour presque tout t, l'espace séparé associé à $H^n(G, U_t)$ est nul, il en est de même de $H^n(G, U)$ (le cas de $n=1$ avait déjà été traité par Guichardet dans [8]).

Le point suivant est consacré à la démonstration d'un « lemme de Shapiro » pour les représentations induites dans les espaces L^p_{loc}; elle repose sur l'injectivité d'une certaine résolution et ne suppose pas l'existence de sections locales continues (contrairement à la méthode de Casselman-Wigner [4]). On retrouve dans le cas cocompact la n-cohomologie des représentations unitaires induites au sens de Mackey, résultat déjà obtenu pour la 1-cohomologie par Pinczon et Simon [18] et J. Pichaud [17].

Enfin, une utilisation systématique des cochaînes L^1_{loc} permet de construire une suite spectrale de Hochschild-Serre pour la cohomologie continue, étude déjà abordée dans [4], par Casselman et Wigner et dans [1], par A. Borel et N. Wallach, mais avec des conditions plus fortes.

On en déduit la nullité des espaces de cohomologie d'un groupe de Lie nilpotent connexe simplement connexe pour une représentation unitaire irréductible non triviale.

1. Les espaces L^p_{loc}

On se donne une fois pour toute dans ce paragraphe, un espace localement compact dénombrable à l'infini X, une mesure de Radon μ sur X, un espace de Fréchet E sur **R** ou **C**, enfin un réel $p \in [1, +\infty[$.

1.1. On note alors $L^p_{loc}(X, E, \mu)$ l'espace des classes de fonctions sur X à valeur dans E, localement de puissance p-ième μ-intégrables.

Plus précisément, une fonction φ est dans une classe de $L^p_{loc}(X, E, \mu)$ si elle est mesurable et si pour tout compact K de X, et toute semi-norme continue N sur E,

$$\|\varphi\|_{K,N}=\left(\int_K N(\varphi(x))^p \, d\mu(x)\right)^{1/p} \leqq +\infty.$$

1.2. Proposition. — *L'espace* $L^p_{loc}(X, E, \mu)$ *muni de la topologie définie par la famille de semi-normes* $\| \ \|_{K,N}$ *où K (resp.* N) *parcourt une famille dénombrable de compacts recouvrant* X (*resp. de semi-normes définissant la topologie de* E), *est isomorphe topologiquement à la limite projective des Banach* $L^p(K, E_N, \mu_K)$, *où* K (*resp.* E_N) *désigne la restriction de* μ *à* K (*resp. le séparé complété de* E *pour* N).

La proposition se montre en faisant appel à des résultats classiques de la théorie de l'intégration et de celle des espaces vectoriels topologiques (*cf.* [3] et [12]).

En particulier, $L^p_{\text{loc}}(X, E, \mu)$ est un espace de Fréchet, sa topologie est indépendante des familles de compacts et de semi-normes choisies.

1.3. Remarquant que l'espace $C(X, E)$, des applications continues de X dans E, a une image canonique partout dense dans $C(K, E_N)$ (*cf.* [6], p. 171) et que ce dernier est dense dans $L^p(K, E_N)$, on en déduit que *l'espace* $C(X, E)$ *est dense dans* $L^p_{\text{loc}}(X, E)$.

1.4. On se donne ici un second espace mesuré (Y, ν) du même type que (X, μ).

LEMME. — *Les espaces* $L^p_{\text{loc}}(X, Y, E)$ *et* $L^p_{\text{loc}}(Y, E))$ *sont canoniquement isomorphes.*

Preuve. — Le résultat est bien connu dans le cas des espaces L^p à valeur dans les Banach et la proposition 1.2 nous y ramène. On obtient un isomorphisme de Fréchet.

1.5. Dans le cas $p=1$, on a des résultats plus précis.

LEMME. — $L^1_{\text{loc}}(X, E, \mu)$ *est topologiquement isomorphe à* $L^1_{\text{loc}}(X, \mu)\overline{\otimes}E$, où $\bar{\otimes}$ *désigne le produit tensoriel projectif.*

Preuve. — On se ramène au cas où X est compact et E est un Banach par la proposition 1.2 et le fait que le produit tensoriel commute à la limite projective, le lemme se réduit alors à un résultat classique de Grothendieck [6].

1.6. Soit E et F deux espaces de Fréchet, si u est une application continue linéaire de E dans F, on note $\bar{u}$ l'application induite de $L^1_{\text{loc}}(X, E)$ dans $L^1_{\text{loc}}(X, F)$, on a alors les isomorphismes suivants :

PROPOSITION. — 1. $\text{Ker}\ \bar{u}=L^1_{\text{loc}}(X, \text{Ker}\ u)$;

2. *si* $\text{Im}\ u$ *est fermé dans* F :

$$\text{Im}\ \bar{u}=L^1_{\text{loc}}(X, \text{Im}\ u);$$

3. *si* F *est un sous-espace fermé de* E :

$$L^1_{\text{loc}}(X, E/F)=L^1_{\text{loc}}(X, E)/L^1_{\text{loc}}(X, F).$$

Démonstration :

ASSERTION 1. — Elle résulte directement de la définition de $\bar{u}$.

ASSERTION 3. — Si F est un sous-espace fermé de E, π désignant la projection canonique de E sur E/F, alors l'application $\bar{\pi}$ de $L^1_{\text{loc}}(X, E)$ *dans* $L^1_{\text{loc}}(X, E/F)$ *est surjective.*

En effet, si $\bar{\otimes}$ désigne le produit tensoriel projectif, alors d'après le lemme 1.5, cela revient à montrer que l'application $1\otimes\pi$ de $L^1_{\text{loc}}(X)\ \bar{\otimes}\ E$ sur $L^1_{\text{loc}}(X)\bar{\otimes}\ E/F$ est surjective, les applications 1 et π étant surjectives et les espaces métrisables, ceci résulte de Grothendieck [6] (§ 1, n° 2, prop. 3.1).

Remarquant que le noyau de $\bar{\pi}$ est $L^1_{\text{loc}}(X, F)$, il suffit alors d'appliquer le théorème du graphe fermé pour avoir l'assertion 3.

ASSERTION 2. — L'image de $L^1_{\text{loc}}(X, \text{Im}\ u)$ dans $L^1_{\text{loc}}(X, F)$ est fermée, car c'est le noyau de l'application de $L^1_{\text{loc}}(X, F)$ sur $L^1_{\text{loc}}(X, F/\text{Im}\ u)$.

Si on montre que c'est exactement $\mathrm{Im}\,\bar{u}$, le théorème du graphe fermé permet de conclure.

Or si $\varphi \in L^1_{\mathrm{loc}}(X, \mathrm{Im}\, u)$, il existe $\varphi' \in L^1_{\mathrm{loc}}(X, E/\mathrm{Ker}\, u)$, telle que $u.\varphi' = \varphi$.

D'autre part si π' désigne la projection de E sur $E/\mathrm{Ker}\, u$ il existe $\psi \in L^1_{\mathrm{loc}}(X, E)$ telle que

$$\pi' \circ \psi = \varphi' \qquad \text{donc} \quad u\psi = u\pi'\psi = u\varphi' = \varphi.$$

Donc $\mathrm{Im}\,\bar{u}$ contient l'image de $L^1_{\mathrm{loc}}(X, \mathrm{Im}\, u)$ dans $L^1_{\mathrm{loc}}(X, F)$, l'inclusion inverse est évidente, l'assertion est ainsi démontrée.

1.7. On note $L^1(X, E, \mu)$ l'espace des classes d'application φ de X dans E, telles que pour toute semi-norme N continue sur E, $\pi_N \varphi$ soit μ-intégrable. Ici π_N désigne l'application canonique de E dans la séparé complété de E pour N.

En faisant varier N, on obtient une famille projective $(\mu(\pi_N \varphi))$, il existe alors un vecteur unique de E noté $\mu(\varphi)$ tel que :

$$\pi_N \mu(\varphi) = \mu(\pi_N(\varphi)),$$

il sera appelé *l'intégrale de φ par rapport à μ et noté* $\int_X \varphi(x)\, d\mu(x)$, *l'application* $\varphi \to \mu(\varphi)$ *est continue.*

1.8. LEMME. — *Soit* E *et* F *deux espaces de Fréchet et u une application continue de* E *dans* F *alors si* $\varphi \in L^1(X, E)$, $u.\varphi \in L^1(X, F)$ *et l'on a :*

$$\int_X u.\varphi(x)\, d\mu(x) = u.\int_X \varphi(x)\, d\mu(x).$$

Preuve. — La structure de limite projective de E permet de se ramener au cas classique des Banach.

1.9. On se donne ici un *Banach* F et un réel $q \in]1, +\infty]$ tel que $1/p + 1/q = 1$. On conserve les autres notations.

On note alors $L^q_c(X, F, \mu)$ *l'espace des classes d'applications de puissance q-ième intégrables de* X *dans* F *à support compact. Cet espace s'identifie à la limite inductive des Banach* $L^q(K, F, \mu_K)$ *algébriquement.*

1.10. PROPOSITION. — *Si* F *est réflexif ou* F′ *séparable pour la topologie de dual fort, le dual de* $L^p_{\mathrm{loc}}(X, F, \mu)$ *s'identifie algébriquement à* $L^q_c(X, F', \mu)$.

Démonstration. — Le dual d'une limite projective étant la limite inductive des duaux ([12], prop. 6, p. 290), de la proposition 1.2 résulte que $L^p_{\mathrm{loc}}(X, F, \mu)'$ est la limite inductive des $L^p(K, F, \mu_K)'$ ceux-ci s'identifient aux $L^q(K, F', \mu)$ grâce à l'hypothèse faite sur F ([14], chap. V-VI), on utilise la fin de 1.9 pour conclure.

1.11. LE CROCHET DE DUALITÉ EST DÉFINI PAR LA FORMULE :

$$(\varphi, \psi) = \int_X (\varphi(x), \psi(x))\, d\mu(x) \qquad \text{où} \quad \varphi \in L^p_{\mathrm{loc}}(X, F) \quad \text{et} \quad \psi \in L^q_c(X, F').$$

1.12. LEMME. — *Soit* E *un fréchet limite projective des banach* E_N, *alors la réunion des* $L_c^q(X, E_N)$ *est un sous-ensemble du dual de l'espace* $L_{loc}^p(X, E)$ *séparant les points de cet espace.*

Démonstration. — *Soit* $\Psi_N \in L_c^q(X, E'_N)$ et $\varphi \in L_{loc}^p(X, E)$ le crochet de dualité 1.11 permet d'identifier Ψ_N à une forme linéaire continue sur $L_{loc}^p(X, E)$ par la formule $\Psi_N(\varphi) = (\pi_N \varphi, \Psi_N)$; d'autre part, φ est nul si et seulement si les $\pi_N \varphi|_K$ sont nuls, or $L^q(K, E'_N)$ séparent les points de $L^p(K, E_N)$.

2. Rappel sur la cohomologie continue

2.0. Soit G un groupe localement compact, on définit les objets suivants (*cf.* [11]).

2.1. On appellera G-*module* un espace vectoriel topologique séparé sur lequel opère une représentation linéaire fortement continue de G.

2.2. Soient E et F deux G-*modules*, un G-*morphisme* de E dans F est une application linéaire continue α de E dans F qui entrelace les représentations respectives de G.

2.3. On dira que α est une G-injection forte, s'il admet un inverse à gauche linéaire et continu.

2.4. Soit β un G-morphisme de E dans F, on dira que c'est un G-*morphisme fort* si les applications $\operatorname{Ker}\alpha \to E$ et $E/\operatorname{Ker}\alpha \to F$ sont des G-injections fortes.

2.5. Soit $0 \to E \xrightarrow{\varepsilon} X^0 \xrightarrow{d^0} X^1 \xrightarrow{d^1} \ldots$ une résolution algébrique d'un G-module E, par des G-modules $X^0, X^1, \ldots$, on dira que c'est une *résolution forte* de E si les G-morphismes $\varepsilon, d^0, d^1, \ldots$ sont forts.

2.6. *Remarque.* — Soit $0 \to E \to X^0 \xrightarrow{d^0} X^1 \xrightarrow{d^1} \ldots$ un complexe de G-modules admettant une *homotopie contractante continue*, alors c'est une résolution forte de E.

2.7. Un G-module I est dit *relativement injectif* si pour toute G-injection forte α de E dans F, et tout G-morphisme φ de E dans I, il existe un G-morphisme $\bar{\varphi}$ de F dans I prolongeant φ, c'est-à-dire tel que $\bar{\varphi}\alpha = \varphi$.

2.8. La résolution forte de 2.6 sera dite *relativement injective* si les G-modules $X_0, X_1, \ldots$ le sont.

2.9. PROPOSITION. — *Deux résolutions fortes d'un* G-*module* E, *relativement injectives, sont homotopiquement équivalentes, les morphismes prolongeant l'identité de* E *et les homotopies associées sont des* G-*morphismes.*

Preuve. — On adapte facilement la démonstration algébrique standard (*cf.* [13]) à notre cadre topologique.

2.10. On déduit de 2.9 que, munis de la topologie quotient, les espaces de cohomologie ($n \geqq 0$), $H^n(0 \to X^{0G} \xrightarrow{d} X^{1G} \xrightarrow{d} \ldots)$ du complexe des invariants par G d'une résolution forte relativement injective de E sont indépendants algébriquement et topologiquement de la résolution forte relativement injective choisie.

2.11. Par définition les espaces de cohomologie ci-dessus seront appelés les espaces de cohomologie continue de G à coefficients dans le G-module E.

L'existence de ces espaces est démontrée dans [11], grâce à des résolutions par des espaces de fonctions continues sur G à valeurs dans E.

Le but du prochain paragraphe est la construction de résolutions à partir de fonctions localement de puissance p-ième intégrables.

3. Résolution injective par les L^p_{loc}

3.1. Soit G un groupe localement σ compact, X un espace localement compact σ compact, μ une mesure positive sur X. On suppose que G opère continuement à gauche sur X en laissant μ invariante.

Soit E un G-module de Fréchet pour une représentation u (*cf.* 2.1).

Soit $g \in G$ et φ une fonction de X dans E, alors on définit l'application $\bar{u}(g)$ par la formule

$$[\bar{u}(g)]\,\varphi(x) = u(g).(\varphi(g^{-1}x)).$$

3.1.1. Proposition. — *L'application* $\bar{u}$ *induit une représentation de* G *dans* $C(X, E)$ *et* $L^p_{loc}(X, E)$ *respectivement,* $C(X, E)$ *et* $L^p_{loc}(X, E)$ *sont des* G-*modules pour cette représentation.*

Démonstration. — Il faut montrer que $\bar{u}$ est continue de $G \times C(X, E)$ dans $C(X, E)$ et de $G \times L^p_{loc}(X, E)$ dans $L^p_{loc}(X, E)$.

Montrons-le d'abord pour les fonctions continues : $C(X, E)$ étant un Fréchet, il est tonnelé, donc il suffit de montrer que $\bar{u}$ est séparément continue. La continuité de u implique que pour tout j, il existe i et Mj telle que

$$\|\bar{u}(g)\varphi\|_{K,j} \leqq Mj\,\|\varphi\|_{g^{-1}K,i}, \qquad \forall \varphi \in C(X, E).$$

On en déduit donc la continuité de $\bar{u}(g)$ pour tout g. Il reste donc à voir que l'application de G dans $C(X, E)$ définie par $g \to \bar{u}(g)\varphi$ est continue pour chaque φ. Or, la représentation u, l'action de G dans X et la fonction φ étant continue, l'application de $G \times X$ dans E, $(g, x) \to \bar{u}(g)\,\varphi(x)$ est continue.

L'identification naturelle de $C(G \times X, E)$ avec $C(G, C(X, E))$ que la topologie de la convergence compacte (Grothendieck [6], § 9, p. 37) permet alors de conclure.

Regardons maintenant le cas de $L^p_{loc}(X, E)$. D'après Bourbaki (*Intégration*, chap. VIII, § 2, n° 1) il suffit de montrer que $\bar{u}(K_0)$ est équicontinue pour tout compact K_0 de G et qu'il existe un ensemble total dans $L^p_{loc}(X, E)$, D, tel que pour tout $\varphi \in D$, l'application $g \to \bar{u}(g)\varphi$ est continue.

Cette dernière condition est remplie en prenant pour D l'espace $C(X, E)$ (*cf.* 1.3), la topologie de $L^p_{loc}(X, E)$ étant moins fine que celle de $C(X, E)$, il suffit alors d'utiliser la continuité de $\bar{u}$ dans $C(X, E)$.

Pour la première condition, on remarque que u étant continue, $u(K_0)$ est équicontinue, donc pour tout j, il existe i, et Mj telle que pour tout $g \in K_0$, et pour tout $\xi \in E$, $\| u(g)\xi \|_j \leqq Mj \| \xi \|_i$.

On en déduit que pour tout $g \in K_0$, pour tout j, pour tout K compact de X, il existe $Mj > 0$, il existe i,

$$\| \bar{u}(g)\varphi \|_{K,j} \leqq Mj \| \varphi \|_{K_0^{-1}K,\, i} \quad \text{pour tout } \varphi \in L^2_{loc}(X, E),$$

ce qui montre que $\bar{u}(K_0)$ est équicontinue et termine donc la démonstration.

Appliquant la proposition 3.1.1, à $X = G^{n+1}$, G opérant à gauche sur G^{n+1}, et $\mu = \gamma^{\otimes n+1}$ où γ est une mesure de Haar à gauche sur G on a :

3.1.2. Corollaire. — $L^p_{loc}(G^{n+1}, E)$ *est un* G-*module, pour tout* $n \geqq 0$.

3.2. Résolution forte :

3.2.0. Soit $\varepsilon : E \to L^p_{loc}(G, E)$ défini par $\varepsilon(\xi), (g_0) = \xi$, γ presque partout.

Soit $d : L^p_{loc}(G^{n+1}, E) \to L^p_{loc}(G^{n+2}, E)$ définie par

$$(d\varphi)(g_0, \ldots, g_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \varphi(g_0, \ldots, \hat{g}_i, \ldots, g_{n+1}).$$

3.2.1. Proposition. — $0 \to E \xrightarrow{\varepsilon} L^p_{loc}(G, E) \xrightarrow{d} L^p_{loc}(G \times G, E) \to \ldots$ *est une résolution forte de* E.

Démonstration. — On vérifie facilement que ε et d sont des G-morphismes et que $d.d = 0$ et $d.\varepsilon = 0$. Il suffit d'après le lemme 2.6, de construire une homotopie contractante continue.

Soit $\chi \in C(G, \mathbf{R})$ positive à support compact K_χ et d'intégrale 1 sur G. Alors si $\varphi \in L^p_{loc}(G, E)$, comme $\chi \in L^q_c(G, \mathbf{R})$, $\varphi . \chi \in L^1(G, E)$ on pose

$$\sigma_0(\varphi) = \int_G \varphi(g)\chi(g)\, dg.$$

$$\| \sigma_0(\varphi) \|_i \leqq \| \varphi \|_{K_\chi, i} . \| \chi \|,$$

où $\| \chi \|$ désigne la norme de χ dans $L^q(G, \mathbf{R})$.

Donc σ_0 est continue.

De plus $\sigma_0 \varepsilon(\xi) = \int_{K_\chi} \xi\chi(g)\, dg = \xi$ donc $\sigma_0 \varepsilon = 1$.

Cas général. — $n \geqq 1$: soit $\varphi \in L^p_{loc}(G^{n+1}, E)$ alors par le théorème de Lebesgue-Fubini [*cf.* (1.4)] on peut considérer φ comme une fonction de $L^p_{loc}(G, L^p_{loc}(G^n, E))$ soit $g \to \bar{\varphi}(g)$ cette fonction.

Alors comme pour σ_0 on pose

$$\sigma_n \varphi = \int_G \bar{\varphi}(g)\chi(g)\, dg,$$

ici E est remplacé par $L^p_{loc}(G^n, E)$.

Le lemme (1.12) permet de justifier le calcul formel suivant :

$$(\sigma_{n+1} d^n \varphi)(g_0, \ldots, g_n) = \int_G (d^n \varphi)(g, g_0, \ldots, g_n) \chi(g)\, dg$$

$$= \varphi(g_0, \ldots, g_n) + \int_G \sum_{i=1}^{n+1} \varphi(g, g_0, \ldots, \hat{g}_{i-1}, \ldots, g_n) \chi(g)\, dg$$

$$= \varphi(g_0, \ldots, g_n) + (-1)^i \sum_{i=0}^{n} \sigma_n \varphi(g_0, \ldots, \hat{g}_i, \ldots, g_n)$$

$$= \varphi(g_0, \ldots, g_n) - (d^{n-1} \sigma_n \varphi)(g_0, \ldots, g_n).$$

On a donc $\sigma_{n+1} d^n + d^{n-1} \sigma_n = 1$.

C.Q.F.D.

3.4. Théorème. — *Soit* Γ *un sous-groupe fermé de* G, *soit* E *un* Γ*-module de Fréchet, on suppose qu'il existe une section borélienne* σ *de* $\Gamma\backslash G$ *dans* G, *telle que l'image de tout compact de* $\Gamma\backslash G$ *par* σ, *soit relativement compact dans* G (*c'est le cas si* G *est séparable*) : *alors le* Γ*-module* $L^p_{loc}(G, E)$ *est relativement injectif.*

Démonstration. — Soit i de U dans V, une Γ-injection forte, soit f de U dans $L^p_{loc}(G, E)$, un Γ-morphisme, il faut montrer (*cf.* 2.7) que f se prolonge en un Γ-morphisme $\bar{f}$ de V dans $L^p_{loc}(G, E)$.

Soit s un inverse à gauche de i et soit χ une fonction continue à support compact sur Γ, d'intégrale 1.

On pose

$$(f_\chi(v))(g) = (f(s(v)))(g) . \chi(\sigma(\Gamma g)\, g^{-1})$$

pour tout $v \in V$ et pour presque tout $g \in G$.

La fonction χ étant bornée et σ étant borélienne, v étant fixé la fonction $f_\chi(v) \in L^p_{loc}(G, E)$,

On pose alors $(\bar{f}_\chi(v))(\gamma) = \gamma(f_\chi(\gamma^{-1} v))$, l'action de Γ étant continue sur V et sur $L^p_{loc}(G, E)$, $\bar{f}_\chi(v) \in C(\Gamma, L^p_{loc}(G, E))$.

On va montrer qu'elle est intégrable sur Γ au sens de 1.6.

En effet soit K un compact de G, par hypothèse sur σ, si g parcourt K, $\sigma(\Gamma g) . g^{-1}$ reste dans un compact K_σ de Γ; donc si K_χ désigne le support de χ dans Γ, $\chi(\sigma(\Gamma g) . g^{-1} \gamma)$ est non nul seulement si $\sigma(\Gamma g) . g^{-1} \in K_\chi$ et donc *a fortiori* si $\gamma \in K_\sigma^{-1} . K_\chi$.

L'application $\bar{f}_\chi(v)$ composée à gauche avec l'application de restriction de G à K, a donc son support contenu dans le compact $K_\sigma^{-1} . K$, il en résulte (*cf.* 1.7), que

$$\bar{f}_\chi(v) \in L^1(\Gamma, L^p_{loc}(G, E)).$$

Si on pose

$$\bar{f}(v) = \int_\Gamma (\bar{f}_\chi(v))(\gamma)\, d\gamma,$$

on a ainsi défini une application de V dans $L^p_{loc}(G, E)$ qui est continue (*cf.* 1.7) de plus c'est un Γ-morphisme, en effet :

$$\bar{f}(\gamma_0 . v) = \int_\Gamma \gamma f_\chi(\gamma^{-1}.\gamma_0 . v)\, d\gamma = \gamma \int_\Gamma \gamma_0^{-1}.\gamma . f_\chi(\gamma^{-1}.\gamma_0 . v)\, d\gamma = \gamma_0 . \bar{f}(v).$$

Ces égalités sont justifiées par 1.8 et le fait que l'on intègre par rapport à une mesure de Haar.

Il ne reste plus qu'à montrer que $\bar{f}$ prolonge f, il suffit pour cela de voir (*cf.* 1.12), que si $\psi_N \in L^q_c(G, E'_N)$,

$$(\bar{f}.i(u), \psi_N) = (f(u), \psi_N)$$

ceci est démontré par les égalités suivantes :

$$(\bar{f}.i(u), \psi_N) = \left(\int_\Gamma \gamma f_\chi(\gamma^{-1}.i(u))\, d\gamma,\ \psi_N \right) = \int_\Gamma (\gamma f_\chi)(\gamma^{-1}.i(u)),\ \psi_N)\, d\gamma$$

$$= \int_\Gamma \int_G (\gamma f)(s(\gamma^{-1}.i(u))(g),\ \psi_N(g)) . \chi(\sigma(\Gamma g).g^{-1}.\gamma)\, dg\, d\gamma$$

$$= \int_G (f(u)(g),\ \psi_N(g)) \int_\Gamma \chi(\sigma(\Gamma g).g^{-1}.\gamma)\, d\gamma\, dg = (f(u), \psi_N).$$

La première égalité résulte de la définition de $\bar{f}$, la deuxième du lemme 1.8, la troisième de 1.11, la quatrième du lemme 1.4 et la cinquième du fait que l'intégrale de χ vaut 1 par hypothèse.

3.5. Corollaire. — $0 \to E \xrightarrow{\varepsilon} L^p_{loc}(G, E) \xrightarrow{d} L^p_{loc}(G \times G, E) \xrightarrow{d} \ldots$ *est une résolution forte du* G-*module de Fréchet* E *par des* G-*modules de Fréchet relativement injectifs.*

C'est une conséquence directe de la proposition 3.2.1.

Rassemblant les résultats de 3.5 et 2.10 on obtient finalement que *la cohomologie du complexe* $(0 \to L^p_{loc}(G, E)^G \xrightarrow{d} L^p_{loc}(G \times G, E)^G \xrightarrow{d} \ldots)$ *est topologiquement isomorphe à celle du complexe*

$$(0 \to C(G, E)^G \xrightarrow{d} C(G \times G, E)^G \xrightarrow{d} \ldots).$$

Les formules d'homotopie contractante et d'injectivité relative ci-dessus permettent de calculer explicitement les morphismes de régularisation et les homotopies associées (*cf.* 2.9); il se trouve qu'on peut obtenir des formules plus simples, c'est l'objet du prochain paragraphe.

4. Régularisation des cocycles L^p_{loc}

4.1. Ici G opère continuement sur G^n par translation à gauche laissant invariante $\gamma^{\otimes n}$ où γ est une mesure de Haar à gauche sur G, E est un G module de Fréchet.

On suppose dans toute la suite que G est σ-compact.

Alors pour tout $n \geqq 1$, les espaces $C(G^n, E)$ et $L^p_{loc}(G^n, E)$ ont une structure de G-module associé aux représentations U_c et U_p respectivement par la proposition 3.1.1.

On notera dans la suite C^n le G-module $C(G^{n+1}, E)$ et L^n le G-module $L^p_{loc}(G^{n+1}, E)$.

Pour tout $n \geqq 0$, pour tout i, $0 \leqq i \leqq n+1$, on définit les opérateurs ${}^c d^n_i$ et ${}^L d^n_i$ de C^n dans C^{n+1} et de L^n dans L^{n+1} par la formule :

4.2. $$(d^n_i \varphi)(g_0, \ldots, g_{n+1}) = \varphi(g_0, \ldots, \hat{g}_i, \ldots, g_{n+1}).$$

Les opérateurs d^n_i sont des G-morphismes.

Posons $d^n = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i d^n_i$, les G-morphismes d permettent de construire les deux complexes :

$$C^* : \quad 0 \to C^0 \xrightarrow{d^0} C^1 \xrightarrow{d^1} \ldots \to C^n \xrightarrow{d^n} C^{n+1} \ldots,$$

$$L^* : \quad 0 \to L^0 \xrightarrow{d^0} L^1 \xrightarrow{d^1} \ldots \to L^n \xrightarrow{d^n} C^{n+1} \ldots.$$

On va construire un morphisme R^* de L^* dans C^*.

Pour cela fixons χ une fonction continue positive à support compact K_χ dans G et d'intégrale 1.

Alors pour tout $\varphi \in L^p_{loc}(G^{n+1}, E) = L^n$ on pose,

$$(R^n \varphi)(g_0, \ldots, g_n) = \int_{G^{n+1}} \varphi(h_0, \ldots, h_n) \chi(g_0^{-1} h_0) \ldots \chi(g_n^{-1} h_n) \, dh_0 \ldots dh_n.$$

4.3. LEMME. — *R^* est un G-morphisme du complexe L^* sur le complexe C^*.*

Pour tout φ, $R^n \varphi$ est continue car c' est la convolée de φ avec une fonction continue à support compact.

Pour montrer la continuité de R^n on peut se ramener au cas d'une seule variable (R^0); l'inégalité de Hölder donne

$$\left\| \int_G \varphi(h) \chi(g^{-1} h) \, dh \right\| \leqq \| \varphi \|_{p, gK_\chi} \| \chi \|_q,$$

où $\| \ \|_q$ désigne la norme dans $L^q(G, R)$ avec $(1/p)+(1/q)=1$. On a donc $\| R^0 \varphi \|_{c, K} \leqq \| \varphi \|_{p, KK_\chi} \cdot \| \chi \|_q$ et la continuité de R^0 et de R^n en résulte.

Pour montrer les propriétés algébriques on se bornera au plus bas degré, c'est la même démonstration dans le cas général.

$$(U_c(g) . R^0 \varphi)(g_0) = u(g)(R^0 \varphi)(g^{-1} g_0) = u(g) \int_G \varphi(h) \chi(g_0^{-1} gh) \, dh$$

$$= \int_G u(g) \varphi(g^{-1} h) \chi(g_0^{-1} h) \, dh = R^0 \, U_p(g) \varphi.$$

On a $U_c . R^* = R^* . U_p$ donc R^* est un G-morphisme. C'est aussi un morphisme de complexes :

$$d_0^0(R^0\varphi)(g_0, g_1) = (R^0\varphi)(g_1) = \int_G \varphi(h_1)\chi(g_1^{-1}h_1)\,dh$$

$$= \int_{G\times G} (d_0^0\varphi)(h_0, h_1)\chi(g_0^{-1}h_0)\chi(g_1^{-1}h_1)\,dh_0\,dh_1 = (R^0 d_0^0\varphi)(g_0, g_1).$$

On a utilisé ici le fait que l'intégrale de χ vaut 1.

On en déduit que $R^* d = d . R^*$ et le lemme est démontré.

4.4. D'autre part, l'injection canonique de $C(G, E)$ dans $L^p_{loc}(G, E)$ permet de définir un morphisme I^* du complexe de G-module C^* dans le complexe L^*. On va montrer (prop. 4.8 ci-après) que $R^* \circ I^*$ et $I^* \circ R^*$ sont homotopes à l'identité.

Pour tout $n \geqq 1$ et tout i, $0 \leqq i \leqq n-1$ on définit les opérateurs ${}^cS_i^n$ et ${}^LS_i^n$ de C^n dans C^{n-1} et de L^n dans L^{n-1} par la formule

$$(S_i^n\varphi)(g_0, \ldots, g_{n-1}) = \int_{G^{i+1}} \varphi(h_0, \ldots, h_i, g_i, \ldots, g_{n-1})\chi(g_0^{-1}h_0)\ldots\chi(g_i^{-1}h_i)\,dh_0\ldots dh_i.$$

4.5. Lemme. — *${}^LS_i^n$ est un G-morphisme de L^n dans L^{n-1}.*

Montrons tout d'abord que S_i^n est bien définie.

Pour tout couple d'entier $(i, j)\, i \leqq j$ on pose pour alléger l'écriture :

$$g_i^j = (g_i, \ldots, g_j) \in G^{j-i+1},$$
$$\chi(g)_i^j = \chi(g_i)\ldots\chi(g_i),$$
$$K_i^j = K_i \times \ldots \times K_j,$$
$$dg_i^j = dg_i \ldots dg_j.$$

Avec ces notations on a donc :

$$(S_i^n\varphi)(g_0^{n-1}) = \int_{G^{i+1}} \varphi(h_0^i, g_i^{n-1})\chi(g^{-1}h)_0^i\,dh_0^i.$$

Le théorème de Lebesgue-Fubini appliqué à une fonction φ appartenant à $L^p_{loc}(G^{n+1}, E)$ montre que l'application partielle $h_0^i \to \varphi(h_0^i, g_i^{n-1})$ est localement de puissance p-ième intégrable pour presque tout g_i^{n-1}.

D'autre part, fixons g_0^i, la fonction $h_0^i \to \chi(g^{-1}h)_0^i$ a son support de $(g K_\chi)_0^i$ et elle est de puissance q-ième intégrable, où q est le conjugué de p, de plus on a

$$\| h_0^i \to \chi(g^{-1}h)_0^i \|_q = \|\chi\|_q^{i+1}.$$

Donc g_0^{n-1} presque partout $h_0^i \to \varphi(h_0^i, g_i^{n-1})\chi(g_0^{-1}h)_0^i$ est intégrable, et toujours en vertu du théorème de Lebesgue-Fubini cette intégrale dépend mesurablement de g_0^{n-1}.

On a la majoration

$$\|(S_i^n\varphi)(g_0^{n-1})\| \leqq \| h_0^i \to \varphi(h_0^i, g_i^{n-1})\|_{p, (gK_\chi)_0^i} \cdot \|\chi\|_q^{i+1}.$$

La fonction $S_i^n \varphi$ est donc localement de puissance p-ième intégrable et l'on a :

$$\| S_i^n \varphi \|_{p, K_0^{n-1}} \leqq \| \varphi \|_{p, K} \cdot \| \chi \|_q^{i+1},$$

où $K = (KK_\chi)_0^i \times K_i^{n-1}$.

Cette dernière inégalité entraîne la continuité de S_i^n.

Montrons que c'est un G-morphisme.

$$\begin{aligned}(U_p(k) S_i^n \varphi)(g_0^{n-1}) &= u(k) . (S_i^n \varphi)(k^{-1} . g_0^{n-1}) \\ &= u(h) \int_{G^{i+1}} \varphi(h_0^i, k^{-1} . g_i^{n-1}) \chi(g^{-1} kh)_0^i \, dh_0^i \\ &= \int_{G^{i+1}} u(k) \varphi(k^{-1} h_0^i, k^{-1} g_i^{n-1}) \chi(g^{-1} h)_0^i \, dh_0^i = S_i^n U_p(k) \varphi(g_0^{n-1})\end{aligned}$$

et le lemme est démontré.

4.6. LEMME. — *${}^c S_i^n$ est un G-morphisme de C^n dans C^{n-1}.*

Pour montrer que $S_i^n \varphi$ est définie et continue de G^n dans E il suffit de remarquer que, si φ est une fonction continue de $G \times G$ dans E, et K un compact de G, la fonction $g \to \int_K \varphi(g, h) \, dh$ est continue.

Ceci résulte de ce que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $g_0 \in G$, il existe un voisinage V de g_0 dans G tel que $\forall h \in K$ et $\forall g \in V$, $\| \varphi(g, h) - \varphi(g_0, h) \| < \varepsilon$.

Le lemme se démontre alors d'une façon analogue au lemme 4.5.

4.7. LEMME. — *Le système des S_i et des d_i vérifie les relations simpliciales suivantes :*

$$\begin{aligned}S_i^{n+1} d_j^n &= d_{j-1}^{n-1} S_i^n \quad \textit{pour} \quad 2 \leqq i+2 \leqq j \leqq n+1, \\ S_i^{n+1} d_j^n &= d_j^{n-1} S_{i-1}^n \quad \textit{pour} \quad 0 \leqq j \leqq i-1 \leqq n-1, \\ S_i^{n+1} d_{i+1}^n &= S_{i+1}^{n+1} d_{i+1}^n \quad \textit{pour} \quad 0 \leqq i \leqq n-1, \\ S_0^{n+1} d_0^n &= 1_{L^n} \quad (\textit{resp.}\ 1_{C^n}), \\ S_n^{n+1} d_{n+1}^n &= I^n \circ R^n \quad (\textit{resp.}\ R^n \circ I^n).\end{aligned}$$

Démonstration. — Ces formules se vérifient par un calcul direct.

Les relations ci-dessus sont certaines des conditions qui interviennent dans la définition des homotopies co-simpliciales; plus précisément ce sont les conditions duales des conditions (i) et (ii) de la définition 5.1 de [14].

Or, ces conditions suffisent à entraîner la proposition duale de la proposition 5.3 de [14]; c'est-à-dire que si l'on pose

$$S^n = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i S_i^n \quad \text{(définie sur } L^* \text{ et } C^* \text{ respectivement).}$$

On a le résultat suivant :

4.8. Proposition. — *Les morphismes de complexe* $R^* \circ I^* : C^* \to C^*$ *et* $I^* \circ R^* : L^* \to L^*$ *sont homotopes à l'identité plus précisément on a* :

$$ {}^cS^* \circ {}^cd^* + {}^cd^* \circ {}^cS^* = R^* \circ I^* - 1^* $$

et

$$ {}^LS^* \circ {}^Ld^* + {}^Ld^* \circ {}^LS^* = I^* \circ R^* - 1^*. $$

4.9. Interprétation des résultats obtenus (cochaînes inhomogènes). — Considérons encore un G-module de Fréchet E et un réel $p \in [1, +\infty[$.

Notons H^n_{cont} (resp. $H^n_{L^p_{\mathrm{loc}}}$) les groupes de cohomologie de G à coefficient dans E définis à l'aide de cochaînes continues (resp. localement de puissance p-ième intégrable); rappelons la définition de μ^n_{cont} celle de $H^n_{L^p_{\mathrm{loc}}}$ étant analogue.

On pose $C^n_{\mathrm{cont}} = C(G^n, E)$ (espace des cochaînes) $n \geq 0$.

On définit l'application cobord δ^n_c de C^n_{cont} dans C^{n+1}_{cont} par la formule.

4.9.1. $$(\delta^n_{\mathrm{cont}}\varphi)(g_0, \ldots, g_n) = U g_0\, \varphi(g_1, \ldots, g_n) + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i+1} \varphi(g_0, \ldots, g_i g_i + 1, \ldots, g_n) + (-1)^{n+1} \varphi(g_0, \ldots, g_{n-1}),$$

$(C^*_{\mathrm{cont}}\, \delta^*_c)$ est alors un complexe.

On note Z^n_{cont} le noyau de δ^n_c *espace des n-cocycles continus inhomogènes.*

On note B^n_{cont} l'image de δ^{n-1}_c dans C^n_c *espace des n-cobords...*

Le n-ième espace de cohomologie de G à coefficients dans E est alors le quotient des n-cocycles par les n-cobords à savoir

$$ H^n_{\mathrm{cont}}(G, E) = Z^n_{\mathrm{cont}}(G, E)/B^n_{\mathrm{cont}}(G, E). $$

On munira C^n_{cont} (resp. $C^n_{L^p_{\mathrm{loc}}}$) de la topologie de la convergence uniforme (resp. L^p) sur tout compact.

4.10. Proposition. — *Soit* E *un* G-*module de Fréchet pour une représentation* u, G *un groupe localement compact dénombrable à l'infini, il existe un morphisme* θ^* *du complexe*

$$ (0 \to E \xrightarrow{\delta} L^p_{\mathrm{loc}}(G, E) \xrightarrow{\delta} \ldots) $$

sur le complexe

$$ (0 \to L^p_{\mathrm{loc}}(G, E)^G \xrightarrow{d} L^p_{\mathrm{loc}}(G \times G, E)^G \xrightarrow{d} \ldots). $$

En chaque degré $n \geq 0$, θ^n *est un isomorphisme topologique de* $L^p_{\mathrm{loc}}(G^n, E)$ *sur* $L^p_{\mathrm{loc}}(G^{n+1}, E)^G$ *défini par la formule :*

$$ (\theta^n.\varphi)(g_0, \ldots, g_n) = u(g_0)\, \varphi(g_0^{-1} g_1, \ldots, g_{n-1}^{-1} g_n) \quad (\star). $$

Démonstration. — Si $\varphi \in L^p_{loc}(G^n, E)$, u étant continue, en utilisant le fait que les mesures sont de Haar, on vérifie que $\theta^n \varphi \in L^p_{loc}(G^{n+1}, E)$.

D'autre part, si $\varphi = 0$ presque partout, $\theta^n \varphi = 0$ presque partout, car l'image réciproque d'un ensemble négligeable dans G par l'application $(g_0, g_1) \to g_0 g_1$, est négligeable dans $G \times G$.

Donc $\theta^n \varphi$ est bien définie ($\theta^n \varphi \in L^p_{loc}(G^{n+1}, E)$).

La continuité de θ^n résulte encore du fait que u est continue et que les mesures sont de Haar.

L'application θ^n est injective. En effet, si $\theta^n \varphi = 0$ alors $(g_0, \ldots, g_n)$ presque partout $\varphi(g_0^{-1} g_1, \ldots, g_{n-1}^{-1} g_n) = 0$ donc $(g_1, \ldots, g_n)$ presque partout $\varphi(g_1, \ldots, g_n) = 0$.

Pour la suite de la démonstration on a besoin du résultat suivant :

4.10.1. Lemme. — *Soit* X *un e. l. c. σ compact sur lequel* G *opère, alors* :

$$\varphi \in L^p_{loc}(X, E)^G \iff (g, x) \quad p.\,p. \quad u(g)\,\varphi(g^{-1} x) = \varphi(x) \quad (\star).$$

Démonstration. — Si $\varphi \in L^p_{loc}(X, E)^G$ alors pour tout g, $u(g)\,\varphi(g^{-1} x) = \varphi(x)$ pour presque tout x, d'autre part, les membres étant mesurables comme fonction de $X \times G$, en appliquant le théorème de Lebesgue-Fubini on a $(\star)$.

Réciproquement si on a $(\star)$, le théorème de Lebesgue-Fubini nous donne g, presque partout $g\varphi = \varphi$; comme g est continue (prop. 3.1.1) $g\varphi = \varphi$ partout

C.Q.F.D.

4.10.2. L'application θ^n est en fait à valeur dans $L^p_{loc}(G^{n+1}, E)^G$:

Il faut montrer que pour tout g, $g\,\theta^n \varphi = \theta^n \varphi$.

Ce qui est équivalent d'après le lemme 4.10.1 à $(g, g_0, \ldots, g_n)$ presque partout,

$$u(g)(\theta^n(\varphi))(g^{-1} g_0, \ldots, g^{-1} g_n) = (\theta^n \varphi)(g_0, \ldots, g_n),$$

ce qui est encore équivalent, compte tenu du fait que les deux membres sont mesurables par rapport à $(g, g_0, \ldots, g_n)$, à :

$$u(g)\,u(g^{-1} g_0)\,\varphi(g_0^{-1} g_1, \ldots, g_{n-1}^{-1} g_n)$$
$$= u(g)\,\varphi(g_0^{-1} g_1, \ldots, g_{n-1}^{-1} g_n)(g, g_0, \ldots, g_n) \quad \text{presque partout.}$$

C.Q.F.D.

L'application θ^n est surjective de $L^p_{loc}(G^n, E)$ sur $L^p_{loc}(G^{n+1}, E)^G$: soit $\psi \in L^p_{loc}(G^{n+1}, E)^G$ on définit l'application φ par

$$(1) \qquad \varphi(g_0, \ldots, g_n) = u(g^{-1})\,\psi(g_0, g_0 g_1, \ldots, g_0 g_1, \ldots, g_n)(g_0, \ldots, g_n) \qquad \text{p. p.}$$

On a alors $(g, g_0, \ldots, g_n)$ p. p. :

$$(2) \qquad \varphi(g g_0, g_1, \ldots, g_n) = u(g_0^{-1})\,u(g^{-1})\,\psi(g g_0, g g_0 g_1, \ldots, g_0 g_0 g_1, \ldots, g_n)$$

mais en appliquant le lemme on a :

$$(3) \qquad u(g^{-1})\,\psi(g g_0, \ldots, g g_0 \ldots g_n) = \psi(g_0, \ldots, g_0 \ldots g_n)(g, g_0, \ldots, g_n) \quad \text{p. p.}$$

Et donc finalement $(g, g_0, \ldots, g_n)$ p. p.

$$\varphi(g_0, \ldots, g_n)=\varphi(gg_0, g_1, \ldots, g_n). \tag{4}$$

Notons $\bar{\varphi}$ la fonction de $L^p_{loc}(G, L^p_{loc}(G^n, E))$ définie par

$$\bar{\varphi}(g_0)(g_1, \ldots, g_n)=\varphi(g_0, g_1, \ldots, g_n); \qquad g_0 \text{ p. p. } g_1, \ldots, g_n \text{ p. p.}$$

La fonction $\bar{\varphi}$ vérifie pour presque tout (g, g_0), $\bar{\varphi}(gg_0)=\bar{\varphi}(g_0)$, donc elle est égale presque partout à une constante $\underline{\varphi} \in L^p_{loc}(G^n, E)$, il suffit d'appliquer la définition de mesurable à la Lusin.

On vérifie alors que $\theta^n \underline{\varphi}=\psi$.

C.Q.F.D.

En résumé l'application θ^n est continue bijective de $L^p_{loc}(G^n, E)$ sur $L^p_{loc}(G^{n+1}, E)^G$ c'est donc un isomorphisme topologique (on est dans les fréchets).

On vérifie ensuite directement de $\theta^{n+1}\delta=d.\theta^n$.

4.11. Voici explicitement les formules de régularisation qui permettent de transformer un cocycle inhomogène L^p_{loc}, en un cocycle continu, ainsi que les formules d'homotopie permettant de calculer le cobord dont ils diffèrent.

Régularisation :

$$\rho^n: \quad L^p_{loc}(G^n, E) \to C(G^n, E), \qquad n \geqq 1, \quad \varphi \in L^p_{loc}(G^n, E).$$

$$(\rho^n \varphi)(g_1, \ldots, g_n)$$
$$=\int_{G^{n+1}} u(k)\varphi(k_1, \ldots, k_n)\chi(k)\chi(g_1^{-1}kk_1)\ldots\chi(g_n^{-1}\ldots g_1^{-1}kk_1\ldots k_n)\,dk\,dk_1\ldots dk_n,$$

$$\rho^0 \xi=\int_G u(k)(\xi).\chi(k)\,dk.$$

Homotopie :

$$\sigma^n: \quad L^p_{loc}(G^n, E) \to L^p_{loc}(G^{n-1}, E), \qquad 0 \leqq i \leqq n-1, \quad n \geqq 1 \quad \text{pour } 1 \leqq i \leqq n-2,$$

$$(\sigma_i^n \varphi)(g_1, \ldots, g_{n-1})$$
$$=\int_{G^{i+1}} u(k)\varphi(k_1, \ldots, k_i, k_i^{-1}\ldots k_1^{-1}k^{-1}g_1\ldots g_i, g_{i+1}, \ldots, g_{n-1})\chi(k)\chi(g_1^{-1}kk_1)$$
$$\ldots\chi(g_i^{-1}\ldots g_1^{-1}kk_1)\,dk\,dk_1\ldots dk_i,$$

$$\sigma_{n-1}^n(\varphi)=\int_{G^n} u(k)\varphi(k_1, \ldots, k_{n-1}, k_{n-1}^{-1}\ldots k_1^{-1}k^{-1}g_1\ldots g_{n-1})\chi(k)\chi(g_1^{-1}kk_1)\ldots$$
$$\times\chi(g_{n-1}^{-1}\ldots g_1^{-1}kk_1\ldots k_{n-1})\,dk\,dk_1\ldots dk_n,$$

$$(\sigma^0 \varphi)=\int_G u(k)\varphi(k^{-1}, g_1, \ldots, g_{n-1})\chi(k)\,dk.$$

Finalement

$$\sigma^n = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \sigma_i^n .$$

5. Régularisation C^∞

5.1. Soit G un groupe de Lie, E un G-module de Fréchet.

On note E_∞, le sous-espace des vecteurs C^∞ de E, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs v de E telle que l'application $(g \to gv)$ de G dans E soit C^∞, on a donc une injection naturelle de E_∞ dans $C^\infty(G, E)$ *via* cette application, on munit l'espace E_∞ de la topologie initiale associée, c'est un espace de Fréchet; sur tout ceci voir [19].

On définit alors les espaces de cohomologie $H^*_{C^\infty}(G, E_\infty)$ comme la cohomologie du complexe :

$$0 \to C^\infty(G, E_\infty)^G \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} C^\infty(G^{n+1}, E_\infty)^G \xrightarrow{d} \ldots .$$

5.2. THÉORÈME. — $H^*_{C^\infty}(G, E_\infty)$ *et* $H^*_{\text{cont}}(G, E)$ *sont topologiquement isomorphes.*

Démonstration :

5.2.1. On construit une homotopie contractante σ du complexe

$$0 \to E \xrightarrow{\varepsilon} C^\infty(G, E) \underset{\sigma}{\overset{d}{\rightleftarrows}} \ldots \underset{\sigma}{\overset{d}{\rightleftarrows}} C^\infty(G^{n+1}, E) \underset{\sigma}{\overset{d}{\rightleftarrows}} \ldots$$

par la formule habituelle $(\sigma.\varphi)(g_1, \ldots, g_n) = \varphi(\varepsilon, g_1, \ldots, g_n)$ où $\varphi \in C^\infty(G^{n+1}, E)$. Ce complexe est donc (*cf.* 2.6) une *résolution forte de* E.

5.2.2. LEMME. — *L'espace* $C^\infty(G, E)$ *est relativement injectif.*

Preuve. — On procède comme en 3.1; soit i une G-injection forte de U dans V, s un inverse à gauche de i, on définit $\bar{f}$ le prolongement de f à V [f étant un G-morphisme de U dans $C^\infty(G, E)$] par la formule suivante :

$$\bar{f}(v)(g_0) = \int_G f(gs(g^{-1}v)(g_0)).\chi(g_0^{-1}g)\,dg,$$

où χ est une fonction continue à support compact d'intégrale 1 sur G.

L'expression sous l'intégrale est une fonction de $L^1(G, C^\infty(G, E))$ au sens de 1.7 *cf.* aussi [16], p. 33.

L'expression de $\bar{f}(v)$ a alors un sens par l'application de 1.8 en prenant pour application linéaire la mesure de Dirac au point g_0.

On vérifie alors comme en 3.1 que $\bar{f}$ est un G-morphisme prolongeant f.

5.2.3. On en conclut que la *résolution forte définie en* 5.2.1 *est relativement injective* puisque $C^\infty(G^{n+1}, E)$ est topologiquement isomorphe à $C^\infty(G, C^\infty(G^n, E))$.

5.2.4. LEMME. — *Soit* X *une variété sur laquelle opère* G *de façon* C^∞, *alors l'injection naturelle de* $C^\infty(X, E_\infty)^G$ *dans* $C^\infty(X, E)^G$ *est un isomorphisme topologique.*

Preuve. — Le théorème du graphe fermé permet de conclure si on montre que cette application est surjective.

Or si $q \in C^\infty(X, E)^G$, l'application $\bar\varphi$ de $X \times G$ dans E définie par $\bar\varphi(x, g) = gq(x) = \varphi(gx)$ est C^∞, et donc par définition de E_∞ $\varphi \in C^\infty(X, E_\infty)$.

5.2.5. En appliquant les résultats précédents et 2.9 on obtient que les complexes

$$0 \to C^\infty(G, E)^G \xrightarrow{d} \ldots$$

et

$$0 \to C^\infty(G, E_\infty)^G \xrightarrow{d} \ldots$$

sont homotopiquement équivalents et le théorème s'en déduit.

Remarques. — Si on suppose seulement que E est quasi complet, le théorème subsiste mais alors l'isomorphisme n'est pas forcément topologique (on a appliqué le théorème du graphe fermé en 5.2.3).

On a les mêmes formules de régularisation qu'en 4.11, ici χ est C^∞.

6. Dualité entre cohomologie L^p_{loc} et homologie L^q_c, caractérisation des limites de cobords

6.1. Nous considérons ici un G-module de Banach *réfléxif* E, un réel $p \in [1, +\infty[$ et l'exposant conjugué $q \in]1, +\infty]$. On a vu (1.10) que le dual de $L^p_{loc}(X, E)$ s'identifie algébriquement à $L^q_c(X, E')$ par le crochet de dualité (1.11).

Considérons le complexe de cochaîne :

$$(0 \to E \xrightarrow{\delta} L^p_{loc}(G, E) \xrightarrow{\delta} \ldots) \quad \text{défini en } 4.9.1.$$

Par dualité on définit le complexe de chaînes :

$$(\ldots \xrightarrow{\partial} L^q_c(G, E') \xrightarrow{\partial} E' \to 0).$$

Plus précisément l'application bord ∂ est donnée par :

$$\langle \varphi, \partial\psi \rangle = \langle \delta\varphi, \psi \rangle, \quad \text{pour tout } \varphi \in L^p_{loc}(G^n, E) \text{ et tout } \psi \in L^q_c(G, E'),$$

la formule explicite étant :

$$\partial_n \psi(g_1, \ldots, g_n) = \int_G u(g^{-1})\psi(g, g_1, \ldots, g_n) + \sum_{i=1}^n \psi(g_1, \ldots, g, g^{-1}g_i, \ldots, g_n) + (-1)^{n+1}\psi(g_1, \ldots, g_n, g)\,dg.$$

6.2. On définit :

— l'espace des n-cycles, noté $Z_n^{(q)}$, noyau de ∂ dans $L_c^q(G^n, E')$;

— l'espace des n-cobords, noté $B^n(p)$, image de δ dans $L_{loc}^p(G^n, E)$;

— l'espace des limites de n-cobords, noté $\overline{B}^n(p)$, adhérence de $B^n(p)$ dans $L_{loc}^p(G^n, E)$ pour la topologie de la convergence en moyenne d'ordre p sur tout compact.

6.3. THÉORÈME. — *Soit* E *un* G-*module de Banach réflexif,* p *un réel* $\in [1, +\infty[$ et $q \in]1, +\infty]$ *l'exposant conjugué de* p.

Une n-cochaînes φ *[élément de* $L_{loc}^p(G^n, E)$*] est limite d'une suite de n-cobords [élément de* $B^n(p)$*] si et seulement si elle est orthogonale à tous les n-cycles* ψ *[éléments de* $Z_n(q)$*].*

Démonstration. — L'application ∂_{n-1} étant la transposée de l'application ∂^{n-1} on a

$$B^n(p)^\perp = \operatorname{Im} \delta^\perp = \operatorname{Ker} \partial = Z_n(p)$$

donc $B^n(p)^{\perp\perp} = Z_n(p)^\perp$.

Mais $B^{n\perp\perp}$ étant l'adhérence faible de $B^p(p)$ c'est donc aussi l'adhérence forte, puisque la topologie forte sur $L_{loc}^p(G^n, E)$ est compatible avec la dualité (Bourbaki e. v. t. livre V, § 6). Finalement on a l'égalité

$$\overline{B^n(p)} = Z_n(p)^\perp.$$

C.Q.F.D.

7. Cohomologie d'une intégrale directe de représentations

7.1. Soit G un groupe localement compact séparable, H un espace de Hilbert séparable, u une représentation unitaire de G dans .

On notera $\underline{H}^n(G, H)$ l'espace séparé associé à $H^n(G, H)$. On se propose de démontrer le résultat suivant, déjà connu pour la 1-cohomologie ([8], p. 315, prop. 4).

La démonstration repose ici sur la désintégration des cocycles L_{loc}^2 et des cycles L_c^2.

7.2. THÉORÈME. — *Soit* $u = \int_T^\oplus u_t \, d\tau(t)$ *une intégrale hilbertienne de représentations unitaires de* G, *où* (T, τ) *est un espace borélien standard,* H *et* H_t *étant les espaces de* u *et* u_t *respectivement.*

Alors si pour un degré donné n, $\underline{H}^n(G, H_t) = 0$ *pour presque tout* t, $\underline{H}^n(G, H) = 0$

7.3. Nous commencerons par établir un lemme qui précise la première partie de ([9], p. 85, prop. 1), tout en étant un peu moins général.

LEMME. — *Soit* X *un espace localement compact séparable, muni d'une mesure de Radon positive* μ, H *et* H_t *comme dans* 7.2, *il existe sur le champ* $t \to L^2(X, H_t)$ *une structure de* *champ τ-mesurable et un isomorphisme naturel d'espaces hilbertiens de* $L^2(X, H)$ *sur* $\int_T^{\oplus} L^2(X, H_t)\, d\tau(t)$,

$$\varphi \to \{ t \to \varphi_t \} \quad \textit{avec} \quad \varphi_t(x) = \varphi(x)_t, \quad (x, t) \textit{ presque partout.}$$

7.4. On peut supposer $T = [0, 1]$ et τ de Radon sans restreindre la généralité.

Définissons sur le champ $(x, t) \to H_{x, t}$ où $H_{x, t} = H_t$ pour tout x dans X et tout t dans T une structure de champ $\mu \otimes \tau$ mesurable.

Soit $\{ t \to \xi_t^n \}$ une suite fondamentale de champs τ-mesurables de vecteurs pour le champ $t \to H_t$ d'espaces de Hilbert.

Posons $\xi_{x, t}^n = \xi_t^n$, la suite $\{ (x, t) \to \xi_{x, t}^n \}$ vérifie les hypothèses de la proposition 4 de ([5], chap. II, § 1), donc il existe sur le champ $(x, t) \to H_{x, t}$ une structure de champ mesurable telle que les champs $(x, t) \to \xi_{x, t}^n$ forment une suite fondamentale de champs mesurables de vecteurs.

Soit $\varphi \in \int_{X \times T}^{\oplus} H_{x, t}\, d\mu(x)\, d\tau(t)$, on pose $[[\eta_X(\varphi)](x)]_t = \varphi(x, t)$, $\eta_X(\varphi)$ est définie pour presque tout (x, t).

Par hypothèse $(x, t) \to (\varphi(x, t), \xi_{x, t}^n) = (\eta_X(\varphi)(x)_t, \xi_t^n)$ est mesurable, une application répétée du théorème de Lebesgue-Fubini permet alors de conclure que $\eta_X(\varphi) \in L^2(X, H)$ et que l'application η_X est isométrique.

Les applications $x \to f(x)\xi$ où $f \in L^2(X)$ et $\xi \in H$ formant un sous-ensemble total de $L^2(X, H)$, l'image de η_X est dense dans $L^2(X, H)$, et donc η_X est un isomorphisme d'espaces hilbertiens envoyant

$$\int_{X \times T}^{\oplus} H_{x, t}\, d\mu(x)\, d\tau(t) \quad \text{sur} \quad L^2(X, H).$$

7.5. DÉFINISSONS SUR LE CHAMP $t \to L^2(X, H_t)$ UNE STRUCTURE DE CHAMP τ-MESURABLE. — Les champs $t \to f_i . \xi_t^j$ où $\{ f_i \}$ est une suite totale dans $L^2(X)$, vérifient les hypothèses de la proposition 4 de ([5], chap. II, § 1), il existe donc une structure de champ mesurable sur les $L^2(X, H_t)$ telle que les champs $t \to f_i \xi_t^j$ forment une suite fondamentale de champs mesurables de vecteurs.

Soit $\varphi \in \int_{X \times T}^{\oplus} H_{x, t}\, d\mu(x)\, d\tau(t)$, alors on pose

$$((\eta_T(\varphi))_t)(x) = \varphi(x, t),$$

$\eta_T(\varphi)$ est définie ici pour presque tout t, pour presque tout x.

Comme dans 7.4 on montre que η_T définie une isométrie de

$$\int_{X \times T}^{\oplus} H_{x, t}\, d\mu(x)\, d\tau(t) \quad \text{dans} \quad \int_T^{\oplus} L^2(X, H_t)\, d\tau(t).$$

On peut supposer ici que les ξ^j sont de carré intégrable donc en multipliant les $f_i\,\xi^j_t$ par des fonctions continues à support compact dans T on obtient un ensemble total dans $\int_T^{\oplus} L^2(X, H_t)\,d\tau(t)$ (proposition 7 de [5], chap. II, § 1), qui est dans l'image de η_T donc η_T est un isomorphisme.

L'isomorphisme du lemme est $\eta_T\,\eta_X^{-1} : L^2(X, H) \to \int_T^{\oplus} L^2(X, H_t)\,d\tau(t)$.

C.Q.F.D.

7.6. Le lemme 7.3 nous permet d'exprimer le produit scalaire dans $L^2(X, H)$ sous la forme intégrale suivante :

Soit φ *et* $\psi \in L^2(X, H)$ *alors* $\langle \varphi \mid \psi \rangle = \int_T \langle \varphi_+ \mid \psi_t \rangle\,d\tau(t)$.

7.7. Définition. — *Notons* $\int_T^{\oplus} L^2_{\text{loc}}(X, H_t)\,d\tau(t)$ *l'espace des classes de champ* $t \to \varphi_t \in L^2_{\text{loc}}(X, H_t)$ *tel que le champ* $t \to \varphi_t|_K \in L^2(K, H_t)$ *soit de carré intégrable au sens du lemme* 7.3 *quand* K *parcourt les parties compactes de* X.

7.8. Lemme. — *Il existe un isomorphisme algébrique naturel de* $L^2_{\text{loc}}(X, H)$ *dans* $\int_T^{\oplus} L^2_{\text{loc}}(X, H_t)$, $\varphi \to (t \to \varphi_t)$, *avec* $\varphi_t(x) = \varphi(x)_t\,(t, x)$ *presque partout.*

$L^2_{\text{loc}}(X, H)$ étant la limite projective des $L^2(K, H)$ et compte tenu du lemme 7.3 on est ramené à montrer que $\int_T^{\oplus} L^2_{\text{loc}}(X, H_t)\,d\tau(t)$ s'identifie algébriquement à $\varinjlim \int_T^{\oplus} L^2(K, H_t)\,d\tau(t)$.

Soit le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\int_T^{\oplus} L^2_{\text{loc}}(X, H_t)\,d\tau(t) \arrow[r] \arrow[d] & \int_T^{\oplus} L^2(K, H_t)\,d\tau(t) \\
\int_T^{\oplus} L^2(K', H_t)\,d\tau(t) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$$K \subset K',$$

où les flèches sont les applications de restrictions. Ce diagramme est commutatif d'où une application naturelle de $\int_T^{\oplus} L^2_{\text{loc}}(X, H_t)\,d\tau(t)$ dans $\varprojlim \int_T^{\oplus} L^2(K, H_t)\,dt$.

Pour construire l'application réciproque on peut se restreindre à une suite croissante de compacts $\{K_n\}\, n \in \mathbf{N}$.

Soit

$$\{\varphi_{K_n}\} \in \varprojlim \int_T^{\oplus} L^2(K_n, H_t)\,d\tau(t).$$

$\{t \to \varphi_{K_n}\}$ est défini pour presque tout t :

$$\forall (i, j), \quad i<j, \qquad \varphi_{K_j}(t)_{|K_i} = \varphi_{K_i}(t), \ t \text{ p.p.}$$

d'où t p.p., $\forall (i, j)$, $\varphi_{K_j}(t)_{|K_i} = \varphi_{K_i}(t)$,
d'où, t p.p., $\exists\, \varphi_t \in L^2_{\text{loc}}(X, H_t)$, telle que pour tout i :

$$\varphi_{t|K_i} = \varphi_{K_i}(t).$$

On vérifie alors aisément que l'application de $\varprojlim \displaystyle\int_T^{\oplus} L^2(K_n, H_t)\, dt(t)$ dans

$$\int_T^{\oplus} L^2_{\text{loc}}(X, H_t)\, dt(t) : (\{t \to \varphi_{K_n}\}) \to \{t \to \varphi_t\}$$

est bien l'application réciproque cherchée.

L'isomorphisme ainsi construit et le lemme 7.3 permettent d'écrire

$$[(\varphi \,|\, K)(x)]_t = [\varphi_t \,|\, K](x), \ (x, t) \text{ p.p.}$$

D'où $[\varphi(x)]_t = [\varphi_t(x)]$, (x, t) p.p.

7.9. Notons $\displaystyle\int_T^{\oplus} L^2_c(X, H_t)\, d\tau(t)$ l'espace des classes de champs $t \to \psi_t \in L^2_c(X, H_t)$ tels qu'il existe un compact K de X tel que pour tout t, ψ_t soit l'extension d'une classe de $L^2(K, H_t)$ (i. e. il existe une fonction à support compact K dans la classe de ψ_t) et que $t \to \psi_t$ soit de carré intégrable au sens de $\displaystyle\int_T^{\oplus} L^2(X, H_t)\, d\tau(t)$.

7.10. Lemme. — *Il existe un isomorphisme algébrique naturel de* $L^2_c(X, H)$ *dans* $\displaystyle\int_t^{\oplus} L^2_c(X, H_t)$, $\psi \to (t \to \psi_t)$ *avec* $\psi_t(x) = \psi(x)_t$, (x, t) *presque partout.*

Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\displaystyle\int_T^{\oplus} L^2_c(X, H_t)\, d\tau(t) & \displaystyle\int_T^{\oplus} L^2(K_j, H_t)\, d\tau(t) \arrow[l] \\
\displaystyle\int_T^{\oplus} L^2(K_i, H_t)\, d\tau(t) \arrow[u] \arrow[ur] & \text{où} \quad K_i \subset K_j.
\end{tikzcd}$$

On a donc une application de $\varinjlim \displaystyle\int_T^{\oplus} L^2(K_i, H_t)\, d\tau(t)$ dans $\displaystyle\int_T^{\oplus} L^2_c(X, H_t)\, d\tau(t)$.

D'autre part, il est clair par définition de $\int_T^{\oplus} L_c^2(X, H_t)\, d\tau(t)$ que chacun de ces éléments est l'extension d'un élément de

$$\int_T^{\oplus} L^2(K, H_t)\, d\tau(t),$$

où K est un certain compact de X.

On a donc

$$L_c^2(X, H) \simeq \varinjlim {}^2(K_i, H) \simeq \varinjlim \int_T^{\oplus} L_c^2(K_i, H_t)\, d\tau(t) = \int_T^{\oplus} L_c^2(X, H_t)\, d\tau(t).$$

7.11. LEMME. — *Si* $\varphi \in L_{\text{loc}}^2(X, H)$ *et* $\psi \in L_c^2(X, H)$ *alors on a* $\langle \varphi \mid \psi \rangle = \int_T \langle \varphi_t \mid \psi_t \rangle\, d\tau(t)$ *où* φ_t *et* ψ_t *sont les désintégrations de* φ *et de* ψ *par* 7.8 *et* 7.10 *respectivement.*

Démonstration. — Soit K un compact de X et $\psi_K \in L^2(K, H)$ tel que ψ soit l'extension de ψ_K à $L^2(X, E)$ on a $\langle \varphi \mid \psi \rangle = \langle \text{rest}_K\, \varphi \mid \psi_K \rangle$ et la formule de désintégration du produit scalaire 7.6 non

$$\langle \varphi \mid \psi \rangle = \int_T^{\oplus} \langle (\text{rest}_K\, \varphi)_t \mid (\psi_K)_t \rangle\, d\tau(t) = \int_T^{\oplus} \langle (\text{rest}_K)\, \varphi_t \mid (\psi_K)_t \rangle\, d\tau(t) = \int_T^{\oplus} \langle \varphi_t \mid \psi_t \rangle\, d\tau(t).$$

7.12. LEMME. — (*a*) *Soit* δ *l'application cobord de* $L_{\text{loc}}^2(G^n, H)$ *dans* $L_{\text{loc}}^2(G^{n+1}, H)$ *définie au paragraphe* 4, *et* δ_t *l'application cobord définie sur chacun des espaces* $L_{\text{loc}}^2(G^n, H_t)$ *pour la représentation* U_t, *alors :*

Si $\varphi \in L_{\text{loc}}^2(G^n, H)$, $(\delta\varphi)_t = \delta_t \cdot \varphi_t$ *pour presque tout* t.

(*b*) *Soit* ∂ *l'application bord de* $L_c^2(G^{n+1}, H)$ *dans* $L_c^2(G^n, H)$ *définie au paragraphe* 3, *et* ∂_t *définie similairement pour la représentation* $U_t =$ *si* $\psi \in L_c^2(G^{n+1}, H)$, $(\partial\psi)_t = \partial_t \psi_t$ *pour presque tout* t.

Démonstration. — En appliquant le lemme 7.8 à $\delta\varphi$:

$$(\delta\varphi)_t(g_0, \ldots, g_n) = ((\delta\varphi)(g_0, \ldots, g_n))_t \quad \text{pour presque tout } (t, g_0, \ldots, g_n).$$

Il reste donc à montrer que

$$((\delta\varphi)(g_0, \ldots, g_n))_t = (\delta_t \psi_t)(g_0, \ldots, g_n)(t, g_0, \ldots, g_n) \text{ p.p.}$$

Ce qui se décompose en les égalités à vérifier $(t, g_0, \ldots, g_n)$ p.p.

$$(U(g_0)\, \varphi(g_1, \ldots, g_n))_t = U_t^t(g_0)\, \varphi_t(g_1, \ldots, g_n).$$

$$(\varphi(g_0, \ldots, g_i g_{i+1}, \ldots, g_n))_t = \varphi_t(g_0, \ldots, g_i g_{i+1}, \ldots, g_n),$$

$$(\varphi(g_0, \ldots, g_{n-1}))_t = \varphi_t(g_0, \ldots, g_{n-1}).$$

La dernière inégalité n'est autre que l'application directe du lemme 7.8 et toujours en appliquant le lemme 7.8, on se réduit à montrer les deux points suivants :

Premier point. — si $\xi \in \mathrm{H}$, $(\mathrm{U}\, g_0\, \xi)_t = \mathrm{U}_t^t(g_0)\, \xi_t(t, g_0)$ p.p., ce qui découle du fait que la représentation U se désintègre;

Deuxième point. — si $\varphi \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathrm{G}, \mathrm{H})$ alors

$$(\varphi(g_0 g_1))_t = \varphi_t(g_0 g_1)(t, g_0, g_1) \text{ p.p.}$$

D'après le lemme 7.8, cette égalité est vraie pour tous les $(t, g_0, g_1) \in \mathrm{T} \times \mathrm{G} \times \mathrm{G}$ n'appartenant pas à l'image réciproque pour l'application $\pi : (t, g_0, g_1) \to (t, g_0, g_1)$ d'un ensemble négligeable N dans $\mathrm{T} \times \mathrm{G}$.

Il suffit donc de montrer que $\varphi^{-1}(\mathrm{N})$ est négligeable :

si on pose

$$\pi^{-1}(\mathrm{N})_{g_0} = \{(t, g_1), (t, g_0, g_1) \in \mathrm{N}\}$$

alors

$$(\tau \otimes \gamma)^*(\pi^{-1}(\mathrm{N})\, g_0) = (\tau \otimes \gamma)^*(\mathrm{N}) = 0,$$

γ étant une mesure de Haar à gauche sur G.

D'autre part π étant mesurable

$$\int^*_{\mathrm{T} \times \mathrm{G} \times \mathrm{G}} 1(\pi^{-1}(\mathrm{N}))(t, g_0, g_1)\, d\tau(t)\, dg_0\, dg_1 = \int^*_{\mathrm{G}} \int^*_{\mathrm{T} \times \mathrm{G}} 1(\pi^{-1}(\mathrm{N}))_{g_0}\, d\tau(t)\, dg_1 . dg_0 = 0.$$

Donc $\varphi^{-1}(\mathrm{N})$ est négligeable.

La partie *b* du lemme se démontre par dualité.

Soit $\varphi \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathrm{G}^n, \mathrm{H})$ et $\psi \in \mathrm{L}^2_c(\mathrm{G}^{n+1}, \mathrm{H})$, la dualité étant séparante, il suffit de montrer que

$$\int_{\mathrm{T}} \langle \varphi, (\partial\psi)_t \rangle\, d\tau(t) = \int_{\mathrm{T}} \langle \varphi_t, \partial_t \psi_t \rangle\, d\tau(t).$$

$$\int_{\mathrm{T}} \langle \varphi_t, (\partial\psi)_t \rangle\, d\tau(t) = \langle \varphi, \partial\psi \rangle = \langle \delta\varphi, \psi \rangle = \int_{\mathrm{T}} \langle (\delta\varphi)_t \,|\, \psi_t \rangle\, d\tau(t)$$

$$= \int_{\mathrm{T}} \langle \delta_t \varphi_t \,|\, \psi_t \rangle\, d\tau(t) = \int_{\mathrm{T}} \langle \varphi_t, \delta_t \psi_t \rangle\, d\tau(t) \quad \text{d'où le lemme.}$$

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 7.2.

D'après le théorème 6.3, on est ramené à montrer que si φ est un n-cocycle pour U il est orthogonal à tous les n-cocycles pour U.

D'après le lemme 7.12 (*a*), φ_t est un n-cocycle pour U_t pour presque tout t, et si ψ est un n-cycle pour U, ψ_t est un n-cycle pour U_t, lemme 7.13 (*b*).

Par hypothèse, compte tenu toujours du théorème 6.3, on a $\langle \varphi_t \mid \psi_t \rangle = 0$ pour presque tout t, donc en appliquant le lemme 7.11, on a

$$\langle \varphi \mid \psi \rangle = \int_{\mathrm{T}} \langle \varphi_t \mid \psi_t \rangle \, d\tau(t) = 0.$$

8. Cohomologie des modules induits L^p_{loc}

8.1. Notations et définitions. — Ici G est un groupe localement compact dénombrable à l'infini, Γ un sous-groupe fermé de G, X un espace localement compact dénombrable à l'infini, muni d'une mesure de Radon μ, on suppose de plus que G agit continuement à gauche sur X en laissant μ invariante, on dira alors en abrégé que X est G-*espace*.

8.2. Construction des modules induits L^p_{loc}. — Soit E un Γ module de Fréchet pour une représentation u. On fait agir G sur $L^p_{\text{loc}}(G, E)$, $p \in [1, +\infty[$, par translation à gauche sur G, et trivialement sur E, on fait agir Γ sur $L^p_{\text{loc}}(G, E)$ par translation à droite sur G et à gauche sur E. Les actions de G et Γ commutent, $L^p_{\text{loc}}(G, E)$ est donc muni d'une structure de $G \times \Gamma$ module, et $L^p_{\text{loc}}(G, E)^\Gamma$ d'une structure de G-module. Plus précisément :

Définition. — *Pour tout* $p \in [1, +\infty[$, *on appelle* G-*module induit* L^p_{loc} *du* Γ-*module* E, *et on note* $I_p(E)$, *l'espace des fonctions* $\varphi \in L^p_{\text{loc}}(G, E)$ *vérifiant :*

Pour tout $\gamma \in \Gamma$, *pour presque tout* $g \in G$, $u(\gamma)\,\varphi(g\gamma) = \varphi(g)$, *l'action* G *sur* $I_p(E)$ *étant définie par :*

Pour tout $g \in G$, *pour presque tout* $g' \in G$, $(g\varphi)(g') = \varphi(g^{-1} g')$.

8.3. Proposition. — *Soit* X *et* Y *deux* G-*espaces, et* E *un* G-*module de Fréchet, alors l'application* η *de* $L^p_{\text{loc}}(X \times Y, E)$ *dans* $L^p_{\text{loc}}(X, L^p_{\text{loc}}(Y, E))$ *définie par* $\eta(\varphi)(x)(y) = \varphi(x, y)$ *pour presque tout* x *pour presque tout* y, *est un isomorphisme de* G-*module.*

Compte tenu du lemme 1.4, il reste à montrer que η est un G-morphisme c'est-à-dire, pour tout g, $g \circ \eta = \eta \circ g$.

Les égalités suivantes sont à lire pour tout $g \in G$, pour presque tout x, pour presque tout y :

Par définition de l'action de G sur $L^p_{\text{loc}}(X, L^p_{\text{loc}}(Y, E))$,

$$((g\eta(\varphi)(x)))(y) = u(g).(\eta(\varphi))(g^{-1}x))(g^{-1}y).$$

Par définition de l'action de G sur $L^p_{\text{loc}}(X \times Y, E)$ et du fait que les mesures sont invariantes par G :

$$(\eta(g\varphi)(x))(y) = u(g)\,\varphi(g^{-1}x, g^{-1}y).$$

Il suffit donc de montrer :

$$(\star) \qquad \eta(\varphi)(g^{-1}x)(g^{-1}y) = \varphi(g^{-1}x, g^{-1}y).$$

L'égalité $\eta(\varphi)(x)(y)=\varphi(x, y)$, est vraie sur $\{(x, y)\in X\times Y, x\in X-N, y\in Y-N_x\}$ où N est négligeable dans X et N_x négligeable dans Y dépendant de x.

Donc ($\star$) est vraie sur

$$\{(g, x, y)\in G\times X\times Y, x\in X-gN, y\in Y-gN_x\}.$$

Mais gN est μ négligeable et gN_x et ν négligeable.

C.Q.F.D.

8.4. Structure de $G\times\Gamma$ module sur $L^p_{loc}(X\times G, E)$.

8.4.1. Sur $L^p_{loc}(X\times G, E)$ on construit deux structures de $G\times\Gamma$ modules, définies par : pour tout $(g, \gamma)\in G\times\Gamma$ pour presque tout $(x', g')\in X\times G$,

$$((g, \nu)_1\varphi)(x', g')=u(\gamma)\varphi(\nu^{-1}x', g^{-1}g'\gamma).$$

$$((g, \gamma)_2\varphi)(x', g')=u(\nu)\varphi(g^{-1}x', g^{-1}g'\gamma).$$

8.4.2. Soit θ l'application de $L^p_{loc}(X\times G, E)$ dans $L^p_{loc}(X\times G, E)$ définie pour $(\theta\varphi)(x, g)=\varphi(g^{-1}x, g)$ pour presque tout (x, g).

Cette application est bien définie car l'ensemble des couples (x, g) telle que gx soit un ensemble négligeable dans X est négligeable.

C'est un isomorphisme de Fréchet, l'application réciproque θ^{-1} est définie par $(\theta^{-1}\psi)(x, g)=\psi(gx, g)$.

8.4.3. Montrons que θ entrelace les actions définies en 8.4.1, c'est-à-dire que $\theta(g, \gamma)_1=(g, \gamma)_2\theta$ pour tout $(g, \gamma)\in G\times\Gamma$.

En effet, on a les égalités suivantes vraies pour tout (g, γ) pour presque tout (x', g') :

$$((g, \gamma)_2(\theta\varphi))(x', g')=u(\gamma)(\theta\varphi)(g^{-1}x', g^{-1}g'\gamma),$$

$$(\theta((g, \gamma)_1\varphi))(x', g')=u(\gamma)\varphi(\gamma^{-1}g'^{-1}x, g^{-1}g'\gamma).$$

Il suffit donc de montrer :

$$(\star\star)\qquad (\theta\varphi)(g^{-1}x', g^{-1}g'\gamma)=\varphi(\gamma^{-1}g'^{-1}x^1, g^{-1}g'\gamma).$$

$(\theta\varphi)(x, g)=\varphi(g^{-1}x, g)$ est vraie sur $\{(x, g)\, GX\times G-N\}$ où N est négligeable dans $X\times G$.

Donc ($\star\star$) est vraie sur

$$\{(g, \gamma, x', g')\in G\times\Gamma\times X\times G, (x', g')\in X-G-g.N.\gamma^{-1}\},$$

où $g.N.\gamma^{-1}=\{(gx', gg'\gamma^{-1})\in X\times G$, tels que $(x', g')\in N\}$.

Mais $gN\gamma^{-1}$ est négligeable dans $X\times G$.

C.Q.F.D.

8.4.4. Rassemblant les résultats précédents de 8.4 on a finalement :

Lemme. — *L'application* θ *de* $L^p_{loc}(X.G, E)$ *sur lui-même définie par* $(\theta\varphi)(x, g)=\varphi(g^{-1}x, g)$ *pour presque tout* $(x, g)\in X\times G$ *est un isomorphisme entrelacant les actions définies en* 8.4.1.

8.5. D'après la proposition 8.3 et le lemme 8.4.4, θ induit un $G\times\Gamma$ isomorphisme de $L^p_{loc}(G, L^p_{loc}(X, E))$ sur $L^p_{loc}(X, L^p_{loc}(G, E))$. Donc $(L^p_{loc}(G, L^p_{loc}(X, E))^G)^\Gamma$ est topologiquement isomorphe à $(L^p_{loc}(X, L^p_{loc}(G, E))^\Gamma)^G$.

On va calculer explicitement ces deux espaces.

8.5.1. Lemme. — *Soit* F *un* Γ *module, et* X *un* G-*espace, l'injection naturelle de* F *dans* $L^p_{loc}(G, F)$ *induit un* Γ *isomorphisme de* F *sur* $L^p_{loc}(G, F)^G$.

Démonstration. — Si $\xi\in F$ $i(\xi)(g')=\xi$ pour presque tout g'.

On a alors pour tout g, pour presque tout g', $i(\xi)(g^{-1}g')=\xi$.

Donc $i(\xi)\in L^p_{loc}(G, F)^G$.

Réciproquement si $\varphi\in L^p_{loc}(G, F)^G$.

Alors pour tout g, pour presque tout g' $\varphi(gg')=\varphi(g')$.

Donc par le théorème de Lebesgue-Fubini : pour presque tout g', pour presque tout g, $\varphi(gg')=\varphi(g')$.

Il existe donc $\xi\in F$, telle que pour presque tout g', $\varphi(g')=\xi$.

On a ainsi montré que i induit un isomorphisme topologique de F sur $L^p_{loc}(G, F)^G$.

Pour montrer que c'est un Γ-isomorphisme il suffit de vérifier que pour tout γ, pour presque tout g, $i(\gamma\xi)(g)=(\gamma(i\xi))(g)$.

Or, on a les égalités pour tout γ, pour presque tout g :

$$i(\gamma\xi)(g)=\gamma.\xi.$$
$$(\gamma(i\xi))(g)=\gamma.(i\xi)(g)=\gamma.\xi.$$

C.Q.F.D.

8.5.2. Grâce au lemme 8.5.1, on obtient que l'espace des $G\times\Gamma$ invariants calculé avec la première action et $(L^p_{loc}(G, L^p_{loc}(X, E))^\Gamma)^G$, est topologiquement isomorphe à $L^p_{loc}(X, E)^\Gamma$ où Γ opère à gauche sur X et sur E.

8.5.3. Lemme. — *Soit* F *un* $G\times\Gamma$ *module,* X *un* G-*espace, alors l'injection naturelle* i *de* F^Γ *dans* F, *induit un* G *isomorphisme* $\bar{i}$ *de* $L^p_{loc}(X, F^\Gamma)$ *sur* $L^p_{loc}(X, F)^\Gamma$.

Démonstration. — Soit $\varphi\in L^p_{loc}(X, F^\Gamma)$.

Pour tout γ, pour presque tout x, $\gamma.(\bar{i}\varphi)(x)=\gamma.\varphi(x)=\varphi(x)$. Donc $\bar{i}\varphi\in L^p_{loc}(X, F)^\Gamma$.

Réciproquement si $\psi\in L^p_{loc}(X, F)^\Gamma$.

Alors pour tout γ, pour presque tout x, $\gamma.\psi(x)=\psi(x)$.

Appliquant le théorème de Lebesgue-Fubini on a, pour presque tout x, pour tout γ, $\gamma\psi(x)=\psi(x)$, l'action de Γ étant continue. Donc $\bar{i}$ est un isomorphisme topologique. On montre alors comme en 8.5.1 que c'est un G-isomorphisme.

8.5.4. Grâce au lemme 8.5.3, et compte tenu de la définition de $I_p(E)$ (8.2), l'espace des $G\times\Gamma$ invariants calculé avec la deuxième action $(L^p_{loc}(X, L^p_{loc}(G, E))^\Gamma)^G$ est topologiquement isomorphe à $L^p_{loc}(X, I_p(E))^G$ où G opère à gauche sur X et $I_p(E)$.

8.6. Rassemblant les résultats des paragraphes précédents, on a une *réciprocité de Frobenius :*

PROPOSITION. — *Soit* X *un* G-*espace*, E *un* Γ-*module de Fréchet, alors on a un isomorphisme topologique* θ *de* $L^p_{loc}(X, E)^\Gamma$ *sur* $L^p_{loc}(X, I_p(E))^G$ *donné par la formule* : $(\theta\varphi)(x)(g) = \varphi(g^{-1} x)$ *pour presque tout* x, *pour presque tout* g.

8.7. « LEMME DE SHAPIRO ».

THÉORÈME. — *Soit* G *un groupe localement compact dénombrable à l'infini*, Γ *un sous-groupe fermé de* G, E *un* Γ *module de Fréchet.*

S'il existe une section borélienne de $\Gamma \backslash G$ *dans* G *telle que l'image de tout compact de* $\Gamma \backslash G$ *soit relativement compact dans* G (*c'est le cas si* G *est séparable*) *alors* $H^*_{cont}(\Gamma, E)$ *est topologiquement isomorphe à* $H^*_{cont}(G, I_p(E))$ *pour tout* $p \in [1, +\infty[$.

Démonstration. — D'après la proposition 3.3.1, et la proposition 3.2.1, on a la résolution Γ-injective de E suivante :

$$0 \to E \to L^p_{loc}(G, E) \xrightarrow{d} L^p_{loc}(G \times G, E) \xrightarrow{d} \dots$$

Donc la cohomologie continue de Γ dans E (théorème 3.4) est celle du complexe

$$0 \to L^p_{loc}(G, E)^\Gamma \xrightarrow{d} L^p_{loc}(G \times G, E)^\Gamma \xrightarrow{d} \dots$$

D'après la proposition 8.6, ce complexe est « topologiquement » isomorphe au complexe

$$0 \to L^p_{loc}(G, I_p(E))^G \xrightarrow{d} L^p_{loc}(G \times G, I_p(E))^G \xrightarrow{d} \dots$$

Il suffit, en effet, d'appliquer la proposition à $X = G^n$ pour tout $n \geqq 1$ et de remarquer que $d\theta = \theta d$.

Or la cohomologie de ce complexe est la cohomologie continue de G dans $I_p(E)$ (d'après le théorème 3.4), et le théorème est démontré.

8.8. CAS DES REPRÉSENTATIONS INDUITES UNITAIRES. — On suppose maintenant que le Γ-module E est unitaire c'est-à-dire que E est un espace hilbertien et que u est unitaire.

Considérons alors la représentation $\tilde{u}$ de Γ dans E définie par

$$\tilde{u}(\gamma)\xi = (\Delta_G(\gamma)/\Delta_\Gamma(\gamma))^{1/2} u(\gamma)\xi.$$

On a ainsi défini une nouvelle structure de Γ-module sur E non unitaire en général, Δ_G et Δ_Γ étant les fonctions modulaires du groupe G et du groupe Γ respectivement.

Le G-module induit $I_2(E)$ à partir du Γ-module $(E, \tilde{u})$, au sens de 8.2 est alors :

$$I_2(E) = \{\varphi \in L^2_{loc}(G, E), \tilde{u}(\gamma)\, \varphi(g\gamma) = \varphi(g)\}.$$

Il n'est pas en général isomorphe à l'« induite de Mackey » à savoir E^u si on prend les notations de [19], chap. 5, p. 367, cependant :

LEMME. — *Si* Γ *est cocompact*, $I_2(E)$ *s'identifie topologiquement à l'induite unitaire de Mackey* E^u.

Démonstration. — L'espace G/Γ étant compact, tout élément φ de $I_2(E)$ appartient à E^u car la condition $\mu_{\varphi\varphi}(G/\Gamma) < +\infty$ est automatiquement vérifiée. On a donc une identité algébrique entre E^u et $I_2(E)$, l'identité algébrique se montre en utilisant le lemme 5.1.12 de [19].

THÉORÈME. — *Soit u une représentation unitaire de Γ dans un Hilbert E, où Γ est un sous-groupe fermé cocompact d'un groupe séparable G alors si $\tilde{u}$ désigne la représentation de Γ dans E définie par*

$$\tilde{u}(\gamma) = (\Delta_G(\gamma)/\Delta_\Gamma(\gamma))^{1/2} u(\gamma)$$

et si E^u désigne l'induite unitaire de u à G, $H^*(\Gamma, (E, \tilde{u}))$ est topologiquement isomorphe à $H^*(G, E^u)$.

Démonstration. — C'est une application directe du théorème et du lemme précédents.

9. Suite spectrale de Hochschild-Serre

Le but de cette section est de démontrer le résultat suivant :

9.1. THÉORÈME. — *Soit G un groupe localement compact dénombrable à l'infini, Γ un sous-groupe fermé distingué de G.*

On suppose qu'il existe une section borélienne de G/Γ dans G telle que l'image de tout compact de G/Γ soit relativement compact dans G. (C'est le cas si G *est séparable*.)

Soit E un G-module de Fréchet tel que $H_c^*(\Gamma, E)$ soit séparé.

Alors $H_c^*(\Gamma, E)$ peut être muni d'une structure de G/Γ module de Fréchet, et il existe une suite spectrale dans le premier quadrant (E_r, d_r), convergeant vers $H_c^*(G, E)$ telle que $E_2^{p,q} = H_c^p(G/\Gamma, H_c^q(\Gamma, E))$.

Démonstration :

9.2. Construction du bicomplexe K :

Considérons pour tout degré $q \geqq 0$, le G-module $L_{\text{loc}}^1(G^{q+1}, E)$.

Le sous-groupe Γ étant distingué, $L_{\text{loc}}^1(G^{q+1}, E)^\Gamma$ est un sous G-module et même un G/Γ module.

9.2.1. On note K la famille bigraduée d'espace de Fréchet définie pour chaque bidegré (p, q), $p \geqq 0$ et $q \geqq 0$ par

$$K^{p,q} = (L_{\text{loc}}^1(G/\Gamma)^{p+1}, L_{\text{loc}}^1(G^{q+1}, E)^\Gamma)^{G/\Gamma}.$$

9.2.2. On construit sur K les différentielles d' et d''; $d' : K^{p,q} \to K^{p+1,q}$ définie par :

$$(d'\varphi)(x_0, \ldots, x_{p+1})(g_0, \ldots, g_q)$$
$$= (-1)^{p+q} \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \varphi(x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{p+1})(g_0, \ldots, g_0),$$

pour presque tout $(x_0, \ldots, x_{p+1}) \in (G/\Gamma)^{p+2}$, pour presque tout $(g_0, \ldots, g_q) \in G^{q+1}$.

$d'' : K^{p,q} \to K^{p,q+1}$ définie par :

$$(d''\varphi)(x_0, \ldots, x_p)(g_0, \ldots, g_{q+1}) = (-1)^q \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j \varphi(x_0, \ldots, x_p)(g_0, \ldots, \hat{g}_j, \ldots, g_{q+1}),$$

pour presque tout $(x_0, \ldots, x_p) \in (G/\Gamma)^{p+1}$, pour presque tout $(g_0, \ldots, g_{q+1}) \in G^{q+2}$.

9.2.3. Le triplet (K, d', d'') est ainsi muni d'une structure de bicomplexe de Fréchet, on vérifie, en effet, les relations : $d'd'=0$, $d'd''+d''d'=0$, $d''d''=0$.

9.2.4. On construit alors le complexe total $(\operatorname{Tot} K, d)$ définit en chaque degré n par :

$$(\operatorname{Tot} K)_n = \bigoplus_{p+q=n} K^{p,q} \quad \text{(la somme directe finie)}$$

et la différentielle étant définie par $d = d' + d''$.

9.3. On peut construire sur Tot K, deux filtrations F′ et F″ à partir du bicomplexe K, on note E′ et E″ les suites spectrales associées respectivement à F et à F″.

Les suites spectrales E et E′ convergent toutes les deux vers la cohomologie du complexe Tot K, pour les filtrations F et F′ respectivement.

Sur tout ceci voir par exemple [12], chap. XI.

9.4. CALCUL DE $E''^2_{p,q}$.

9.4.1. Si on note K le bicomplexe déduit de K par la relation $K^{p,q} = K^{q,p}$, alors $E_2''^{p,q} = H''^p(H'^q(K))$.

Où en chaque degré p, $H'^q(K)_p$ est la cohomologie du complexe $(K^{p,q}, d')_{q \geq 0}$, la différentielle sur $H'^q(K)$ étant celle induite par d''.

9.4.2. Pour calculer $H'^q(K)$ on a besoin du lemme suivant :

LEMME. — *Si* I *est un module* G *relativement injectif, alors* I^Γ *est* G/Γ *relativement injectif.*

Démonstration. — Soit $0 \to U \xrightarrow{i} V$ une G/Γ injection forte, c'est aussi une G-injective forte, donc si φ est G/Γ morphisme de U dans I^Γ, on lui associe canoniquement un G-morphisme $\overline{\varphi}$ de U dans I, en le composant avec l'injection de I^Γ dans I, $\overline{\varphi}$ se prolonge alors en un G-morphisme $\overline{\overline{\varphi}}$ de V dans I, puisque I est G-relativement injectif, et on a $\overline{\overline{\varphi}}.i = \overline{\varphi}$.

L'image de V pour $\overline{\overline{\varphi}}$ dans I est dans I^Γ, donc $\overline{\overline{\varphi}}$ induit un G/Γ morphisme $\hat{\varphi}$ de V dans I^Γ, et par construction $\hat{\varphi}$ prolonge φ.

C.Q.F.D.

9.4.3. *Calcul de* H'^q. — Au vu des définitions du bicomplexe K et de H'^q, le théorème 3.4 montre que, pour tout p, $(H'^q)_p$ n'est autre que la cohomologie continue de G/Γ à coefficient dans $L^1_{loc}(G^{p+1}, E)^\Gamma$, en degré q.

Mais d'après le théorème 3.4 et le lemme 9.4.2, $L^1_{loc}(G^{p+1}, E)^\Gamma$ est relativement G/Γ injectif.

Donc pour tout $p \geqq 0$: pour tout $q \geqq 1$

$$H'^{q}(K)_p = 0 \qquad \text{et} \qquad H'^{0}(K)_p = (L^1_{\text{loc}}(G^{p+1}, E)^{\Gamma})^{G/\Gamma} = L^1_{\text{loc}}(G^{p+1}, E)^G.$$

9.4.4. La différentielle induite par d'' sur le gradué, $(L^1_{\text{loc}}(G^{p+1}, E)^G)_{p \geqq 0}$ est la différentielle homogène standard de (3.2.0).

Donc toujours d'après le théorème 3.4, $H'' H'^0$ est la cohomologie continue de G à valeur dans E.

En résumé on a donc :

$$E_2''^{p,q} = 0 \quad \text{pour tout } p \geqq 0 \text{ et } q \geqq 1,$$
$$E_2''^{p,0} = H^p_c(G, E) \quad \text{pour tout } p \geqq 0.$$

9.5. La suite spectrale E″ est donc dégénérée. Dans les espaces vectoriels chaque filtration donne lieu à une décomposition de H(Tot K) en somme directe (non canonique).

On a donc :

$$H^n(\text{Tot}\, K) = \bigoplus_{p+q=n} E_\infty''^{p,q} = E_\infty''^{0,n} = E_2''^{0,n} = H^n_c(G, E).$$

9.6. Calcul de $E_2'^{p,q} = H'^p H^q(K)$. — L'espace $E_2'^{p,q}$ est égal à $H'^p H''^q(K)$ où $(H''^q(K))_p$ est la cohomologie pour p fixé du complexe $((K^{p,q}), d'')_{q \geqq 0}$, $H'^p H''^q(K)$ est la cohomologie du complexe $((H''^q(K))_p, d')$ en degré p, d' étant la différentielle induite par la différentielle d' sur K.

9.6.1. Notons S le complexe $(L^1_{\text{loc}}(G^{q+1}, E)^{\Gamma})_{q \geqq 0}$, d'après le théorème 3.4, $L^1_{\text{loc}}(G^{q+1}, E)$ est Γ injectif (*c'est ici que l'hypothèse sur la section de* G/Γ *dans* G *est utile*).

Fixons p, $H''(K)_p$ est alors la cohomologie du complexe $(L^1_{\text{loc}}((G/\Gamma)^{p+1}, S)^{G/\Gamma}, d'')$.

9.6.2. L'hypothèse de séparation des $H^p_c(\Gamma, E)$ permet alors de calculer $H''(K)_p$ en appliquant la proposition 1.6; ici $X = (G/\Gamma)^p$, u est la différentielle d''.

On a alors les isomorphismes :

$$H''^q(K)_p = L^1_{\text{loc}}((G/\Gamma)^{p+1}, H^q(S))^{G/\Gamma} = L^1_{\text{loc}}((G/\Gamma)^{p+1}, H^q_c(\Gamma, E))^{G/\Gamma},$$

$H'^p H''^q(K)$ est alors la cohomologie en degré p du complexe $((L^1_{\text{loc}}(G/\Gamma)^{p+1}, H^q_c(\Gamma, E))^{G/\Gamma}, d')$, c'est-à-dire la cohomologie continue de G/Γ a valeur dans $H^q_c(\Gamma, E)$.

9.6.4. Le terme $E_2'^{p,q}$ de la suite spectrale E′ associé à la première filtration est donc topologiquement isomorphe à $H^p_c(G/\Gamma, H^q_c(\Gamma, E))$.

9.7. Résumons les résultats obtenus. — On a construit une suite spectrale E′ associée à la première filtration de K, dont le $E_2^{p,q}$ est calculé en 9.6.4, on sait par 9.3 qu'elle converge vers H(Tot K) qui est égale à $H_c(G, E)$ par 9.5.

Le théorème 9.1 est ainsi démontré.

On peut préciser le résultat de la manière suivante :

$$H_c^p(G/\Gamma, H^q(\Gamma, E)) = E_2^{p,q} \to E_\infty^{p,q}.$$

Avec $H^n(G, E) = \bigoplus_{p+q=n} E_\infty'^{p,q}$.

10. Application de la suite spectrale de Hochschild-Serre aux groupes nilpotents

10.1. THÉORÈME. — *Soit* G *un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe,* u *une représentation unitaire irréductible de* G *dans un Hilbert* E, *non triviale, alors* $H_c^*(G, E) = 0$.

On va raisonner par récurrence sur la dimension de G.

10.2. *Si* G *est commutatif,* alors dans les hypothèses du théorème u est un caractère non trivial de G.

On sait que G agit trivialement sur $H^*(G, E)$, mais l'action sur les cocycles se réduit ici à la multiplication par $u(g)$, on en déduit que pour tout g, $(u(g)-1)\varphi$ est un cobord, il suffit alors de prendre g tel que $u(g) \neq 1$ pour voir que φ est lui-même un cobord, et donc que $H^*(G, E) = 0$.

10.3. CAS GÉNÉRAL. — On a une suite dérivée, $G = G_{n+1} \supset G_n \supset \ldots \supset G_1 \supset G_0 = e$, où G_{i+1}/G_i est dans le centre de G/G_i, les G_i étant des sous-groupes distingués de G.

En particulier G_1 est dans le centre de G, donc $u \mid G_1$ est scalaire. Si $u \mid G_1$ est non trivial, le même raisonnement qu'en 10.2 nous donne que $H^*(G_1, u \mid G_1) = 0$.

On peut alors appliquer le théorème 9.1 à (G, G_1, E), on a

$$E_2^{p,q} = H^p(G/G_1), \qquad H^q(G_1, u \mid G_1) = 0,$$

donc la suite spectrale est dégénérée et $H^*(G, E) = 0$.

10.4. Si $u \mid G_1$ est trivial, alors par l'isomorphisme de Van Est [11], $H^*(G_1, E) \simeq H^*(\mathscr{G}_1, E)$ où $\mathscr{G}_1$ est l'algèbre de Lie de G. La représentation u étant triviale sur G_1, et $\mathscr{G}_1$ étant abélienne $H^n(\mathscr{G}_1, E) = A^n(\mathscr{G}, E)$, où $A^n(\mathscr{G}, E)$ désigne l'espace de n-formes multilinéaires alternées de $\mathscr{G}_1$ dans E. Le sous-groupe G_1 étant central dans G, l'action de G/G_1 dans $A^n(\mathscr{G}, E)$ se réduit à l'action sur E.

Le G/G_1 module $H^n(G_1, E)$ s'identifie donc à la somme directe d'un nombre fini $a(n)$ de copies du G/G_1 module E, où $a(n)$ désigne la dimension de $A^n(\mathscr{G}_1)$.

Le terme $E_2^{p,q}$ se décompose alors :

$$E_2^{p,q} = \bigoplus_{a(q)} H^p(G/G_1, E).$$

Par hypothèse de récurrence $H^*(G/G_1, E)$ est nulle, on en déduit alors que $E_2^{p,q} = 0$ donc que $H^*(G, E) = 0$.

C.Q.F.D.

10.5. COROLLAIRE. — *Soit* G *un groupe nilpotent connexe et simplement connexe, u une représentation unitaire de* G *dans un hilbert* E, *si u ne contient pas la représentation triviale alors* $\bar{H}_c^*(G, E)=0$ *où* $\bar{H}^n$ *désigne le séparé de* H^n.

Démonstration. — La représentation *u* se désintègre sur le quasidual de G par rapport à une certaine mesure τ, la représentation triviale est négligeable pour τ, ceci ajouté au résultat précédent, montre qu'on est dans les hypothèses du théorème 7.1 qui permet de conclure.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOREL-WALLACH, *Séminaire sur la cohomologie des sous-groupes discrets* (à paraître).

[2] N. BOURBAKI, *Espaces vectoriels topologiques.*

[3] N. BOURBAKI, *Intégration*, chap. IV et VII.

[4] CASSELMAN-WIGNER, *Continuous Cohomology and a Conjecture of Serre's* (*Inv. Math.*, vol. 25, 1974, p. 199-211).

[5] J. DIXMIER, *Les algèbres d'opérateurs dans les espaces hilbertiens.*

[6] A. GROTHENDIECK, *Espaces vectoriels topologiques*, São Paulo, 1964.

[7] A. GROTHENDIECK, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires* (*Mem. Amer. Math. Soc.*, vol. 16, 1955).

[8] A. GUICHARDET, *Sur la cohomologie des groupes topologiques II* (*Bull. Sc. math.*, 2e série, t. 96, 1972, p. 305-332).

[9] A. GUICHARDET, *Une caractérisation des algèbres de Von Neuman discrète* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. 89, 1961, p. 77-101).

[10] HAEFLIGER, *Differentiable Cohomology Cons and C.I.M.E.*, 1976.

[11] HOCHSCHILD-MOSTOV, *Cohomology of Groups* (*Ill. J. Math.*, vol. 6, 1962, p. 367-401).

[12] G. KÖTHE, *Topological Vector Space I*, Springer-Verlag, 1969.

[13] S. MACLANE, *Homology*, Springer-Verlag, 1967.

[14] P. MAY, *Simplicial Objects in Algebraic Topology* (*Math. Stud.*, # 11, Van Nostrand).

[15] *Séminaire Maurey-Schwartz*, 1974-1975.

[16] MOSTOV, *Cohomology of Topological Groups and Solvmanifolds* (*Annals of Math.*, vol. 73, n° 1, 1961, p. 21-48).

[17] J. PICHAUD, *Sur la 1-cohomologie de certaines représentations induites* (*C.R. Acad. Sc.*, t. 282, 1976, p. 367-369).

[18] G. PINCZON et J. SIMON, *Sur la 1-cohomologie de groupes de Lie semi-simples* (*C.R. Acad. Sc.*, t. 279, 1974, p. 455-458).

[19] WARNER, *Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups I*, n° 188, Springer Verlag.

(Manuscrit reçu le 14 décembre 1977,
révisé le 27 octobre 1978.)

Philippe BLANC
École polytechnique,
Centre de Mathématiques,
plateau de Palaiseau,
91120 Palaiseau.