

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JACQUES GASQUI

Équivalence projective et équivalence conforme

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 12, n° 1 (1979), p. 101-134

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1979_4_12_1_101_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉQUIVALENCE PROJECTIVE ET ÉQUIVALENCE CONFORME

PAR JACQUES GASQUI

Soient X et Y deux variétés différentiables de même dimension finie n et soit ∇ (resp. ∇') une connexion linéaire sans torsion sur X (resp. Y). Si $x \in X$ et $y \in Y$, on dira que le germe en x de ∇ est équivalent au germe en y de ∇' s'il existe un germe en x de difféomorphisme f de X dans Y tel que $f(x) = y$ et que

$$(1) \quad \nabla'_{f_* \xi} f_* \eta = f_* \nabla_\xi \eta$$

pour tous germes en x de champs de vecteurs ξ, η sur X . Dans le cas analytique, une condition nécessaire et suffisante pour que (1) soit vraie est qu'il existe un jet d'ordre 1 en x de difféomorphisme f de X dans Y tel que $f(x) = y$ et que, pour tout $l \geq 0$, la dérivée covariante d'ordre l en x du tenseur de courbure de ∇ s'identifie, par la différentielle de f en x , à la dérivée covariante d'ordre l en y du tenseur de courbure de ∇' . On a un résultat tout à fait similaire pour l'équivalence des métriques riemanniennes. Ces théorèmes d'équivalence sont essentiellement dus à Elie Cartan (cf. [1] ou [2]).

Nous nous proposons de démontrer des résultats analogues pour l'équivalence projective des connexions linéaires ou l'équivalence conforme des métriques riemanniennes. Il est bien connu (cf. [3] ou [15]) que, pour le problème d'intégrabilité des systèmes d'équations différentielles mis en jeu, le tenseur de courbure projective ou conforme, qui est le tenseur de Weyl en dimensions suffisamment grandes, joue le même rôle que le tenseur de courbure dans les situations précédentes. Nous voulons montrer ici qu'il joue aussi le même rôle pour les problèmes d'intégrabilité formelle et que la résolution locale de ces problèmes d'équivalence se ramène à l'étude de jets d'ordre 1 en un point.

On dira que le germe en $x \in X$ de ∇ est projectivement équivalent au germe en $y \in Y$ de ∇' s'il existe un germe en x de difféomorphisme f de X dans Y et un germe en x de 1-forme θ sur X tels que

$$(2) \quad \nabla'_{f_* \xi} f_* \eta = f_* \nabla_\xi \eta + \theta(\xi) f_* \eta + \theta(\eta) f_* \xi$$

pour tous germes en x de champs de vecteurs ξ, η sur X . Posons $F = E \times_x T^*$, où E est le fibré trivial $\text{pr}_1 : X \times Y \rightarrow X$ et où T^* est le fibré cotangent de X , et soit $\tilde{J}_1(F)$ le sous-fibré ouvert de $J_1(F)$ des 1-jets de la forme $j_1(f, \theta)(x)$, avec f difféomorphisme local de X dans Y , défini

au voisinage de $x \in X$, et θ germe en x de 1-forme sur X . Si T_Y est le fibré tangent de Y , on définit, pour $l \geq 0$, la courbure projective d'ordre l associée aux connexions ∇ et ∇' , qui est un morphisme

$$\omega'_l : \tilde{J}_1(F) \rightarrow \otimes^{l+1} T^* \otimes \Lambda^2 T^* \otimes T^* \otimes_F T_Y$$

de fibrés sur F , donné par une expression universelle mettant en jeu les dérivées covariantes d'ordre inférieur à l des tenseurs de Weyl et d'ordre inférieur à $l-2$ des tenseurs de Ricci de ∇ et ∇' (prop. 3.1). Dans le cas analytique et si $n \geq 3$, le principal résultat que nous montrons (th. 3.2) est que s'il existe un jet $p \in \tilde{J}_1(F)$ tel que $\omega'_l(p) = 0$, pour tout $l \geq 0$, alors le germe en x de ∇ est projectivement équivalent au germe en $f(x)$ de ∇' , si $p = j_1(f, \theta)(x)$, avec f difféomorphisme local de X dans Y défini au voisinage de $x \in X$ et θ germe en x de 1-forme sur X . Bien entendu, la nullité de la courbure projective d'ordre 0 se ramène à la préservation des tenseurs de Weyl et, en accord avec les fameux calculs de Weyl (cf. [15]), toutes les courbures projectives sont nulles lorsque les tenseurs de Weyl sont nuls.

Nous commençons, au paragraphe 0, par donner des résultats préliminaires sur des calculs d'obstructions au relèvement de solutions formelles de certaines équations différentielles. Afin de familiariser le lecteur avec nos méthodes, nous redonnons, aux paragraphes 1 et 2, une démonstration des théorèmes de Cartan cités plus haut. On considère l'équation différentielle non linéaire d'ordre 2 dont les solutions sont les difféomorphismes f de X dans Y , vérifiant (1). Pour $l \geq 0$, l'obstruction au relèvement d'une solution formelle d'ordre $l+2$ de cette équation en une solution formelle d'ordre $l+3$ est un morphisme Ω_l qui se factorise de manière canonique, en un morphisme ω_l , à travers la projection naturelle sur les jets d'ordre 1 de difféomorphismes. La condition $\omega_l(j_1(f)(x)) = 0$, avec f difféomorphisme local de X dans Y , défini au voisinage de $x \in X$, signifie alors que la différentielle de f en x identifie les dérivées covariantes d'ordre l des tenseurs de courbure de ∇ et ∇' en x et $f(x)$ respectivement. Dans le cas analytique, la convergence des solutions formelles s'obtient grâce à un théorème de Malgrange (cf. [11], appendice) sur les solutions formelles fortement prolongeables d'une équation différentielle. Le théorème d'équivalence des métriques riemanniennes se déduit alors facilement du théorème d'équivalence des connexions linéaires.

Le paragraphe 3 est consacré à l'équivalence projective. Le théorème 3.2 se démontre d'une manière analogue à celle développée aux paragraphes 1 et 2. On note N_2 l'équation différentielle d'ordre 2 dont les solutions sont les couples (f, θ) , avec f difféomorphisme de X dans Y et θ 1-forme sur X , vérifiant (2). L'obstruction au relèvement d'une solution formelle d'ordre $l+2$ de cette équation en une solution formelle d'ordre $l+3$ est un morphisme noté Ω'_l . En rajoutant à N_2 une équation d'ordre 1, déduite du premier prolongement de N_2 , on obtient une autre équation différentielle N'_2 et la restriction de Ω'_l au l -ième prolongement de N'_2 , qui est alors donnée par la même formule que Ω_l à condition de remplacer les tenseurs de courbure par les tenseurs de Weyl respectifs des connexions, se factorise aussi de manière canonique à travers la projection naturelle sur les jets d'ordre 1, pour donner ω'_l . En comparaison avec le cas affine, les calculs sont beaucoup plus longs, non seulement à cause de la complication naturelle des formules, mais surtout à cause du fait que ω'_l mesure l'obstruction au relèvement d'une solution formelle d'ordre $l+2$ d'une équation différentielle

en une solution formelle d'ordre $l+3$ d'une autre équation différentielle. Ici aussi la convergence se déduit du théorème de Malgrange cité plus haut. Il nous faut signaler, par ailleurs, qu'en travaillant directement avec les obstructions Ω'_i , on retrouve au passage les résultats de Veblen-Thomas [14] qui ont montré qu'on pouvait résoudre le problème d'équivalence projective à partir de la connaissance des jets infinis des tenseurs de Weyl.

En dimension 2, on définit aussi des courbures projectives d'ordres supérieurs et on obtient le même genre de résultats (th. 3.3). Dans cette situation, il faut remplacer le tenseur de Weyl, qui est identiquement nul, par un autre tenseur de courbure projective défini par Weyl et appelé « covariant projectif » par Schouten dans [14].

Au paragraphe 4, on définit aussi des courbures conformes d'ordres supérieurs (prop. 4.1) et on obtient des résultats tout à fait analogues pour l'équivalence conforme des métriques riemanniennes (th. 4.1, 4.2 et 4.3). Bien qu'ils ne s'en déduisent pas, les calculs procèdent exactement de la même philosophie que ceux du cas projectif. C'est pourquoi la plupart des démonstrations ont été abrégées.

Nous utilisons, dans ce papier, les notations et le formalisme de la théorie des équations différentielles non linéaires surdéterminées de Goldschmidt [6]. Enfin le lecteur trouvera les formules classiques de la géométrie projective ou conforme, que nous n'avons pas redémontrées ici, dans [3], [14], [9] et [10].

Je tiens à exprimer ma gratitude au professeur H. Goldschmidt pour l'aide constante qu'il m'a apportée tout au long de la préparation de cet article.

0. Résultats préliminaires

Les résultats de ce paragraphe concernent le calcul des obstructions au relèvement de solutions formelles d'ordre $k+l$ de certaines équations différentielles d'ordre k en des solutions formelles d'ordre $k+l+1$ à l'aide de connexions dans des fibrés vectoriels.

Soit X une variété différentiable de dimension finie. Tout au long de ce papier différentiable voudra dire différentiable de classe C^∞ . On note T (resp. T^*) le fibré tangent (resp. cotangent) de X et E [resp. $J_k(E)$] le faisceau des germes (resp. le fibré des k -jets) de sections d'un fibré vectoriel E sur X . On a, pour $l \geq 0$, la suite exacte bien connue

$$0 \rightarrow S^l T^* \otimes E \xrightarrow{\varepsilon} J_l(E) \xrightarrow{\pi_{l-1}} J_{l-1}(E) \rightarrow 0,$$

où π_{l-1} est la projection naturelle et ε est donné par le lemme 2.1 de [5].

LEMME 0.1. — Soit ∇ une connexion dans E . Si $s \in E_x$ avec $j_{l-1}(s)(x) = 0$, alors :

$$\langle (\xi_1 \cdot \dots \cdot \xi_l)(x), \varepsilon^{-1} j_l(s)(x) \rangle = (\nabla_{\xi_1} \dots \nabla_{\xi_l} s)(x)$$

pour tous $\xi_1, \dots, \xi_l \in T_x$.

Ce lemme découle directement de la définition de ε (cf. [5], p. 248) et du fait que ∇ est une connexion.

Le lemme qui suit est évident.

LEMME 0.2. — Soient E, F des fibrés vectoriels sur X et ∇, ∇' des connexions dans E, F respectivement. Soit $\bar{\nabla}$ la connexion dans $E^* \otimes F$ définie par

$$(\bar{\nabla}_\xi u)(s) = \nabla'_\xi u(s) - u(\nabla_\xi s),$$

pour $\xi \in T, s \in E$ et $u \in E^* \otimes F$. Si $u \in (E^* \otimes F)_x$, avec $j_{l-1}(u)(x) = 0$, alors on a

$$((\bar{\nabla}_{\xi_1} \dots \bar{\nabla}_{\xi_l} u)(s))(x) = (\nabla'_{\xi_1} \dots \nabla'_{\xi_l} u(s))(x),$$

pour $\xi_1, \dots, \xi_l \in T_x$ et $s \in E_x$.

Soient $\pi : E \rightarrow X$ un fibré sur X et $\varpi : W \rightarrow E$ un fibré vectoriel sur E . Soient s une section de E sur X et ∇ une connexion dans le fibré vectoriel $W_s = s^{-1} W$ sur X .

LEMME 0.3. — Soit $x \in X$. Si w est une section de W sur X telle que $\varpi \circ w = s$ et $j_{l-1}(w)(x) = j_{l-1}(0 \circ s)$, où 0 est la section nulle de W sur E , alors :

$$\langle (\xi_1 \dots \xi_l)(x), \varepsilon^{-1} j_l(w)(x) \rangle = (\nabla_{\xi_1} \dots \nabla_{\xi_l} w)(x),$$

pour tous $\xi_1, \dots, \xi_l \in T_x$, où w est considérée comme une section de W_s .

Ici $\varepsilon^{-1} j_l(w)(x) \in S^l T_x^* \otimes W_{s(x)}$. Rappelons que $J_l(W)$ est un fibré vectoriel sur $J_l(E)$. Le lemme 0.3 s'obtient alors à partir du lemme 0.1 et de la commutativité du diagramme de fibrés vectoriels sur X :

$$\begin{array}{ccc} S^l T^* \otimes W_s & \xrightarrow{\varepsilon} & J_l(W_s) \\ \downarrow \text{id} & & \downarrow \wr \\ S^l T^* \otimes W_s & \xrightarrow{\varepsilon} & j_l(s)^{-1} J_l(W) \end{array}$$

où ε est donné par la proposition 5.3 de [6].

Soient E et E' deux fibrés sur X . Si on pose $F = \underset{X}{E \times E'}$, le fibré vertical $V(F)$ de F s'identifie à la somme directe $\underset{F}{V(E) \oplus V(E')}$. Ici $V(E)$ et $V(E')$ sont considérés comme des fibrés

vectoriels sur F à l'aide des projections $\underset{X}{\text{pr}_1 : E \times E' \rightarrow E}$ et $\underset{X}{\text{pr}_2 : E \times E' \rightarrow E'}$ respectivement.

Soient k un entier strictement positif et

$$\varphi : J_k(F) \rightarrow S^k T^* \underset{F}{\otimes} V(E),$$

un morphisme de fibrés sur F qui est affine sur $\pi_0 : J_{k-1}(F) \rightarrow F$ et dont le morphisme de fibrés vectoriels associés est induit par la première projection

$$\text{pr}_1 : S^k T^* \underset{F}{\otimes} V(F) \rightarrow S^k T^* \underset{F}{\otimes} V(E).$$

On supposera de plus que, fibré sur X par la projection source, $R_k = \text{Ker}_0 \varphi$, avec 0 section nulle du fibré vectoriel $S^k T^* \otimes V(E)$, est une équation différentielle d'ordre k dans F . Le l -ième prolongement R_{k+l} de R_k est alors égal à $\text{Ker}_{J_l(0)} p_l(\varphi)$ et pour $l \geq 1$,

$$p_l(\varphi) : J_{k+l}(F) \rightarrow J_l(S^k T^* \otimes V(E))$$

est un morphisme de fibrés affines sur

$$\pi_{k+l-2} \times p_{l-1}(\varphi) : J_{k+l-1}(F) \rightarrow J_{k+l-2}(F) \times_{J_{l-1}(F)} J_{l-1}(S^k T^* \otimes V(E)),$$

dont le morphisme de fibrés vectoriels associés est induit par la composition de l'application naturelle

$$\Delta_{l,k} : S^{k+l} T^* \otimes V(F) \rightarrow S^l T^* \otimes S^k T^* \otimes V(F)$$

suivie de la projection de $S^l T^* \otimes S^k T^* \otimes V(F)$ sur $S^l T^* \otimes S^k T^* \otimes V(E)$ (cf. prop. 8.2 et 5.3 de [6]).

Dans la situation où $E=F$ et quand le morphisme de fibrés vectoriels associés de φ est induit par l'identité sur $S^k T^* \otimes V(E)$, le l -ième prolongement du symbole de R_k est nul pour $l \geq 0$, car $\Delta_{l,k}$ est injectif. Il en résulte que $\pi_l : R_{l+1} \rightarrow R_l$ est injectif pour $l \geq k$.

Revenant au cas général, la suite

$$0 \rightarrow S^{k+l+1} T^* \otimes V(E) \xrightarrow{\Delta_{l+1,k}} S^{l+1} T^* \otimes S^k T^* \otimes V(E) \xrightarrow{\tau_l} S^l T^* \otimes \Lambda^2 T^* \otimes S^{k-1} T^* \otimes V(E)$$

est exacte, où

$$\begin{aligned} \tau_l(\xi_1 \cdot \dots \cdot \xi_{l+1} \otimes \zeta_1 \cdot \dots \cdot \zeta_k \otimes \eta) \\ = \sum_{i=1}^{l+1} \xi_1 \cdot \dots \cdot \hat{\xi}_i \cdot \dots \cdot \xi_{l+1} \otimes \left(\sum_{j=1}^k \xi_i \wedge \zeta_j \otimes \zeta_1 \cdot \dots \cdot \hat{\zeta}_j \cdot \dots \cdot \zeta_k \right) \otimes \eta, \end{aligned}$$

pour tous $\xi_1, \dots, \xi_{l+1}, \zeta_1, \dots, \zeta_k \in T^*$ et $\eta \in V(E)$.

Par une technique analogue à celle des propositions 8.3 de [6] et 2.1 de [7], on en déduit la :

PROPOSITION 0.1. — *La suite*

$$R_{k+l+1} \xrightarrow[\Omega_l]{\pi_{k+l}} R_{k+l} \xrightarrow[\Omega_l]{\pi_{k+l}} S^l T^* \otimes \Lambda^2 T^* \otimes S^{k-1} T^* \otimes V(E)$$

est exacte, où, pour tout $p \in R_{k+l}$,

$$\Omega_l(p) = \tau_l(\varepsilon^{-1} p_{l+1}(\varphi) q),$$

où $q \in J_{k+l+1}(F)$ vérifie $\pi_{k+l}(q) = p$ et

$$\varepsilon : S^{l+1} T^* \otimes_F S^k T^* \otimes_F V(E) \rightarrow J_{l+1}(S^k T^* \otimes_F V(E))$$

est le morphisme de fibrés vectoriels sur F donné par la proposition 5.3 de [6].

Si ξ est un vecteur tangent à X en un point x , on note systématiquement $\tilde{\xi}$ une extension locale de ξ sur un voisinage de x (non nécessairement explicite). Soit $u = (s, s') \in F_x$ tel que $p = j_{k+l}(u)(x) \in R_{k+l}$: si ∇ est une connexion dans le fibré vectoriel $V_s(E) = s^{-1} V(E)$ sur X , on a, en choisissant une connexion auxiliaire quelconque dans T , et d'après les lemmes 0.2 et 0.3 :

$$\varepsilon^{-1} p_{l+1}(\varphi)(j_{k+l+1}(u)(x))(\xi_1, \dots, \xi_{k+l+1}) = \nabla_{\xi_1} \nabla_{\xi_2} \dots \nabla_{\xi_{l+1}}(\varphi(j_k(u))(\tilde{\xi}_{l+2}, \dots, \tilde{\xi}_{k+l+1}))$$

pour tous $\xi_1, \dots, \xi_{k+l+1} \in T_x$. On a donc

$$(0.1) \quad \Omega_l(p)(\xi_1, \dots, \xi_{k+l+1}) = \nabla_{\xi_1} \nabla_{\xi_2} \dots \nabla_{\xi_l}(\nabla_{\xi_{l+1}}(\varphi(j_k(u))(\tilde{\xi}_{l+2}, \dots, \tilde{\xi}_{k+l+1}))) - \nabla_{\tilde{\xi}_{l+2}}(\varphi(j_k(u))(\tilde{\xi}_{l+1}, \tilde{\xi}_{l+3}, \dots, \tilde{\xi}_{k+l+1}))).$$

Nous posons pour simplifier $H = \Lambda^2 T^* \otimes_F S^{k-1} T^* \otimes_F V(E)$. Soit l un entier strictement positif : supposons que, pour $0 \leq m \leq l-1$, il existe un morphisme de fibrés sur F :

$$\omega_m : J_{k-1}(F) \rightarrow \otimes_F^m T^* \otimes_F H$$

tel que le diagramme

$$(0.2) \quad \begin{array}{ccc} R_{k+m} & \xrightarrow{\Omega_m} & S^m T^* \otimes_F H \\ \downarrow \pi_{k-1} & & \downarrow i \\ J_{k-1}(F) & \xrightarrow{\omega_m} & \otimes_F^m T^* \otimes_F H \end{array}$$

commute, où i est l'inclusion naturelle de $S^m T^* \otimes_F H$ dans $\otimes_F^m T^* \otimes_F H$. On a alors la :

PROPOSITION 0.2. — Soient $x \in X$ et $u = (s, s') \in F_x$ tels que $p = j_{k+l}(u)(x) \in R_{k+l}$. S'il existe une connexion ∇ dans $V_s(E)$ telle que

$$(0.3) \quad \nabla_{\xi_1} \nabla_{\xi_2} \dots \nabla_{\xi_m}(\omega_r(j_{k-1}(u))(\tilde{\eta}_1, \dots, \tilde{\eta}_{k+r+1})) - \nabla_{\tilde{\eta}_1}(\omega_{r-1}(j_{k-1}(u))(\tilde{\eta}_2, \dots, \tilde{\eta}_{k+r+1}))) = 0$$

modulo l'enveloppe linéaire de

$$\nabla_{\xi_1} \nabla_{\xi_2} \dots \nabla_{\xi_m}(\omega_{r-1}(j_{k-1}(u))(\otimes^{r-1} T \otimes \Lambda^2 T \otimes S^{k-1} T)_x),$$

si $m+r \leq l$ et $r < l$, avec $\xi_1, \dots, \xi_m, \eta_1, \dots, \eta_{k+r+1} \in T_x$, alors :

$$\Omega_l(p)(\xi_1, \dots, \xi_{k+l+1}) = \nabla_{\xi_1}(\omega_{l-1}(j_{k-1}(u))(\xi_2, \dots, \xi_{k+l+1})).$$

On note $\lambda_l : J_{k+l}(F) \rightarrow J_l(J_k(F))$ l'application qui envoie $j_{k+l}(u)(x)$ dans $j_l(j_k(u))(x)$, où u est une section de F sur un voisinage de $x \in X$.

Commençons par établir le :

LEMME 0.4. — Si $x \in X$ et $u = (s, s') \in F_x$ sont tels que $p = j_{k+l}(u)(x) \in R_{k+l}$, alors, pour toute connexion ∇ dans $V_s(E)$, on a

$$\Omega_l(p)(\xi_1, \dots, \xi_{k+l+1}) = \nabla_{\xi_1} \nabla_{\xi_2} \dots \nabla_{\xi_l}(\omega_0(j_{k-1}(u))(\xi_{l+1}, \dots, \xi_{k+l+1})).$$

Démonstration. — Soit $p_l(\Omega_0)$ la composition de $\lambda_l : R_{k+l} \rightarrow J_l(R_k)$ et de $J_l(\Omega_0) : J_l(R_k) \rightarrow J_l(H)$. D'après la commutativité de (0.2) avec $m=0$, on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} R_{k+l} & \xrightarrow{p_l(\Omega_0)} & J_l(H) \\ \downarrow \pi_{k+l-1} & & \uparrow p_l(\omega_0) \\ R_{k+l-1} & \rightarrow & J_{k+l-1}(F) \end{array}$$

On voit facilement d'après la définition des applications Ω_l que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & S^l T^* \otimes H \\ & \nearrow \Omega_l & \downarrow F \\ R_{k+l} & & J_l(H) \\ & \searrow p_l(\Omega_0) & \downarrow \varepsilon \end{array}$$

est aussi commutatif. Il en est alors de même pour le diagramme

$$\begin{array}{ccc} R_{k+l} & \xrightarrow{\Omega_l} & S^l T^* \otimes H \\ \downarrow \pi_{k+l-1} & & \downarrow F \\ R_{k+l-1} & \xrightarrow{p_l(\omega_0)} & J_l(H) \\ \downarrow \pi_{k+l-2} & & \downarrow \pi_{l-1} \\ R_{k+l-2} & \xrightarrow{p_{l-1}(\omega_0)} & J_{l-1}(H) \end{array}$$

On vérifie facilement à partir de ce dernier diagramme que

$$(0.4) \quad j_{l-1}(\omega_0(j_{k-1}(u)))(x) = 0$$

et que

$$\Omega_l(p) = \varepsilon^{-1} j_l(\omega_0(j_{k-1}(u)))(x).$$

Le résultat s'obtient alors en appliquant les lemmes 0.2 et 0.3.

Démonstration de la proposition 0.2. — On montre facilement par récurrence descendante sur m , à partir de (0.4) et des hypothèses de la proposition que

$$\nabla_{\xi_1} \nabla_{\xi_2} \dots \nabla_{\xi_j} (\omega_{l-m}(j_{k-1}(u))(\tilde{\eta}_1, \dots, \tilde{\eta}_{l+k-m+1})) = 0,$$

si $j < m$ et $m > 0$. Pour obtenir la proposition, il suffit de montrer par récurrence descendante sur l'entier m , compris entre 1 et l , que

$$\Omega_l(p)(\xi_1, \dots, \xi_{k+l+1}) = \nabla_{\xi_1} \nabla_{\xi_2} \dots \nabla_{\xi_m} (\omega_{l-m}(j_{k-1}(u))(\tilde{\xi}_{m+1}, \dots, \tilde{\xi}_{k+l+1})).$$

Le résultat est vrai pour $m = l$, d'après le lemme 0.4. Supposons-le vrai pour un entier m avec $m \leq l$. On a, dans ces conditions,

$$\Omega_l(p)(\xi_1, \dots, \xi_{k+l+1}) = \nabla_{\xi_1} \nabla_{\xi_2} \dots \nabla_{\xi_{m-1}} (\omega_{l-m+1}(j_{k-1}(u))(\tilde{\xi}_m, \dots, \tilde{\xi}_{k+l+1}))$$

modulo un terme appartenant à l'enveloppe linéaire de

$$\nabla_{\xi_1} \nabla_{\xi_2} \dots \nabla_{\xi_{m-1}} (\omega_{l-m}(j_{k-1}(u))(\otimes^{l-m} \mathbf{T} \otimes \Lambda^2 \mathbf{T} \otimes S^{k-1} \mathbf{T})_x)$$

et qui en fait est nul d'après la remarque faite au début de la démonstration.

Il s'avère, *a posteriori*, qu'avec nos hypothèses, le terme résiduel de la formule (0.1) est nul, mais il nous sera commode par la suite d'avoir la proposition 0.2 énoncée sous cette forme.

Si l'on avait supposé que $p_{l-1}(\varphi)$ était de rang constant et que R_{k+l-1} était un fibré, la conclusion de la proposition 0.2 serait vraie sans hypothèses préalables sur la connexion ∇ et les ω_j . Dans cette situation λ_1 détermine une application $\lambda_1 : R_{k+l} \rightarrow J_1(R_{k+l-1})$ et, d'après la commutativité de (0.2) avec $m = l-1$ et la définition des applications Ω_l et Ω_{l-1} , les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} J_1(R_{k+l-1}) & \xrightarrow{J_1(i \circ \Omega_{l-1})} & J_1(\otimes^{l-1} \mathbf{T}^* \otimes \mathbf{H}) \\ J_1(\pi_{k-1}) \downarrow & \nearrow J_1(\omega_{l-1}) & \downarrow \varepsilon \\ J_1(J_{k-1}(F)) & & J_1(\otimes^{l-1} \mathbf{T}^* \otimes \mathbf{H}) \\ & & \downarrow \varepsilon \\ & & \mathbf{T}^* \otimes \otimes^{l-1} \mathbf{T}^* \otimes \mathbf{H} \\ & & \downarrow \varepsilon \\ & & \mathbf{T}^* \otimes \otimes^{l-1} \mathbf{T}^* \otimes \mathbf{H} \\ & & \downarrow \varepsilon \\ & & \mathbf{T}^* \otimes \otimes^{l-1} \mathbf{T}^* \otimes \mathbf{H} \end{array}$$

commutent; il en est donc de même pour le diagramme

$$\begin{array}{ccc} R_{k+l} & \xrightarrow{i \circ \delta \circ \Omega_l} & \mathbf{T}^* \otimes \otimes^{l-1} \mathbf{T}^* \otimes \mathbf{H} \\ \downarrow \lambda_1 \circ \pi_k & & \downarrow \varepsilon \\ J_1(J_{k-1}(F)) & \xrightarrow{J_1(\omega_{l-1})} & J_1(\otimes^{l-1} \mathbf{T}^* \otimes \mathbf{H}) \\ \downarrow \pi_0 & & \downarrow \pi_0 \\ J_{k-1}(F) & \xrightarrow{\omega_{l-1}} & \otimes^{l-1} \mathbf{T}^* \otimes \mathbf{H} \end{array}$$

Le résultat s'obtient alors d'une manière tout à fait analogue à celle développée dans le lemme 0.4.

Remarquons pour terminer que tous les résultats précédents restent vrais si l'on remplace $J_k(F)$ par un sous-fibré ouvert de $J_k(F)$.

1. Équivalence des connexions linéaires

Soient X et Y deux variétés différentiables de dimensions finies telles que $\dim X \leq \dim Y$ et ∇ (resp. ∇') une connexion linéaire sans torsion sur X (resp. Y). On note :

- (a) T, T^* (resp. T_Y, T_Y^*) les fibrés tangent et cotangent de X (resp. Y);
- (b) $R, \nabla^k R$ (resp. $R', \nabla'^k R'$) le tenseur de courbure et la dérivée covariante d'ordre k du tenseur de courbure de ∇ (resp. ∇'), si k est un entier positif; on conviendra que $\nabla^0 R = R$ et que $\nabla^0 R' = R'$;
- (c) $\pi : E \rightarrow X$ le fibré trivial $\text{pr}_1 : X \times Y \rightarrow X$ et $\tilde{J}_k(E)$ le sous-fibré ouvert de $J_k(E)$ des k -jets d'immersions de X dans Y (cf. [4]).

Soit f une application différentiable de X dans Y . Si L (resp. L') est une section de $\otimes^p T^* \otimes T$ sur X (resp. $\otimes^p T_Y^* \otimes T_Y$ sur Y), on note $f^* L'$ et $f_* L$ les sections de $\otimes^p T^* \otimes T_Y$ définies respectivement par

$$\begin{aligned} (f^* L')(\xi_1, \dots, \xi_p) &= L'(f_* \xi_1, \dots, f_* \xi_p), \\ (f_* L)(\xi_1, \dots, \xi_p) &= f_* L(\xi_1, \dots, \xi_p) \end{aligned}$$

pour tous vecteurs $\xi_1, \dots, \xi_p$ tangents en un même point de X . Si $f : X \rightarrow Y$ est une immersion et F est le fibré $f^{-1} T_Y$, alors pour $x \in X$ et $\xi \in T_x$ l'opération $F_x \rightarrow F_x$ qui envoie u dans $\nabla'_{f_* \xi} \tilde{u}$, où $\tilde{u}$ est une extension quelconque de u sur un voisinage de $f(x)$ dans Y , est bien définie et l'on construit ainsi une connexion dans le fibré $f^{-1} T_Y$. Rappelons que la deuxième forme fondamentale de f en x est la forme $B'_x \in S^2 T_x^* \otimes T_{Y, f(x)}$ définie par

$$B'_x(\xi, \eta) = \nabla'_{f_* \xi} f_* \tilde{\eta} - f_* \nabla_\xi \tilde{\eta},$$

pour tous $\xi, \eta \in T_x$. On vérifie alors facilement que

$$\begin{aligned} (1.1) \quad (f^* R' - f_* R)(\xi, \eta, \zeta) \\ = \nabla'_{f_* \xi} B^f(\eta, \zeta) - \nabla'_{f_* \eta} B^f(\xi, \zeta) - B^f([\xi, \eta], \zeta) + B^f(\xi, \nabla_\eta \zeta) - B^f(\eta, \nabla_\xi \zeta), \end{aligned}$$

pour tous champs de vecteurs ξ, η, ζ sur X .

Soit $R_2 = \text{Ker}_0 \varphi$, où $\varphi : \tilde{J}_2(E) \rightarrow S^2 T^* \otimes T_Y$ est le morphisme de fibrés sur E défini par

$$\varphi(j_2(f)(x)) = B'_x,$$

si $f : X \rightarrow Y$ est une immersion définie au voisinage de x . Ici 0 est la section nulle du fibré vectoriel $S^2 T^* \otimes T_Y$ sur E . On voit que R_2 est un sous-fibré de $\tilde{J}_2(E)$ car $\pi_1 : R_2 \rightarrow \tilde{J}_1(E)$ est

bijectif d'après le lemme 1.2 de [4] qui concerne des connexions riemanniennes mais qui reste évidemment vrai pour des connexions linéaires sans torsion. En fait, si on identifie $V(E)$ et $\text{pr}_2^{-1} T_Y$, où $\text{pr}_2 : E \rightarrow Y$ est la projection sur le second facteur, φ est un morphisme de fibrés affines sur $\pi_0 : J_1(E) \rightarrow E$ dont le morphisme de fibrés vectoriels associés est induit par l'identité sur $S^2 T^* \otimes T_Y$. Les considérations du paragraphe 0 s'appliquent donc à φ et R_2 .

On notera R_{l+2} le l -ième prolongement de R_2 et

$$\Omega_l : R_{l+2} \rightarrow S^l T^* \otimes \Lambda^2 T^* \otimes T^* \otimes T_Y,$$

le morphisme de fibrés sur E , donné par la proposition 0.1.

Soit k, l, m trois entiers positifs tels que $k \geq 1$ et $m \leq l$. Si $p = j_{l+2}(f)(x) \in R_{l+2}$, où $f : X \rightarrow Y$ est une immersion définie au voisinage de x , et si $\xi_1, \dots, \xi_m, \eta_1, \dots, \eta_{k+3} \in T_x$, on a

$$\begin{aligned} & \nabla'_{f_* \xi_1} \nabla'_{f_* \xi_2} \dots \nabla'_{f_* \xi_m} (\nabla'^k R'(f_* \tilde{\eta}_1, \dots, f_* \tilde{\eta}_{k+3})) \\ &= \nabla'_{f_* \xi_1} \nabla'_{f_* \xi_2} \dots \nabla'_{f_* \xi_m} \nabla'_{f_* \tilde{\eta}_1} (\nabla'^{k-1} R'(f_* \tilde{\eta}_2, \dots, f_* \tilde{\eta}_{k+3})) \\ & \quad - \sum_{j=2}^{k+3} \nabla'_{f_* \xi_1} \nabla'_{f_* \xi_2} \dots \nabla'_{f_* \xi_m} (\nabla'^{k-1} R'(f_* \tilde{\eta}_2, \dots, \nabla'_{f_* \tilde{\eta}_1} f_* \tilde{\eta}_j, \dots, f_* \tilde{\eta}_{k+3})). \end{aligned}$$

Remarquons qu'on peut remplacer dans l'expression ci-dessus $\nabla'_{f_* \tilde{\eta}_1} f_* \tilde{\eta}_j$ par $f_* \nabla_{\tilde{\eta}_1} \tilde{\eta}_j$, puisque $\pi_{m+2}(p) \in R_{m+2}$. Toujours pour la même raison on a

$$\begin{aligned} & \nabla'_{f_* \xi_1} \nabla'_{f_* \xi_2} \dots \nabla'_{f_* \xi_m} f_* \nabla^k R(\tilde{\eta}_1, \dots, \tilde{\eta}_{k+3}) \\ &= \nabla'_{f_* \xi_1} \nabla'_{f_* \xi_2} \dots \nabla'_{f_* \xi_m} \nabla'_{f_* \tilde{\eta}_1} f_* \nabla^{k-1} R(\tilde{\eta}_2, \dots, \tilde{\eta}_{k+3}) \\ & \quad - \sum_{j=2}^{k+3} \nabla'_{f_* \xi_1} \nabla'_{f_* \xi_2} \dots \nabla'_{f_* \xi_m} f_* \nabla^{k-1} R(\tilde{\eta}_2, \dots, \nabla_{\tilde{\eta}_1} \tilde{\eta}_j, \dots, \tilde{\eta}_{k+3}). \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} (1.2) \quad & \nabla'_{f_* \xi_1} \nabla'_{f_* \xi_2} \dots \nabla'_{f_* \xi_m} (((f_* \nabla'^k R' - f_* \nabla^k R)(\tilde{\eta}_1, \dots, \tilde{\eta}_{k+3})) \\ & \quad - \nabla'_{f_* \tilde{\eta}_1} ((f_* \nabla'^{k-1} R' - f_* \nabla^{k-1} R)(\tilde{\eta}_2, \dots, \tilde{\eta}_{k+3}))) \\ &= - \sum_{j=2}^{k+3} \nabla'_{f_* \xi_1} \nabla'_{f_* \xi_2} \dots \nabla'_{f_* \xi_m} ((f_* \nabla'^{k-1} R' - f_* \nabla^{k-1} R)(\tilde{\eta}_2, \dots, \nabla_{\tilde{\eta}_1} \tilde{\eta}_j, \dots, \tilde{\eta}_{k+3})). \end{aligned}$$

Soient

$$H = \Lambda^2 T^* \otimes T^* \otimes T_Y,$$

et

$$\omega_l : J_1(E) \rightarrow \otimes^l T^* \otimes H,$$

le morphisme de fibrés sur E qui envoie $j_1(f)(x)$ dans $(f_* \nabla'^l R' - f_* \nabla^l R)(x)$ où $f : X \rightarrow Y$ est une application définie au voisinage de $x \in X$. La proposition suivante nous dit que le diagramme (0.2) est commutatif, avec $m=l$ et $F=E$.

PROPOSITION 1.1. — Si $p = j_{l+2}(f)(x) \in R_{l+2}$, où $f : X \rightarrow Y$ est une immersion définie au voisinage de $x \in X$, on a $\Omega_l(p) = (f^* \nabla^l R' - f_* \nabla^l R)(x)$.

Démonstration. — Puisque ∇' et f nous donnent une connexion dans le fibré $f^{-1} T_Y$, on a d'après (0.1) :

$$\Omega_l(p)(\xi_1, \dots, \xi_{l+3}) = \nabla'_{f_* \xi_1} \nabla'_{f_* \xi_2} \dots \nabla'_{f_* \xi_l} (\nabla'_{f_* \xi_{l+1}} B^f(\xi_{l+2}, \xi_{l+3}) - \nabla'_{f_* \xi_{l+2}} B^f(\xi_{l+1}, \xi_{l+3})).$$

pour tous $\xi_1, \dots, \xi_{l+3} \in T_x$. Puisque $p \in R_{l+2}$, on a d'après (1.1) :

$$(1.3) \quad \Omega_l(p)(\xi_1, \dots, \xi_{l+3}) = \nabla'_{f_* \xi_1} \nabla'_{f_* \xi_2} \dots \nabla'_{f_* \xi_l} ((f^* R' - f_* R)(\xi_{l+1}, \xi_{l+2}, \xi_{l+3})).$$

Démontrons maintenant la proposition par récurrence sur l . Le résultat est vrai pour $l=0$ d'après la formule (1.3). Soit $l \geq 1$ et supposons le résultat vrai pour tout entier $< l$. On peut, d'après (1.2), utiliser la proposition 0.2 et on aura

$$\Omega_l(p)(\xi_1, \dots, \xi_{l+3}) = \nabla'_{f_* \xi_1} ((f^* \nabla^{l-1} R' - f_* \nabla^{l-1} R)(\xi_2, \dots, \xi_{l+3})).$$

Puisque $\Omega_{l-1}(\pi_{l+1}(p)) = 0$, on a, d'après l'hypothèse de récurrence,

$$(f^* \nabla^{l-1} R' - f_* \nabla^{l-1} R)(x) = 0.$$

La formule (1.2) avec $m=0$ et $k=l$ nous donne alors l'égalité cherchée.

On peut maintenant formuler le théorème d'équivalence formelle suivant :

THÉORÈME 1.1. — S'il existe $p = j_1(f)(x) \in \tilde{J}_1(E)$, où $f : X \rightarrow Y$ est une immersion définie au voisinage de $x \in X$, tel que

$$(1.4) \quad (f^* \nabla^l R' - f_* \nabla^l R)(x) = 0, \quad \text{pour tout } l \geq 0,$$

alors il existe une unique solution formelle $q \in R_{\infty, x}$ telle que $\pi_1(q) = p$.

Démonstration. — L'unicité de q est évidente car nous avons montré l'injectivité des morphismes $\pi_1 : R_2 \rightarrow \tilde{J}_1(E)$ et $\pi_{l+2} : R_{l+3} \rightarrow R_{l+2}$ pour tout $l \geq 0$. L'existence de q s'obtient en combinant la proposition 1.1, l'exactitude des suites

$$R_{l+3} \xrightarrow{\pi_{l+2}} R_{l+2} \xrightarrow[0]{\Omega_l} S^l T^* \otimes \Lambda^2 T^* \otimes T^* \otimes T_Y,$$

pour $l \geq 0$, et la surjectivité de $\pi_1 : R_2 \rightarrow \tilde{J}_1(E)$.

Dans le cas analytique, on a le :

THÉORÈME 1.2. — Supposons que X et Y soient des variétés analytiques réelles et que les connexions ∇ et ∇' soient analytiques. S'il existe $p \in \tilde{J}_1(E)_x$ vérifiant (1.4), alors il existe une unique immersion analytique de X dans Y , à seconde forme fondamentale nulle, définie au voisinage de x et dont le 1-jet en x est égal à p .

Démonstration. — Il suffit de remarquer que l'unique solution formelle q' d'ordre 2 de R_2 telle que $\pi_1(q')=p$ est fortement prolongeable et d'appliquer le théorème 4.2 de [11], appendice.

2. Équivalence des métriques riemanniennes

Nous supposons dans la suite que $\dim X = \dim Y$. Soit g et g' des métriques riemanniennes sur X et Y respectivement. On note ∇ (resp. ∇') la connexion de Levi-Civita de g (resp. g') et R (resp. R') le tenseur de courbure de ∇ (resp. ∇'). On désignera toujours par R_2 l'équation différentielle formée des 2-jets d'étalements à seconde forme fondamentale nulle, X étant munie de ∇ et Y de ∇' .

Soit $R'_1 \subset \tilde{J}_1(E)$ le sous-fibré des 1-jets d'étalements $j_1(f)(x)$ de X dans Y tels que $(f^*g' - g)(x) = 0$. L'analogue du théorème 1.1, pour les métriques riemanniennes, s'énonce alors ainsi :

THÉORÈME 2.1. — *S'il existe $p = j_1(f)(x) \in R'_{1,x}$, où $f : X \rightarrow Y$ est un difféomorphisme défini au voisinage de $x \in X$, tel que*

$$(2.1) \quad (f^* \nabla'^l R' - f_* \nabla^l R)(x) = 0, \quad \text{pour tout entier } l \geq 0,$$

alors il existe une solution formelle $q \in R'_{\infty,x}$ telle que $\pi_1(q) = p$.

Démonstration. — Nous reprenons dans cette démonstration les notations de [4], p. 68-70. D'après la proposition 3.1 de [4], R'_1 est une équation différentielle. Si R'_{l+1} est le l -ième prolongement de R'_1 , la proposition 3.2 de [4] implique que

$$R'_2 = \text{Ker}_0(\varphi' \circ \pi_1 \oplus \psi),$$

donc $R'_2 = \pi_1^{-1}(R'_1) \cap R_2$. D'après le corollaire 3.1 de [4], R'_2 est une équation différentielle et on a

$$R'_{l+2} = (R'_2)_{+l} = \text{Ker}(p_l(\varphi' \circ \pi_1) \oplus p_l(\psi)) = \text{Ker}_0(p_l(\varphi') \circ \pi_{l+1} \oplus p_l(\psi)).$$

Il en résulte que R'_{l+2} est égal à $\pi_{l+1}^{-1}(R'_{l+1}) \cap R_{l+2}$, donc à $\pi_1^{-1}(R'_1) \cap R_{l+2}$. L'existence d'une solution formelle de $R'_{\infty,x}$ prolongeant p est alors une conséquence du théorème 1.1.

La remarque suivante nous a été communiquée par H. Goldschmidt. On a $R'_2 = \pi_1^{-1}(R'_1) \cap R_2$ et comme $\pi_1 : R_2 \rightarrow \tilde{J}_1(E)$ est bijectif, il en est de même pour $\pi_1 : R'_2 \rightarrow R'_1$, donc le premier prolongement g'_2 du symbole g'_1 de R'_1 est nul. Il en résulte que $\pi_l : R'_{l+1} \rightarrow R'_l$ est injectif pour $l \geq 1$ et on a donc unicité de la solution formelle q dans le théorème 2.1. On peut voir directement à partir de R'_1 que $g'_2 = 0$. En effet si $p \in R'_1$ et $p = j_1(f)(x)$, on a, d'après la proposition 3.1 de [4],

$$g'_{1,p} = \{ u \in T_x^* \otimes T_{Y,f(x)} \mid g'(u(\xi), f_* \eta) + g'(u(\eta), f_* \xi) = 0, \text{ pour tous } \xi, \eta \in T_x \}.$$

Si

$$g'_{1,f(x)} = \{ v \in T_{Y,f(x)}^* \otimes T_{Y,f(x)} \mid g'(v(\xi), \eta) + g'(v(\eta), \xi) = 0, \text{ pour tous } \xi, \eta \in T_{Y,f(x)} \},$$

alors

$$f^* \otimes \text{id} : S^k T_{Y,f(x)}^* \otimes T_{Y,f(x)} \rightarrow S^k T_x^* \otimes T_{Y,f(x)}$$

est un isomorphisme pour $k \geq 1$ et

$$(f^* \otimes \text{id})(g'_{1,f(x)}) = g'_{1,p}.$$

Plus généralement si $g''_{k+1,f(x)} \in S^{k+1} T_{Y,f(x)}^* \otimes T_{Y,f(x)}$ est le k -ième prolongement de $g'_{1,f(x)}$, alors

$$(f^* \otimes \text{id})(g''_{k+1,f(x)}) = g'_{k+1,p}.$$

Enfin il est bien connu que $g''_{k+1,f(x)} = 0$ pour $k \geq 1$, puisque $g'_{1,f(x)}$ est l'algèbre de Lie des endomorphismes de $T_{Y,f(x)}$ laissant invariant le produit scalaire $g'_{f(x)}$, donc $g'_{k+1,p} = 0$ pour $k \geq 1$.

THÉORÈME 2.2. — *Si (X, g) et (Y, g') sont des variétés riemanniennes analytiques réelles et s'il existe $p \in R'_{1,x}$, avec $x \in X$, vérifiant (2.1), alors il existe une unique isométrie analytique f de (X, g) dans (Y, g') définie au voisinage de x , telle que $j_1(f)(x) = p$.*

Démonstration. — Puisque $\pi_l : R'_{l+1} \rightarrow R'_l$ est injectif pour $l \geq 1$, il en résulte que p est une solution fortement prolongeable de R'_1 et on applique à nouveau le théorème 4.2 de [11], appendice.

Remarque. — On obtient les mêmes résultats en remplaçant la condition (2.1) par la condition

$$(2.1)' \quad (f^* \nabla^l \tilde{R}' - \nabla^l \tilde{R})(x) = 0, \quad \text{pour tout } l \geq 0,$$

où $\tilde{R}$ (resp. $\tilde{R}'$) désigne le tenseur de courbure de Riemann-Christoffel de g (resp. g'), section de $\Lambda^2 T^* \otimes \Lambda^2 T^*$ sur X (resp. $\Lambda^2 T_Y^* \otimes \Lambda^2 T_Y^*$ sur Y).

3. Équivalence projective des connexions linéaires

Nous supposons désormais que X et Y sont de même dimension $n \geq 2$. Nous reprenons ici les notations du paragraphe 1.

Soit $\bar{\nabla}$ une autre connexion linéaire sans torsion sur X . On dira que ∇ et $\bar{\nabla}$ sont projectivement équivalentes s'il existe une forme différentielle θ de degré 1 sur X telle que

$$(3.1) \quad \bar{\nabla}_\xi \eta = \nabla_\xi \eta + \theta(\xi) \eta + \theta(\eta) \xi$$

pour tous champs de vecteurs ξ, η sur X . Pour justifier le mot « projectivement » disons brièvement que (3.1) est la condition nécessaire et suffisante pour que les connexions ∇ et $\bar{\nabla}$ aient les mêmes géodésiques à la paramétrisation près (cf. [3] ou [12]). Par ailleurs, (3.1) définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des connexions linéaires sans torsion et une

telle classe d'équivalence peut s'identifier à une connexion sur un fibré principal de groupe structural un groupe isomorphe à un sous-groupe d'isotropie du groupe projectif linéaire (cf. [8] ou [12]). Nous n'aborderons pas ici ce point de vue.

Soit $\bar{R}$ le tenseur de courbure de $\bar{\nabla}$. Si la connexion $\bar{\nabla}$ vérifie (3.1), on a

$$(3.2) \quad \bar{R}(\xi, \eta, \zeta) = R(\xi, \eta, \zeta) + [\nabla\theta](\xi, \zeta)\eta - [\nabla\theta](\eta, \zeta)\xi + ([\nabla\theta](\xi, \eta) - [\nabla\theta](\eta, \xi))\zeta,$$

pour tous champs de vecteurs ξ, η, ζ sur X , où $[\nabla\theta] = \nabla\theta - \theta \otimes \theta$.

Rappelons que la courbure de Ricci de ∇ est la 2-forme S sur X définie par

$$S(\xi, \eta) = \text{Trace}(\zeta \mapsto R(\zeta, \xi, \eta)),$$

pour $\xi, \eta, \zeta \in T$.

On déduit alors de (3.2) que, pour $\xi, \eta \in T$,

$$\bar{S}(\xi, \eta) = S(\xi, \eta) + [\nabla\theta](\eta, \xi) - n[\nabla\theta](\xi, \eta)$$

et que

$$\bar{S}(\xi, \eta) - \bar{S}(\eta, \xi) = S(\xi, \eta) - S(\eta, \xi) + (n+1)\{[\nabla\theta](\eta, \xi) - [\nabla\theta](\xi, \eta)\},$$

où $\bar{S}$ est la courbure de Ricci de $\bar{\nabla}$. Finalement on obtient, pour $\xi, \eta \in T$,

$$(3.3) \quad [\nabla\theta](\xi, \eta) = \frac{1}{1-n^2} \{n(\bar{S} - S)(\xi, \eta) + (\bar{S} - S)(\eta, \xi)\}.$$

Combinant (3.2) et (3.3), on associe à la connexion ∇ un invariant projectif W , section de $\Lambda^2 T^* \otimes T^* \otimes T$ sur X , défini par

$$(3.4) \quad W(\xi, \eta, \zeta) = R(\xi, \eta, \zeta) + \frac{1}{n+1} (S(\xi, \eta) - S(\eta, \xi))\zeta \\ + \frac{1}{n^2-1} \{(nS(\xi, \zeta) + S(\zeta, \xi))\eta - (nS(\eta, \zeta) + S(\zeta, \eta))\xi\},$$

pour $\xi, \eta, \zeta \in T$.

En disant que W est un « invariant projectif », on entend par là que W reste inchangé si l'on remplace ∇ par une connexion qui lui est projectivement équivalente. Le tenseur W est appelé tenseur de courbure projective ou tenseur de Weyl de la connexion ∇ .

DÉFINITION 3.1. — *Un difféomorphisme $f: X \rightarrow Y$ est une transformation projective de X , munie de la connexion ∇ , dans Y , munie de la connexion ∇' , s'il existe une 1-forme θ sur X telle que*

$$\nabla'_{f_*\xi} f_*\eta = f_*\nabla_\xi \eta + \theta(\xi)f_*\eta + \theta(\eta)f_*\xi$$

pour tous champs de vecteurs ξ, η sur X . S'il existe une telle application f et une telle 1-forme θ , on dira encore que ∇ et ∇' sont projectivement équivalentes.

Soient $f: X \rightarrow Y$ un difféomorphisme et $\bar{\nabla} = f^{-1} \nabla'$ la connexion image réciproque de ∇' par f . Il est clair que f est une transformation projective si et seulement si $\bar{\nabla}$ vérifie (3.1), et, dans ces conditions (3.2) et (3.3) se transforment respectivement en

$$(3.2)' \quad (f^* R' - f_* R)(\xi, \eta, \zeta) \\ = [\nabla\theta](\xi, \zeta) f_* \eta - [\nabla\theta](\eta, \zeta) f_* \xi + ([\nabla\theta](\xi, \eta) - [\nabla\theta](\eta, \xi)) f_* \zeta,$$

et en

$$(3.3)' \quad [\nabla\theta](\xi, \eta) = \frac{1}{1-n^2} \{n(f^* S' - S)(\xi, \eta) + (f^* S' - S)(\eta, \xi)\},$$

où R' est le tenseur de courbure de ∇' et S' son tenseur de courbure de Ricci. Enfin si on remplace dans (3.2)', $[\nabla\theta]$ par le second membre de (3.3)', on obtient

$$f^* W' = f_* W,$$

où W' est le tenseur de Weyl de ∇' .

Soit F le fibré sur X égal à $E \times_x T^*$. Si $\mu_k: J_k(F) \rightarrow J_k(E)$ est la projection naturelle, on note $\tilde{J}_k(F)$ le sous-fibré ouvert de $J_k(F)$ des k -jets p tels que $\mu_k(p) \in \tilde{J}_k(E)$. Si $x \in X$, un jet $p \in \tilde{J}_k(F)_x$ est donc de la forme $j_k(f, \theta)(x)$, où $f: X \rightarrow Y$ est un difféomorphisme local défini au voisinage de x et $\theta \in T_x^*$. Pour simplifier nous écrirons souvent dans la suite « soit $p = j_k(f, \theta)(x) \in \tilde{J}_k(F)$ » pour « soit $p = j_k(f, \theta)(x) \in \tilde{J}_k(F)$, où $f: X \rightarrow Y$ est un difféomorphisme local défini au voisinage de $x \in X$ et $\theta \in T_x^*$ ».

Soient

$$\psi: \tilde{J}_2(F) \rightarrow S^2 T^* \otimes_F T_Y$$

et

$$\alpha: \tilde{J}_1(F) \rightarrow T^* \otimes_F T^*$$

les morphismes de fibrés sur F définis respectivement par

$$\psi(p)(\xi, \eta) = B_x^f(\xi, \eta) - \theta(\xi) f_* \eta - \theta(\eta) f_* \xi$$

et par

$$(3.5) \quad \alpha(\pi_1(p))(\xi, \eta) = [\nabla\theta](\xi, \eta) + \frac{1}{n^2-1} \{n(f^* S' - S)(\xi, \eta) + (f^* S' - S)(\eta, \xi)\}$$

pour tous $\xi, \eta \in T_x$, si $p = j_2(f, \theta)(x) \in \tilde{J}_2(F)$.

Soit $N_2 = \text{Ker}_0 \psi$, où 0 est la section nulle du fibré vectoriel $S^2 T^* \otimes_F T_Y$ sur F . Si on identifie $V(F)$ et $T_Y \oplus_F T^*$, le morphisme ψ est affine sur $\pi_0: \tilde{J}_1(F) \rightarrow F$ et son morphisme de fibrés vectoriels associés est induit par la première projection

$$\text{pr}_1: S^2 T^* \otimes_F (T_Y \oplus_F T^*) \rightarrow S^2 T^* \otimes_F T_Y.$$

D'après le lemme 1.2 de [4], il existe des solutions formelles d'ordre 2 de N_2 en tout point de X . Ainsi N_2 est une équation différentielle. Les considérations du paragraphe 0 s'appliquant à ψ et N_2 , on note $N_{l+2} = \text{Ker}_{J_l(0)} p_l(\psi)$ le l -ième prolongement de N_2 et

$$\Omega'_l : N_{l+2} \rightarrow S^l T^* \otimes \Lambda^2 T^* \otimes T^* \otimes_F T_Y$$

le morphisme de fibrés sur F donné par la proposition 0.1.

On posera par ailleurs $N'_1 = \text{Ker}_0 \alpha$; cette fois-ci 0 est la section nulle du fibré vectoriel $T^* \otimes_F T^*$ sur F . Si $f : X \rightarrow Y$ est un difféomorphisme, soit $\alpha_f : J_1(T^*) \rightarrow \otimes^2 T^*$ le morphisme de fibrés sur X défini par

$$\alpha_f(j_1(\theta)(x)) = \alpha(j_1(f, \theta)(x)),$$

si $\theta \in T_x^*$, où $x \in X$. Le morphisme α_f est affine sur $\pi : T^* \rightarrow X$ et son morphisme de fibrés vectoriels associés est induit par l'identité sur $\otimes^2 T^*$. Par conséquent le morphisme $\alpha_* : V(\tilde{J}_1(F)) \rightarrow T^* \otimes_F T^*$ de fibrés vectoriels sur $\pi_0 : \tilde{J}_1(F) \rightarrow F$ est surjectif. L'existence, en tout point, de solutions formelles d'ordre 1 de N'_1 étant évidente, N'_1 est une équation différentielle. Le l -ième prolongement N'_{l+1} de N'_1 est alors égal à $\text{Ker}_{J_l(0)} p_l(\alpha)$.

Soit $p \in \tilde{J}_2(F)$ avec $\pi(p) = x \in X$ et $\pi_0(p) = y \in Y$. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} 0 & & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^2 T_x^* \otimes (T_{Y,y} \oplus T_x^*) & \xrightarrow{\text{pr}_1} & S^2 T_x^* \otimes T_{Y,y} \rightarrow 0 \\ \downarrow & & \downarrow r \\ V(\tilde{J}_2(F))_p & \xrightarrow{(\psi \oplus \alpha \circ \pi_1)_{*,p}} & (S^2 T_x^* \otimes T_{Y,y}) \oplus \otimes^2 T_x^* \\ \downarrow \pi_{1*} & & \downarrow \text{pr}_2 \\ V(\tilde{J}_1(F)) \pi_1(p) & \xrightarrow{\alpha_*, \pi_1(p)} & \otimes^2 T_x^* \rightarrow 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 \end{array}$$

où r est l'injection linéaire naturelle de $S^2 T_x^* \otimes T_{Y,y}$ dans $(S^2 T_x^* \otimes T_{Y,y}) \oplus \otimes^2 T_x^*$, est exact et commutatif, donc $(\psi \oplus \alpha \circ \pi_1)_{*,p}$ est surjective. Si $N''_2 = \text{Ker}_0(\psi \oplus \alpha \circ \pi_1)$, on voit facilement que $\pi_1 : N''_2 \rightarrow N'_1$ est surjectif, par conséquent N''_2 est une équation différentielle. Si N'_{l+2} désigne le l -ième prolongement de N''_2 , on a

$$N'_{l+2} = \text{Ker}_{J_l(0)} (p_l(\psi) \oplus p_l(\alpha \circ \pi_1)) = \text{Ker}_{J_l(0)} (p_l(\psi) \oplus p_l(\alpha) \circ \pi_{l+1}) = N_{l+2} \cap \pi_{l+1}^{-1}(N'_{l+1}).$$

Si $f: X \rightarrow Y$ est un difféomorphisme et si θ est une 1-forme sur X , on vérifie facilement, d'après (1.1), que

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \nabla'_{f_*\xi}(B^f(\eta, \zeta) - \theta(\eta)f_*\zeta - \theta(\zeta)f_*\eta) - \nabla'_{f_*\eta}(B^f(\xi, \zeta) - \theta(\xi)f_*\zeta - \theta(\zeta)f_*\xi) \\ = (f^*R' - f_*R)(\xi, \eta, \zeta) + [\nabla\theta](\eta, \zeta)f_*\xi \\ - [\nabla\theta](\xi, \zeta)f_*\eta - ([\nabla\theta](\xi, \eta) - [\nabla\theta](\eta, \xi))f_*\zeta \\ + \psi(j_2(f, \theta))(\eta, \nabla_\xi\zeta) - \psi(j_2(f, \theta))(\xi, \nabla_\eta\zeta) + \psi(j_2(f, \theta))([\xi, \eta], \zeta) \\ + \theta(\xi)\psi(j_2(f, \theta))(\eta, \zeta) - \theta(\eta)\psi(j_2(f, \theta))(\xi, \zeta), \end{aligned}$$

pour tous champs de vecteurs ξ, η, ζ sur X . Posons pour $\xi, \eta, \zeta \in T$,

$$\begin{aligned} A^{f, \theta}(\xi, \eta, \zeta) &= (f^*R' - f_*R)(\xi, \eta, \zeta) \\ &\quad + [\nabla\theta](\eta, \zeta)f_*\xi - [\nabla\theta](\xi, \zeta)f_*\eta - ([\nabla\theta](\xi, \eta) - [\nabla\theta](\eta, \xi))f_*\zeta. \end{aligned}$$

LEMME 3.1. — Si $p = j_{l+2}(f, \theta)(x) \in N'_{l+2}$, avec $l \geq 0$, on a

$$(3.7) \quad \Omega'_l(p)(\xi_1, \dots, \xi_{l+3}) = \nabla'_{f_*\xi_1} \nabla'_{f_*\xi_2} \dots \nabla'_{f_*\xi_{l+3}}((f^*W' - f_*W)(\xi_{l+1}, \xi_{l+2}, \xi_{l+3})),$$

pour tous $\xi_1, \dots, \xi_{l+3} \in T_x$.

Démonstration. — D'après la formule (3.6), les résultats du paragraphe 0 et (0.1), pour $p \in N_{l+2}$, on a

$$(3.8) \quad \Omega'_l(p)(\xi_1, \dots, \xi_{l+3}) = \nabla'_{f_*\xi_1} \nabla'_{f_*\xi_2} \dots \nabla'_{f_*\xi_{l+3}}(A^{f, \theta}(\xi_{l+1}, \xi_{l+2}, \xi_{l+3})).$$

Si $\pi_{l+1}(p) \in N'_{l+1}$, on peut remplacer, dans (3.8), $[\nabla\theta](\xi, \eta)$ par le second membre de (3.3)', pour tous $\xi, \eta \in T_x$, d'où le résultat cherché.

LEMME 3.2. — Pour tout $l \geq 0$, on a l'inclusion

$$\pi_{l+2}(N_{l+3}) \subset N'_{l+2}.$$

Démonstration. — Nous avons seulement à montrer que $\pi_{l+1}(N_{l+3}) \subset N'_{l+1}$, puisque, par définition des prolongements d'une équation différentielle, on a $\pi_{l+2}(N_{l+3}) \subset N_{l+2}$. Soit $p = j_{l+3}(f, \theta)(x) \in N_{l+3}$. Si $m \leq l$, on a, d'après (3.8), pour $\xi_1, \dots, \xi_m, \xi, \eta, \zeta \in T_x$,

$$\nabla'_{f_*\xi_1} \nabla'_{f_*\xi_2} \dots \nabla'_{f_*\xi_m}(A^{f, \theta}(\xi, \tilde{\eta}, \tilde{\zeta})) = \Omega'_m(\pi_{m+2}(p))(\xi_1, \dots, \xi_m, \xi, \eta, \zeta) = 0.$$

Donc on a

$$j_l(f_*^{-1}A^{f, \theta}(\xi, \eta, \zeta))(x) = 0,$$

pour tous $\xi, \eta, \zeta \in T_x$. Par le même calcul algébrique qui sert à déduire (3.3) de (3.2), on trouve que, pour tous $\xi, \eta \in T_x$, le jet d'ordre l en x du membre de droite de l'équation (3.5) s'annule. Par conséquent $p_l(\alpha)(j_{l+1}(f, \theta))(x) = 0$ et $\pi_{l+1}(p) \in N'_{l+1}$.

Nous avons donc, pour $l \geq 0$, la suite exacte

$$(3.9) \quad N_{l+3} \xrightarrow{\pi_{l+2}} N_{l+2}'' \xrightarrow[0]{\Omega'_l} S^l T^* \otimes \Lambda^2 T^* \otimes T^* \otimes_F T_Y,$$

où Ω'_l est donné par (3.7).

PROPOSITION 3.1. — *Il existe une unique suite*

$$(\omega'_l : \tilde{J}_1(F) \rightarrow \otimes^l T^* \otimes \Lambda^2 T^* \otimes T^* \otimes_F T_Y)_{l \geq 0}$$

de morphismes de fibrés sur F satisfaisant les conditions suivantes pour tout $p = j_1(f, \theta)(x) \in \tilde{J}_1(F)$:

(a) $\omega'_0(p) = (f^* W' - f_* W)(x)$;

(b) $\omega'_l(p)$ ne dépend que de $j_1(f)(x)$ et de $\theta(x)$;

(c) $\omega'_l(p)$ est une combinaison linéaire à coefficients rationnels, universels pour les couples de variétés de dimension n , de produits tensoriels ou de compositions des formes tensorielles de l'un des types suivants : $f_{*,x}, \theta(x), (f^* \nabla'^k W')(x), (\nabla^k W)(x), (f^* \nabla'^k S')(x), (\nabla^k S)(x)$, pour $k \leq l$;

(d) si $\xi_1, \dots, \xi_{l+4} \in T_x$, $\omega'_{l+1}(\tilde{p})(\xi_1, \dots, \xi_{l+4})$ se calcule à partir de ω'_l de la manière suivante : dans $\nabla'_{f_* \xi_1}(\omega'_l(j_1(f, \theta))(\xi_2, \dots, \xi_{l+4}))$, on remplace toute expression du type :

(i) $\nabla'_{f_* \xi_1}((f^* U)(\tilde{\eta}_1, \dots, \tilde{\eta}_r))$ ou $\xi_1.(f^* U)(\tilde{\eta}_1, \dots, \tilde{\eta}_r)$, avec $\eta_1, \dots, \eta_r \in T_x$,

suivant que U est une forme sur Y à valeurs vectorielles ou scalaires, par

$$(f^* \nabla' U)(\xi_1, \eta_1, \dots, \eta_r) + \sum_{j=1}^r U(f_* \eta_1, \dots, f_* \eta_{j-1}, f_* \nabla_{\xi_1} \tilde{\eta}_j + \theta(\xi_1) f_* \eta_j + \theta(\eta_j) f_* \xi_1, f_* \eta_{j+1}, \dots, f_* \eta_r),$$

(ii) $\nabla'_{f_* \xi_1} f_* \eta$, avec $\eta \in T_x$, par

$$f_* \nabla_{\xi_1} \eta + \theta(\xi_1) f_* \eta(x) + \theta(\eta(x)) f_* \xi_1,$$

et enfin :

(iii) $\xi_1.\theta(\eta)$, avec $\eta \in T_x$, par

$$\theta(\nabla_{\xi_1} \eta) + \theta(\xi_1) \theta(\eta(x)) + \frac{1}{1-n^2} \{n(f^* S' - S)(\xi_1, \eta(x)) + (f^* S' - S)(\eta(x), \xi_1)\};$$

on note $\tilde{\omega}'_{l+1}(p)(\xi_1, \dots, \xi_{l+4})$ l'expression ainsi obtenue et $\omega'_{l+1}(p)$ est défini par

$$(3.10) \quad \omega'_{l+1}(p)(\xi_1, \dots, \xi_{l+4}) = \tilde{\omega}'_{l+1}(p)(\xi_1, \dots, \xi_{l+4}) - \sum_{j=2}^{l+4} \omega'_l(p)(\xi_2, \dots, \xi_{j-1}, \nabla_{\xi_1} \xi_j, \xi_{j+1}, \dots, \xi_{l+4}).$$

Démonstration. — Remarquons tout de suite que, dans (d), on passe de la dérivée covariante de ω'_l à $\tilde{\omega}'_{l+1}$ en utilisant uniquement les égalités qui définissent l'équation N_2'' .

Comme l'application naturelle

$$j_2(f, \theta)(x) \mapsto (j_1(f)(x), \theta(x))$$

de N'_2 dans $\tilde{J}_1(E) \times T^*$ est surjective, il s'ensuit que ω'_{l+1} est bien défini par la formule (3.10).

Puisque ω'_0 nous est donné, l'unicité d'une telle famille est évidente. On vérifie par ailleurs facilement que si ω'_l est du type (c), alors ω'_{l+1} , calculé à partir de ω'_l avec la recette (d), est encore du type (c), ce qui entraîne l'existence.

PROPOSITION 3.2. — Pour tout $l \geq 0$, le diagramme

$$(3.11) \quad \begin{array}{ccc} N'_{l+2} & \xrightarrow{\Omega'_l} & S' T^* \otimes \Lambda^2 T^* \otimes T^* \otimes_F T_Y \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow i \\ \tilde{J}_1(F) & \xrightarrow{\omega'_l} & \otimes^l T^* \otimes \Lambda^2 T^* \otimes T^* \otimes_F T_Y \end{array}$$

est commutatif.

Démonstration. — Soit $p = j_{l+2}(f, \theta)(x) \in N'_{l+2}$. D'après la remarque faite au début de la démonstration de la proposition précédente, on a, pour $m \leq l$ et $k \geq 1$,

$$\nabla'_{f_* \xi_1} \nabla'_{f_* \xi_2} \dots \nabla'_{f_* \xi_m} (\tilde{\omega}'_k(j_1(f, \theta))(\tilde{\eta}_1, \dots, \tilde{\eta}_{k-3}) - \nabla'_{f_* \tilde{\eta}_1} (\omega'_{k-1}(j_1(f, \theta))(\tilde{\eta}_2, \dots, \tilde{\eta}_{k+3}))) = 0,$$

pour tous $\xi_1, \dots, \xi_m, \eta_1, \dots, \eta_{k+3} \in T_x$, puisque $\pi_{m+2}(p) \in N_{m+2}$. On a donc

$$(3.12) \quad \begin{aligned} & \nabla'_{f_* \xi_1} \nabla'_{f_* \xi_2} \dots \nabla'_{f_* \xi_m} (\omega'_k(j_1(f, \theta))(\tilde{\eta}_1, \dots, \tilde{\eta}_{k+3}) \\ & \quad - \nabla'_{f_* \tilde{\eta}_1} (\omega'_{k-1}(j_1(f, \theta))(\tilde{\eta}_2, \dots, \tilde{\eta}_{k+3}))) \\ & = - \sum_{j=2}^{k+3} \nabla'_{f_* \xi_1} \nabla'_{f_* \xi_2} \dots \nabla'_{f_* \xi_m} (\omega'_{k-1}(j_1(f, \theta))(\tilde{\eta}_2, \dots, \nabla'_{\tilde{\eta}_1} \tilde{\eta}_j, \dots, \tilde{\eta}_{k+3})). \end{aligned}$$

Démontrons maintenant la proposition par récurrence sur l . Le résultat est vrai pour $l=0$, d'après la formule (3.7). Soit $l \geq 1$ et supposons le résultat vrai pour tout entier $< l$. On peut, d'après (3.12), appliquer la proposition 0.2 qui nous dit que

$$\Omega'_l(p)(\xi_1, \dots, \xi_{l+3}) = \nabla'_{f_* \xi_1} (\omega'_{l-1}(j_1(f, \theta))(\xi_2, \dots, \xi_{l+3})).$$

En utilisant à nouveau (3.12), avec $m=0$ et $k=l$, et le fait que $\omega'_{l-1}(\pi_1(p)) = \Omega'_{l-1}(\pi_{l+1}(p)) = 0$, on obtient alors

$$\Omega'_l(p) = \omega'_l(\pi_1(p)).$$

On déduit facilement de la démonstration précédente que

$$(3.13) \quad \omega'_{l+m}(\pi_1(p))(\xi_1, \dots, \xi_{l+m+3}) = \nabla'_{f_* \xi_1} \nabla'_{f_* \xi_2} \dots \nabla'_{f_* \xi_m} (\omega'_l(j_1(f, \theta))(\xi_{m+1}, \dots, \xi_{l+m+3}))$$

si $p = j_{l+m+2}(f, \theta)(x) \in N'_{l+m+2}$.

Le morphisme $\omega'_l : \tilde{J}_1(F) \rightarrow \otimes^l T^* \otimes \Lambda^2 T^* \otimes T^* \otimes_F T_Y$ est appelé *courbure projective d'ordre l* associée au couple de connexions (∇, ∇') . Si $p = j_1(f, \theta)(x) \in \tilde{J}_1(F)$, la courbure projective d'ordre 0 est donc donnée par

$$\omega'_0(p) = (f^* W' - f_* W)(x),$$

et le lecteur vérifiera facilement que la courbure projective d'ordre 1 est donnée par

$$(3.14) \quad \begin{aligned} \omega'_1(p)(\xi, \eta, \zeta, \lambda) = & (f^* \nabla' W' - f_* \nabla W)(\xi, \eta, \zeta, \lambda) + 3\theta(\xi)(f^* W')(\eta, \zeta, \lambda) \\ & + \theta(\eta)(f^* W')(\xi, \zeta, \lambda) + \theta(\zeta)(f^* W')(\eta, \xi, \lambda) \\ & + \theta(\lambda)(f^* W')(\eta, \zeta, \xi) - \theta(\xi)f_* W(\eta, \zeta, \lambda) - \theta(W(\eta, \zeta, \lambda))f_* \xi, \end{aligned}$$

pour tous $\xi, \eta, \zeta, \lambda \in T_x$. Plus généralement $\omega'_l(p)$ est de la forme $(f^* \nabla'^l W' - f_* \nabla^l W)(x)$ plus des termes faisant intervenir les dérivées covariantes d'ordre au plus $l-1$ des tenseurs de Weyl et d'ordre au plus $l-2$ des tenseurs de Ricci. Ce dernier résultat se montre facilement par récurrence sur l en utilisant les règles de construction de ω'_{l+1} , à partir de ω'_l , données dans la proposition 3.1.

Soit $f : X \rightarrow Y$ un difféomorphisme. On voit facilement qu'il existe, en tout $x \in X$, une solution formelle de N'_1 , de la forme $j_1(f, \theta)(x)$ avec $\theta \in T_x^*$. Comme, par ailleurs, α_f est un morphisme de fibrés affines sur $\pi : T^* \rightarrow X$ dont le morphisme de fibrés vectoriels associés est induit par l'identité sur $\otimes^2 T^*$, on en déduit que $N_1^{(f)} = \text{Ker}_0 \alpha_f$, avec 0 section nulle du fibré vectoriel $\otimes^2 T^*$ sur X , est une équation différentielle d'ordre 1 dans T^* . Les considérations du paragraphe 0 s'appliquant à α_f et $N_1^{(f)}$, on note $N_{l+1}^{(f)}$ le l -ième prolongement de $N_1^{(f)}$, pour $l \geq 0$, et $\Omega_l^{(f)} : N_{l+1}^{(f)} \rightarrow S^l T^* \otimes \Lambda^2 T^* \otimes T^*$ le morphisme de fibrés sur X obtenu à partir de la proposition 0.1. Si $j_l(\theta)(x) \in N_l^{(f)}$, avec $x \in X$ et $\theta \in T_x^*$, alors $j_l(f, \theta)(x) \in N'_l$. On définit alors, pour $l \geq 0$, un morphisme

$$\Omega'_l : N_{l+2}'' \rightarrow S^l T^* \otimes \Lambda^2 T^* \otimes T^*$$

de fibrés sur X de la manière suivante : si $p = j_{l+2}(f, \theta)(x) \in N_{l+2}''$, alors $j_{l+1}(\theta)(x) \in N_{l+1}^{(f)}$ et on pose

$$\Omega'_l(p) = \Omega_l^{(f)}(j_{l+1}(\theta)(x)).$$

Le morphisme Ω'_l est bien défini car $\Omega_l^{(f)}(j_{l+1}(\theta)(x))$, avec $f : X \rightarrow Y$ difféomorphisme local défini au voisinage de $x \in X$ et $\theta \in T_x^*$, ne dépend que du jet d'ordre $l+2$ de f en x .

Introduisons la notation suivante : Soit $\omega \in C^\infty(\otimes^k T^* \otimes H)$, avec k entier ≥ 1 et H fibré vectoriel sur X . Si $l \leq k$ et si $\xi_1, \dots, \xi_l \in C^\infty(T)$, on note $\omega(\xi_1, \dots, \xi_l)$ l'élément de $C^\infty(\otimes^{k-l} T^* \otimes H)$ défini par

$$\omega(\xi_1, \dots, \xi_l)(\eta_1, \dots, \eta_{k-l}) = \omega(\xi_1, \dots, \xi_l, \eta_1, \dots, \eta_{k-l})$$

pour $\eta_1, \dots, \eta_{k-l} \in T$.

Soit $p = j_2(f, \theta)(x) \in N_2''$. Si, pour $\xi \in T_x$, $K(\xi) \in T_x^*$ est défini en disant que, pour $\eta \in T_x$, $\langle \eta, K(\xi) \rangle$ est le second membre de (3.5), on a, d'après les résultats du paragraphe 0

et (0.1),

$$\Omega''_0(p)(\xi, \eta) = \nabla_{\xi} K(\tilde{\eta}) - \nabla_{\eta} K(\tilde{\xi})$$

pour tous $\xi, \eta \in T_x$. On vérifie alors facilement que

$$(3.15) \quad \Omega''_0(p)(\xi, \eta, \zeta) = -\theta(W(\xi, \eta, \zeta)) + \frac{1}{n^2-1} \\ \{ n(f^* \nabla' S' - \nabla S)(\xi, \eta, \zeta) - n(f^* \nabla' S' - \nabla S)(\eta, \xi, \zeta) + (f^* \nabla' S' - \nabla S)(\xi, \zeta, \eta) \\ - (f^* \nabla' S' - \nabla S)(\eta, \zeta, \xi) \},$$

pour tous $\xi, \eta, \zeta \in T_x$. Un morphisme $\omega''_0 : \tilde{J}_1(F) \rightarrow \Lambda^2 T^* \otimes T^*$ est alors bien défini en disant que, pour $p = j_1(f, \theta)(x) \in \tilde{J}_1(F)$ et $\xi, \eta, \zeta \in T_x$, $\omega''_0(p)(\xi, \eta, \zeta)$ est le second membre de l'équation (3.15).

La proposition 3.1 reste valable si l'on remplace ω'_0 , donné par (a), par n'importe quel morphisme vérifiant (b) et (c). On peut aussi modifier la condition (c), et permettre au terme d'ordre l de la suite de morphismes de dépendre des dérivées covariantes d'ordre au plus $l+1$ des tenseurs de Ricci de ∇ et ∇' . Ainsi, partant de ω'_0 qui vérifie maintenant (b) et (c), on construit canoniquement une suite

$$(\omega''_l : \tilde{J}_1(F) \rightarrow \otimes^l T^* \otimes \Lambda^2 T^* \otimes T^*)_{l \geq 0}$$

de morphismes de fibrés sur X .

Avec une technique analogue à celle de la proposition 3.2, on montre que le diagramme

$$(3.16) \quad \begin{array}{ccc} N''_{l+2} & \xrightarrow{\Omega'_l} & S^l T^* \otimes \Lambda^2 T^* \otimes T^* \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow i \\ \tilde{J}_1(F) & \xrightarrow{\omega''_l} & \otimes^l T^* \otimes \Lambda^2 T^* \otimes T^* \end{array}$$

est commutatif. On a aussi

$$(3.17) \quad \omega''_{l+m}(\pi_1(p))(\xi_1, \dots, \xi_{l+m+2}) = \nabla_{\xi_1} \nabla_{\xi_2} \dots \nabla_{\xi_m} (\omega''_l(j_1(f, \theta))(\xi_{m+1}, \dots, \xi_{l+m+2})),$$

si $p = j_{l+m+2}(f, \theta)(x) \in N''_{l+m+2}$, pour tous $\xi_1, \dots, \xi_{l+m+2} \in T_x$.

On note, pour $l \geq 0$,

$$c_l : \otimes^{l+1} T^* \otimes \Lambda^2 T^* \otimes T^* \otimes_{\tilde{J}_1(F)} T_Y \rightarrow \otimes^l T^* \otimes \Lambda^2 T^* \otimes T^*$$

le morphisme de fibrés vectoriels sur $\pi : \tilde{J}_1(F) \rightarrow X$ défini ainsi : si $c_{l,p}$ désigne la restriction de c_l à la fibre $(\otimes^{l+1} T^* \otimes \Lambda^2 T^* \otimes T^* \otimes_{\tilde{J}_1(F)} T_Y)_p$, pour $p \in \tilde{J}_1(F)$ tel que $\mu_1 p = j_1(f)(x)$, où f est un difféomorphisme local de X dans Y défini au voisinage de $x \in X$, on a

$$c_{l,p}(\omega)(\xi_1, \dots, \xi_l, \xi, \eta, \zeta) = \text{Trace}(\lambda \mapsto f_*^{-1} \omega(\xi_1, \dots, \xi_l, \lambda, \xi, \eta, \zeta)),$$

pour $\xi_1, \dots, \xi_l, \xi, \eta, \zeta, \lambda \in T_x$ et $\omega \in \otimes^{l+1} T^*_x \otimes \Lambda^2 T^*_x \otimes T^*_x \otimes T_{Y,f(x)}$.

Nous noterons, dans la suite, $\mathcal{P}$ le sous-fibré à fibre variable de $\tilde{\mathcal{J}}_1(F)$ des jets p de $\tilde{\mathcal{J}}_1(F)$ tels que $\omega'_l(p) = 0$, pour tout $l \geq 0$.

LEMME 3.3. — En considérant ω'_1 comme une section de $T^* \otimes \Lambda^2 T^* \otimes T^* \otimes_{\tilde{\mathcal{J}}_1(F)} T_Y$ sur $\tilde{\mathcal{J}}_1(F)$, on a, pour $m \geq 0$ et $q \in \tilde{\mathcal{J}}_{m+1}(F)$,

$$p_m(c_0 \circ \omega'_1 - (n-2)\omega''_0)(q) = 0,$$

si $q \in \pi_{m+1}(N''_{m+2})$ et $\pi_1(q) \in \mathcal{P}$.

Démonstration. — Soit $\tilde{W}$ la section de $\Lambda^2 T^* \otimes T^*$ sur X définie par

$$\tilde{W}(\xi, \eta, \zeta) = \text{Trace}(\lambda \mapsto (\nabla W)(\lambda, \xi, \eta, \zeta))$$

pour $\xi, \eta, \zeta, \lambda \in T$. On définit de même $\tilde{W}' \in C^\infty(\Lambda^2 T_Y^* \otimes T_Y^*)$, à partir de ∇' et W' . Un calcul bien connu de Weyl (cf. [3], p. 89 ou [15]) montre que

$$(3.18) \quad \tilde{W}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{n-2}{n^2-1} \{ n(\nabla S)(\xi, \eta, \zeta) - n(\nabla S)(\eta, \xi, \zeta) + (\nabla S)(\xi, \zeta, \eta) - (\nabla S)(\eta, \zeta, \xi) \},$$

pour $\xi, \eta, \zeta \in T$. Si $j_1(f, \theta)$ est une section de $\tilde{\mathcal{J}}_1(F)$, en combinant (3.15) et (3.18), on obtient

$$(n-2)\omega''_0(j_1(f, \theta)) = f^* \tilde{W}' - \tilde{W} - (n-2)\theta \circ W.$$

A partir de (3.14) et en utilisant le fait que

$$\text{Trace}(s \mapsto W'(s, t, u)) = \text{Trace}(t \mapsto W'(s, t, u)) = \text{Trace}(u \mapsto W'(s, t, u)) = 0,$$

avec $s, t, u \in T_Y$ (cf. [3]), on a

$$c_0 \circ \omega'_1(j_1(f, \theta)) = f^* \tilde{W}' - \tilde{W} - (n-2)\theta \circ W + 3\theta \circ (f_*^{-1} \omega'_0(j_1(f, \theta))),$$

d'où

$$(3.19) \quad (c_0 \circ \omega'_1 - (n-2)\omega''_0)(j_1(f, \theta)) = 3\theta \circ (f_*^{-1} \omega'_0(j_1(f, \theta))).$$

D'après (3.13), si $p = j_{m+2}(f, \theta)(x) \in N''_{m+2}$, avec $\pi_1(p) \in \mathcal{P}$, comme $\omega'_k(\pi_1(p)) = 0$, pour $k \geq 0$, le m -jet en x du second membre de (3.19) est nul, d'où le résultat.

Soit $L \in C^\infty(\otimes^{l+4} T^* \otimes T)$, avec $l \geq 0$. Définissons $\mathcal{T}(L) \in C^\infty(\otimes^{l+3} T^*)$ par

$$\mathcal{T}(L)(\xi_1, \dots, \xi_{l+3}) = \text{Trace}(\lambda \mapsto L(\xi_1, \dots, \xi_l, \lambda, \xi_{l+1}, \xi_{l+2}, \xi_{l+3})),$$

pour $\xi_1, \dots, \xi_{l+3}, \lambda \in T$. Si $\omega \in C^\infty(\otimes^{l+1} T^* \otimes \Lambda^2 T^* \otimes T^* \otimes_{\tilde{\mathcal{J}}_1(F)} T_Y)$, on a

$$(3.20) \quad c_l \circ \omega(j_1(u)) = \mathcal{T} f_*^{-1} \omega(j_1(u)),$$

si $u = (f, \theta) \in C^\infty(F)$, avec f difféomorphisme local de X dans Y et $\theta \in C^\infty(T^*)$, en considérant, dans le membre de droite de (3.20), ω comme une section de $\otimes^{l+4} T^* \otimes_{\tilde{\mathcal{J}}_1(F)} T_Y$.

Si, pour $x \in X$, on a $L(x) = 0$, avec $L \in C^\infty(\otimes^{l+4} T^* \otimes T)$ et $l \geq 0$, alors on a

$$\nabla_\xi(\mathcal{T}(L))(\xi_1, \dots, \xi_{l+3}) = \xi \cdot \mathcal{T}(L)(\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_{l+3})$$

et

$$(\nabla_\xi L)(\xi_1, \dots, \xi_{l+4}) = \nabla_\xi(L(\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_{l+4})),$$

pour $\xi, \xi_1, \dots, \xi_{l+4} \in T_x$. On en déduit que

$$\mathcal{T}(\nabla_\xi L) = \nabla_\xi(\mathcal{T}(L))$$

pour $\xi \in T_x$. Plus généralement, le lecteur vérifiera facilement le lemme qui suit.

LEMME 3.4. — Soient $L \in C^\infty(\otimes^{l+4} T^* \otimes T)$ et $x \in X$. Si $j_m(L)(x) = 0$, avec $m \geq 0$, alors on a

$$j_m(\mathcal{T}(\nabla_\xi L) - \nabla_\xi \mathcal{T}(L))(x) = 0$$

pour $\xi \in T_x$.

PROPOSITION 3.3. — En considérant ω'_{l+1} avec $l \geq 0$, comme une section de $\otimes^{l+1} T^* \otimes \Lambda^2 T^* \otimes T^* \otimes_{J_1(F)} T_Y$, on a, pour tout entier $m \geq 0$,

$$p_m(c_l \circ \omega'_{l+1} - (n-2)\omega'_l)(q) = 0$$

si $q \in \pi_{m+1}(N''_{l+m+2})$ et $\pi_1(q) \in \mathcal{P}$.

Démonstration. — Démontrons la proposition par récurrence sur l . Le résultat est vrai pour $l=0$, d'après le lemme 3.3. Supposons-le établi pour l , avec $l \geq 0$. Soit $u = (f, \theta) \in F_x$, où $f: X \rightarrow Y$ est un difféomorphisme local défini au voisinage de $x \in X$ et $\theta \in T_x^*$, tel que $j_1(u)(x) \in \mathcal{P}$ et que $p = j_{l+m+3}(u)(x) \in N''_{l+m+3}$. D'après (3.13), avec $p \in N''_{l+m+3}$, et comme $\omega'_{l+k}(\pi_1(p)) = 0$, pour tout $k \geq 0$, on a

$$(3.21) \quad j_m(f_*^{-1} \omega'_{l+1}(j_1(u)))(x) = 0.$$

On en déduit, avec l'hypothèse de récurrence, que $j_m(\omega'_l(j_1(u)))(x) = 0$. D'après (3.10) et la définition de la deuxième forme fondamentale de f , si $\xi, \xi_1, \dots, \xi_{l+4} \in T_x$, le m -jet en x de $f_*^{-1} \omega'_{l+2}(j_1(u))(\xi, \xi_1, \dots, \xi_{l+4})$ est égal, avec nos hypothèses, au m -jet en x de

$$f_*^{-1} B^f(\xi, f_*^{-1} \omega'_{l+1}(j_1(u))(\xi_1, \dots, \xi_{l+4})) + \nabla_\xi(f_*^{-1} \omega'_{l+1}(j_1(u))(\xi_1, \dots, \xi_{l+4})).$$

Puisque B^f est $\mathcal{O}_X$ -bilinéaire, avec $\mathcal{O}_X$ faisceau des germes de fonctions différentiables sur X , à valeurs réelles, d'après (3.21), ce jet est égal au m -jet en x de

$$\nabla_\xi(f_*^{-1} \omega'_{l+1}(j_1(u))(\xi_1, \dots, \xi_{l+4})).$$

On a donc, d'après (3.20),

$$\begin{aligned} v &= j_m((c_{l+1} \circ \omega'_{l+2}(j_1(u)))(\xi, \xi_1, \dots, \xi_{l+3}))(x) \\ &= j_m(\mathcal{T}(\nabla_\xi f_*^{-1} \omega'_{l+1}(j_1(u)))(\xi_1, \dots, \xi_{l+3}))(x), \end{aligned}$$

pour $\xi, \xi_1, \dots, \xi_{l+3} \in \mathbf{T}_x$. D'après (3.21) et le lemme 3.4 appliqué à $f_*^{-1} \omega'_{l+1}(j_1(u))$ et à x , et d'après (3.20), on a

$$\begin{aligned} v &= j_m(\nabla_\xi(\mathcal{F} f_*^{-1} \omega'_{l+1}(j_1(u)))(\xi_1, \dots, \xi_{l+3}))(x) \\ &= j_m(\nabla_\xi(c_l \circ \omega'_{l+1}(j_1(u)))(\xi_1, \dots, \xi_{l+3}))(x) \\ &= (n-2) j_m((\nabla_\xi \omega'_l(j_1(u)))(\xi_1, \dots, \xi_{l+3}))(x), \end{aligned}$$

cette dernière égalité résultant de l'hypothèse de récurrence. Comme $j_m(\omega'_l(j_1(u)))(x) = 0$, on a, d'après (3.17) pour $p \in N'_{l+m+3}$,

$$v = (n-2) j_m(\omega'_{l+1}(j_1(u))(\xi, \xi_1, \dots, \xi_{l+3}))(x).$$

Nous allons seulement nous servir de la proposition 3.3 pour $m=0$, c'est-à-dire de l'égalité $c_l \circ \omega'_{l+1} = (n-2) \omega'_l$ sur $\pi_1(N'_{l+2}) \cap \mathcal{P}$. Nous pouvons maintenant énoncer le théorème d'équivalence formelle suivant :

THÉORÈME 3.1. — *Si $n \geq 3$ et s'il existe $p \in \mathcal{P}$, avec $\pi(p) = x \in X$, alors il existe une solution formelle $q \in N''_{\infty, x}$ telle que $\mu_1 \pi_1(q) = \mu_1(p)$.*

Démonstration. — On peut supposer sans perte de généralité que $p \in N'_1$, puisque la condition « $j_1(f, \theta)(x) \in \mathcal{P}$ » n'implique que le jet d'ordre 0 de θ , d'après la condition (b) de la proposition 3.1. Il existe une application étale $f: X \rightarrow Y$, définie au voisinage de x , telle que $q_2 = j_2(f, \theta)(x) \in N'_2$, pour tout germe $\theta \in \mathbf{T}_x^*$ tel que $\pi_1(q_2) = p$. On a, d'après le lemme 3.3 et la commutativité de (3.16) pour $l=0$,

$$0 = \frac{1}{n-2} c_0 \circ \omega'_1(p) = \omega'_0(p) = \Omega'_0(q_2) = \Omega_0^{(f)}(j_1(\theta)(x));$$

donc, d'après l'exactitude de la suite

$$N_2^{(f)} \xrightarrow{\pi_1} N_1^{(f)} \xrightarrow[\Omega_0^{(f)}]{\Omega_0^{(f)}} \Lambda^2 T^* \otimes T^*,$$

on peut choisir $\theta \in \mathbf{T}_x^*$ tel que $j_2(\theta)(x) \in N_2^{(f)}$: il existe donc $q_2 = j_2(f, \theta)(x) \in N_2 \cap N'_2$ tel que $j_1(f, \theta)(x) = p$. Supposons que, pour $l \geq 0$, on ait trouvé $q_{l+2} \in N_{l+2} \cap N'_{l+2}$ tel que $\pi_2(q_{l+2}) = q_2$. Puisque $\Omega'_l(q_{l+2}) = \omega'_l(p) = 0$, d'après la commutativité de (3.11), il existe, en utilisant l'exactitude de (3.9), une application étale $h: X \rightarrow Y$, définie au voisinage de x , telle que $q_{l+3} = j_{l+3}(h, a)(x) \in N_{l+3}$, pour tout germe $a \in \mathbf{T}_x^*$ tel que $\pi_{l+2}(q_{l+3}) = q_{l+2}$. Comme $N'_{l+3} = N_{l+3} \cap \pi_{l+2}^{-1}(N'_{l+2})$, il en résulte que $q_{l+3} \in N'_{l+3}$ et, d'après la proposition 3.3, on a

$$\omega'_{l+1}(p) = \frac{1}{n-2} c_{l+1} \circ \omega'_{l+2}(p) = 0.$$

On a donc, d'après la commutativité de (3.16) :

$$\Omega'_{l+1}(q_{l+3}) = \Omega_{l+1}^{(h)}(j_{l+2}(a)(x)) = 0.$$

Utilisant l'exactitude de

$$N_{l+3}^{(h)} \xrightarrow{\pi_{l+2}} N_{l+2}^{(h)} \xrightarrow[0]{\Omega_{l+1}^{(h)}} S^{l+1} T^* \otimes \Lambda^2 T^* \otimes T^*,$$

on peut s'arranger pour que $j_{l+3}(a)(x) \in N_{l+3}^{(h)}$, c'est-à-dire pour que

$$q_{l+3} = j_{l+3}(h, a)(x) \in N_{l+3} \cap N'_{l+3} \text{ et que } \pi_{l+2}(q_{l+3}) = q_{l+2}.$$

Dans le cas analytique, on a le :

THÉOREME 3.2. — *Supposons que X et Y soient des variétés analytiques réelles de même dimension $n \geq 3$ et que les connexions ∇ et ∇' soient analytiques. Si $p \in \mathcal{P}$, il existe une transformation projective analytique $f : X \rightarrow Y$, définie au voisinage de $x = \pi(p)$, et telle que $j_1(f)(x) = \mu_1(p)$.*

Démonstration. — Rappelons pour commencer que le théorème 4.2 de [11], appendice, s'adresse aussi à des « équations différentielles » *a priori* de rang non constant. Soient E_1 un fibré sur X, E_2 un fibré sur une variété Z, s une section de E_2 sur Z et $\Phi : J_k(E_1) \rightarrow E_2$ un morphisme de fibrés sur Z, où $J_k(E_1)$ est fibré sur Z à l'aide d'une application donnée de Z dans X. Si tous les objets ci-dessus sont analytiques et s'il existe un jet fortement prolongeable $p \in \text{Ker}_s(\Phi)$ [c'est-à-dire si tout $p' \in \text{Ker}_{J_l(s)} p_l(\Phi)$ qui prolonge p , se prolonge à son tour en un élément de $\text{Ker}_{J_{l+1}(s)} p_{l+1}(\Phi)$], alors il existe un germe analytique u de section de E_1 , en $x = \pi(p)$, tel que

$$\Phi(j_k(u)) = s$$

et que $j_k(u)(x) = p$. Revenons maintenant à la démonstration du théorème. On a

$$N_2 \cap N'_2 = \text{Ker}_0(\psi \oplus p_1(\alpha)),$$

avec 0 section nulle du fibré vectoriel $S^2 T^* \otimes_F T_Y \oplus J_1(T^* \otimes_F T^*)$ sur F, et on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} J_{l+2}(F) & \xrightarrow{p_{l+1}(\alpha)} & J_{l+1}(T^* \otimes_F T^*) \\ \parallel & & \downarrow p_l(\text{id}_1) \\ J_{l+2}(F) & \xrightarrow{p_l(p_1(\alpha))} & J_l(J_1(T^* \otimes_F T^*)) \end{array}$$

pour $l \geq 0$, où $p_l(\text{id}_1)$ est le l -ième prolongement de l'identité sur $J_1(T^* \otimes_F T^*)$ (cf. [5]), donc on a

$$N_{l+2} \cap N'_{l+2} = \text{Ker}_{J_l(0)} p_l(\psi \oplus p_1(\alpha)).$$

Ce résultat et la démonstration du théorème 3.1 nous montrent que tout $q_2 \in \text{Ker}_0(\psi \oplus p_1(\alpha))$ tel que $\pi_1(q_2) \in \mathcal{P}$ est fortement prolongeable au sens défini plus haut, d'où le théorème.

Remarques. — (1) On a unicité de la transformation projective f , dans le théorème 3.2, en lui imposant de vérifier $j_2(f)(x) = \mu_2 p'$, où $p' \in N'_2$ avec $\pi_1(p') = p$. Ce résultat se vérifie aisément au niveau des solutions formelles.

(2) Si $W=0$ et $W'=0$, alors toutes les courbures projectives sont nulles et on a $\mathcal{P}=\tilde{J}_1(F)$: on retrouve un théorème bien connu de Weyl. D'ailleurs, dans cette situation, le théorème 3.2 est encore vrai en C^∞ grâce à Frobenius (cf. [3] ou [15]).

Nous allons maintenant examiner l'équivalence projective des surfaces. L'analogie du théorème 3.1 est alors le :

THÉORÈME 3.3. — Si $\dim X = \dim Y = 2$ et si un jet p de $\tilde{J}_1(F)$ appartient à $\bigcap_{l \geq 0} \text{Ker}_0 \omega_l''$, alors il existe une solution formelle $q \in N''_{\infty, \pi(p)}$ telle que $\mu_1 \pi_1(q) = \mu_1 p$.

Démonstration. — Dans cette situation les tenseurs de Weyl W et W' sont nuls et on a donc, d'après (3.7), $\Omega'_l = 0$ si $l \geq 0$. A partir de là, il n'y a qu'à reprendre la construction donnée dans le théorème 3.1.

Bien entendu, dans le cas analytique, s'il existe $p \in \bigcap_{l \geq 0} \text{Ker}_0 \omega_l''$, alors il existe une transformation projective analytique $f: X \rightarrow Y$, définie au voisinage de $x = \pi(p)$, telle que $j_1(f)(x) = \mu_1 p$.

Définissons $\tilde{S} \in C^\infty(\Lambda^2 T^* \otimes T^*)$ par

$$\tilde{S}(\xi, \eta, \zeta) = 2 \{ (\nabla S)(\xi, \eta, \zeta) - (\nabla S)(\eta, \xi, \zeta) \} - (\nabla S)(\eta, \zeta, \xi) + (\nabla S)(\xi, \zeta, \eta).$$

Parallèlement, définissons de manière analogue $\tilde{S}' \in C^\infty(\Lambda^2 T_Y^* \otimes T_Y^*)$. Utilisant (3.15) et les lemmes du paragraphe 0, on obtient

$$(3.22) \quad \Omega_l''(p)(\xi_1, \dots, \xi_{l+2}) = \nabla_{\xi_1} \nabla_{\xi_2} \dots \nabla_{\xi_l} ((f^* \tilde{S}' - \tilde{S})(\xi_{l+1}, \xi_{l+2}))$$

pour tous $\xi_1, \dots, \xi_{l+2} \in T_x$, si $p = j_{l+2}(f, \theta)(x) \in N'_{l+2}$. Comparant (3.7) et (3.22), on voit que $\tilde{S}$ joue pour la géométrie projective des surfaces le rôle du tenseur de Weyl en dimension supérieure ou égale à 3. Ce tenseur a été introduit pour la première fois par Weyl dans [15].

4. Équivalence conforme des métriques riemanniennes

Nous reprenons ici les notations du paragraphe 2 en supposant que X et Y sont de même dimension $n \geq 3$. On est obligé de faire cette restriction sur les dimensions pour pouvoir définir le tenseur de Weyl d'une structure conforme. Mais cette restriction n'est nullement gênante puisque l'équivalence conforme locale est triviale pour un couple de surfaces.

DÉFINITION 4.1. — Un difféomorphisme $f: X \rightarrow Y$ est une transformation conforme de X , munie de la métrique g , sur Y , munie de la métrique g' , s'il existe $v \in C^\infty(X)$ telle que

$$(4.1) \quad f^* g' = e^{2v} g.$$

Rappelons que si $v \in C^\infty(X)$, le hessien de v (relativement à la métrique g) est la section H_v de $S^2 T^*$ sur X définie par

$$H_v(\xi, \eta) = \xi \cdot \eta \cdot v - (\nabla_\xi \eta) \cdot v,$$

pour tous champs de vecteurs ξ, η sur X (cf. [4], § 7 ou [9]). On pose alors

$$\tilde{H}_v = H_v - dv \otimes dv.$$

Si $\text{grad } v$ désigne le gradient de v par rapport à la métrique g , on note $K_v : T \rightarrow T$ la 1-forme vectorielle sur X définie par

$$K_v(\xi) = \nabla_\xi \text{grad } v - (\xi \cdot v) \text{grad } v.$$

En fait K_v est la composition $T \xrightarrow{\tilde{H}_v} T^* \xrightarrow{\iota} T$ en considérant $\tilde{H}_v$ comme un morphisme de T dans T^* , où ι est l'identification de T^* avec T via la métrique g (cf. [9]). Profitons-en pour noter encore ι l'identification de T_Y^* avec T_Y via la métrique g' .

Si $f : X \rightarrow Y$ et $v : X \rightarrow \mathbf{R}$ vérifient (4.1), alors on a, pour $\xi, \eta \in T$:

$$(4.2) \quad B^f(\xi, \eta) = (\xi \cdot v) f_* \eta + (\eta \cdot v) f_* \xi - g(\xi, \eta) f_* \text{grad } v.$$

Remarquons que cette formule est équivalente à la formule (7.1) de [4] dans le cas où $\dim X = \dim Y$, avec $u = e^{2v}$. On a ensuite

$$(4.3) \quad (f^* R' - f_* R)(\xi, \eta, \zeta) = \{ \tilde{H}_v(\xi, \zeta) + g(\xi, \zeta) \|\text{grad } v\|^2 \} f_* \eta \\ - \{ \tilde{H}_v(\eta, \zeta) + g(\eta, \zeta) \|\text{grad } v\|^2 \} f_* \xi + g(\xi, \zeta) f_* K_v(\eta) - g(\eta, \zeta) f_* K_v(\xi),$$

pour $\xi, \eta, \zeta \in T$.

Faisant alors subir deux « contractions » successives à (4.3), on en déduit les équations

$$(4.4) \quad f^* S' - S = (2 - n) \tilde{H}_v + \{ (1 - n) \|\text{grad } v\|^2 - \text{Trace}(K_v) \} g$$

et

$$(4.5) \quad e^{2v} \mathcal{R}' \circ f - \mathcal{R} = (2 - 2n) \text{Trace}(K_v) - n(n-1) \|\text{grad } v\|^2,$$

où dans (4.4) S et S' sont les courbes de Ricci de g et g' , et dans (4.5) $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ leurs courbures scalaires respectivement. On trouve alors que

$$(4.6) \quad \tilde{H}_v = \frac{1}{n-2} \left\{ S - f^* S' + \frac{1}{2(n-1)} (e^{2v} \mathcal{R}' \circ f - \mathcal{R}) g - \frac{n-2}{2} \|\text{grad } v\|^2 g \right\},$$

ou, de manière équivalente,

$$(4.6)' \quad f_* K_v(\xi) = \frac{1}{n-2} \left\{ (f_* S_0 - e^{2v} f^* S'_0)(\xi) \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2(n-1)} (e^{2v} \mathcal{R}' \circ f - \mathcal{R}) - \frac{n-2}{2} \|\text{grad } v\|^2 \right) f_* \xi \right\},$$

pour $\xi \in T$, où S_0 (resp. S'_0) est la composition $T \xrightarrow{S} T^* \xrightarrow{\iota} T$ (resp. $T_Y \xrightarrow{S'} T_Y^* \xrightarrow{\iota} T_Y$).

Le tenseur de Weyl W de g est la section de $\Lambda^2 T^* \otimes T^* \otimes T$ sur X définie par

$$(4.7) \quad W(\xi, \eta, \zeta) = R(\xi, \eta, \zeta) + \frac{1}{n-2} \left\{ S(\xi, \zeta) \eta + g(\xi, \zeta) S_0(\eta) - S(\eta, \zeta) \xi - g(\eta, \zeta) S_0(\xi) \right\} - \frac{\mathcal{R}}{(n-1)(n-2)} \{ g(\xi, \zeta) \eta - g(\eta, \zeta) \xi \}$$

pour tous champs de vecteurs ξ, η, ζ sur X . Il est bien connu que le tenseur W est un invariant conforme : en effet, si on remplace, dans (4.3), $\tilde{H}_v$ et $f_* K_v$ par les second membres de (4.6) et (4.6)', on obtient

$$f^* W' = f_* W,$$

où W' est le tenseur de Weyl de g' .

On désigne par $\pi : F' \rightarrow X$ le fibré trivial $\text{pr}_1 : X \times Y \times \mathbf{R} \rightarrow X$ sur X , par v_k la projection naturelle de $J_k(F')$ sur $J_k(E)$ et par $\tilde{J}_k(F')$ le sous-fibré ouvert de $J_k(F')$ des k -jets p tels que $v_k(p) \in \tilde{J}_k(E)$. Soient $\varphi'' : \tilde{J}_1(F') \rightarrow S^2 T^*$, $\psi' : \tilde{J}_2(F') \rightarrow S^2 T^* \otimes_{F'} T_Y$ et $\alpha' : \tilde{J}_2(F') \rightarrow S^2 T^*$ les morphismes de fibrés sur X ou F' définis respectivement par

$$\varphi''(\pi_1(p)) = (f^* g' - e^{2v} g)(x),$$

par

$$\psi'(p)(\xi, \eta) = B_x^f(\xi, \eta) - (\xi \cdot v) f_* \eta - (\eta \cdot v) f_* \xi + g(\xi, \eta) f_* \text{grad}_x v,$$

et par

$$\alpha'(p) = \tilde{H}_{v,x} + \frac{1}{n-2} \left\{ f^* S' - S - \frac{1}{2(n-1)} (e^{2v} \mathcal{R}' \circ f - \mathcal{R}) g + \frac{n-2}{2} \|\text{grad } v\|^2 g \right\}(x)$$

pour tous $\xi, \eta \in T_x$, si $p = j_2(f, v)(x) \in \tilde{J}_2(F')$, où f est un difféomorphisme local de x dans Y défini au voisinage de x et $v \in C^\infty(X)$.

En identifiant $V(F')$ et V , on vérifie facilement que $\psi' \oplus \alpha'$ est affine sur $\pi_0 : \tilde{J}_1(F') \rightarrow F'$ et que son morphisme de fibrés vectoriels associés est induit par l'identité sur $S^2 T^* \otimes_{F'} V$, avec $V = T_Y \oplus_{F'} 1$, où 1 est le fibré trivial en droites sur X . Posons $P'_2 = \text{Ker}_0(\psi' \oplus \alpha')$ avec 0 section nulle du fibré vectoriel $S^2 T^* \otimes_{F'} V$ sur F' . Il est clair que $\pi_1 : P'_2 \rightarrow \tilde{J}_1(F')$ est bijectif, donc P'_2 est une équation différentielle. Les considérations du paragraphe 0, s'appliquant à $\psi' \oplus \alpha'$ et P'_2 , on note P'_{l+2} son l -ième prolongement, pour $l \geq 0$, et $\bar{K}_l : P'_{l+2} \rightarrow S^l T^* \otimes \Lambda^2 T^* \otimes T^* \otimes_{F'} V$ le morphisme de fibrés sur F' donné par la proposition 0.1. D'après [4], § 7, $Q_1 = \text{Ker}_0 \varphi''$, avec 0 section nulle du fibré vectoriel $S^2 T^*$ sur X , est une équation différentielle. On en déduit alors que $P_2 = \text{Ker}_0(\varphi'' \circ \pi_1 \oplus \psi' \oplus \alpha')$ est aussi une équation différentielle car $\pi_1 : P_2 \rightarrow Q_1$ est encore bijectif. Le l -ième prolongement P_{l+2} de P_2 est alors égal à $\text{Ker}_{J_l(0)}(p_l(\varphi'') \circ \pi_{l+1} \oplus p_l(\psi') \oplus p_l(\alpha'))$. Le premier prolongement de Q_1 est $Q_2 = \text{Ker}_0(\varphi'' \circ \pi_1 \oplus \psi')$, d'après la proposition 7.4 de [4]. Comme $P_2 \subset Q_2$, la projection $\pi_1 : Q_2 \rightarrow Q_1$ est surjective. Par ailleurs, le morphisme

$\psi' \oplus \varphi'' \circ \pi_1 : \tilde{J}_2(F') \rightarrow S^2 T^* \otimes_{F'} V$ est affine sur $\pi_0 : \tilde{J}_1(F') \rightarrow F'$ et son morphisme de fibrés vectoriels associés est induit par le morphisme de rang constant $\text{id} \oplus 0 : S^2 T^* \otimes_{F'} V \rightarrow S^2 T^* \otimes_{F'} V$. La proposition 7.1 de [6] nous dit alors que le $(l+1)$ -ième prolongement de Q_1 est égal au l -ième prolongement de Q_2 , c'est-à-dire à $\text{Ker}_{J_l(0)}(p_l(\varphi'') \circ \pi_{l+1} \oplus p_l(\psi'))$. Il s'ensuit qu'on a la suite exacte

$$(4.8) \quad P_{l+3} \xrightarrow{\pi_{l+2}} P_{l+2} \xrightarrow{\bar{K}_l} S^l T^* \otimes \Lambda^2 T^* \otimes T^* \otimes_{F'} V.$$

On a $\bar{K}_l = \bar{K}'_l \oplus \bar{K}''_l$, où

$$\bar{K}'_l : P_{l+2} \rightarrow S^l T^* \otimes \Lambda^2 T^* \otimes T^* \otimes_{F'} T_Y \quad \text{et} \quad \bar{K}''_l : P_{l+2} \rightarrow S^l T^* \otimes \Lambda^2 T^* \otimes T^*$$

sont respectivement des morphismes de fibrés sur F' et X . Remarquons qu'on aurait pu, en considérant séparément $\text{Ker}_0(\psi')$ et $\text{Ker}_0(\alpha')$, construire $\bar{K}'_l$ et $\bar{K}''_l$ à partir de la proposition 0.1.

Si $f : X \rightarrow Y$ est un difféomorphisme local et si $v \in C^\infty(X)$, on a la formule suivante, qui est l'analogue de la formule (3.6) du cas projectif :

$$(4.9) \quad \begin{aligned} & \nabla'_{f_* \xi}(\psi'(j_2(f, v))(\eta, \zeta)) - \nabla'_{f_* \eta}(\psi'(j_2(f, v))(\xi, \zeta)) \\ &= (f_* R' - f_* R)(\xi, \eta, \zeta) - \{ \tilde{H}_v(\xi, \zeta) + g(\xi, \zeta) \|\text{grad } v\|^2 \} f_* \eta \\ &+ \{ \tilde{H}_v(\eta, \zeta) + g(\eta, \zeta) \|\text{grad } v\|^2 \} f_* \xi - g(\xi, \zeta) f_* K_v(\eta) + g(\eta, \zeta) f_* K_v(\xi) \\ &+ \psi'(j_2(f, v))([\xi, \eta], \zeta) - \psi'(j_2(f, v))(\xi, \nabla_\eta \zeta) + \psi'(j_2(f, v))(\eta, \nabla_\xi \zeta) \\ &+ (\xi \cdot v) \psi'(j_2(f, v))(\eta, \zeta) - (\eta \cdot v) \psi'(j_2(f, v))(\xi, \zeta) \\ &+ g(\eta, \zeta) \psi'(j_2(f, v))(\xi, \text{grad } v) - g(\xi, \zeta) \psi'(j_2(f, v))(\eta, \text{grad } v) \end{aligned}$$

pour tous champs de vecteurs ξ, η, ζ sur X .

LEMME 4.1. — Si $p = j_{l+2}(f, v)(x) \in P_{l+2}$, avec f difféomorphisme local de X dans Y défini au voisinage de $x \in X$ et $v \in C^\infty(X)$, avec $l \geq 0$, on a

$$(4.10) \quad \bar{K}'_l(p)(\xi_1, \dots, \xi_{l+3}) = \nabla'_{f_* \xi_1} \nabla'_{f_* \xi_2} \dots \nabla'_{f_* \xi_l} ((f_* W' - f_* W)(\xi_{l+1}, \xi_{l+2}, \xi_{l+3})),$$

pour tous $\xi_1, \dots, \xi_{l+3} \in T_x$.

Démonstration. — D'après (4.9), les résultats du paragraphe 0 et (0.1), pour $p \in P_{l+2}$, on a

$$\begin{aligned} \bar{K}'_l(p)(\xi_1, \dots, \xi_{l+3}) &= \nabla'_{f_* \xi_1} \nabla'_{f_* \xi_2} \dots \nabla'_{f_* \xi_l} ((f_* R' - f_* R)(\xi_{l+1}, \xi_{l+2}, \xi_{l+3}) \\ &- \{ \tilde{H}_v(\xi_{l+1}, \xi_{l+3}) + g(\xi_{l+1}, \xi_{l+3}) \|\text{grad } v\|^2 \} f_* \xi_{l+2} \\ &+ \{ \tilde{H}_v(\xi_{l+2}, \xi_{l+3}) + g(\xi_{l+2}, \xi_{l+3}) \|\text{grad } v\|^2 \} f_* \xi_{l+1} \\ &- g(\xi_{l+1}, \xi_{l+3}) f_* K_v(\xi_{l+2}) + g(\xi_{l+2}, \xi_{l+3}) f_* K_v(\xi_{l+1})). \end{aligned}$$

Comme $p_l(\alpha')(p) = 0$, on peut remplacer dans cette dernière expression $\tilde{H}_v$ et $f_* K_v$ par les second membres de (4.6) et (4.6)' respectivement, d'où le résultat.

PROPOSITION 4.1. — Il existe une unique suite

$$(K'_l : Q_1 \rightarrow \otimes^l T^* \otimes \Lambda^2 T^* \otimes T^* \otimes_{F'} T_Y)_{l \geq 0}$$

de morphismes de fibrés sur F' satisfaisant les conditions suivantes pour $p = j_1(f, v)(x) \in Q_1$, avec f difféomorphisme local de X dans Y défini au voisinage de $x \in X$, et $v \in C^\infty(X)$:

(a) $K'_0(p) = (f^* W' - f_* W)(x)$;

(b) $K'_l(p)$ est une combinaison linéaire à coefficients rationnels, universels pour les variétés de dimension n , de produits tensoriels ou de compositions de formes tensorielles (fonctions comprises) de l'un des types suivants : $f_{*,x}$, $e^{2v(x)}$, $\text{grad}_x v$, $\xi \cdot v$ pour $\xi \in T_x$, $g(x)$, $\mathcal{R}(x)$, $\mathcal{R}'(f(x))$, $(f^* \nabla^k W')(x)$, $(\nabla^k W)(x)$, $(f^* \nabla'^k S')(x)$, $(\nabla^k S)(x)$, $(f^* \nabla'^k S'_0)(x)$, $(\nabla^k S_0)(x)$, $(f^* \nabla^k d\mathcal{R})(x)$, $(\nabla^k d\mathcal{R})(x)$, pour $k \leq l$;

(c) si $\xi_1, \dots, \xi_{l+4} \in T_x$, $K'_{l+1}(p)(\xi_1, \dots, \xi_{l+4})$ se calcule à partir de K'_l de la manière suivante : dans $\nabla'_{f_* \xi_1} K'_l(j_1(f, v))(\xi_2, \dots, \xi_{l+4})$, on remplace successivement toute expression du type :

(i) $\nabla'_{f_* \xi_1} (f^* U)(\tilde{\eta}_1, \dots, \tilde{\eta}_r)$ ou $\xi_1 \cdot (f^* U)(\tilde{\eta}_1, \dots, \tilde{\eta}_r)$, suivant que U est une forme sur Y à valeurs vectorielles ou scalaires, par

$$(f^* \nabla' U)(\xi_1, \eta_1, \dots, \eta_r) + \sum_{j=1}^r U(f_* \eta_1, \dots, f_* \eta_{j-1}, f_* \nabla_{\xi_1} \tilde{\eta}_j + (\xi_1 \cdot v) \eta_j + (\eta_j \cdot v) \xi_1 - g(\xi_1, \eta_j) f_* \text{grad}_x v, f_* \eta_{j+1}, \dots, f_* \eta_r),$$

pour $\eta_1, \dots, \eta_r \in T_x$,

(ii) $\nabla'_{f_* \xi_1} f_* \eta$, avec $\eta \in T_x$, par

$$f_* \nabla_{\xi_1} \eta + (\xi_1 \cdot v) \eta(x) + (\eta \cdot v)(x) \xi_1 - g(\xi_1, \eta(x)) f_* \text{grad}_x v,$$

(iii) $\xi_1 \cdot \eta \cdot v$, avec $\eta \in T_x$, par

$$(\nabla_{\xi_1} \eta) \cdot v + (\xi_1 \cdot v)(\eta \cdot v)(x) + \frac{1}{n-2} \times \left\{ (S - f^* S')(\xi_1, \eta(x)) + \left(\frac{1}{2(n-1)} (e^{2v} \mathcal{R}' \circ f - \mathcal{R}) - \frac{n-2}{2} \|\text{grad } v\|^2 \right)(x) g(\xi_1, \eta(x)) \right\},$$

et

(iv) $f_* \nabla_{\xi_1} \text{grad } v$ par

$$(\xi_1 \cdot v) f_* \text{grad}_x v + \frac{1}{n-2} \times \left\{ (f_* S_0 - e^{2v(x)} f^* S'_0)(\xi_1) + \left(\frac{1}{2(n-1)} (e^{2v} \mathcal{R}' \circ f - \mathcal{R}) - \frac{n-2}{2} \|\text{grad } v\|^2 \right)(x) f_* \xi_1 \right\};$$

on note $\tilde{K}'_{l+1}(p)(\xi_1, \dots, \xi_{l+4})$ l'expression ainsi obtenue et $K'_{l+1}(p)$ est défini par

$$(4.11) \quad K'_{l+1}(p)(\xi_1, \dots, \xi_{l+4}) = \tilde{K}_{l+1}(p)(\xi_1, \dots, \xi_{l+4}) - \sum_{j=2}^{l+4} K'_l(p)(\xi_2, \dots, \xi_{j-1}, \nabla_{\xi_1} \xi_j, \xi_{j+1}, \dots, \xi_{l+4}).$$

Démonstration. — L'existence et l'unicité sont évidentes, comme dans la proposition 3.1. Comme on passe de K'_l à K'_{l+1} en utilisant uniquement les égalités qui définissent l'équation P_2 et que $\pi_1 : P_2 \rightarrow Q_1$ est bijectif, K'_{l+1} est bien défini par (4.11).

On vérifie alors par un calcul en tous points similaire à celui développé dans la proposition 3.2, que le diagramme

$$(4.12) \quad \begin{array}{ccc} P_{l+2} & \xrightarrow{K'_l} & S' T^* \otimes \Lambda^2 T^* \otimes T^* \otimes_{F'} T_Y \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow i \\ Q_1 & \xrightarrow{K'_l} & \otimes^l T^* \otimes \Lambda^2 T^* \otimes T^* \otimes_{F'} T_Y \end{array}$$

est commutatif pour $l \geq 0$.

Le morphisme $K'_l : Q_1 \rightarrow \otimes^l T^* \otimes \Lambda^2 T^* \otimes T^* \otimes_{F'} T_Y$ est appelé *courbure conforme d'ordre l* associée au couple de métriques (g, g') . Si $p = j_1(f, v)(x) \in Q_1$, avec f difféomorphisme local de X dans Y défini au voisinage de $x \in X$, et $v \in C^\infty(X)$, la courbure conforme d'ordre 0 est donc donnée par

$$K'_0(p) = (f^* W' - f_* W)(x)$$

et on vérifie facilement que la courbure conforme d'ordre 1 est donnée par

$$(4.13) \quad \begin{aligned} K'_1(p)(\xi, \eta, \zeta, \lambda) = & (f^* \nabla' W' - f_* \nabla W)(\xi, \eta, \zeta, \lambda) + 3(\xi \cdot v)(f^* W')(\eta, \zeta, \lambda) \\ & + (\eta \cdot v)(f^* W')(\xi, \zeta, \lambda) + (\zeta \cdot v)(f^* W')(\eta, \xi, \lambda) \\ & + (\lambda \cdot v)(f^* W')(\eta, \zeta, \xi) - g(\xi, \eta)(f^* W')(\text{grad}_x v, \zeta, \lambda) \\ & - g(\xi, \zeta)(f^* W')(\eta, \text{grad}_x v, \lambda) - g(\xi, \lambda)(f^* W')(\eta, \zeta, \text{grad}_x v) \\ & - (\xi \cdot v) f_* W(\eta, \zeta, \lambda) - (W(\eta, \zeta, \lambda) \cdot v) f_* \xi + g(\xi, W(\eta, \zeta, \lambda)) f_* \text{grad}_x v, \end{aligned}$$

pour tous $\xi, \eta, \zeta, \lambda \in T_x$. Ici aussi, plus généralement, $K'_l(p)$ est de la forme $(f^* \nabla'^l W' - f_* \nabla^l W)(x)$ plus des termes faisant intervenir les dérivées covariantes d'ordre au plus $l-1$ des tenseurs de Weyl, d'ordre au plus $l-2$ des tenseurs de Ricci, et le $(l-3)$ -jet des courbes scalaires.

Si $p = j_2(f, v)(x) \in P_2$, avec f difféomorphisme local de X dans Y défini au voisinage de $x \in X$ et $v \in C^\infty(X)$, on a (cf. [13] ou [15]) :

$$(4.14) \quad \begin{aligned} \overline{K}'_0(p)(\xi, \eta, \zeta) = & -W(\xi, \eta, \zeta) \cdot v + \frac{1}{n-2} [(f^* \nabla' S' - \nabla S)(\xi, \eta, \zeta) \\ & - (f^* \nabla' S' - \nabla S)(\eta, \xi, \zeta)] - \frac{1}{2(n-1)(n-2)} [(e^{2v(x)} \xi \cdot \mathcal{R}' \circ f - \xi \cdot \mathcal{R}) g(\eta, \zeta) \\ & - (e^{2v(x)} \eta \cdot \mathcal{R}' \circ f - \eta \cdot \mathcal{R}) g(\xi, \zeta)], \end{aligned}$$

pour tous $\xi, \eta, \zeta \in T_x$.

On définit $\tilde{W} \in C^\infty(\Lambda^2 T^* \otimes T^*)$ par

$$\tilde{W}(\xi, \eta, \zeta) = \text{Trace}(\lambda \mapsto (\nabla W)(\lambda, \xi, \eta, \zeta))$$

pour $\lambda, \xi, \eta, \zeta \in T$. On définit de même $\tilde{W}' \in C^\infty(\Lambda^2 T_Y^* \otimes T_Y^*)$. On a, par un calcul classique (cf. [13] ou [15]),

$$\tilde{W}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{n-3}{n-2} \left\{ (\nabla S)(\xi, \eta, \zeta) - (\nabla S)(\eta, \xi, \zeta) + \frac{1}{2(n-1)} (g(\xi, \zeta) \eta \cdot \mathcal{R} - g(\eta, \zeta) \xi \cdot \mathcal{R}) \right\},$$

pour $\xi, \eta, \zeta \in T$. Par conséquent, en multipliant les deux membres de (4.14) par $n-3$, on obtient

$$(4.15) \quad (n-3) \bar{K}_0''(p) = (f^* \tilde{W}' - \tilde{W})(x) - (n-3) dv \circ W(x),$$

si $p = j_2(f, v)(x) \in P_2$, avec f difféomorphisme local de X dans Y défini au voisinage de $x \in X$ et $v \in C^\infty(X)$.

Partant de $K_0'' : Q_1 \rightarrow \Lambda^2 T^* \otimes T^*$ défini en disant que, pour $\xi, \eta, \zeta \in T_x$, $K_0''(p)(\xi, \eta, \zeta)$ est le second membre de (4.14) si $p = j_1(f, v)(x) \in Q_1$, avec f difféomorphisme local de X dans Y défini au voisinage de $x \in X$ et $v \in C^\infty(X)$, on construit canoniquement, grâce à la proposition 4.1, une suite de morphismes $(K_l' : Q_1 \rightarrow \otimes^l T^* \otimes \Lambda^2 T^* \otimes T^*)_{l \geq 0}$ de fibrés sur X . Le diagramme

$$(4.16) \quad \begin{array}{ccc} P_{l+2} & \xrightarrow{K_l''} & S^l T^* \otimes \Lambda^2 T^* \otimes T^* \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow i \\ Q_1 & \xrightarrow{K_l'} & \otimes^l T^* \otimes \Lambda^2 T^* \otimes T^* \end{array}$$

est alors commutatif pour $l \geq 0$.

Comme au paragraphe 3, on construit, pour $l \geq 0$, un morphisme encore noté c_l , de fibrés sur $\pi : Q_1 \rightarrow X$ de $\otimes^{l+1} T^* \otimes \Lambda^2 T^* \otimes T^* \otimes_{Q_1} T_Y$ dans $\otimes^l T^* \otimes \Lambda^2 T^* \otimes T^*$. A partir de (4.13), en remarquant qu'on a

$$\text{Trace}(s \rightarrow W'(s, t, u)) = \text{Trace}(t \rightarrow W'(s, t, u)) = \text{Trace}(u \rightarrow W'(s, t, u)) = 0,$$

pour $s, t, u \in T_Y$ (cf. [3]), et en considérant K_1' comme une section de $T^* \otimes \Lambda^2 T^* \otimes T^* \otimes_{Q_1} T_Y$, on obtient

$$(4.17) \quad c_0 \circ K_1'(p) = (f^* \tilde{W}' - \tilde{W})(x) - (n-3) dv \circ W(x) + 3 dv \circ (f_*^{-1} K_0'(p)),$$

d'où, avec (4.15),

$$(4.18) \quad (c_0 \circ K_1' - (n-3) K_0'')(p) = 3 dv \circ (f_*^{-1} K_0'(p)),$$

où $p = j_1(f, v)(x) \in Q_1$, avec f difféomorphisme local de X dans Y défini au voisinage de x et $v \in C^\infty(X)$. La formule (4.18) est l'analogue de la formule (3.19) du cas projectif.

On note $\mathcal{C}$ le sous-fibré à fibre variable de Q_1 des jets annulés par toutes les courbures conformes. Si $\lambda_m : Q_{m+1} \rightarrow J_m(Q_1)$ est l'inclusion naturelle pour $m \geq 0$, on a la :

PROPOSITION 4.2. — *En considérant, pour $l \geq 0$, K'_{l+1} comme une section de $\otimes^{l+1} T^* \otimes \Lambda^2 T^* \otimes T^* \otimes_{Q_l} T_Y$ sur Q_1 , on a*

$$J_m(c_l \circ K'_{l+1} - (n-3) K'_l)(\lambda_m(q)) = 0$$

pour $m \geq 0$, si $q \in \pi_{m+1}(P_{l+m+2})$ et $\pi_1(q) \in \mathcal{C}$.

Démonstration. — Notons pour commencer, qu'avec les K'_l et K'_l , on a des formules tout à fait analogues aux formules (3.13) et (3.17) du cas projectif. Par un calcul similaire à celui fait dans le lemme 3.3, la proposition, pour $l=0$, découle de (4.18). La proposition se démontre alors par récurrence sur l d'une manière semblable à celle donnée dans la preuve de la proposition 3.3.

Comme au paragraphe 3, nous utiliserons seulement la proposition 4.2 avec $m=0$, c'est-à-dire l'égalité $c_l \circ K'_{l+1} = (n-3) K'_l$ sur $\pi_1(P_{l+2}) \cap \mathcal{C}$.

On a alors le :

THÉORÈME 4.1. — *Si $n \geq 4$, alors toute solution formelle $p \in P_2$, telle que $\pi_1(p) \in \mathcal{C}$, est fortement prolongeable.*

Démonstration. — Soit $q \in P_{l+2}$, avec $l \geq 0$, une solution formelle telle que $\pi_2(q) = p$. Utilisant la commutativité des diagrammes (4.12) et (4.16), on a $\bar{K}'_l(q) = K'_l(\pi_1(p)) = 0$ et $\bar{K}''_l(q) = K''_l(\pi_1(p))$. La proposition 4.2, avec $m=0$, nous dit alors que

$$K''_l(\pi_1(p)) = \frac{1}{n-3} c_l \circ K'_{l+1}(\pi_1(p)) = 0.$$

Enfin l'exactitude de (4.8) nous donne l'existence d'une solution formelle $q' \in P_{l+3}$ telle que $\pi_{l+2}(q') = q$.

Dans le cas analytique, grâce au théorème 4.2 de [11], appendice, on a le :

THÉORÈME 4.2. — *Supposons que (X, g) et (Y, g') soient des variétés riemanniennes analytiques de même dimension $n \geq 4$: s'il existe $p \in P_2$ avec $\pi_1(p) \in \mathcal{C}$, alors il existe une et une seule transformation conforme analytique $f : X \rightarrow Y$, définie au voisinage de $x = \pi(p)$ et telle que $j_2(f)(x) = v_2 p$.*

L'unicité dans le théorème 4.2 provient du fait que si $p \in P_2$ avec $\pi_1(p) \in \mathcal{C}$, alors il existe une et une seule solution formelle $q \in P_{\infty, x}$ telle que $\pi_2(q) = p$.

Si $W=0$ et $W'=0$, alors $\mathcal{C} = Q_1$ et on retrouve encore un théorème bien connu de Weyl.

L'analogue du théorème 4.1, pour les variétés de dimension 3, est le :

THÉORÈME 4.3. — *Si $\dim X = \dim Y = 3$, toute solution formelle p de P_2 telle que $K'_l(\pi_1(p)) = 0$, pour tout $l \geq 0$, est fortement prolongeable.*

Démonstration. — Dans cette situation, les tenseurs de Weyl W et W' sont identiquement nuls. Donc si $q \in P_{l+2}$ prolonge p , on a $\bar{K}'_l(q) = 0$. On a, par ailleurs, $\bar{K}''_l(q) = K''_l(\pi_1(p)) = 0$, donc l'exactitude de (4.8) nous donne l'existence de $q' \in P_{l+3}$ tel que $\pi_{l+2}(q') = q$.

Bien entendu, dans le cas analytique, un jet p , satisfaisant les hypothèses du théorème 4.3, donnera naissance à un germe de transformation conforme.

Si $\dim X = 3$, on définit $\tilde{S} \in C^\infty(\Lambda^2 T^* \otimes T^*)$ par

$$\tilde{S}(\xi, \eta, \zeta) = (\nabla S)(\eta, \xi, \zeta) - (\nabla S)(\xi, \eta, \zeta) + \frac{1}{4} \{ (\xi \cdot \mathcal{R})g(\eta, \zeta) - (\eta \cdot \mathcal{R})g(\xi, \zeta) \}.$$

On définit de manière analogue $\tilde{S}' \in C^\infty(\Lambda^2 T_V^* \otimes T_V^*)$ et si $p = j_{l+2}(f, v)(x) \in P_{l+2}$, on voit facilement, en utilisant les résultats du paragraphe 0, que

$$K_l''(p)(\xi_1, \dots, \xi_{l+2}) = \nabla_{\xi_1} \cdot \nabla_{\xi_2} \cdot \dots \cdot \nabla_{\xi_l} (f^* \tilde{S}' - \tilde{S})(\tilde{\xi}_{l+1}, \tilde{\xi}_{l+2})$$

pour tous $\xi_1, \dots, \xi_{l+2} \in T_x$. Ainsi $\tilde{S}$ joue pour la géométrie conforme des variétés de dimension 3 le rôle du tenseur de Weyl en dimension supérieure ou égale à 4. Ce tenseur a été introduit pour la première fois par Schouten dans [13].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BERGER-GAUDUCHON-MAZET, *Le spectre d'une variété riemannienne* (Lecture Notes in Math., n° 194, Springer-Verlag, Berlin, 1971).
- [2] E. CARTAN, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, Gauthier-Villars, Paris, 1928; 2^e édition 1946.
- [3] L. P. EISENHART, *Non-Riemannian Geometry* (Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, vol. VIII).
- [4] J. GASQUI, *Sur l'existence d'immersions isométriques locales pour les variétés riemanniennes* (J. Diff. Geom., vol. 10, 1975, p. 61-84).
- [5] H. GOLDSCHMIDT, *Existence Theorems for Analytic Linear Partial Differential Equations* (Ann. of Math., vol. 86, 1967, p. 246-270).
- [6] H. GOLDSCHMIDT, *Integrability Criteria for Systems of Non-Linear Partial Differential Equations* (J. Diff. Geom., vol. 1, 1967, p. 269-307).
- [7] H. GOLDSCHMIDT, *Sur la structure des équations de Lie. I. Le troisième théorème fondamental* (J. Diff. Geom., vol. 6, 1972, p. 357-373).
- [8] S. KOBAYASHI et T. NAGANO, *On Projective Connections* (J. Math. and Mech., vol. 13, 1964, p. 215-235).
- [9] R. S. KULKARNI, *Curvature and Metric* (Ann. of Math., vol. 91, 1970, p. 311-331).
- [10] R. S. KULKARNI, *Curvature Structures and Conformal Transformations* (J. Diff. Geom., vol. 4, 1970, p. 425-451).
- [11] B. MALGRANGE, *Equations de Lie, II.* (J. Diff. Geom., vol. 7, 1972, p. 117-141).
- [12] N. TANAKA, *Projective Connections and Projective Transformations.* (Nagoya Math. J., vol. 12, 1957, p. 1-24).
- [13] J. A. SCHOUTEN, *Über die konforme Abbildung n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten...* (Math. Z., vol. 11, 1921, p. 58-88).
- [14] O. VEBLEN et J. M. THOMAS, *Projective Invariants of Affine Geometry of Paths* (Ann. of Math., vol. 27, 1926, p. 279-296).
- [15] H. WEYL, *Zur Infinitesimalgeometrie; Einordnung der projektiven und der konformen Auffassung* [Göttingen Nachrichten, 1921, p. 99-112 (ou Gesammelte Abhandlungen, vol. II, 1968, p. 195-207, Springer).

(Manuscrit reçu le 26 juin 1978.)

Jacques GASQUI,
Laboratoire de Mathématiques pures,
Institut Fourier
dépendant de l'Université scientifique
et médicale de Grenoble,
associé au C.N.R.S.,
B.P. n° 116,
38402 Saint-Martin-d'Hères.