Annales scientifiques de l'É.N.S.

Henri Skoda

Morphismes surjectifs de fibrés vectoriels semi-positifs

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 11, nº 4 (1978), p. 577-611
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1978_4_11_4_577_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4^e série, t. 11, 1978, p. 577 à 611.

MORPHISMES SURJECTIFS DE FIBRÉS VECTORIELS SEMI-POSITIFS

PAR HENRI SKODA

PLAN

1. Introduction et énoncé des principaux résultats

Cet article reprend et généralise les résultats de l'article [43] sur le même sujet.

Soit $g : E \to Q \to 0$ un morphisme *surjectif* de fibrés vectoriels, holomorphes, de rangs respectifs p et q, au-dessus de la variété analytique complexe X, de dimension n. Il est particulièrement intéressant de connaître des hypothèses simples sur X ou sur E, qui permettent d'assurer que le morphisme induit par g sur les sections holomorphes de E et Q, noté g_* ou encore souvent g (pour simplifier) :

$$H^0(X, E) \to H^0(X, Q),$$

est lui aussi *surjectif*. Soit S le noyau de g; à la suite exacte de fibrés

$$0 \to S \to E \to Q \to 0, \tag{1.1}$$

correspond une suite exacte de cohomologie à valeur dans les faisceaux de germes de sections holomorphes des fibrés

$$0 \to H^0(X, S) \to H^0(X, E) \to H^0(X, Q) \xrightarrow{\delta} H^1(X, S) \to H^1(X, E), \tag{1.2}$$

de sorte qu'une condition nécessaire et suffisante est que l'image de $H^0(X, Q)$ dans $H^1(X, S)$ par l'homomorphisme δ soit nulle.

Une condition suffisante est la nullité du groupe $H^1(X, S)$. Généralement la nullité de $H^1(X, S)$ est assurée soit par une hypothèse de stricte pseudo-convexité de la variété X (théorème B de H. Cartan si X est de Stein [9] ou [10]) soit par une hypothèse de positivité du fibré S (théorème d'annulation de Kodaïra ([27], [28], [29]) si X est compacte).

Dans cet article, on se propose de démontrer (entre autres résultats) un théorème de surjectivité de g_* : $H^0(X, E) \to H^0(X, Q)$, avec une hypothèse de semi-positivité du fibré E et en supposant X kählérienne et faiblement pseudo-convexe. On montrera qu'une partie de $H^1(X, S)$ est nulle, à savoir l'image par δ de $H^0(X, Q)$. Il s'agira donc d'un theorème d'annulation partielle. De plus, le théorème de surjectivité de g_* s'accompagnera d'estimations L^2 précises pour la solution, permettant de contrôler le comportement de la solution. Ces estimations L^2 présentent un intérêt évident pour l'analyse complexe lorsqu'on veut travailler dans des espaces de sections, vérifiant des conditions de croissance (*cf.* par exemple M. Cornalba et P. A. Griffiths [12], H. Skoda ([41], [42])), mais elles présentent également un intérêt géométrique en permettant d'obtenir des résultats lorsque le morphisme g dégénère.

Rappelons et précisons d'abors quelques définitions :
la variété X est dite faiblement pseudo-convexe (faiblement 1-complète dans la terminologie de S. Nakano [34], faiblement 0-complète dans celle de D. Barlet [5], $\mathscr{C}^2$-pseudo-convexe dans celle de A. Hirschowitz [20]) s'il existe une fonction de classe C^2, plurisousharmonique et exhaustive sur X. Les variétés compactes et les variétés de Stein sont faiblement pseudo-convexes.

Les variétés 1-convexes (au sens d'Andreotti-Grauert [1]), les variétés holomorphiquement convexes sont faiblement pseudo-convexes. D'autres exemples de variétés faiblement pseudo-convexes figurent dans H. Grauert ([16] [17]). Les groupes de Lie complexes, abéliens sont faiblement pseudo-convexes (*cf.* Morimoto ([31] et [32]) et Kazawa [26]). On supposera toujours la variété X *kählérienne* et on désignera par ω sa forme de Kähler. En revanche, *on ne supposera pas la métrique* ω *complète*, bien qu'on puisse toujours d'après Nakano [34] munir la variété X d'une métrique kählérienne complète. Il est en effet intéressant dans les estimations qui font intervenir la courbure de Ricci de ω de pouvoir choisir ω non complète. De plus, cela nous permettra de traiter aisément le cas où g dégénère, par un argument de prolongement. Dans [43], nous avions déjà généralisé les estimations L^2 d'Hörmander pour l'opérateur $\bar{\partial}$ dans ce cadre (le cas d'une métrique complète étant classique d'après [2] et [21]).

Nous renvoyons à [13] pour les définitions relatives à la connection canonique et à la forme de courbure d'un fibré (brièvement rappelées également au début du paragraphe 2). Nous noterons $c(E)$, ou c_E la forme de courbure de E, c'est une (1.1) forme à valeur dans le fibré Hom (E, E). On vérifie (*cf.* [13] et [19]) que $ic(E)$ est une (1.1) forme réelle à valeurs dans les opérateurs hermitiens, c'est-à-dire une section $\mathscr{C}^\infty$ du faisceau $\mathscr{C}_{1,1\mathbf{R}} \otimes_{\mathscr{C}^\infty_{\mathbf{R}}} \mathrm{Herm}(E, E)$ (l'indice **R** indiquant que les formes et fonctions considérées sont réelles). Les éléments de $\mathscr{C}^\infty_{1,1\mathbf{R}}$ s'identifiant à des formes hermitiennes sur l'espace tangent T et Herm (E, E) s'identifiant à des formes hermitiennes sur E, $ic(E)$ définit une forme hermitienne sur $T \otimes E$. Le fibré hermitien E est dit semi-positif (resp. positif) au sens de Nakano si cette forme hermitienne sur $T \otimes E$ associée à $ic(E)$ est semi-définie positive (resp. définie positive).

Le fibré E est dit semi-positif (resp. positif) au sens de Griffith si la forme hermitienne sur $T \otimes E$ associée à $ic(E)$ est semi-définie positive sur les éléments *décomposables* de $T \otimes E$ (resp. définie positive).

Soit

$$c_E = \sum c_{j,k,\nu,\mu}, \, dz_j \wedge d\bar{z}_k \otimes e_\nu^* \otimes e_\mu, \tag{1.3}$$

l'écriture canonique de c_E, relativement à un système de coordonnées locales et à un champ de repère orthonormé local $\{e_\nu\}$ dans le fibré.

La semi-positivité au sens de Nakano, se traduit alors par

$$\sum c_{j,k,\nu,\mu} \bar{\lambda}_{j\nu} \lambda_{k\mu} \geqq 0, \tag{1.4}$$

pour tout $\lambda_{j\nu} \in \mathbf{C}$ $(1 \leqq j, \ k \leqq n, \ 1 \leqq \nu, \mu \leqq p)$.

La semi-positivité au sens de Griffiths par

$$\sum c_{j,k,\nu,\mu} t_j t_k \lambda_\nu \bar{\lambda}_\mu \geqq 0. \tag{1.5}$$

Pour tout t_j et $\lambda_\nu \in \mathbf{C}$.

La positivité au sens de Nakano entraîne donc la positivité au sens de Griffiths, les deux notions coïncidant pour $p = 1$.

Un fibré trivial $\mathbf{C}^p$, le produit tensoriel $M \otimes \mathbf{C}^p$ d'un fibré linéaire semi-positif M par un fibré trivial, le fibré tangent du projectif $P_n(\mathbf{C})$ (*cf.* M. Schneider [38]) sont des exemples de fibrés semi-positifs au sens de Nakano.

D'après P. A. Griffiths [19], le quotient d'un fibré semi-positif au sens de Griffiths, en particulier tout quotient d'un fibré trivial, est semi-positif au sens de Griffiths (la propriété correspondante n'étant pas vraie pour la semi-positivité au sens de Nakano).

D'autre part, d'après Nakano [33] si E est positif (au sens de Nakano) alors $H^q(X, E \otimes K) = 0$ pour $q \geqq 1$, K désignant le fibré canonique de X (i. e. le fibré linéaire dont les sections sont les (n, o) formes holomorphes sur X). Si E est positif au sens de Griffiths, on a seulement d'après le théorème de Le Potier ([25], [40]), $H^q(X, E \otimes K) = 0$ pour $q \geqq p$. Il est donc assez naturel compte tenu de la suite exacte (1.2) de faire une hypothèse de positivité au sens de Nakano sur E. On a alors le résultat suivant, dans lequel dét Q désigne le fibré en droites $\overset{q}{\wedge} Q$, muni de la métrique canonique déduite de celle de Q.

THÉORÈME 1. — *Soit* (X, ω) *une variété de dimension n kählérienne, faiblement pseudo-convexe, soit* K *le fibré canonique de* X. *Soit* $g : E \to Q \to 0$, *un morphisme surjectif de fibrés vectoriels holomorphes, hermitiens, au-dessus de* X, *de rangs respectifs p et q. On suppose* E *semi-positif au sens de Nakano* (*ou seulement semi-positif au sens de Griffiths si* $p-q = 1$).

Soit enfin M *un fibré linéaire tel que*

$$ic(M) - ik\,c(\text{dét}\,Q) \geqq 0,$$

où k *est un nombre réel* $> \inf(n, p-q)$.

Alors le morphisme g_* *induit par* g *sur les sections holomorphes*

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathrm{E} \otimes \mathrm{K} \otimes \mathrm{M}) \to \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathrm{Q} \otimes \mathrm{K} \otimes \mathrm{M}),$$

est surjectif. En particulier pour tout k *entier* $> \inf(n, p-q)$, *le morphisme* g_* :

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathrm{E} \otimes \mathrm{K} \otimes (\text{dét}\,\mathrm{Q})^k) \to \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathrm{Q} \otimes \mathrm{K} \otimes (\text{dét}\,\mathrm{Q})^k),$$

est surjectif.

Si la condition : $ic(\mathrm{M}) - ik\,c(\text{dét}\,\mathrm{Q}) + i\,\mathrm{Ricci}\,\omega \geqq 0$, *est réalisée* [*avec* k *réel* $> \inf(n,p-q)$], *alors le résultat précédent est vrai sans qu'il soit nécessaire de tensoriser par le fibré canonique* K.

Ricci ω désigne la courbure du fibré $\mathrm{K}^{-1} \simeq \overset{n}{\bigwedge} \mathrm{T}$, muni de la métrique canonique déduite de la métrique ω sur le fibré tangent T. La troisième partie du théorème résulte donc trivialement des deux premières parties et de l'isomorphisme métrique $\mathrm{K} \otimes \mathrm{K}^{-1} \simeq \mathbf{C}$ (fibré linéaire trivial).

COROLLAIRE (1.1). — *Soit* $g : \mathrm{E} \to \mathrm{Q} \to 0$ *un morphisme surjectif de fibrés vectoriels hermitiens au-dessus de* X. *On suppose que* E *est le quotient d'un fibré de rang* N, *semi-positif au sens de Nakano. Soit* M *un fibré linéaire tel que :* $ic(\mathrm{M}) - k\,ic(\text{dét}\,\mathrm{Q}) \geqq 0$, *pour un réel* $k > \inf(n, \mathrm{N}-q)$. *Alors le morphisme* g_* :

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathrm{E} \otimes \mathrm{K} \otimes \mathrm{M}) \to \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathrm{Q} \otimes \mathrm{K} \otimes \mathrm{M}),$$

est surjectif. En particulier pour tout entier $k > \inf(n, \mathrm{N}-q)$, *le morphisme* g_* :

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathrm{E} \otimes \mathrm{K} \otimes (\text{dét}\,\mathrm{Q})^k) \to \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathrm{Q} \otimes \mathrm{K} \otimes (\text{dét}\,\mathrm{Q})^k),$$

est surjectif.

Soit en effet $f : \mathrm{F} \to \mathrm{E} \to 0$ un morphisme surjectif du fibré F semi-positif au sens de Nakano sur E. On applique le théorème 1 au morphisme $g \circ f$:

$$\mathrm{F} \to \mathrm{Q} \to 0,$$

d'où le résultat.

Le corollaire (1.1) s'applique en particulier si E est *quotient d'un fibré trivial.* Il s'applique si E est *engendré par ses sections globales.* Il est en effet facile de montrer par un argument de Baire que $n+p$ sections globales (holomorphes) suffisent alors pour engendrer E, E est donc quotient d'un fibré trivial de rang $n+p$.

Par exemple, le *fibré tangent des variétés homogènes* sous l'action d'un groupe de Lie réel est engendré par ses sections globales (*cf.* par exemple [20]).

Le corollaire s'appliquera donc à la plupart des exemples courants de fibrés semi-positifs au sens de Griffiths, ceux-ci étant le plus souvent quotient de fibrés triviaux.

Ce corollaire montre que l'hypothèse de semi-positivité au sens de Nakano dans le théorème 1 est en fait beaucoup moins restrictive dans les applications qu'il aurait pu paraître à première vue, le seul inconvénient du corollaire étant le remplacement de l'entier $\inf(n, p-q)$ par $\inf(n, \mathrm{N}-q)$.

COROLLAIRE (1.2). — X *et* E *vérifiant les hypothèses du théorème* 1, *si de plus* X *est compacte et si* $ic(\mathrm{M})-ik\,c\,\text{dét}\,\mathrm{Q}) \geqq 0$ *pour un* $k > \inf(n, p-q)$, *alors*

$$\dim \mathrm{H}^{\circ}(\mathrm{X}, \mathrm{Q}\otimes\mathrm{K}\otimes\mathrm{M}) \leqq \dim \mathrm{H}^{\circ}(\mathrm{X}, \mathrm{E}\otimes\mathrm{K}\otimes\mathrm{M}).$$

On a en fait un résultat beaucoup plus précis que le théorème 1, valable également lorsque le morphisme g dégénère. Soit Z l'ensemble analytique de X au-dessus duquel g dégénère

$$\mathrm{Z} = \{x\in\mathrm{X} \mid g_{\mid \mathrm{E}_x} \to \mathrm{Q}_x \text{ non surjectif}\}.$$

Afin de pouvoir se ramener aisément au cas où g est surjectif, on est amené à introduire la définition suivante :

DÉFINITION 1. — *Le sous-ensemble analytique* Z *de* X *est dit* X-*négligeable, s'il existe un ensemble fermé, de mesure nulle,* Y, *contenant* Z, *tel que* $\mathrm{X}\setminus\mathrm{Y}$ *soit faiblement pseudo-convexe et tel que* Y *soit un ensemble singulier impropre pour les fonctions holomorphes localement de carré intégrable, c'est-à-dire tel que pout tout* $y\in\mathrm{Y}$, *il existe un voisinage* U *de* y *tel que toute fonction holomorphe et de carré intégrable dans* $\mathrm{U}\setminus\mathrm{Y}$, *se prolonge holomorphiquement à* U.

Dans tous les exemples que nous connaissons, on est amené à prendre pour Y une hypersurface de X, contenant Z, telle que $\mathrm{X}\setminus\mathrm{Y}$ soit faiblement pseudo-convexe.

Si X est projective, Z est toujours X-négligeable (on prend pour Y la trace sur X d'une hypersurface convenable du projectif contenant Z). Si X est de Stein, Z est toujours X-négligeable.

D'autres exemples, liés à la structure particulière de g, figurent dans [43].

On peut d'ailleurs se demander si Z n'est pas toujours X-négligeable, ou si cette restriction est bien nécessaire pour la validité du théorème qui suit, mais de toutes façons c'est manifestement une restriction très faible sur Z.

g^* désigne le transposé de g pour les métriques hermitiennes sue E et Q. $\widetilde{gg^*}$ est le cotransposé de gg^* (i. e. sa matrice est la transposée de la matrice des cofacteurs de gg^*) de sorte que sur $\mathrm{X}\setminus\mathrm{Z}$, on a

$$\widetilde{gg^*} = (\text{dét}\, gg^*)(gg^*)^{-1}.$$

Rappelons que le cotransposé $\tilde{u}$ d'un homomorphisme u d'un espace vectoriel de dimension q est défini par

$$\tilde{u}(x_1)\wedge x_2\wedge\ldots\wedge x_q = x_1\wedge u(x_2)\wedge\ldots\wedge u(x_q),$$

pour tous $x_1, x_2, \ldots x_q$ de l'espace.

On a alors le résultat suivant dans lequel $d\tau = \omega^n/n!$ est l'élément de volume kählérien sur X.

THÉORÈME 2. — *Soit* $g : \mathrm{E}\to\mathrm{Q}$, *un morphisme de fibrés, vectoriels, holomorphes, hermitiens, au-dessus de la variété kählérienne, faiblement pseudo-convexe* X. *Soit* Z *l'ensemble analytique des points* $x\in\mathrm{X}$ *tels que* $g\,|_{\mathrm{E}_x}$ *ne soit pas surjectif sur* Q_x. *On suppose* $\mathrm{Z}\neq\mathrm{X}$, *et* Z *vide ou* X-*négligeable.*

On suppose E *semi-positif au sens de Nakano (ou seulement semi-positif au sens de Griffiths si* $p-q=1$).

Soit enfin M *un fibré linéaire tel que*

$$ic(\mathrm{M})-ik\,c(\det \mathrm{Q}) \geqq 0,$$

pour un certain nombre réel $k > r = \inf(n, p-q)$, *et soit* φ *une fonction de classe* C^2, *plurisousharmonique sur* X.

Alors pour toute $f \in \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathrm{Q} \otimes \mathrm{K} \otimes \mathrm{M})$ *telle que*

$$\int_{\mathrm{X}} (\tilde{g}g^* f \mid f)(\text{dét}\, gg^*)^{-k-1} e^{-\varphi} d\tau < +\infty, \tag{1.6}$$

il existe $h \in \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathrm{E} \otimes \mathrm{K} \otimes \mathrm{M})$ *tel que*

$$\int_{\mathrm{X}} |h|^2 (\text{dét}\, gg^*)^{-k} e^{-\varphi} d\tau \leqq \frac{k}{k-r}\int_{\mathrm{X}} (\tilde{g}g^* f \mid f)(\text{dét}\, gg^*)^{-k-1} e^{-\varphi} d\tau.$$

Remarque 1.1. — Si Q est de rang 1, on a simplement $\tilde{g}g^* = \mathrm{Id}$ et dét gg^* est le rapport de l'homothétie définie par gg^*.

Remarque 1.2. — On a choisi dans l'énoncé du théorème les hypothèses de positivité les plus simples et les plus manipulables.

Si on fait l'hypothèse : $ic(\mathrm{M})-ik\,c(\det \mathrm{Q})+i\,\mathrm{Ricci}\,\omega \geqslant 0$, le théorème 2 est vrai sans tensoriser par le fibré canonique. On peut remplacer l'hypothèse de positivité du théorème 2, par la condition plus générale (mais plus technique et moins manipulable) :

$$ic(\mathrm{E})+(ic(\mathrm{M})-ik\,c(\text{dét}\, \mathrm{Q})+id'\,d''\varphi)\otimes \mathrm{Id}_{\mathrm{E}} \geqq 0,$$

la positivité étant celle de Nakano; E est toujours supposé $\geqq 0$ au sens de Nakano mais φ n'est plus nécessairement supposée plurisousharmonique.

Remarque 1.3. — Si Z est vide, les estimations L^2 signifient en gros que la croissance de h à l'infini dépend de celle de f et de celle de $(\text{dét}\, gg^*)^{-1}$, cette dernière étant directement liée à la surjectivité de g. Si Z est non vide, l'estimation (1.6) impose à $(\tilde{g}g^* f \mid f)$ d'être assez petit au voisinage de Z.

Remarque 1.4. — Par un procédé exhaustif immédiat, le théorème 2 reste vrai lorsque X est réunion croissante d'une suite d'ouverts faiblement pseudo-convexes (et X kählérienne). De même dans la définition 1, il suffit de supposer que $\mathrm{X}\setminus\mathrm{Y}$ est réunion croissante d'ouverts faiblement pseudo-convexes. Les exemples et résultats figurant dans [20] sembleraient montrer qu'une telle extension n'est peut-être pas dénuée d'intérêt. Par des passages à la limite standard, le théorème 2 est encore vrai si φ est une fonction plurisousharmonique sur X, non nécessairement de classe C^2 sur X, mais qui sur tout compact de X est limite simple d'une suite décroissante de fonctions plurisousharmoniques de classe C^2 ou limite uniforme d'une suite de fonctions plurisousharmoniques de classe C^2. Par exemple, si X est un ouvert de $\mathbf{C}^n$, le théorème 2 est vrai pour une fonction φ plurisousharmonique quelconque.

Remarque 1.5. — Les formules classiques de géométrie kählérienne montrent que pour une (n, o) forme h à valeurs complexes, on a

$$|h|^2 d\tau = (h \mid h) d\tau = h \wedge \star \bar{h} = i^n (-1)^{n(n-1)/2} h \wedge \bar{h}.$$

Il en résulte que lorsqu'on tensorise par le fibré canonique les estimations du théorème 2 ne dépendent pas de la métrique ω, mais seulement des métriques sur E et Q.

La métrique ω intervient en revanche si on ne tensorise pas par le fibré canonique, elle intervient alors dans les estimations et à travers la courbure de Ricci de ω.

En choisissant $k = r+1 = \inf(n, p-q)+1$ pour simplifier et en choisissant pour chaque f une fonction φ à croissance assez rapide [pour faire converger (1.6)], on obtient le corollaire suivant (qui est un cas particulier du théorème 1, lorsque $Z = \varnothing$).

COROLLAIRE 1.3. — *Sous les hypothèses générales du théorème* 2, *si*

$$ic(\mathrm{M}) - (r+1)\, ic(\text{dét } \mathrm{Q}) \geqq 0$$

et si $f \in \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathrm{Q} \otimes \mathrm{K} \otimes \mathrm{M})$ *est telle que* $(\widetilde{gg}^* f \mid f)(\text{dét } gg^*)^{-r-2}$ *soit localement bornée sur* X (i. e. f *est petite au voisinage de* Z), *alors il existe* $g \in \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathrm{E} \otimes \mathrm{K} \otimes \mathrm{M})$ *telle que* : $f = g.h$.

Il serait intéressant de pouvoir faire $k = r = \inf(n, p-q)$ dans les théorèmes 1 et 2. Ceci permettrait de changer r en $r-1$ dans le corollaire 1.3. Cette amélioration est réalisée dans le paragraphe 5, mais sous des hypothèses de stricte positivité pour les formes de courbures de $\mathrm{M} \otimes (\text{dét } \mathrm{Q})^{-r}$ et en modifiant l'intégrale (1.6). Il nous paraît peu probable que les théorèmes 1 et 2 soient vrais avec $k = r$, sans hypothèses supplémentaires. Nous obtenons dans le paragraphe 5 la nullité du groupe $\mathrm{H}^1(\mathrm{X}, \mathrm{S} \otimes \mathrm{K} \otimes \mathrm{M})$ tout entier (du moins lorsque $Z = \varnothing$), ce qui est géométriquement plus standard et moins surprenant que la nullité d'une partie du $\mathrm{H}^1(\mathrm{X}, \mathrm{S} \otimes \mathrm{K} \otimes \mathrm{M})$.

Pour les énoncés précis que nous ne reproduisons pas ici pour ne pas alourdir l'exposé, on se reportera au paragraphe 5.

Nous terminons en rappelant des résultats de [41], [42], [43], [7] qui sont des cas particuliers du théorème 2, qui ont motivé initialement ces recherches et qui prouvent que même localement, le théorème 2 est non trivial lorsque $Z \neq \varnothing$.

En prenant pour E le fibré trivial $\mathbf{C}^p$, pour Q un fibré linéaire N et pour g le morphisme défini par p sections holomorphes $g_1, g_2, \ldots, g_p$ de N :

$$(h_1, \ldots, h_p) \mapsto \sum_{j=1}^{p} g_j h_j = gh,$$
$$\mathbf{C}^p \times \mathrm{X} \to \mathrm{N},$$

on obtient le théorème 1 de [43], où l'on pose

$$|g|^2 = \sum_{j=1}^{p} |g_j|^2.$$

COROLLAIRE 1.4. — *Soit* $g_1, g_2, \ldots, g_p$ *des sections holomorphes du fibré linéaire* N *sur la variété kählérienne, faiblement pseudo-convexe* X, *telles que l'ensemble* Z *des zéros communs aux* g_j *soit vide ou* X-*négligeable.*

Soit M *un fibré linéaire tel que* $ic(\mathrm{M}) - k\, ic(\mathrm{N}) \geqq 0$, *pour un* $k > r = \mathrm{Inf}(n, p-1)$, *et soit* φ *une fonction plurisousharmonique sur* X, *alors pour toute* $f \in \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathrm{K} \otimes \mathrm{M} \otimes \mathrm{N})$ *telle que*

$$\int_{\mathrm{X}} |f|^2 |g|^{-2k-2} e^{-\varphi} d\tau < +\infty.$$

il existe $h_1, h_2, \ldots, h_p \in \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathrm{K} \otimes \mathrm{M})$ *telles que*

$$f = gh,$$

$$\int_{\mathrm{X}} |h|^2 |g|^{-2k} e^{-\varphi} d\tau \leqq \frac{k}{k-r} \int_{\mathrm{X}} |f|^2 |g|^{-2k-2} e^{-\varphi} d\tau.$$

Si le fibré N est $\geqq 0$, Z est négligeable car il suffit de prendre pour Y dans la définition 1, l'une des hypersurfaces $\{ g_j(x) = 0 \}$ ($\mathrm{Log}\, 1/|g_j|^2$ est alors plurisousharmonique).

COROLLAIRE 1.5. — *Si les sections* $g_1, g_2, \ldots, g_p$ *de* N *sur* X *n'ont pas de zéros communs, l'homomorphisme :*

$$[\mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathrm{K} \otimes \mathrm{M})]^{\oplus p} \to \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathrm{K} \otimes \mathrm{M} \otimes \mathrm{N}),$$

$$(h_1, \ldots, g_p) \mapsto \sum_{j=1}^{p} g_j h_j,$$

est surjectif pourvu que $ic(\mathrm{M}) - k\, ic(\mathrm{N}) \geqq 0$ *pour un* $k > \mathrm{Inf}(n, p-1)$. *Il est en particulier surjectif lorsque* $\mathrm{M} \otimes \mathrm{N}^{-k} \geqq 0$ *ou lorsque* $\mathrm{M} = \mathrm{N}^k$, *pour un entier* $k > \mathrm{Inf}(n, p-1)$.

On obtient en particulier, lorsque X *est compacte, et que* N *est engendré par ses sections globales, l'inégalité :*

$$\dim \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathrm{K} \otimes \mathrm{M} \otimes \mathrm{N}) \leqq \dim \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathrm{K} \otimes \mathrm{M}) . \dim \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathrm{N})$$

pourvu que $ic(\mathrm{M}) - ikc(\mathrm{N}) \geqq 0$, *pour un nombre* $k > \mathrm{Inf}(n, p-1)$ *avec* $p = \dim \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathrm{N})$,

Le dernier résultat du corollaire se déduit du premier en prenant pour $g_1, g_2, \ldots, g_p$ une base de $\mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathrm{N})$.

Pour $\mathrm{M} = \mathrm{N}^k$, on obtient la majoration

$$\dim \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathrm{K} \otimes \mathrm{N}^{k+1}) \leqq \dim \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathrm{K} \otimes \mathrm{N}^k) \dim \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathrm{N}), \tag{1.7}$$

pour tout $k \geqq \mathrm{Inf}(n+1, \dim \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathrm{N}))$.

Si N est de plus > 0 en un point de X (et X connexe), les théorèmes d'annulation de H. Grauert et O. Riemenschneider [18] et [37] montrent que $\dim \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathrm{K} \otimes \mathrm{N}^k)$ n'est autre que la caractérisation d'Euler-Poincaré $\chi(\mathrm{K} \otimes \mathrm{N}^k)$ de $\mathrm{K} \otimes \mathrm{N}^k$. L'inégalité (1.7) s'interprète alors comme une propriété du polynôme de Hilbert de N. On remarquera que d'après [37], X est dans ce cas projective.

Lorsque N est le fibré trivial **C** et que *Ricci* ω *est* $\geqq 0$ sur X on peut choisir M = **C** et on obtient un théorème concernant l'idéal de $\mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathbf{C})$ engendré par $g_1, g_2, \ldots, g_p$.

Ce théorème avait été utilisé par l'auteur dans [41] et [42] pour étudier les idéaux d'une algèbre de fonctions holomorphes avec poids sur un ouvert pseudo-convexe de $\mathbf{C}^n$. Les théorèmes obtenus alors dans cet article [41] se généralisent sans difficulté compte tenu du corollaire 1.5 au cas d'une variété kählérienne, faiblement pseudo convexe.

On peut les généraliser soit en supposant Ricci $\omega \geqq 0$ et en considérant des idéaux de type fini comme dans [41], soit plutôt en remplaçant les fonctions holomorphes par des sections de fibrés linéaires convenables et en faisant des hypothèses naturelles sur les formes de courbure, comme dans les corollaires 1.4 et 1.5 du présent article.

Rappelons que J. J. Kelleher et B. A. Taylor [24], J.-P. Ferrier [14], L. Hörmander [23], I. Cnop [11] avaient également par d'autres méthodes étudié les idéaux dans les algèbres de fonctions holomorphes avec poids sur les ouverts de $\mathbf{C}^n$ (les deux premiers avaient également donné des résultats pour les modules, correspondant à des cas très particuliers du théorème 2).

On remarquera que le corollaire 1.4, appliqué sur un ouvert pseudo-convexe X de $\mathbf{C}^n$, à l'idéal engendré par les fonctions coordonnées (z_j-a_j) où $a \notin \mathrm{X}$ permet de redémontrer qu'un ouvert pseudo-convexe est d'holomorphie

$$\left(\text{on a : } 1=\sum_{j=1}^{n} h_j(z_j-a_j) \text{ sur } \Omega\right).$$

Ce fait avait été remarqué et utilisé par P. Pflug [35] et [36] pour montrer qu'un ouvert pseudo-convexe borné est domaine d'existence d'une fonction holomorphe croissant moins vite $[d(z)]^{-n-\varepsilon}$ où $d(z)$ est la distance au bord de X et $\varepsilon > 0$ est donné.

Le corollaire 1.4 avait également été utilisé par J. Briançon et l'auteur pour étudier les idéaux de l'anneau $\mathcal{O}_{\mathbf{C}^n}$ de germes de fonctions holomorphes, dans [7] et [8], prouvant ainsi que lorsque $Z \neq \emptyset$ les résultats du théorème 2 et des corollaires 1.3 et 1.4 sont déjà localement non triviaux. Nous avions en particulier démontré que si f est un germe de fonctions holomorphes en 0 dans $\mathbf{C}^n$, alors f^n est dans l'idéal jacobien engendré par $(\partial f/\partial z_1, \partial f/\partial z_2, \ldots, \partial f/\partial z_n)$ dans $\mathcal{O}_{\mathbf{C}^n}$ ce qui est en fait un problème de singularités locales de fonctions holomorphes (posé par J. Mather), problème à notre connaissance, toujours non résolu par les méthodes d'algèbre locale pour $n > 2$.

Les idées fondamentales menant à la démonstration des théorèmes 1 et 2 sont les mêmes que dans [41] et [43], et nous aurions pu adopter le même point de vue, mais afin d'éviter une certaine monotonie entre ces différents articles, nous avons adopté ici un mode d'exposition un peu différent, inspiré de P. A. Griffiths [19]. Les démonstrations reposent sur le fait qu'il existe une relation précise entre la courbure de S, la courbure de Q et l'obstruction au scindage holomorphe de la suite exacte (1.1), Q étant muni de la métrique quotient de celle de E.

Cette relation s'exprime, en fonction de la seconde forme fondamentale associée à la suite exacte (1.1).

Une étude précise des courbures, montre que S tensorisé par une puissance convenable du fibré dét Q, devient un fibré semi-positif au sens de Nakano. Une estimation précise de cette semi-positivité montre que cette dernière est suffisante pour annuler les classes de cohomologie de $\mathrm{H}^1(\mathrm{X}, \mathrm{Ker}\, \mathrm{S})$ intervenant dans le problème.

L'article est divisé de la façon suivante : dans le paragraphe 2, nous étudions les propriétés du scindage C^∞ de la suite exacte (1.1); dans le paragraphe 3, nous étudions la positivité des formes de courbure et démontrons une estimation *a priori* du type Andreotti-Bochner-Kodaïra-Kohn-Hörmander-Nakano; dans le paragraphe 4, nous démontrons le théorème 2 par la méthode de L. Hörmander [21]; enfin dans le dernier paragraphe 5, nous étudions une variante du théorème 2, obtenue lorsque $k = r$, avec des hypothèses de stricte positivité et nous terminons en étudiant les liens avec certains théorèmes d'annulation de P. A. Griffiths [19] et de J.-P. Serre [38].

2. Rappels et préliminaires : scindage hermitien

On désigne par $\mathscr{C}^k_{p,q}(\mathrm{X}, \mathrm{E})$, resp. $\mathscr{D}^k_{p,q}(\mathrm{X}, \mathrm{E})$, les formes différentielles (resp. les formes différentielles à support compact dans X), de classe C^k, de bidegré (p, q), à valeurs dans le fibré E.

On considère la suite exacte de fibrés holomorphes au-dessus de X :

$$(2.1) \qquad 0 \to \mathrm{S} \to \mathrm{E} \xrightarrow{g} \mathrm{Q} \to 0.$$

On désigne par r, p, q les rangs respectifs des fibrés S, E, Q. (On a bien sûr $r = p-q$).

On suppose E muni d'une métrique hermitienne.

La décomposition orthogonale de E en $\operatorname{Ker} g \oplus \operatorname{Ker} g^{\perp}$, permet d'identifier Q en tant que fibré C^{∞} au sous-fibré de classe C^{∞} $(\operatorname{Ker} g)^{\perp}$ de E, de sorte qu'on a un scindage C^{∞} de la suite exacte

$$\mathrm{E} \simeq \mathrm{S} \oplus \mathrm{Q}.$$

On munit les fibrés S et Q de la métrique hermitienne induite par celle de E. La métrique ainsi obtenue sur Q est appelée métrique quotient.

On rappelle les résultats fondamentaux relatifs à un tel scindage C^{∞}, en renvoyant à l'article de P. A. Griffiths [19] pour les démonstrations.

Soit D la connexion canonique hermitienne et holomorphe sur E. D se décompose suivant le scindage C^{∞}, $\mathrm{E} = \mathrm{S} \oplus \mathrm{Q}$ de la manière suivante :

$$(2.2) \qquad \mathrm{D} = \begin{pmatrix} \mathrm{D_S} & -\beta^* \\ \beta & \mathrm{D_Q} \end{pmatrix},$$

où $\mathrm{D_S}$ et $\mathrm{D_Q}$ sont respectivement les connexions canoniques (hermitiennes et holomorphes) sur S et Q, où $\beta \in \mathscr{C}^{\infty}_{1,0}(\mathrm{X}, \operatorname{Hom}(\mathrm{S}, \mathrm{Q}))$ et $\beta^* \in \mathscr{C}^{\infty}_{0,1}(\mathrm{X}, \operatorname{Hom}(\mathrm{Q}, \mathrm{S}))$ (le symbole * désignant l'adjoint d'un opérateur de S dans Q).

Si s et t sont respectivement des sections des fibrés S et Q, au-dessus d'un ouvert U de X, on a donc

$$\mathrm{D}(s+t) = \mathrm{D_S}\, s - \beta^* t + \beta s + \mathrm{D_Q}\, t.$$

On étend les connexions D, $\mathrm{D_S}$, $\mathrm{D_Q}$ aux formes différentielles extérieures à valeurs dans les fibrés, de sorte que

$$\mathrm{D}(\varphi s) = d\varphi\, s + (-1)^{\deg \varphi} \varphi \wedge \mathrm{D}\, s,$$

si φ est une forme différentielle à valeurs complexes et s une section du fibré.

La forme de courbure $c(\mathrm{E})$ ou c_{E} du fibré E est alors définie par la propriété suivante :

$$\mathrm{D}^2 s = c(\mathrm{E}).s, \tag{2.3}$$

si s est une section C^∞ locale de E, de sorte que c_{E} est une forme de degré 2 à valeur dans Hom (E, E).

De (2.2), on déduit aussitôt que

$$\mathrm{D}^2 = \begin{pmatrix} \mathrm{D}_{\mathrm{S}}^2 - \beta^* \wedge \beta & -\mathrm{D}(\beta^*) \\ \mathrm{D}(\beta) & \mathrm{D}_{\mathrm{Q}}^2 - \beta \wedge \beta^* \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

où $\mathrm{D}(\beta)$ désigne la dérivée de β par rapport à la connexion sur Hom (S, Q), associée aux connexions D_{S} et D_{Q}, c'est-à-dire définie par

$$\mathrm{D}_{\mathrm{Q}}(hs) = (\mathrm{D}\,h).s + h.\mathrm{D}_{\mathrm{S}}\,s,$$

si h et s sont respectivement des sections C^∞ locales de Hom (S, Q) et S.

On vérifie de plus que β est de type (1, 0) et telle que

$$\mathrm{D}'(\beta) = 0 \quad \text{et que} \quad \mathrm{D}(\beta^*) = (\mathrm{D}\,\beta)^*.$$

On en déduit que $d''(\beta^*) = 0$.

Il est classique que la classe de cohomologie dans $\mathrm{H}^1(\mathrm{X}, \mathrm{Hom}(\mathrm{Q}, \mathrm{S}))$ définie par $-\beta^*$ est précisément l'obstruction au scindage holomorphe de la suite exacte (2.1).

Soit en effet $j \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{X}, \mathrm{Hom}(\mathrm{Q}, \mathrm{E}))$ l'injection canonique de Q dans E et t une section locale C^∞ de Q, on a d'après (2.2) :

$$\begin{cases} \mathrm{D}_{\mathrm{E}}''(jt) = -\beta^* t + \mathrm{D}_{\mathrm{Q}}'' t, \\ \mathrm{D}_{\mathrm{E}}''(jt) = (\mathrm{D}''j)t + j\mathrm{D}_{\mathrm{Q}}'' t, \end{cases} \tag{2.5}$$

où dans la seconde égalité, la dérivée $\mathrm{D}''j$ est relative à la connexion sur Hom (Q, E), déduite de D_{E} et D_{Q}. On obtient donc :

$$\mathrm{D}''j = -\beta^*.$$

S'il existe une solution $\alpha \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{X}, \mathrm{Hom}(\mathrm{Q}, \mathrm{S}))$ de l'équation :

$$\mathrm{D}''\alpha = -\beta^*,$$

$j - \alpha \in \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathrm{Hom}(\mathrm{Q}, \mathrm{E}))$ est holomorphe et telle que

$$g(j-\alpha) = \mathrm{Id}_{\mathrm{Q}},$$

c'est-à-dire que $j-\alpha$ réalise le scindage holomorphe de (2.1).

Soit maintenant $f \in \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathrm{Q})$ une section holomorphe de Q, d'après (2.2) on a

$$\mathrm{D}_{\mathrm{E}}'' f = -\beta^* f, \tag{2.6}$$

et par suite

$$\mathrm{D}_{\mathrm{S}}''(\beta^* f) = 0$$

(car $\mathrm{D}_{\mathrm{E}}''$ et $\mathrm{D}_{\mathrm{S}}''$ coïncident sur S).

Si donc $u \in \mathscr{C}^\infty$ (X, S) est une solution de

$$D''_S u = -\beta^* f, \tag{2.7}$$

alors d'après (2.6) $f-u$ est holomorphe et vérifie :

$$g(f-u) = f. \tag{2.8}$$

Tout le problème revient donc à la résolution de (2.7), c'est-à-dire à la résolution d'un problème de d'' à valeurs dans le fibré noyau S.

3. Estimations des courbures et inégalités L^2

Nous allons résoudre l'équation (2.7) :

$$D''_S u = -\beta^* f,$$

par la méthode d'Hörmander [21] et [22]. Cette méthode nécessite l'obtention d'une estimation *a priori* du type suivant :

$$|(\beta^* f \,|\, v)|^2 \leqq \|\delta'' v\|^2 + \|d'' v\|^2, \tag{3.1}$$

pour toute (0, 1)-forme v, à valeurs dans S, de classe C^∞ à support compact et pour des normes hilbertiennes qu'on va préciser. La construction de v s'achève ensuite par des raisonnements d'analyse fonctionnelle et le théorème de Hahn-Banach. L'inégalité (3.1) s'écrit encore :

$$|(f \,|\, \beta \lrcorner v)|^2 \leqq \|\delta'' v\|^2 + \|d'' v\|^2. \tag{3.2}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, il suffit donc de démontrer une inégalité du type

$$\|\delta'' v\|^2 + \|d'' v\|^2 \geqq C^{te} \|\beta \lrcorner v\|^2. \tag{3.3}$$

C'est cette dernière estimation que nous allons démontrer.

Auparavant, nous rappelons brièvement les définitions relatives aux normes hilbertiennes en renvoyant à [21], [22], [2], [13], [45] pour plus de détails.

Nous adoptons les conventions suivantes relatives à une base orthonormée de l'espace tangent de X :

$$(dz_j \,|\, dz_j) = 1, \qquad \omega = i \sum_{j=1}^{n} dz_j \wedge d\bar{z}_j,$$
$$d\tau = i^n \sum_{j=1}^{n} (dz_j \wedge d\bar{z}_j),$$

ce qui fait apparaître des différences jouant sur un facteur éventuel 2^k avec les formules de [13] ou [45].

On désigne par $\star$, L, Λ les opérateurs habituels de la géométrie hermitienne, de sorte que par définition on a

$$\begin{cases} \alpha \wedge \star \bar{\beta} = (\alpha \,|\, \beta)\, d\tau, \\ L\alpha = \omega \wedge \alpha, \\ (L\alpha \,|\, \beta) = (\alpha \,|\, \Lambda \beta), \end{cases} \tag{3.4}$$

pour toutes formes α et β à valeurs complexes, et en tout point de X. Aux produits scalaires hermitiens sur E et X est associé de manière canonique (*cf.* par exemple [2] ou [13]) un produit scalaire hermitien sur l'espace $\mathscr{D}^0_{p,q}(X, E)$ des (p, q) formes à valeurs dans E, de classe C^0, à support compact, de sorte que si $f_j = \alpha_j$, $j = 1, 2$, avec $S_j \in \mathscr{C}^0(X, E)$ et $\alpha_j \in \mathscr{D}^0_{p,q}(X, \mathbf{C})$, on ait

$$(f_1 \mid f_2) = \int_X (S_1 \mid S_2)(\alpha_1 \mid \alpha_2)\, d\tau.$$

$L^2_{p,q}(X, E)$ désigne l'espace de Hilbert complété de $\mathscr{D}^0_{p,q}(X, E)$ pour cette norme hilbertienne.

Si φ est une fonction réelle de classe C^2 sur X, on désigne par $L^2_{p,q}(X, \varphi, E)$ l'espace obtenu en multipliant la métrique initiale de E par le poids $e^{-\varphi}$, soit :

$$(f_1 \mid f_2)_\varphi = \int_X (S_1 \mid S_2)(\alpha_1 \mid \alpha_2)\, e^{-\varphi}\, d\tau.$$

Les opérateurs $\star$, L et Λ se prolongent aux formes à valeurs vectorielles, en les tensorisant par l'opérateur identique de E.

On a par exemple $\star\,(s\,\alpha) = s\,(\star\,\alpha)$, si $s \in \mathscr{C}^0(X, E)$ et $\alpha \in \mathscr{D}^0_{p,q}(X, \mathbf{C})$.

Soit δ'' (resp. δ''_φ) l'adjoint de d'' pour le produit scalaire de $L^2_{p,q}(X, E)$ [resp. de $L^2_{p,q}(X, \varphi, E)$].

D'après [2] ou [13] exposé III, théorème 3, on a alors l'inégalité fondamentale.

LEMME (3.1) (Inégalité de Kodaïra-Nakano). — *Pour toute forme* $f \in \mathscr{D}^\infty_{n,q}(X, E)$, *on a*

$$\|\delta'' f\|^2 + \|d'' f\|^2 \geqq (ic_E \Lambda f \mid f),$$
$$\|\delta''_\varphi f\|^2_\varphi + \|d'' f\|^2_\varphi \geqq ((ic_E + id'\,d''\,\varphi)\Lambda f \mid f)_\varphi,$$

c_E désigne ici l'opérateur de multiplication extérieure par la forme de courbure $c(E)$ de E. $id'\,d''\,\varphi$ désigne par abus de langage, la forme $id'\,d''\,\varphi \otimes \mathrm{Id}_E \in \mathscr{C}^\infty_{1,1}(X, \mathrm{Hom}(E, E))$.

La deuxième ligne se déduit de la première en multipliant la métrique de E par le poids $e^{-\varphi}$.

L'usage du produit intérieur des formes différentielles nous sera commode. Rappelons que le produit intérieur $\alpha \lrcorner \beta$ de deux formes à valeurs scalaires est défini en tout point z de X par dualité :

$$(3.5) \qquad (\alpha \lrcorner \beta \mid \gamma) = (\beta \mid \bar{\alpha} \wedge \gamma),$$

pour tout γ, le produit scalaire étant celui défini au point z par la forme hermitienne ω.

Si E, F, G sont trois fibrés vectoriels et $\langle\ ,\ \rangle$ un morphisme **C**-bilinéaire du produit fibré $E \times F$ dans G, on définit le produit $\alpha \lrcorner \beta$ où $\alpha \in \mathscr{C}^0(X, E)$ et $\beta \in \mathscr{C}^0(X, F)$ par **C**-bilinéarité, de sorte que

$$(s\,\alpha) \lrcorner (t\,\beta) = \langle s, t \rangle\, \alpha \lrcorner \beta,$$

lorsque $s \in \mathscr{C}^\infty(X, E)$, $t \in \mathscr{C}^\infty(X, F)$, α et β sont deux formes à valeurs complexes.

Nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME (3.2). — *Si* α *est une* (1, 0) *forme à valeurs scalaires et* f *une* (n, q) *forme à valeur dans* E, *on a*

$$\alpha\wedge(\Lambda f) = i\alpha \lrcorner f,$$

$$(i\alpha\wedge\bar{\alpha}\wedge(\Lambda f) \mid f) = |\alpha \lrcorner f|^2,$$

en tout point de X.

Il suffit de le vérifier lorsque f est à valeurs scalaires.

Par dualité, on a alors pour toute forme

$$(\alpha\wedge f \mid \beta) = (f \mid \omega\wedge(\bar{\alpha} \lrcorner \beta)).$$

La multiplication intérieure par $\bar{\alpha}$ est une antidérivation et β est de type $(n, q-1)$, de sorte que

$$(\alpha\wedge f \mid \beta) = (f \mid -(\bar{\alpha} \lrcorner \omega)\wedge\beta). \tag{3.6}$$

On a

$$\bar{\alpha} \lrcorner \omega = i\bar{\alpha}. \tag{3.7}$$

Il suffit en effet de vérifier cette formule dans une base orthonormée dans laquelle $\omega = i\sum_{k=1}^{n} dz_k\wedge d\bar{z}_k$ et lorsque $\alpha = dz_1$; elle est alors immédiate puisque

$$d\bar{z}_j \lrcorner dz_k = (dz_k \mid dz_j)$$

et que $d\bar{z}_j \lrcorner d\bar{z}_k = 0$.

De (3.6) et (3.7) on déduit

$$(\alpha\wedge f \mid \beta) = (f \mid -i\bar{\alpha}\wedge\beta) = (i\alpha \lrcorner f \mid \beta),$$

pour tout β, c'est-à-dire la première formule du lemme (3.2).

La seconde formule en résulte trivialement d'après (3.5).

LEMME (3.3). — *Si le fibré hermitien* E *est semi-positif au sens de Nakano, pour toute forme* $f\in D^{\infty}_{n,q}(X, E)$, *on a en tout point de* X :

$$(ic_E\wedge f \mid f) \geqq 0.$$

Pour alléger les notations, nous ne traitons que le cas $q = 1$, seul utile par la suite. Soit

$$c_E = \sum c_{j,k,\nu,\mu}\, dz_j\wedge d\bar{z}_k\otimes e^*_\nu\otimes e_\mu, \tag{3.7}$$

$$f = \sum_\nu f_\nu e_\nu = \sum_{j,\nu} f_{j,\nu}\, dz_1\wedge\ldots\wedge dz_n\wedge d\bar{z}_j\otimes e_\nu, \tag{3.8}$$

l'écriture canonique de la matrice de courbure c_E et de f, relativement à un système de coordonnées locales, et à un champ de repère orthonormé $\{e_\nu\}$ dans la fibre. D'après le lemme (3.2) on a en tout point

$$(ic_E\wedge f \mid f) = \sum c_{j,k,\nu,\mu}(i dz_j\wedge d\bar{z}_k\wedge \Lambda f_\nu \mid f_\mu),$$

$$(ic_E\wedge f \mid f) = \sum c_{j,k,\nu,\mu}(dz_j \lrcorner f_\nu \mid dz_k \lrcorner f_\mu),$$

$$(ic_E\wedge f \mid f) = \sum c_{j,k,\nu,\mu} f_{j,\nu}\bar{f}_{k,\mu} \geqq 0, \tag{3.9}$$

d'après la définition de la semi-positivité au sens de Nakano [*cf.* (1.4)]. On étudie maintenant les termes de courbure de l'inégalité de Kodaïra [*cf.* le lemme (3.1)] relative aux fibrés du paragraphe 2. β désigne désormais la forme fondamentale dans $\mathscr{C}^{\infty}_{1,0}(\mathrm{X}, \mathrm{Hom}(\mathrm{S}, \mathrm{Q}))$ associée au scindage C^{∞} de la suite exacte de fibrés

$$0 \to \mathrm{S} \to \mathrm{E} \to \mathrm{Q} \to 0.$$

D'après (2.3) et (2.4), on a

$$c(\mathrm{S}) = c(\mathrm{E})|_{\mathrm{S}} + \beta^* \wedge \beta \tag{3.10}$$

[avec l'abus de langage consistant à noter $c(\mathrm{E})|_{\mathrm{S}}$ la forme $\pi_{\mathrm{S}}\, c(\mathrm{E})\, j_{\mathrm{S}}$, j_{S} étant l'injection de S dans E et π_{S} la projection orthogonale sur S].

LEMME (3.4). — *Pour toute* $v \in \mathrm{D}^{\infty}_{n,1}(\mathrm{X}, \mathrm{S})$ *et* $\beta \in \mathscr{C}^{\infty}_{1,0}(\mathrm{X}, \mathrm{Hom}(\mathrm{S}, \mathrm{Q}))$ *on a*

$$(i\,\beta^* \wedge \beta \wedge v \,|\, v) = -|\beta \lrcorner v|^2,$$

en tout point de X.

Choisissons des champs de repères orthonormés locaux dans S et Q de classe C^{∞}, de sorte que β soit représentée par la matrice de (1, 0) formes scalaires $\{\beta_{jk}\}$ $1 \leqq j \leqq q$, $1 \leqq k \leqq s$ (avec $s = \mathrm{rang}\, \mathrm{S}$, $q = \mathrm{rang}\, \mathrm{Q}$) et v soit représentée par la matrice colonne de $(n, 1)$ formes $\{v_k\}$.

On a alors, en utilisant le lemme (3.2) :

$$(i\,\beta^* \wedge \beta \wedge v \,|\, v) = \sum_{j,l,k} (i\,\overline{\beta}_{jl} \wedge \beta_{jk} \wedge v_k \,|\, v_l),$$

$$(i\,\beta^* \wedge \beta \wedge v \,|\, v) = \sum_{j,l,k} -(\beta_{jk} \lrcorner v_k \,|\, \beta_{jl} \lrcorner v_l),$$

$$(i\,\beta^* \wedge \beta \wedge v \,|\, v) = -(\beta \lrcorner v \,|\, \beta \lrcorner v).$$

Ce lemme signifie en particulier que la forme $i\,\beta^* \wedge \beta$ est semi-négative au sens de Nakano.

Le lemme suivant va s'avérer fondamental, en permettant de compenser la négativité de $i\,\beta^* \wedge \beta$ par la positivité d'un fibré linéaire (à savoir dét Q).

LEMME FONDAMENTAL (3.5). — *Soit* $r = \mathrm{Inf}(n, s) = \mathrm{Inf}(n, p-q)$. *Pour toute forme* $v \in \mathscr{D}_{n,1}(\mathrm{X}, \mathrm{S})$ *et* $\beta \in \mathscr{C}^{\infty}_{1,0}(\mathrm{X}, \mathrm{Hom}(\mathrm{S}, \mathrm{Q}))$, *on a*

$$r(i\,\mathrm{Tr}\,\beta\beta^* \otimes \mathrm{Id}_{\mathrm{S}} \wedge v \,|\, v) \geqq |\beta \lrcorner v|^2,$$

en tout point de X, *où* $\mathrm{Tr}\,\beta\beta^*$ *est la* (1.1) *forme à valeurs scalaires, obtenue en calculant la trace de* $\beta \wedge \beta^* \in \mathscr{C}^{\infty}_{1,1}(\mathrm{X}, \mathrm{Hom}(\mathrm{Q}, \mathrm{Q}))$.

Le lemme signifie encore que la forme $ir\,\mathrm{Tr}\,\beta\beta^* \otimes \mathrm{Id}_{\mathrm{S}} + i\,\beta^*\beta$ est $\geqq 0$ au sens de Nakano [compte tenu du lemme (3.4)].

Choisissons comme dans le lemme (3.4) des champs de repères orthonormés locaux dans les fibres de S et de Q, de manière à représenter β et v par des matrices de formes à valeurs complexes. On a alors

$$i \operatorname{Tr} \beta\beta^* = \sum_{j,k} i\,\beta_{jk} \wedge \overline{\beta}_{jk},$$

de sorte que l'inégalité du lemme (3.5) n'est autre que

$$r \sum_{j,k,l} |\beta_{jk} \lrcorner v_l|^2 \geqq \sum_j \Big|\sum_k \beta_{jk} \lrcorner v_k\Big|^2, \tag{3.11}$$

avec $1 \leqq j \leqq q$, $1 \leqq k, l \leqq s$ [on a utilisé le lemme (3.2)].

Lorsque $r = s$, cette inégalité résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left|\sum_{k=1}^{s} \beta_{jk} \lrcorner v_k\right|^2 \leqq s \sum_{k=1}^{s} |\beta_{jk} \lrcorner v_k|^2.$$

Pour $r = n$, l'inégalité (3.11) est moins facile à démontrer. Nous avons rejeté sa démonstration à la fin de ce paragraphe, pour en venir plus vite aux points essentiels.

On étudie maintenant comment se transforment β et c (S) par tensorisation par un fibré linéaire M. On a la suite exacte

$$0 \to S \otimes M \to E \otimes M \to Q \otimes M \to 0. \tag{3.12}$$

Au scindage C^∞, $E \simeq S \oplus Q$ du paragraphe 2, correspond un scindage C^∞ :

$$E \otimes M \simeq (S \otimes M) \oplus (Q \otimes M).$$

Comme la connexion canonique sur $E \otimes M$ est donné par :

$$D_{E \otimes M} = D_E \otimes \mathrm{Id}_M + \mathrm{Id}_E \otimes D_M,$$

la décomposition de $D_{E \otimes M}$ suivant le scindage C^∞ de $E \otimes M$, est donnée par

$$D_{E \otimes M} = \begin{pmatrix} D_S \otimes \mathrm{Id}_M + \mathrm{Id}_S \otimes D_M & -\beta^* \otimes \mathrm{Id}_M \\ \beta \otimes \mathrm{Id}_M & D_Q \otimes \mathrm{Id}_M + \mathrm{Id}_Q \otimes D_M \end{pmatrix}.$$

La forme β est donc simplement transformée en $\beta \otimes \mathrm{Id}_M$ et la forme de coubure de $S \otimes M$ devient

$$c(S \otimes M) = c(E)|_S \otimes \mathrm{Id}_M + \beta^* \beta \otimes \mathrm{Id}_M + \mathrm{Id}_S \otimes c(M), \tag{3.13}$$

pour alléger l'écriture, nous noterons encore β la forme $\beta \otimes \mathrm{Id}_M$.

Si on suppose que c (M) $\geqq k \operatorname{Tr} \beta\beta^*$, on obtient aussitôt en utilisant (3.13) et les lemmes (3.3), (3.4) et (3.5) :

$$\begin{cases} (ic(S \otimes M) \wedge v \,|\, v) \geqq (k-r)(i \operatorname{Tr} \beta\beta^* \wedge v \,|\, v), \\ (ic(S \otimes M) \wedge v \,|\, v) \geqq \dfrac{k-r}{r} |\beta \lrcorner v|^2, \end{cases} \tag{3.14}$$

pour toute forme $v \in \mathscr{C}^\infty_{n,1}$ (X, $S \otimes M$), et en tout point de X.

Si S est de rang 1, l'inégalité

$$(ic(\mathrm{E})\Lambda v \mid v) \geqq 0,$$

est assurée en supposant E semi-positif au sens de Griffiths seulement.
On a donc le lemme suivant :

LEMME (3.6). — *Si* $ic(\mathrm{M}) \geqq ik \operatorname{Tr} \beta\beta^*$ *et si* E *est semi-positif au sens de Nakano (au sens de Griffith seulement si* $s = 1$), *on a pour toute* $v \in \mathscr{C}^{\infty}_{n,1}(\mathrm{X}, \mathrm{S} \otimes \mathrm{M})$ *et en tout point de* X :

$$(ic(\mathrm{S} \otimes \mathrm{M})\Lambda v \mid v) \geqq \left(\frac{k}{r}-1\right)|\beta \lrcorner v|^2.$$

Mais $\operatorname{Tr} \beta\beta^*$ s'estime simplement en fonction de $\operatorname{Tr} c(\mathrm{Q})$, car d'après (3.4), on a

$$c(\mathrm{Q}) = c(\mathrm{E})|_{\mathrm{Q}} + \beta \wedge \beta^*,$$

de sorte que

$$\operatorname{Tr} c(\mathrm{Q}) = \operatorname{Tr} c(\mathrm{E})|_{\mathrm{Q}} + \operatorname{Tr} \beta\beta^*.$$

Si E est semi-positif au sens de Griffith,

$$i \operatorname{Tr} c(\mathrm{E})|_{\mathrm{Q}} \text{ est une forme de type } (1.1) \geqq 0$$

[ce n'est autre que $\sum_{j=1}^{q} (c(\mathrm{E}).e_j \mid e_j)$, où e_j est une base orthonormée de la fibre de Q].
On a donc :

$$i \operatorname{Tr} c(\mathrm{Q}) \geqq i \operatorname{Tr} \beta\beta^*.$$

D'après un résultat classique (*cf.* par exemple [4], p. 68), on a

$$\operatorname{Tr} c(\mathrm{Q}) = c(\text{dét}\, \mathrm{Q}), \tag{3.15}$$

de sorte que

$$ic(\text{dét}\, \mathrm{Q}) \geqq i \operatorname{Tr} \beta\beta^* \tag{3.16}$$

(on a l'égalité si E est plat, en particulier si E est trivial).

On peut donc dans le lemme (3.6) remplacer l'hypothèse sur M, par la condition plus forte, mais plus géométrique

$$ic(\mathrm{M}) \geqq ikc(\text{dét}\, \mathrm{Q}). \tag{3.17}$$

En définitive d'après le lemme (3.1) et (3.6) et d'après (3.16), on obtient :

PROPOSITION 3.1. — *Si* E *est semi-positif au sens de Nakano (ou seulement au sens de Griffiths lorsque* S *est de rang* 1) *et si* $ic(\mathrm{M}) \geqq ikc(\text{dét}\, \mathrm{Q})$, *pour un* k *réel* $> r$, *alors pour toute forme* $v \in \mathscr{D}^{\infty}_{n,1}(\mathrm{X}, \mathrm{S} \otimes \mathrm{M})$, *on a*

$$\|\delta'' v\|^2 + \|d'' v\|^2 \geqq \left(\frac{k}{r}-1\right)\|\beta \lrcorner v\|^2, \tag{3.18}$$

$$\|\delta''_\varphi v\|^2_\varphi + \|d'' v\|^2_\varphi \geqq (i\, d' d''_\varphi \Lambda v \mid v) + \left(\frac{k}{r}-1\right)\|\beta \lrcorner v\|^2_\varphi. \tag{3.19}$$

Rappelons que dans ces estimations, Q est muni de la métrique quotient de celle de E.

Fin de la démonstration du lemme (3.5).

Il s'agit en fait d'une variante du lemme 1, p. 552 de [41].

Les β_{jk} étant des (0, 1) formes et les v_l des $(n, 1)$ formes à valeurs scalaires, il faut démontrer l'inégalité

$$n \sum_{j,k,l} |\beta_{jk} \lrcorner v_l|^2 \geqq \sum_j |\sum_k \beta_{jk} \lrcorner v_k|^2,$$

avec $1 \leqq j \leqq q$, $1 \leqq k$, $l \leqq s$.

Il suffit de montrer que pour tout j, on a

$$n \sum_{k,l} |\beta_{jk} \lrcorner v_l| \geqq |\sum_k \beta_{jk} \lrcorner v_k|^2,$$

c'est-à-dire qu'on peut supprimer l'indice j et ne considérer que des (0, 1) formes β_k, $1 \leqq k \leqq s$, et l'inégalité

(3.20)
$$n \sum_{k,l} |\beta_k \lrcorner v_l|^2 \geqq |\sum_k \beta_k \lrcorner v_k|^2.$$

Soit $\beta_{k,\lambda}$, $v_{l,\lambda}$, $1 \leqq \lambda \leqq n$ les composantes de β_k et v_l relativement à une base orthonormée de l'espace tangent à X en un point $x \in X$. On est ramené à démontrer l'inégalité entre nombres complexes

(3.21)
$$n \sum_{k,l} |\sum_\lambda \beta_{k\lambda} v_{l\lambda}|^2 \geqq |\sum_{k,\lambda} \beta_{k\lambda} v_{k\lambda}|^2.$$

On considère les vecteurs $B_\lambda = (\beta_{1\lambda}, \ldots, \beta_{s,\lambda})$ de $\mathbf{C}^s$, de sorte que (3.21) s'écrit avec la norme euclidienne de $\mathbf{C}^s$:

(3.22)
$$n \sum_l \|\sum_\lambda B_\lambda v_{l\lambda}\|^2 \geqq |\sum_{k,\lambda} \beta_{k\lambda} v_{k\lambda}|^2.$$

Montrons d'abord qu'on peut supposer les B_λ deux à deux orthogonaux. Soit en effet B'_μ un système générateur orthogonal du sous-espace de $\mathbf{C}^s$ engendré par les vecteurs B_λ. Il existe des $\alpha_{\lambda\mu} \in \mathbf{C}$ tels que

(3.23)
$$B_\lambda = \sum_\mu \alpha_{\lambda\mu} B'_\mu, \qquad 1 \leqq \mu \leqq n.$$

De (3.23) on déduit

(3.24)
$$\left\{ \begin{aligned} \sum_\lambda B_\lambda v_{l\lambda} &= \sum_\mu B'_\mu (\sum_\lambda \alpha_{\lambda\mu} v_{l\lambda}), \\ \sum_\lambda B_\lambda v_{l\lambda} &= \sum_\mu B'_\mu v'_{l\mu}. \end{aligned} \right.$$

avec $v'_{l\mu} = \sum_\lambda \alpha_{\lambda\mu} v_{l\lambda}$.

On a de même

$$\sum_{k,\lambda} \beta_{k,\lambda} v_{k,\lambda} = \sum_{k,\lambda,\mu} \alpha_{\lambda\mu} \beta'_{k\mu} v_{k\lambda},$$

$$(3.25)\qquad \sum_{k,\lambda} \beta_{k,\lambda} v_{k,\lambda} = \sum_{k,\mu} \beta'_{k\mu} v'_{k\mu}.$$

D'après (3.24) et (3.25), (3.22) devient

$$n \sum_{l} \| \sum_{\mu} B'_{\mu} v'_{l\mu} \|^2 \geqq | \sum_{k,\mu} \beta'_{k\mu} v'_{k\mu} |^2.$$

On peut donc supposer les B_λ deux à deux orthogonaux, de sorte que (3.22) équivaut à

$$(3.26)\qquad n \sum_{k,l,\lambda} | \beta_{k,\lambda} |^2 | v_{l\lambda} |^2 \geqq | \sum_{k,\lambda} \beta_{k\lambda} v_{k\lambda} |^2.$$

Appliquant deux fois successivement l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient

$$| \sum_{k,\lambda} \beta_{k\lambda} v_{k\lambda} |^2 \leqq n \sum_{\lambda=1}^{n} | \sum_{k} \beta_{k\lambda} v_{k\lambda} |^2,$$

$$| \sum_{k,\lambda} \beta_{k\lambda} v_{k\lambda} |^2 \leqq n \sum_{\lambda=1}^{n} (\sum_{k} | \beta_{k\lambda} |^2)(\sum_{l} | v_{l\lambda} |^2),$$

ce qui n'est autre que (3.26).

4. Le théorème d'existence fondamental

Comme la variété X n'est pas supposée compacte, ni la métrique complète, nous sommes amenés à utiliser la méthode des trois poids de L. Hörmander et un passage à la limite sur ces poids (*cf.* [21], p. 93) pour obtenir à partir des estimations de (3.18) le théorème d'existence cherché. Cette méthode avait déjà été utilisée par l'auteur dans le cadre des variétés faiblement pseudo-convexes (*cf.* [43]). Grossièrement parlant, cette méthode consiste à multiplier les métriques par une fonction poids e^{ψ} convenable, de manière à se ramener à une situation analogue à celle d'une métrique complète. On compense le défaut de positivité qui apparaît alors à l'aide du hessien d'une fonction φ plurisousharmonique convenable. On joue enfin sur le fait que ψ et φ peuvent être choisies nulles sur un compact donné à l'avance, pour faire un passage à la limite et éliminer ψ et φ dans le résultat final. La seule difficulté nouvelle par rapport à la méthode de [21] est que φ ne peut être choisie strictement plurisousharmonique.

On considère comme L. Hörmander dans [21] et [22], les opérateurs non bornés, à domaine dense, T_1 et T_2, associés à l'opérateur d'' et à trois poids φ_1, φ_2, φ_3 de classe C^2, qui seront précisés ultérieurement :

$$L^2_{n,0}(X, \varphi_1, S \otimes M) \xrightarrow{T_1 = d''} L^2_{n,1}(X, \varphi_2, S \otimes M) \xrightarrow{T_2 = d''} L^2_{n,2}(X, \varphi_3, S \otimes M).$$

Soit K_ν ($\nu \geqq 1$) une suite exhaustive de compacts de X, soit $\eta_\nu \in \mathscr{C}^\infty(X)$ une suite de fonctions à support compact dans X, telles que : $0 \leqq \eta_\nu \leqq 1$, sur X,

$$(4.1)\qquad \eta_\nu = 1,$$

sur un voisinage de K_ν. Soit $\psi \geqq 0$ une fonction dans $\mathscr{C}^2$ (X), telle que

$$|d''\eta_\nu|^2 \leqq e^\psi, \tag{4.2}$$

pour tout $\nu \geqq 1$. Si on choisit $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ de sorte que

$$\varphi_1 = \varphi - 2\psi,\ \varphi_2 = \varphi - \psi,\ \varphi_3 = \varphi, \tag{4.3}$$

où φ sera précisée ultérieurement, alors d'après L. Hörmander [21], lemme 4.1.3, on a :

LEMME (4.1). — $\mathscr{D}^\infty_{n,1}$ (X, S ⊗ M) *est dense dans* Dom $T_1^* \cap$ Dom T_2 *pour la norme du graphe de* T_1^*, T_2 (Dom T *désignant le domaine de l'opérateur non borné* T).

On calcule maintenant l'opérateur différentiel T^* en fonction de δ''_φ. En utilisant la définition (3.5), la formule $d''(gv) = gd''v + d''g \wedge v$, entraîne aussitôt par dualité la formule :

$$\delta''(gv) = g\,\delta''v - d'g \lrcorner v, \tag{4.4}$$

où $g \in \mathscr{C}^1$ (X, **C**) et $v \in \mathscr{C}^1_{n,1}$ (X, S ⊗ M).

D'autre part, d'après la définition de δ'' et T_1^*, on a

$$T_1^* v = e^{\varphi_1}\,\delta''(ve^{-\varphi_2}), \tag{4.5}$$

pour $v \in \mathscr{C}^\infty_{n,1}$ (X, S ⊗ M).

En utilisant (4.4) on en déduit alors ($\varphi_2 = \varphi - \psi$) :

$$\delta''_\varphi(v) = e^\varphi\,\delta''(ve^{-\varphi}) = e^\psi\, e^{\varphi_1}\delta''(ve^{-\varphi_2}) + d'\psi \lrcorner v,$$

$$\delta''_\varphi(v) = e^\psi\, T_1^* v + d'\psi \lrcorner v. \tag{4.6}$$

On en déduit pour tout $\varepsilon > 0$, l'inégalité

$$\|\delta''_\varphi(v)\|^2_\varphi \leqq (1+\varepsilon)\,\|e^\psi T_1^* v\|^2_\varphi + \left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\|d'\psi \lrcorner v\|^2_\varphi,$$

soit encore

$$\|\delta''_\varphi(v)\|^2_\varphi \leqq (1+\varepsilon)\,\|T_1^* v\|^2_{\varphi_1} + \left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\|d'\psi \lrcorner v\|^2_\varphi. \tag{4.7}$$

D'après l'estimation (3.19) et le lemme (4.1), on obtient en supposant que E et M vérifient toujours les hypothèses de la proposition 3.1 :

LEMME (4.2). — *Si* $\varphi \in \mathscr{C}^2$ (X, **R**) *est choisie de sorte que pour un* $\varepsilon > 0$, *on ait en tout point de* X, *et pour toute* $v \in \mathscr{C}^\infty_{n,1}$ (X, **C**) :

$$(id'd''\varphi \wedge v \mid v) - \left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)|d'\psi \lrcorner v|^2 \geqq 0. \tag{4.8}$$

alors pour toute $v \in$ Dom $T_1^* \cap$ Dom T_2, *on a l'inégalité* a priori

$$(1+\varepsilon)\,\|T_1^* v\|^2_{\varphi_1} + \|T_2 v\|^2_{\varphi_3} \geqq \left(\frac{k}{r}-1\right)\|\beta \lrcorner v\|^2_\varphi.$$

Nous pouvons maintenant résoudre l'équation (2.7) :

$$d'' u = -\beta^* f,$$

où $f \in H^0(X, Q \otimes K \otimes M)$, en supposant (provisoirement) que f vérifie les estimations

$$(4.9) \qquad \begin{cases} \| \beta^* f \|_{\varphi_2} < +\infty, \\ \| f \|_{\varphi_1} < +\infty. \end{cases}$$

D'après (3.5) et l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$|(\beta^* f \mid v)_{\varphi_2}|^2 = |(f \mid \beta \lrcorner v)_{\varphi_2}|^2 \leqq \| f \|^2_{\varphi_1} \| \beta \lrcorner v \|^2_{\varphi}.$$

Soit d'après le lemme (4.2) :

$$(4.10) \qquad |(\beta^* f \mid v)_{\varphi_2}|^2 \leqq \frac{r(1+\varepsilon)}{k-r} \| f \|^2_{\varphi_1} \| T_1^* v \|^2_{\varphi_1}$$

pour toute $v \in \operatorname{Dom} T_1^* \cap \operatorname{Ker} T_2$.

Si v est un élément quelconque de $\operatorname{Dom} T_1^*$, on décompose v en

$$v = v_1 + v_2,$$

où $v_1 \in \operatorname{Ker} T_2$ et $v_2 \in (\operatorname{Ker} T_2)^{\perp}$.

Comme $T_2 T_1 = 0$, on a $v_2 \in (\operatorname{Im} T_1)^{\perp}$, donc $T_1^* v_2 = 0$ et $T_1^* v = T_1^* v_1$. D'autre part, comme $d''(\beta^* f) = 0$ et que $\beta^* f$ vérifie (4.9), $\beta^* f \in \operatorname{Ker} T_2$, de sorte que : $(\beta^* f \mid v_2)_{\varphi_2} = 0$. Comme v_1 vérifie (4.10), il en résulte que $v = v_1 + v_2$ vérifie aussi (4.10).

L'inégalité (4.10) est donc vraie pour toute $v \in \operatorname{Dom} T_1^*$.

Le théorème de Hahn-Banach permet d'affirmer l'existence de $u \in L^2_{n,0}(\Omega, \varphi_1, S \otimes M)$ telle que

$$(4.11) \qquad -(\beta^* f \mid v) = (u \mid T_1^* v),$$

pour toute $v \in \operatorname{Dom} T_1^*$, et telle que

$$(4.12) \qquad \| u \|^2_{\varphi_1} \leqq \frac{r(1+\varepsilon)}{k-r} \| f \|^2_{\varphi_1},$$

(4.11) signifie encore que

$$d'' u = -\beta^* f,$$

au sens des distributions. On a donc démontré le lemme.

LEMME (4.3). — *Si* E *et* M *vérifient les hypothèses de la proposition* 3.1, *si* φ *vérifie* (4.8) *et si* f *vérifie* (4.9), *il existe* u *telle que*

$$d'' u = -\beta^* f,$$

$$\int_X |u|^2 e^{-\varphi_1} d\tau \leqq \frac{r(1+\varepsilon)}{k-r} \int_X |f|^2 e^{-\varphi_1} d\tau.$$

Montrons maintenant qu'on peut trouver φ de manière à réaliser (4.8) et (4.9).

D'après les lemmes (3.2) et (3.3), la condition (4.8) équivaut encore à

$$id'd''\varphi-\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)id'\psi\wedge d''\psi \geqq 0. \tag{4.12}$$

Soit ρ une fonction d'exhaustion, plurisousharmonique, de classe C^2 sur X, qu'on peut supposer $\geqq 0$.

Désignons par X_t le compact

$$X_t=\{z\in X\,|\,\rho(z)\leqq t\},$$

pour $t\geqq 0$ (assez grand).

Soit d'autre part a un nombre >0 fixé, et fixons également $\varepsilon>0$. On peut choisir la suite exhaustive de compacts K_ν de (4.1) de sorte que $K_1=X_a$. η_ν est alors égale à 1, et $d''\eta_\nu$ nulle sur un voisinage fixe du compact X_a, pour tout ν.

Choisissons ψ égale à $\chi_1\circ\rho$ où $\chi_1:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$, est de classe C^∞, croissante, et est choisie de manière à assurer la condition (4.2), soit :

$$\exp[\chi_1\circ\rho]\geqq\sup_\nu|d''\eta_\nu|^2,$$

$$\exp[\chi_1(t)]\geqq\sup_{X_t}(\sup_\nu|d''\eta_\nu|^2),$$

pour tout $t\in\mathbf{R}^+$. Comme $d''\eta_\nu=0$ au voisinage de X_a, on peut de plus choisir χ_1 identiquement nulle sur un voisinage de $[0, a]$.

Choisissons maintenant φ égale à $\chi_2\circ\rho$, où χ_2 est une fonction *convexe, croissante,* de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}^+$; on a classiquement

$$id'd''\varphi=\chi_2'\circ\rho\, id'd''\rho+\chi_2''\circ\rho\, id'\rho\wedge d''\rho.$$

Comme ρ est plurisousharmonique et que

$$id'\psi\wedge d''\psi=(\chi_1'\circ\rho)^2\, id'\rho\wedge d''\rho,$$

la condition (4.12) est réalisée pourvu que

$$\chi_2''\geqq\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\chi_1'^2. \tag{4.13}$$

Il est clair qu'on peut choisir χ_2 convexe, croissante, de manière à réaliser (4.13) et telle que de plus χ_2 soit nulle sur $[0, a]$, de sorte que φ *est nulle sur* X_a.

Soit maintenant $f\in H^0(X, Q\otimes K\otimes M)$, telle que

$$\int_X|f|^2\,d\tau<+\infty. \tag{4.14}$$

Quitte à ajouter à φ une fonction $\chi_3 \circ \rho$, où χ_3 est $\geqq 0$, convexe, croissante, à croissance assez rapide, on peut toujours réaliser la condition (4.9), ainsi que la condition supplémentaire

$$\varphi \geqq 2\psi, \tag{4.15}$$

de sorte que de plus φ soit toujours nulle sur X_a [puisque ψ est nulle sur un voisinage de X_a et que (4.9) est une condition à l'infini sur χ_3].

D'après le lemme (4.3), il existe $u \in L^2_{n,0}(X, \text{loc}, S \otimes M)$ tel que

$$d'' u = -\beta^* f,$$

$$\int_X |u|^2 e^{-\varphi_1} d\tau \leqq \frac{r(1+\varepsilon)}{k-r} \int_X |f|^2 e^{-\varphi_1} d\tau.$$

Comme $\varphi_1 = \varphi - 2\psi$ est nulle sur K_a et que $\varphi_1 \geqq 0$ d'après (4.15), on obtient en particulier l'estimation

$$\int_{X_a} |u|^2 d\tau \leqq \frac{r(1+\varepsilon)}{k-r} \int_X |f|^2 d\tau, \tag{4.16}$$

dont le second membre est indépendant de a.

En définitive pour tout $a > 0$ assez grand, il existe u_a dans $L^2_{n,0}(X, \text{loc}, S \otimes M)$ telle que $d'' u_a = -\beta^* f$, vérifiant l'estimation

$$\int_{X_a} |u_a|^2 d\tau \leqq \frac{r(1+\varepsilon)}{k-r} \int_X |f|^2 d\tau.$$

On considère en particulier la suite exhaustive de compacts X_n ($a = n$). La suite u_n étant bornée en norme L^2 sur tout compact, on peut en extraire une suite u_{n_k} faiblement convergente dans $L^2_{n,0}(K, S \otimes M)$ pour tout compact K de X, vers une limite u vérifiant :

$$d'' u = -\beta^* f$$

$$\int_X |u|^2 d\tau \leqq \frac{r(1+\varepsilon)}{k-r} \int_X |f|^2 d\tau.$$

Il est immédiat d'éliminer $\varepsilon > 0$ par un passage à la limite.

On a donc démontré l'existence de u, telle que

$$d'' u = -\beta^* f,$$

$$\int_X |u|^2 d\tau \leqq \frac{r}{k-r} \int_X |f|^2 d\tau. \tag{4.17}$$

D'après (2.8), $h = f - u$ vérifie :

$$gh = f.$$

Comme u et f sont orthogonaux (puisque S et Q sont orthogonaux par construction de la métrique quotient sur Q), on a

$$\|h\|^2 = \|f\|^2 + \|u\|^2 \leqq \frac{k}{k-r}\|f\|^2$$

[on a utilisé (4.17)].

En définitif on a démontré le résultat suivant, dans lequel Q est muni de la métrique quotient, et dét Q de la métrique canonique déduite de celle de Q.

PROPOSITION 4.1. — *Si* E *est semi-positif au sens de Nakano* (*au sens de Griffiths seulement, si* S *est de rang* 1) *et si* $ic(\mathrm{M}) \geqq k\, ic(\text{dét}\,\mathrm{Q})$, *pour un nombre réel* $k > r = \inf(n, p-q)$, *alors pour toute* $f \in \mathrm{H}^0$, $\mathrm{Q} \otimes \mathrm{K} \otimes \mathrm{M})$ *de carré intégrable, il existe* $h \in \mathrm{H}^0$ (X, $\mathrm{E} \otimes \mathrm{K} \otimes \mathrm{M}$ *telle que :*

$$f = gh,$$

$$\int_{\mathrm{X}} |h|^2\, d\tau \leqq \frac{k}{k-r}\int_{\mathrm{X}} |f|^2\, d\tau. \tag{4.18}$$

On va maintenant traduire le résultat précédent, en fonction d'une métrique donnée *a priori* sur Q, de manière à obtenir un énoncé plus facilement utilisable, et de manière aussi à pouvoir traiter le cas où le morphisme g n'est plus surjectif.

Soit g^* le morphisme C^∞, transposé de g, pour les métriques données sur E et Q :

$$0 \to \mathrm{Q} \xrightarrow{g^*} \mathrm{E}.$$

Le morphisme $g^*(gg^*)^{-1} : \mathrm{Q} \to \mathrm{E}$, est un inverse à droite de g qui envoie Q dans l'orthogonal de S, il réalise donc le scindage C^∞ de la suite exacte (2.1), de sorte que la métrique quotient sur Q est donnée par

$$|||f|||^2 = \|g^*(gg^*)^{-1}f\|^2, \tag{4.19}$$

où $f \in \mathrm{Q}$, la norme $|||\ \ |||$ désignant la norme quotient.

Soit encore

$$|||f|||^2 = ((gg^*)^{-1}f \mid f). \tag{4.20}$$

Soit $\widetilde{gg}^*$ le cotransposé de gg^*, de sorte que

$$(gg^*)^{-1} = \frac{\widetilde{gg}^*}{\text{dét}\,(gg^*)}. \tag{4.21}$$

On a donc

$$|||f|||^2 = \frac{1}{\text{dét}\,(gg^*)}(\widetilde{gg}^* f \mid f). \tag{4.22}$$

De (4.20), on déduit aussitôt en utilisant la définition de la métrique canonique sur $\overset{q}{\Lambda}$ Q, que pour tout $y \in \overset{q}{\Lambda}$ Q, on a :

$$|||y|||^2 = (\overset{q}{\Lambda}(gg^*)^{-1} y \mid y) = \frac{||y||^2}{\text{dét}(gg^*)}. \tag{4.23}$$

Désignons par c' (dét Q) la forme de courbure de dét Q $= \overset{q}{\Lambda}$ Q relativement à la métrique quotient; d'après (4.23), on a donc

$$c'(\text{dét}\,\mathrm{Q}) = d'\,d'' \log \text{dét}(gg^*) + c(\text{dét}\,\mathrm{Q}). \tag{4.24}$$

La condition imposée par la proposition 4.1 à la courbure de M s'écrit donc :

$$ic(\mathrm{M}) - ki\,d'\,d'' \log \text{dét}(gg^*) - k\,ic(\text{dét}\,\mathrm{Q}) \geqq 0. \tag{4.25}$$

En multipliant la métrique de M par le poids $[\text{dét}\,(gg^*)]^k$ (4.25) se réduit à

$$ic(\mathrm{M}) - k\,ic(\text{dét}\,\mathrm{Q}) \geqq 0, \tag{4.26}$$

tandis que l'estimation (4.18) devient

$$\int_{\mathrm{X}} |h|^2 (\text{dét}\, gg^*)^{-k}\, d\tau \leqq \frac{k}{k-r} \int_{\mathrm{X}} |||f|||^2 (\text{dét}\, gg^*)^{-k}\, d\tau. \tag{4.27}$$

Soit encore en tenant compte (4.22) :

$$\int_{\mathrm{X}} |h|^2 (\text{dét}\, gg^*)^{-k}\, d\tau \leqq \frac{k}{k-r} \int_{\mathrm{X}} (\widetilde{gg^*} f \mid f)(\text{dét}\, gg^*)^{-k-1}\, d\tau. \tag{4.28}$$

Si maintenant g n'est surjectif qu'au-dessus de X privé de l'ensemble analytique Z, et si Z est X-négligeable, soit Y l'ensemble contenant Z de la définition 1 et soit $f \in \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathrm{Q} \otimes \mathrm{K} \otimes \mathrm{M})$ tel que

$$\int_{\mathrm{X}} (\widetilde{gg^*} f \mid f)(\text{dét}\, gg^*)^{-k-1}\, d\tau < +\infty.$$

On peut appliquer le résultat précédent dans X∖Y. Il existe donc $h \in \mathrm{H}^0(\mathrm{X}\setminus\mathrm{Y}, \mathrm{E} \otimes \mathrm{K} \otimes \mathrm{M})$ tel que

$$gh = f \quad \text{dans } \mathrm{X}\setminus\mathrm{Y},$$

$$\int_{\mathrm{X}\setminus\mathrm{Y}} |h|^2 (\text{dét}\, gg^*)^{-k}\, d\tau \leqq \frac{k}{k-r} \int_{\mathrm{X}} (\widetilde{gg^*} f \mid f)(\text{dét}\, gg^*)^{-k-1}\, d\tau.$$

L'estimation précédente montre que si U est un voisinage relativement compact d'un point $y \in \mathrm{Y}$, h est de carré intégrable dans U∖Y, donc se prolonge holomorphiquement à U.

On a donc $gh = f$ dans X, et encore l'estimation (4.28) (puisque Y est de mesure nulle).

On peut enfin multiplier par $e^{-\varphi}$ la métrique du fibré M où φ est plurisousharmonique de classe C^2 sur X.

La condition (4.26) devient alors

$$ic(\mathrm{M}) + i\,d'\,d''\,\varphi - kc(\text{dét}\,\mathrm{Q}) \geqq 0,$$

tandis que $d\tau$ se transforme en $e^{-\varphi}\,d\tau$ dans l'estimation (4.28).

On a donc démontré le théorème annoncé.

THÉORÈME 2. — *Soit* $g : \mathrm{E} \to \mathrm{Q}$, *un morphisme de fibrés, vertoriels, holomorphes, hermitiens, au-dessus, de la variété kählérienne faiblement pseudo-convexe* X. *On suppose que l'ensemble analytique* $\mathrm{Z} = \{ x \in \mathrm{X} \mid \mathrm{Im}\, g\,|_{\mathrm{E}_x} \neq \mathrm{Q}_x \}$ *est vide ou* X-*négligeable.*

On suppose E *semi-positif au sens de Nakano (ou seulement au sens de Griffiths lorsque* $p-q = 1$). *Soit* K *le fibré canonique de* X, *soit* M *un fibré linéaire hermitien tel que :* $ic\,(\mathrm{M}) - ikc\,(\text{dét}\,\mathrm{Q}) \geqq 0$, *pour un réel* $k > r = \mathrm{Inf}\,(n, p-q)$, *et soit enfin* φ *une fonction de classe* C^2 *plurisousharmonique sur* X.

Alors pour toute $f \in \mathrm{H}^0\,(\mathrm{X}, \mathrm{Q} \otimes \mathrm{K} \otimes \mathrm{M})$ *telle que*

$$\int_{\mathrm{X}} (\widetilde{gg^*}\, f \mid f)(\text{dét}\, gg^*)^{-k-1}\, e^{-\varphi}\, d\tau < +\infty,$$

il existe $h \in \mathrm{H}^0\,(\mathrm{X}, \mathrm{E} \otimes \mathrm{K} \otimes \mathrm{M})$ *telle que*

$$gh = f,$$

$$\int_{\mathrm{X}} |\,h\,|^2\,(\text{dét}\, gg^*)^{-k}\, e^{-\varphi}\, d\tau \leqq \frac{k}{k-r} \int_{\mathrm{X}} (\widetilde{gg^*}\, f \mid f)(\text{dét}\, gg^*)^{-k-1}\, e^{-\varphi}\, d\tau.$$

5. Théorèmes d'existence avec une hypothèse de stricte positivité

Lorsque le morphisme g dégénère en certains points, c'est-à-dire lorsque l'ensemble analytique Z est non vide, il y a intérêt à choisir k le plus petit possible, de manière à faciliter la convergence de l'intégrale

$$\int_{\mathrm{X}} (\widetilde{gg^*}\, f \mid f)(\text{dét}\, gg^*)^{-k-1}\, e^{-\varphi}\, d\tau,$$

(puisque dét gg^* est petit au voisinage de Z).

Il est donc intéressant d'obtenir un théorème valable pour $k = r = \mathrm{Inf}\,(n, p-q)$.

Lorsque $ic\,(\mathrm{M}) \geqq irc\,(\text{dét}\,\mathrm{Q})$, le lemme (3.6) nous dit simplement que

$$(ic(\mathrm{S} \otimes \mathrm{M}) \Lambda\, v \mid v) \geqq 0$$

pour toute $v \in \mathscr{C}^{\infty}_{n,1}\,(\mathrm{X}, \mathrm{S})$, c'est-à-dire que $\mathrm{S} \otimes \mathrm{M}$ est semi-positif au sens de Nakano, ce qui est insuffisant pour obtenir un théorème d'existence. On est donc amené à supposer que $ic\,(\mathrm{M}) - irc\,(\text{dét}\,\mathrm{Q}) > 0$.

Soit λ une fonction mesurable, qu'on suppose seulement pour l'instant $\geqq 0$ telle que

$$ic(\mathrm{M}) - irc(\text{dét}\,\mathrm{Q}) \geqq \lambda\omega. \tag{5.1}$$

D'après les lemmes (3.4), (3.5) et l'identité (3.13), on obtient l'inégalité

$$(ic(\mathrm{S} \otimes \mathrm{M}) \Lambda v \mid v) \geqq (\lambda\omega \Lambda v \mid v), \tag{5.2}$$

pour toute $v \in \mathscr{C}^{\infty}_{n,\,1}(\mathrm{X}, \mathrm{S} \otimes \mathrm{M})$. Soit encore d'après (3.9) :

$$(ic(\mathrm{S} \otimes \mathrm{M}) \Lambda v \mid v) \geqq \lambda \mid v \mid^2. \tag{5.3}$$

On en déduit l'estimation suivante qui n'est qu'une variante de la proposition 3.1 :

$$\| \delta''_{\varphi} v \|^2_{\varphi} + \| d'' v \|^2_{\varphi} \geqq (i\, d'\, d''\, \varphi \Lambda v \mid v)_{\varphi} + \int_{\mathrm{X}} \lambda \mid v \mid^2 e^{-\varphi}\, d\tau, \tag{5.4}$$

pour toute $v \in \mathscr{D}^{\infty}_{n,\,1}(\mathrm{X}, \mathrm{S} \otimes \mathrm{M})$.

On peut alors reprendre mot pour mot les raisonnements du paragraphe précédent et résoudre l'équation :

$$d'' u = w,$$

où w est une $(n, 1)$ forme à valeurs dans $\mathrm{S} \otimes \mathrm{M}$, d''-fermée, et vérifiant l'estimation

$$\int_{\mathrm{X}} \lambda^{-1} \mid w \mid^2 d\tau < +\infty. \tag{5.5}$$

Les poids φ, φ_1, φ_2, φ_3 vérifiant (4.3) et (4.8), on a l'estimation

$$(1+\varepsilon) \| \mathrm{T}_1^* v \|^2_{\varphi_1} + \| \mathrm{T}_2 v \|^2_{\varphi_2} \geqq \int_{\mathrm{X}} \lambda \mid v \mid^2 e^{-\varphi}\, d\tau.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on en déduit la majoration

$$\mid (w \mid v)_{\varphi_2} \mid^2 \leqq \left(\int_{\mathrm{X}} \lambda^{-1} \mid w \mid^2 e^{-\varphi_1}\, d\tau \right) (1+\varepsilon) \| \mathrm{T}^* v \|^2_{\varphi_1}, \tag{5.6}$$

pour $v \in \mathrm{Dom}\, \mathrm{T}_1^* \cap \mathrm{Ker}\, \mathrm{T}_2$.

Sous réserve de choisir φ de sorte que : (5.7) $\| w \|_{\varphi_2} < +\infty$, on peut répéter les arguments du paragraphe 4 et obtenir $u \in \mathrm{L}^2_{n,\,0}(\mathrm{X}, \mathrm{S} \otimes \mathrm{M})$ telle que

$$d'' u = w, \tag{5.8}$$

$$\| u \|^2_{\varphi_1} \leqq (1+\varepsilon) \int_{\mathrm{X}} \lambda^{-1} \mid w \mid^2 e^{-\varphi_1}\, d\tau. \tag{5.9}$$

Puis, on choisit comme précédemment dans le paragraphe 4 ψ et φ, de manière à vérifier (4.3), (4.8), (5.7), $\varphi_1 \geqq 0$, et φ_1 nulle sur un compact donné arbitraire de X. On en déduit par passage à la limite sur ce compact et sur $\varepsilon > 0$, une solution w de (5.8) vérifiant l'estimation :

$$\int_X |u|^2 \, d\tau \leqq \int_X \lambda^{-1} |w|^2 \, d\tau. \tag{5.10}$$

En multipliant la métrique de M par le poids $e^{-\varphi}$ (dét $gg^*)^r$ de manière à pouvoir munir dét Q de la métrique déduite de celle donnée sur Q, et non pas de celle déduite de la métrique quotient sur Q [*cf.* (4.25)], on a le résultat suivant qui généralise la proposition 4 de [40] et le théorème 3 de [42].

THÉORÈME 3. — *Soit* $g : E \to Q$ *un morphisme de fibrés, vectoriels, holomorphes, hermitiens au-dessus de* X. *On suppose que* X, E *et* Z *vérifient les hypothèses du théorème* 2. *Soit* M *un fibre linéaire et* λ *une fonction mesurable* $\geqq 0$ *telle que :* $ic(\mathrm{M}) - irc(\text{dét Q}) \geqq \lambda\omega$.

Soit enfin φ *une fonction plurisousharmonique de classe* C^2 *sur* X. Alors pour toute $(n, 1)$ *forme* w *à valeurs dans* $E \otimes M$ *telle que*

$$d''w = 0 \qquad \text{et} \qquad gw = 0,$$

$$\int_X \lambda^{-1} |w|^2 (\text{dét}\, gg^*)^{-r} e^{-\varphi} \, d\tau < +\infty, \tag{5.11}$$

il existe une $(n, 0)$ *forme* u *à valeurs dans* $E \otimes M$ *telle que*

$$d''u = w, \qquad gu = 0,$$

$$\int_X |u|^2 (\text{dét}\, gg^*)^{-r} e^{-\varphi} \, d\tau \leqq \int_X \lambda^{-1} |w|^2 (\text{dét}\, gg^*)^{-r} e^{-\varphi} \, d\tau. \tag{5.12}$$

En particulier si g est surjectif si $ic(\mathrm{M}) - irc(\text{dét Q}) > 0$, on peut choisir pour λ une fonction continue > 0 et w étant donnée, choisir la fonction φ de manière à assurer la convergence de (5.11).

On a donc :

COROLLAIRE 5.1. — *Soit :* $0 \to S \to E \xrightarrow{g} Q \to 0$ *une suite exacte de fibrés vectoriels, holomorphes, hermitiens.* E *et* X *vérifiant les hypothèses du théorème* 2, *si* M *est un fibré linéaire tel que* $M \otimes (\text{dét Q})^{-r} > 0$, *alors*

$$H^1(X, S \otimes K \otimes M) = 0.$$

Remarque 5.1. — Plus généralement on a : $H^j(X, S \otimes K \otimes M) = 0$ pour $j > 0$, l'inégalité du lemme (3.1) étant valable pour les (n, q) formes. Mais seul le cas $j = 1$ nous intéresse ici.

Fin de la démonstration du théorème 3. — Complétons la démonstration lorsque $Z \neq \varnothing$. Soit Y le fermé contenant Z de la définition. On applique le théorème dans $X \setminus Y$. On a donc une solution u de

$$d''u = w, \qquad gu = 0,$$

dans $X \setminus Y$, vérifiant l'estimation (5.12). Soit $y \in Y$ et U un voisinage assez petit de y. Soit u_0 une solution de $d''u_0 = w$ dans U. $u - u_0$ est holomorphe dans $U \setminus Y$ et de carré intégrable dans U d'après (5.12), donc $u-u_0$ se prolonge holomorphiquement à U; ce qui montre que

$$d''u = w,$$

dans X, et achève de démontrer le théorème 3.

Soit maintenant $f \in H^0(X, Q \otimes K \otimes M)$ vérifiant l'estimation

$$\int_X \lambda^{-1} |\beta^* f|^2 d\tau < +\infty.$$

On peut appliquer le théorème à $w = -\beta^* f$, résoudre

$$d''u = -\beta^* f.$$

$$h = f-u,$$

est holomorphe, est solution de : $gh = f$ et vérifie :

$$\int_X |h|^2 d\tau \leqq \int_X (|f|^2 + \lambda^{-1} |\beta^* f|^2) d\tau. \tag{5.13}$$

Dans cette estimation Q est muni de la métrique quotient. On va estimer $|\beta^* f|^2$ simplement en fonction de dét gg^*.

Montrons que :

$$|\beta^* f|^2 d\tau \leqq |f|^2 (i \operatorname{Tr} \beta\beta^*) \wedge \frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!} \tag{5.14}$$

(où $\omega^{n-1} = \omega \wedge \omega \wedge \ldots \wedge \omega$, $n-1$ fois), en tout point x de X. Pour chaque $x \in X$ fixé, choisissons des repères orthonormés dans l'espace tangent T_x, et dans les fibres S_x et Q_x. Soit β_{jk} et f_j les matrices qui représentent β et f dans ces repères et

$$\beta_{jk} = \sum_{\lambda=1}^{n} \beta_{jk\lambda} dz_\lambda,$$

l'écriture canonique de β_{jk}.

(5.14) équivaut alors à

$$\sum_{k,\lambda} |\sum_j \bar{\beta}_{jk\lambda} f_j|^2 \leqq |f|^2 \sum_{j,k,\lambda} |\beta_{jk\lambda}|^2, \tag{5.15}$$

car si $\theta = i \sum_{\lambda,\mu} \theta_{\lambda\mu} dz_\lambda \wedge d\bar{z}_\mu$, on a

$$\theta \wedge \frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!} = (\sum \theta_{\lambda\lambda}) \frac{\omega^n}{n!}.$$

(5.15) résulte trivialement de l'inégalité de Cauchy-Schwartz; d'où résulte (5.14).

D'après (3.16), on a d'autre part

$$i\,\mathrm{Tr}\,\beta\beta^* \leqq ic(\text{dét}\,\mathrm{Q}),$$

si Q est muni de la métrique quotient.

L'estimation (5.13) devient

$$\int_{\mathrm{X}} |h|^2\, d\tau \leqq \int_{\mathrm{X}} |f|^2 \left(\frac{\omega}{n} + \lambda^{-1}\, ic(\text{dét}\,\mathrm{Q})\right) \wedge \frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!}.$$

En munissant maintenant Q d'une métrique arbitraire et tenant compte de (4.24), on obtient le résultat suivant qui généralise le théorème 2 de [41] et le théorème 4 de [43] (on améliore même un peu les constantes des estimations L^2) :

THÉORÈME 4 — *Soit* $g : \mathrm{E} \to \mathrm{Q}$ *un morphisme de fibrés vectoriels, holomorphes, hermitiens au-dessus de la variété* X. *On suppose que* E *et* X *vérifient les hypothèses du théorème* 2. *On suppose que l'ensemble :* $\mathrm{Z} = \{ x \in \mathrm{X} \mid \mathrm{Im}\, g\,|_{\mathrm{E}_x} \neq \mathrm{Q}_x \}$ *est vide ou* X*-négligeable.*

Soit M *un fibré linéaire et* λ *une fonction mesurable* > 0 *tels que* $ic(\mathrm{M}) - ir\, c\,(\text{dét}\,\mathrm{Q}) \geqq \lambda\omega$. *Soit enfin* φ *une fonction plurisousharmonique de classe* C^2. *Alors pour toute*

$$f \in \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathrm{Q} \otimes \mathrm{K} \otimes \mathrm{M})$$

telle que

$$\int_{\mathrm{X}\setminus\mathrm{Z}} (\tilde{g}g^* f \mid f)(\text{dét}\, gg^*)^{-r-1} [1 + \lambda^{-1}\, \mathrm{Tr}\, ic'(\text{dét}\,\mathrm{Q})]\, e^{-\varphi}\, d\tau < +\infty$$

il existe $h \in \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathrm{E} \otimes \mathrm{K} \otimes \mathrm{M})$ *telle que*

$$gh = f,$$

$$\int_{\mathrm{X}} |h|^2 (\text{dét}\, gg^*)^{-r} e^{-\varphi}\, d\tau \leqq \int_{\mathrm{X}\setminus\mathrm{Z}} (\widetilde{gg}^* f \mid f)(\text{dét}\, gg^*)^{-r-1} [1 + \lambda^{-1}\, \mathrm{Tr}\, ic'(\text{dét}\,\mathrm{Q})]\, e^{-\varphi}\, d\tau,$$

où $c'(\text{dét}\,\mathrm{Q}) = id'\,d'' \log \text{dét}\, gg^* + ic\,(\text{dét}\,\mathrm{Q})$, *et où* T r *désigne la trace d'une* (1.1) *forme relativement à la métrique hermitienne* ω *sur* X.

Comme $c'(\text{dét})\,\mathrm{Q}) \geqq 0$ [d'après (3.16)], on a $id'\,d'' \log \text{dét}\, gg^* \geqq -ic\,(\text{dét}\,\mathrm{Q})$ sur X/Z. Il en résulte aisément que log dét gg^* est, localement sur X, la somme d'une fonction plurisousharmonique et d'une fonction de classe C^2. Par suite, les coefficients de $id'\,d''$ log dét gg^* sont localement sommables sur X (*cf.* P. Lelong (30]). Si $(\widetilde{gg}^* f \mid f)\,(\text{dét}\, gg^*)^{-r-1}$ est localement bornée sur X, on peut alors choisir φ de manière à faire converger l'intégrale du théorème 4. On a donc

COROLLAIRE 5.2. — *Sous les hypothèses du théorème* 4 (*en particulier* $\mathrm{M} \otimes (\text{dét}\,\mathrm{Q})^{-r} > 0$), *si* $f \in \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathrm{Q} \otimes \mathrm{K} \otimes \mathrm{M})$ *est telle que* $(\tilde{g}g^* f \mid f)$ $(\text{dét}\, gg^*)^{-r-1}$ *soit localement bornée sur* X (*i. e.* f *est assez petite au voisinage de* Z), *alors il existe* $h \in \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathrm{E} \otimes \mathrm{K} \otimes \mathrm{M})$ *telle que :* $f = gh$.

En particulier quand Z est vide on obtient :

COROLLAIRE 5.3. — E et X *vérifiant les hypothèses du théorème* 4, *si le morphisme* g *est surjectif, alors pour tout fibré linéaire* M *tel que* $M \otimes (\text{dét } Q)^{-r} > 0$, *le morphisme induit* g_* :

$$H^0(E \otimes K \otimes M) \to H^0(Q \otimes K \otimes M),$$

est surjectif.

Ce corollaire est aussi une conséquence directe du corollaire 5.1 et de la suite exacte 1.2.

Remarque 5.2. — Dans le théorème, respectivement ses corollaires, on peut remplacer l'hypothèse de courbure par les conditions plus générales mais plus techniques

$$ic(E) + i\,d'\,d''\,\varphi + ic(M) - irc(\text{dét } Q) > 0,$$

$$\text{resp. } ic(E) + ic(M) - irc(\text{dét } Q) > 0.$$

La positivité étant celle de Nakano [et avec l'abus de langage consistant à omettre la tensorisation par Id_E pour les (1.1) formes à valeurs réelles].

Si on fait l'hypothèse

$$ic(M) - ric(\text{dét } Q) + \text{Ricci}\,\omega \geqq \lambda\omega,$$

dans le théorème 4, alors le résultat est vrai sans tensoriser par le fibré canonique K.

Remarque 5.3. — Sous l'hypothèse $ic(M) - irc(N) > 0$ [avec $r = \text{Inf}(n, p-1)$] on peut d'après le corollaire 5.3, faire $k = r$ dans le corollaire 1.5.

Lorsque X est compacte, on peut utiliser la théorie de Hodge pour affaiblir un peu l'hypothèse de positivité du corollaire 5.3, en supposant seulement que $ic(M) - r\,ic(\text{dét } Q)$ est $\geqq 0$ sur X et > 0 en un point. On raisonne comme O. Riemenschneider dans le cas des fibrés linéaires [37]. Soit $v \in \mathscr{C}^{\infty}_{n,1}(X, S \otimes K \otimes M)$ une forme harmonique. L'inégalité (5.4) appliquée avec $\varphi = 0$ montre que v est identiquement nulle au voisinage de tout point où la forme $ic(M) - r\,ic(\text{dét } Q)$ est > 0. D'après le résultat d'Aronszajn [3] v est identiquement nulle. $H^1(X, S \otimes K \otimes M)$ est donc nul; d'où le corollaire suivant :

COROLLAIRE 5.4. — E *vérifiant les hypothèses du théorème* 4, *si* X *est compacte et connexe, si la forme* $ic(M) - ir\,c(\text{dét } Q)$ *est* $\geqq 0$ *et* > 0 *en un point de* X, *si* g *est surjectif, alors le morphisme* g_* :

$$H^0(X, \otimes K \otimes M) \to H^0(X, Q \otimes K \otimes M)$$

est surjectif.

Il nous paraît intéressant de montrer qu'un cas particulier des corollaires 5.1 et 5.3 peut également s'obtenir comme conséquence d'un théorème d'annulation de P. A. Griffiths [19].

Supposons X compacte. Le résultat de Griffiths dit que si la forme

$$K(E) = (p+1)\,c(E) - \text{Trace}\,c(E) \otimes \text{Id}_E$$

est >0 au sens de Griffiths (où p = rang de E), alors

$$H^1(X, E\otimes K)=0$$

[la trace est celle de Hom (E, E)].

On applique ce résultat à $S\otimes(\text{dét }Q)^s$, en supposant que E est produit tensoriel d'un fibré linéaire $L>0$ et d'un fibré plat (i. e. à courbure nulle) (cas particulier déjà bien intéressant).

On a alors d'après (3.10) :

$$c(S)=c(L)\otimes \mathrm{Id}_S+\beta^*\wedge\beta.$$

On en déduit

$$K(S)=c(L)\otimes \mathrm{Id}_S+(s+1)\beta^*\wedge\beta-\mathrm{Tr}\,\beta^*\wedge\beta\otimes \mathrm{Id}_S.$$

Soit $e\in S$ tel que $|e|=1$, $(e_1, e_2, \ldots, e_s)$ une base orthonormée de la fibre de s telle que $e=e_1$, on a alors

$$(K(S)e\,|\,e)=c(L)-(s+1)(\beta e\,|\,\beta e)+\sum_{i=1}^{s}(\beta e_i\,|\,\beta e_i),$$

$$(K(S)e\,|\,e)>-s\sum_{i=1}^{s}(\beta e_i\,|\,\beta e_i),$$

$$(K(S)e\,|\,e)>s\,\mathrm{Tr}\,\beta^*\beta\,|e|^2,$$

$K(S)>-s\,\mathrm{Tr}\,\beta\beta^*>-s\,c(\text{dét }Q)$,

où les produits scalaires sont ceux de la fibre de S.

On a donc :

$$K(S\otimes(\text{dét }Q)^s)>0$$

et par conséquent :

$$H^1(X, K\otimes S\otimes(\text{dét }Q)^s)=0.$$

D'où les corollaires 5.1 et 5.3 avec l'entier s seulement au lieu de $r=\mathrm{Inf}(n, s)$, et sous les hypothèses restrictives sur X et E faites plus haut. Il serait intéressant d'étudier plus précisément les liens entre la positivité de K (E) au sens de Griffiths et la positivité de c (E) au sens de Nakano.

Remarque 5.4. — Si X est une sous-variété de dimension n de l'espace projectif $\mathbf{P}_r$ et si $g_j\in O_X(\nu)$ sont des sections sans zéros communs du fibré linéaire $O_X(\nu)$ (*cf.* [38]) ($\nu\geqq 0$, $1\leqq j\leqq p$), le corollaire 5.4, s'applique au morphisme g :

$$\mathbf{C}^p\otimes O(\nu)\to O(\nu),$$

défini par les g_j.

Soit l le plus petit entier tel que

$$O_X(l)\otimes K_X^{-1}\geqq 0, \tag{5.16}$$

(K_X étant le fibré canonique de X), i. e. $l\,\omega+\text{Ricci}\,\omega\geqq 0$ sur X.

Le corollaire 5.4, montre alors que toute section $f\in H^0(X, O(k))$ appartient à l'idéal engendré par les g_j dès que

$$k>(n+1)\nu+l.$$

En particulier si X est une intersection complète, définie par $r-n$ polynômes homogènes de degré $a_1, a_2, \ldots, a_{r-n}$, on a $K_X\simeq O_X(a_1+a_2+\ldots+a_{r-n}-r-1)$, (*cf.* par exemple K. Ueno [44], p. 71), de sorte que dans ce cas

$$l=a_1+a_2+\ldots+a_{r-n}-r-1.$$

Il est particulièrement satisfaisant d'observer (ainsi que nous l'a fait remarquer J.-P. Serre) que la majoration

$$k>(n+1)\nu+a_1+a_2+\ldots+a_{r-n}-r-1,$$

est optimale et est précisément celle qu'on obtient par des méthodes algébriques en utilisant par exemple le complexe de Koszul et les théorèmes d'annulation de J.-P. Serre pour les faisceaux $O_X(k)$ lorsque X est intersection complète (*cf.* J.-P. Serre [38], p. 273, proposition 5).

De plus d'après la même proposition, toute section de $O_X(k)$ est dans ce cas la restriction d'un polynôme homogène de degré k sur $\mathbf{C}^{r+1}$, de sorte que le résultat se traduit immédiatement en un résultat algébrique sur les polynômes de $\mathbf{C}^{r+1}$. On peut également (ainsi que nous l'ont fait observer P. Mazet et J.-P. Serre) utiliser le complexe de Koszul, associé à des suites régulières convenables de polynômes homogènes dans $\mathbf{C}^{r+1}$. Ce type de résultat était déjà connu d'algébristes comme Macaulay.

Lorsque X n'est pas intersection complète, soit N son fibré normal dans $\mathbf{P}_r$, la formule classique (*cf.* [44], p. 70) :

$$K_X\simeq K_{\mathbf{P}_r\,|\,X}\otimes\text{dét}\,N,$$

montre que la condition (5.16) est encore équivalente à

$$O(l+r+1)\otimes(\text{dét}\,N)^{-1}\geqq 0.$$

Il est immédiat en utilisant encore le corollaire 5.4, de généraliser les résultats précédents à une (p, q) matrice de sections de $O_X(\nu)$ de rang maximal. Un q-vecteur de sections de $O_X(k)$ appartient au module engendré par les vecteurs colonnes dès que

$$k>(nq+1)\nu+l.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Andreotti et H. Grauert, *Théorème de finitude pour la cohomologie des espaces complexes* (*Bull. Soc. math. Fr.* t. 90 1962, p. 193-259).

[2] A. Andreotti et E. Vesentini, *Carleman Estimates for the Laplace-Beltrami Equations on Complex Manifolds* (*Publ. Math. Inst. Hautes Études Sc.*, vol. 25, 1965, p. 81-130).

[3] N. Aronszajn, *A Unique Continuation Theorem for Solutions of elliptic Partial Differential Equations or Inequalities of Second Order* (*J. Math. pures et appl.*, t. 36, 1957, p. 235-249).

[4] M. Berger et A. Lascoux, *Variétés kählériennes Compactes* (*Lectures Notes in Mathematics*, n° 154, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1970).

[5] D. Barlet, *Convexité de l'espace des cycles* (*Bull. Soc. math. Fr.*, 106, 1978, p. 373-397).

[6] S. Bochner et Yano, *Curvature and Betti Numbers*, Princeton, 1951.

[7] J. Briançon et H. Skoda, *Sur la clôture intégrale d'un idéal de germes de fonctions holomorphes en un point de* $\mathbf{C}^n$ (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 278, série A, 1974, p. 949-951).

[8] J. Briançon, *Sur la clôture intégrale d'un idéal de germes de fonctions holomorphes en un point de* $\mathbf{C}^n$, preprint, Université de Nice, février 1974 (non publié).

[9] H. Cartan, *Idéaux et modules de fonctions analytiques de variables complexes* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. 78, 1950, p. 28-64).

[10] H. Cartan, *Séminaire E.N.S.*, 1952/1952, École normale supérieure, Paris.

[11] I. Cnop, *Spectral Study of Holomorphic Functions with Bounded Growth* (*Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, vol. 22, 1972, p. 2).

[12] M. Cornalba et P. A. Griffiths, *Analytic Cycles and Vector Bundles on Non-Compact Algebraic Varieties* (*Inventiones Math.*, vol. 28, 1975, p. 1-106).

[13] A. Douady et J.-L. Verdier, *Séminaire de Géométrie analytique*, *E.N.S.*, 1972-1973 [*Différents aspects de la positivité* (*Astérisque*, vol. 17, 1974, Société mathématique de France)].

[14] J.-P. Ferrier, *Approximation avec croissance des fonctions holomorphes de plusieurs variables* (*Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, vol. 22, 1972, p. 67-87).

[15] G. B. Folland et J.-J. Kohn, *The Neumann Problem for the Cauchy Riemann Complex* (*Annals Math. Studies*, 75, Princeton University Press, 1972.

[16] H. Grauert, *On Levi's Problem and the Imbedding of real Analytic Manifolds* (*Ann. Math.*, vol. 68, 1958, p. 460-472).

[17] H. Grauert, *Ueber Modifikationen und exzeptionnelle analytische Mengen* (*Math. Ann.*, 1962, 1946).

[18] H. Grauert et O. Riemenschneider, *Verschwindungssatz für analytische Kohomologie-gruppen auf Komplexen Raümen* (*Inv. Math.*, vol. 11, 1970, p. 263-292).

[19] P. A. Griffiths, *Hermitian Differential Geometry* (*Chern Classes and Positive Vector Bundles, Global Analysis*, Princeton University Press, 1969, p. 185-251).

[20] A. Hirschowitz, *Le problème de Levi pour les espaces homogènes*, *Bull. Soc. Math. Fr.* 103, 1975, p. 191-201).

[21] L. Hörmander, L^2 *Estimates and Existence Theorem for the* $\bar{\partial}$*-Operator* (*Acta Math.*, vol. 113, 1965, p. 89-152).

[22] L. Hörmander, *An introduction to Complex Analysis in Several Variables*, Princeton, Van Nostrand Company, 1966, 2e éd. 1973.

[23] L. Hörmander, *Generators for some Rings of Analytic Functions* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 73, 1967, p. 943).

[24] J. J. Kelleher et B. A. Taylor, *Finitely Generated Ideals in Rings of Analytic Functions* (*Math. Ann.*, vol. 193, n° 3, 1971).

[25] J. Le Potier, *Annulation de la cohomologie à valeurs dans un fibré vectoriel holomorphe positif de rang quelconque* (*Math. Ann.*, vol. 218, 1975, p. 35-53).

[26] Kazama, *On pseudoconvexity of Complex Abelian Lie Groups* (*J. Math. Soc. Japan*, vol. 25, n° 2, p. 329-333).

[27] K. Kodaïra, *On a Differential-Geometrie Method in the Theory of Analytic Stacks* (*Proc. Nat. Acad. Sc.*, U.S.A., vol. 39, 1953, p. 1268-1273).

[28] K. KODAÏRA, *On Cohomology Groups of Compact Analytic Varieties with Coefficients in some Analytic sheaves* (*Proc. Nat. Sc.*, U.S.A., vol. 39, 1953, p. 66-74).

[29] K. KODAÏRA, *On Kähler Varieties of Restricted Type* (*Ann. of Math.*, vol. 60, 1954, p. 28-48).

[30] P. LELONG, *Fonctionnelles analytiques et fonctions entières* (*n variables*), Montréal, les Presses de l'Université de Montréal, 1968 (*séminaire de Mathématiques Supérieures*, été 1967, n° 28).

[31] MORIMOTO, *Non Compact Lie Groups without non Constant Holomorphic Functions* (*Proceedings of the Conference on Complex Analysis at University of Minneapolis*, 1965, p. 256-272).

[32] MORIMOTO, *On the Classification of non Compact Complex Abelian Lie Groups* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 123, 1966, p. 200-228).

[33] S. NAKANO, *On Complex Analytic Vector Bundles* (*J. Math. Soc. Japan*, vol. 7, 1955, p. 1-12).

[34] S. NAKANO, *Vanishing Theorems for weakly* 1-*complete Manifolds* II, Publ. R.I.M.S., Kyoto University, vol. 10, 1974, p. 101.

[35] P. PFLUG, *Ueber polynomiale Funktionen auf Holomorphiegebieten* (*Math. Z.*, vol. 139, 1974, p. 133-139).

[36] R. P. PFLUG, *Holomorphiegebiete, pseudokonvexe Gebiete und das Levi-Problem* (*Lecture Notes in Mathematics*, n° 432, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1975).

[37] O. RIEMENSCHNEIDER, *Characterizing Moïschezonspaces* (*Math. Z.*, vol. 123, 1971, p. 263-284).

[38] J.-P. SERRE, *Faisceaux algébriques cohérents* (*Ann. of Math.*, vol. 61, 1955, p. 197-278).

[39] M. SCHNEIDER, *Lefschetz Theorems and a Vanishing Theorem of Grauert-Riemenschneider* (*Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, vol. 30, *Several Complex Variables*, Amer. Math. Society, Providence, t. 2, 1977, p. 35-39).

[40] M. SCHNEIDER, *Ein einfacher Beweis des Verschwindungssatzes für positive holomorphe Vektorraumbündel* (*Manusc. Math.*, vol. 11, 1974, p. 95-101).

[41] H. SKODA, *Application des techniques* L^2 *à la théorie des idéaux d'une algèbre de fonctions holomorphes avec poids* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 5, 1972, p. 545-579).

[42] H. SKODA, *Formulation hilbertienne du Nullstellensatz dans les algèbres de fonctions holomorphes, paru dans « l'Analyse harmonique dans le domaine complexe »* (*Lecture Notes in Mathematics*, n° 336, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1973).

[43] H. SKODA, *Morphismes surjectifs et fibrés linéaires semi-positifs* (*Séminaire P. Lelong et* H. *Skoda* (*analyse*), 17e année, 1976-1977, *Lecture Notes*, n° 694).

]44] K. UENO, *Classification Theory of Algebraic Varieties and Compact Complex Spaces* (*Lecture Notes in Math.*, n° 439, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1975).

[45] A. WEIL, *Variétés kählériennes*, Hermann, Paris, 1958.

(Manuscrit reçu le 18 juillet 1978.)

H. SKODA,
Laboratoire d'Analyse complexe et Géométrie,
Associé au C.N.R.S. n° 213,
Université Pierre-et-Marie-Curie,
4, place Jussieu,
75230 Paris Cedex 05.