

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

T. JEULIN

M. YOR

Nouveaux résultats sur le grossissement des tribus

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 11, n° 3 (1978), p. 429-443

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1978_4_11_3_429_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOUVEAUX RÉSULTATS SUR LE GROSSISSEMENT DES TRIBUS

PAR T. JEULIN (*) et M. YOR (*)

Introduction

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité complet sur lequel on suppose données deux sous-filtrations $(\mathcal{G}_t)$ et $(\mathcal{F}_t)$, telles que pour tout t , $\mathcal{G}_t$ soit contenue dans $\mathcal{F}_t$.

On sait, d'après Stricker [9], que si un processus $(\mathcal{G}_t)$ -adapté est une $(\mathcal{F}_t)$ -semi-martingale, c'est également une $(\mathcal{G}_t)$ -semi-martingale.

Inversement, le problème du grossissement des tribus consiste à étudier les couples de filtrations $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ telles que :

$(\mathcal{H}')$ toute $(\mathcal{G}_t)$ -semi-martingale est une $(\mathcal{F}_t)$ -semi-martingale.

La propriété $(\mathcal{H}')$ est *a fortiori* vérifiée lorsque l'hypothèse $(\mathcal{H})$ suivante est en vigueur :

$(\mathcal{H})$ toute $(\mathcal{G}_t)$ -martingale est une $(\mathcal{F}_t)$ -martingale.

L'étude de cette hypothèse a été menée en [2]. On montre ici, au paragraphe A, comment l'on passe de $(\mathcal{H})$ à $(\mathcal{H}')$ par changement équivalent de probabilités. On y caractérise ensuite les filtrations $(\mathcal{G}_t)$ telles que $(\mathcal{H})$ soit vraie pour toute probabilité Q équivalente à P . Ceci permet de résoudre un problème posé par Dellacherie et Stricker en [5].

Au paragraphe B, on donne des inégalités générales concernant les normes H^p de processus qui sont à la fois des semi-martingales par rapport à $(\mathcal{F}_t)$ et à $(\mathcal{G}_t)$.

Revenons à l'hypothèse $(\mathcal{H}')$. Il a été montré, (cf. Barlow [1] et Yor [11]), que si L est la fin d'un ensemble $(\mathcal{G}_t)$ -optionnel, et pour tout t , $\mathcal{F}_t$ est la tribu engendrée par $\mathcal{G}_t$ et $(t < L)$, le couple $((\mathcal{G}_t), (\mathcal{F}_t))$ vérifie $(\mathcal{H}')$. On donne, au paragraphe C, une démonstration tout à fait simple et rapide de la démonstration canonique d'une $(\mathcal{G}_t)$ -martingale en tant que $(\mathcal{F}_t)$ -semi-martingale spéciale.

(*) Laboratoire de Calcul de Probabilités, Université Pierre-et-Marie-Curie, Paris-VI, Tour 56, 4, place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05.

De plus, à l'aide de B, il s'avère que, pour tout $1 \leq p < \infty$, la topologie induite par l'espace H^p [relatif à $(\mathcal{F}_t)$] sur l'espace H^p [relatif à $(\mathcal{G}_t)$] équivaut à la topologie naturelle sur ce dernier espace.

A. Un exemple simple de grossissement « raisonnable » d'une filtration

Conservons les notations de l'introduction : $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace probabilisé complet, muni de deux sous-filtrations $(\mathcal{G}_t)$ et $(\mathcal{F}_t)$ de $\mathcal{F}$, vérifiant les conditions habituelles, ainsi que : pour tout t , $\mathcal{G}_t$ est contenue dans $\mathcal{F}_t$.

On a montré en [2] le :

THÉORÈME 1. — *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) $(\mathcal{H})$ toute $(\mathcal{G}_t)$ -martingale (bornée) est une $(\mathcal{F}_t)$ -martingale;
- (ii) pour tout t , les tribus $\mathcal{F}_t$ et $\mathcal{G}_\infty$ sont conditionnellement indépendantes par rapport à $\mathcal{G}_t$.

L'hypothèse $(\mathcal{H})$ permet de comparer aisément les calculs stochastiques relatifs aux filtrations $(\mathcal{F}_t)$ et $(\mathcal{G}_t)$ (pour plus de précisions, voir [2]).

Toutefois, d'après le théorème 1, l'hypothèse $(\mathcal{H})$ est très « rigide », et une façon de l'assouplir est d'étudier les probabilités Q équivalentes à P sur la tribu $\mathcal{F}$.

On suppose désormais l'hypothèse $(\mathcal{H})$ en vigueur pour la probabilité P . On a alors la :

PROPOSITION 2. — *Soit Q une probabilité équivalente à P (sur $\mathcal{F}$). Alors la propriété : $(\mathcal{H}')$ toute $(\mathcal{G}_t, Q)$ -semi-martingale est une $(\mathcal{F}_t, Q)$ -semi-martingale est vérifiée.*

Démonstration. — D'après le théorème de Girsanov, on sait que l'espace des $(\mathcal{G}_t, Q)$ [resp. $(\mathcal{F}_t, Q)$] semi-martingales est identique à celui des $(\mathcal{G}_t, P)$ [resp. $(\mathcal{F}_t, P)$] semi-martingales. Or l'hypothèse $(\mathcal{H})$ entraîne, *a fortiori*, $(\mathcal{H}')$ pour P , et donc pour Q .

Nous allons maintenant établir la décomposition d'une $(\mathcal{G}_t, Q)$ -martingale en somme d'une $(\mathcal{F}_t, Q)$ -martingale locale, et d'un processus $(\mathcal{F}_t)$ -adapté, à variation bornée.

Pour cela, introduisons les notations suivantes :

$$\left. \frac{dQ}{dP} \right|_{\mathcal{G}_t} = R_t; \quad \left. \frac{dQ}{dP} \right|_{\mathcal{F}_t} = R'_t.$$

(Nous choisissons, bien entendu ici, pour R_t (resp. R'_t) une version càd làg de la $(\mathcal{G}_t, P)$ -martingale $E_P(dQ/dP | \mathcal{G}_t)$ [resp. de la $(\mathcal{F}_t, P)$ -martingale $E_P(dQ/dP | \mathcal{F}_t)$].

Remarquons ici que, en conséquence de l'hypothèse $(\mathcal{H})$, on a

$$R_t = E_P(R'_t | \mathcal{G}_t) = E_P(R'_t | \mathcal{G}_\infty).$$

Notons $Y = dQ/dP$. Un calcul élémentaire montre que la propriété $(\mathcal{H})$ est réalisée sous Q si, et seulement si

$$(\star) \quad \forall X \geq 0, \quad X \in \mathcal{G}_\infty, \quad \frac{E_P(XY | \mathcal{F}_t)}{R'_t} = \frac{E_P(XY | \mathcal{G}_t)}{R_t}.$$

En particulier, si dQ/dP est $\mathcal{G}_\infty$ -mesurable, $R_t = R'_t$, et la propriété $(\mathcal{H})$ est vérifiée sous Q . En outre, on donne plus loin une caractérisation de la propriété $(\star)$ en termes du couple $((\mathcal{G}_t), (\mathcal{F}_t))$.

Voici le résultat de décomposition annoncé plus haut :

THÉORÈME 3. — Si (X_t) est une $(\mathcal{G}_\cdot, Q)$ -martingale locale, alors le processus :

$$(1) \quad I_X(t) = X_t + \int_0^t \frac{R'_s}{R'_s} \left(\frac{1}{R_s} d[X, R]_s - \frac{1}{R'_s} d[X, R']_s \right)$$

est une $(\mathcal{F}_\cdot, Q)$ -martingale locale.

Remarque. — Avant de démontrer le théorème, soulignons que la formule proposée a bien un sens; en effet, X est une Q - (et donc P -) semi-martingale par rapport aux filtrations $(\mathcal{G}_t)$ et $(\mathcal{F}_t)$, ce qui permet bien de définir les crochets $[X, R]$ et $[X, R']$. D'autre part, ces expressions sont intrinsèques, c'est-à-dire qu'elles ne dépendent pas de la probabilité P ou Q , ni de la filtration $(\mathcal{G}_t)$ ou $(\mathcal{F}_t)$, par rapport auxquelles elles sont calculées.

Démonstration. — On a

$$\left. \frac{dP}{dQ} \right|_{\mathcal{G}_t} = \frac{1}{R_t} ;$$

autrement dit, $1/R$ est une $(\mathcal{G}_\cdot, Q)$ -martingale. D'après le théorème de Girsanov :

$$Y_t = X_t - \int_0^t R_s d\left[X, \frac{1}{R}\right]_s$$

est une $(\mathcal{G}_\cdot, P)$ -martingale locale.

L'hypothèse $(\mathcal{H})$ étant vérifiée par P , Y est donc une $(\mathcal{F}_\cdot, P)$ -martingale locale. En appliquant à nouveau le théorème de Girsanov, on trouve que

$$I_X(t) = Y_t - \int_0^t \frac{1}{R'_s} d[Y, R']_s,$$

est une $(\mathcal{F}_\cdot, Q)$ -martingale locale. Développons I_X ; il vient

$$\begin{aligned} I_X(t) &= X_t - \int_0^t R_s d\left[X, \frac{1}{R}\right]_s - \int_0^t \frac{1}{R'_s} d[X, R']_s + \int_0^t \frac{R_s}{R'_s} d\left[\left[X, \frac{1}{R}\right], R'\right]_s \\ &= X_t + \int_0^t R_s \left(\frac{\Delta R'_s}{R'_s} - 1 \right) d\left[X, \frac{1}{R}\right]_s - \int_0^t \frac{1}{R'_s} d[X, R']_s \\ &= X_t - \int_0^t \frac{R_s R'_{s-}}{R'_s} d\left[X, \frac{1}{R}\right]_s - \int_0^t \frac{1}{R'_s} d[X, R']_s. \end{aligned}$$

Or à l'aide de la formule d'Ito, on a

$$R_s d\left[X, \frac{1}{R}\right]_s = - \frac{R_s}{R_s R_{s-}} d[X, R]_s = - \frac{1}{R_{s-}} d[X, R]_s.$$

Finalement, on trouve pour I_X la formule (1) proposée.

Remarque. — Il existe une écriture condensée du processus I_X , à savoir

$$(2) \quad I_X(t) = X_t + \int_0^t \frac{1}{\pi_{s-}} d[X, \pi]_s,$$

où $\pi_t = R_t/R'_t$ est une $(\mathcal{F}_t, Q)$ -martingale.

La formule (2) se vérifie aisément en utilisant la formule d'Ito (relativement à $(\mathcal{F}_t)$ et P) pour développer R/R' .

Nous donnons dans la suite (th. 6) une condition, portant sur la filtration $(\mathcal{G}_t)$, qui est caractéristique du cas où la propriété $(\mathcal{H})$ est vérifiée pour toute probabilité Q équivalente à P . Auparavant, nous établissons deux lemmes techniques.

LEMME 4. — Soient $(A, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé complet, $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ deux sous-tribus de $\mathcal{F}$ (supposées $(\mathcal{F}, P)$ -complètes). Notons T l'opérateur [défini sur $L^1(\mathcal{F}, P)$] d'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{G} \cap \mathcal{H}$, sous P ; les assertions suivantes sont équivalentes :

(α) $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ sont conditionnellement indépendantes par rapport à $\mathcal{G} \cap \mathcal{H}$, sous toute probabilité Q équivalente à P ;

(β) pour toute $f \in L^1_+(\mathcal{G} \vee \mathcal{H}, P)$, pour toutes $g \in b\mathcal{G}$, $h \in b\mathcal{H}$,

$$T(fgh) T(f) = T(fg) T(fh);$$

(γ) pour toutes $g \in b\mathcal{G}$ et $h \in b\mathcal{H}$, $(g - T(g)) \cdot (h - T(h)) = 0$ P-p. s.;

(δ) $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ sont conditionnellement indépendantes par rapport à $\mathcal{G} \cap \mathcal{H}$, sous P et pour toutes $g \in b\mathcal{G}$ et $h \in b\mathcal{H}$, $(g - T(g)) (h - T(h)) \in b\mathcal{G}$.

Démonstration. — (α) est équivalente à : pour toute $f \in L^1(\mathcal{F}, P)$ telle que $P(f \leq 0) = 0$ et pour $g \in b\mathcal{G}$ et $h \in b\mathcal{H}$, $T(fgh) T(f) = T(fg) T(fh)$.

On peut remplacer f par $E_P(f | \mathcal{G} \vee \mathcal{H})$, puis oter la condition $f > 0$ en changeant f en $f + \varepsilon$ et en faisant tendre ε vers 0^+ . D'où l'équivalence des points (α) et (β).

Supposons (β) vérifiée; notons g (resp. h) l'élément générique de $b\mathcal{G}$ (resp. $b\mathcal{H}$); appliquons (β) à $f = 1 + g_1 h_1$ ($g_1 \in b\mathcal{G}$, $h_1 \in b\mathcal{H}$); on obtient :

$$\begin{aligned} & (T(g)T(h) + T(g_1 g)T(h_1 h))(1 + T(g_1)T(h_1)) \\ &= (T(g) + T(h_1)T(g_1 g)) \cdot (T(h) + T(g_1)T(h_1 h)), \end{aligned}$$

soit

$$(T(g_1 g) - T(g)T(g_1)) \cdot (T(h_1 h) - T(h)T(h_1)) = 0.$$

Soit, pour $g = g_1$ et $h = h_1$,

$$0 = T((g - T(g))^2) \cdot T((h - T(h))^2) = T((g - T(g))^2 \cdot (h - T(h))^2),$$

soit

$$(g - T(g)) \cdot (h - T(h)) = 0 \quad \text{P-p. s.,}$$

d'où (γ).

Supposons maintenant (γ) vérifiée et montrons (β) . On a

$$gh = g.T(h) + h.T(g) - T(g).T(h), \quad \text{d'où } T(gh) = T(g).T(h).$$

$\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ sont conditionnellement indépendantes par rapport à $\mathcal{G} \cap \mathcal{H}$ sous P . On peut aussi remonter les calculs précédents pour montrer que l'ensemble des variables aléatoires $f \in b(\mathcal{G} \vee \mathcal{H})$ vérifiant : pour toutes $g \in b\mathcal{G}$ et $h \in b\mathcal{H}$,

$$(\star\star) \quad T(fgh)T(f) - T(fg)T(fh) = 0$$

contient l'espace vectoriel E engendré par les produits $g_1.h_1$ ($g_1 \in b\mathcal{G}$, $h_1 \in b\mathcal{H}$).

Si $f \in b(\mathcal{G} \vee \mathcal{H})$, on pose

$$\varphi(f; g, h) = T(fgh)T(f) - T(fg)T(fh);$$

d'après (γ) , $\varphi(\cdot; g, h)$ est une forme quadratique en f , dont on note la forme polaire (symétrique en (f, f')) $S(f, f'; g, h)$.

Pour $f' \in E$, l'espace vectoriel $\{f \in b(\mathcal{G} \vee \mathcal{H}), S(f, f'; g, h) = 0\}$ contient E , puis, par classe monotone $b(\mathcal{G} \vee \mathcal{H})$; une nouvelle application du théorème de classe monotone montre que $\varphi(f; g, h) = 0$ pour toute $f \in b(\mathcal{G} \vee \mathcal{H})$. Ceci entraîne (β) par convergence dominée. L'équivalence de (γ) et (δ) est immédiate.

LEMME 5. — Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t)$ un espace probabilisé filtré vérifiant les conditions habituelles. Soit

$$\mathcal{T} = (T, (\mathcal{F}_t)\text{-temps d'arrêt}, \mathcal{F}_T = \mathcal{F}_\infty)$$

et soit $\tau = \text{ess inf } \mathcal{T}$. τ est un $(\mathcal{F}_t)$ -temps d'arrêt, $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_\infty$ et pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$(t < \tau) = \text{ess sup}(\{f - E(f \mid \mathcal{F}_t) \neq 0\}, f \in b\mathcal{F}_\infty).$$

Démonstration. — $\mathcal{T}$ est filtrant décroissant, d'où les premières propriétés énoncées pour τ .

Pour $f \in b\mathcal{F}_\infty$,

$$f - E(f \mid \mathcal{F}_t) = 1_{(t < \tau)}(f - E(f \mid \mathcal{F}_t));$$

par suite, si A_t désigne $\text{ess sup}(\{f - E(f \mid \mathcal{F}_t) \neq 0\}, f \in b\mathcal{F}_\infty)$, A_t est inclus P-p. s. dans $(t < \tau)$.

En outre, sur A_t^c , $f = E(f \mid \mathcal{F}_t)$ ($f \in b\mathcal{F}_\infty$), d'où

$$E(f; A_t^c) = E(E(f \mid \mathcal{F}_t); A_t^c) = E(f.E(1_{A_t^c} \mid \mathcal{F}_t)), \quad \text{soit } A_t \in \mathcal{F}_t.$$

$$\tilde{\tau} = \tau \quad \text{sur } (\tau \leq t) \cup A_t,$$

$$\tilde{\tau} = t \quad \text{sur } (t < \tau) \cap A_t^c,$$

définit un $(\mathcal{F}_t)$ -temps d'arrêt; par définition de A_t , $\tilde{\tau}$ appartient à $\mathcal{T}$. Cela nécessite $P(A_t^c \cap (t < \tau)) = 0$, d'où le lemme.

Voici maintenant la caractérisation annoncée :

THÉORÈME 6. — Pour tout $\mathcal{F}_t$ -temps d'arrêt T , notons $\tilde{\mathcal{F}}_{T-}$ la tribu engendrée par les ensembles $f_t \cap (t < T)$ (où $f_t \in \mathcal{F}_t$, $t \in \mathbf{R}_+$). Les assertions suivantes sont équivalentes :

(j) $(\mathcal{H})$ est vérifiée pour toute probabilité Q équivalente à P ;

(jj) il existe un $(\mathcal{F}_t)$ -temps d'arrêt T tel que $\tilde{\mathcal{F}}_{T-} \subset \mathcal{G}_\infty \subset \mathcal{F}_T$ et $\mathcal{G}_t = \mathcal{G}_\infty \cap \mathcal{F}_t$.

Remarque. — Si $\mathcal{F}_0$ est P -triviale, $\tilde{\mathcal{F}}_{T-} = \mathcal{F}_{T-}$.

Démonstration. — Supposons (jj) vérifiée; T , étant $\tilde{\mathcal{F}}_{T-}$ -mesurable, est un $(\mathcal{G}_t)$ -temps d'arrêt; en outre, si $g \in \mathcal{G}_\infty$, alors $g \in \mathcal{F}_T$, donc

$$g 1_{(T \leq t)} \in \mathcal{F}_t \cap \mathcal{G}_\infty = \mathcal{G}_t$$

et

$$g - E(g \mid \mathcal{G}_t) = (g - E(g \mid \mathcal{G}_t)) 1_{(t < T)};$$

si $f_t \in b \mathcal{F}_t$, $f_t 1_{(t < T)}$ est $\tilde{\mathcal{F}}_{T-}$ -mesurable, donc $\mathcal{G}_\infty$ -mesurable; $f_t 1_{(t < T)}$ est donc $\mathcal{G}_t$ -mesurable, d'où

$$f_t - E(f_t \mid \mathcal{G}_t) = (f_t - E(f_t \mid \mathcal{G}_t)) 1_{(T \leq t)}.$$

On a donc

$$(g - E(g \mid \mathcal{G}_t)) \cdot (f_t - E(f_t \mid \mathcal{G}_t)) = 0,$$

pour $g \in b \mathcal{G}_\infty$ et $f_t \in b \mathcal{F}_t$; il suffit d'appliquer le lemme 4, (γ), avec $\mathcal{G} = \mathcal{G}_\infty$ et $\mathcal{H} = \mathcal{F}_t$, pour obtenir (j), d'après le théorème 1.

Supposons maintenant (j) vérifiée; d'après le lemme 4, pour $g \in b \mathcal{G}_\infty$ et $f_t \in b \mathcal{F}_t$,

$$(g - E(g \mid \mathcal{G}_t)) \cdot (f_t - E(f_t \mid \mathcal{G}_t)) = 0 \quad P\text{-p. s.};$$

si on applique le lemme 5 à la filtration $(\mathcal{G}_t)$, on obtient un $(\mathcal{G}_t)$ -temps d'arrêt τ tel que, pour tout t de $\mathbf{R}_+$,

$$(t < \tau) = \text{ess sup}(\{g - E(g \mid \mathcal{G}_t) \neq 0\}, g \in b \mathcal{G}_\infty);$$

on a donc

$$(f_t - E(f_t \mid \mathcal{G}_t)) 1_{(t < \tau)} = 0, \quad \text{pour } f_t \in b \mathcal{F}_t,$$

d'où $f_t 1_{(t < \tau)} \in \mathcal{G}_\infty$ dans les mêmes conditions, soit $\tilde{\mathcal{F}}_{\tau-} \subset \mathcal{G}_\infty$. En outre, τ est un $\mathcal{F}_t$ -temps d'arrêt et $\mathcal{G}_\infty = \mathcal{G}_\tau \subset \mathcal{F}_\tau$; on a donc (jj).

Nous appliquons maintenant le théorème 6 à l'étude d'un problème posé par Dellacherie et Stricker en [5] (p. 373). De quoi s'agit-il? Le cadre initial est constitué d'un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$; les auteurs de [5] demandent de caractériser les sous tribus $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$, supposées $(\mathcal{F}, P)$ -complètes et telles que l'opérateur d'espérance conditionnelle $E^\mathcal{G}$ [défini sur $L^2(\mathcal{F}, P)$] soit un opérateur d'intégrale stochastique, c'est-à-dire :

Il existe un processus prévisible borné φ , tel que

$$(3) \quad \forall X \in L^2(\mathcal{F}, P), \quad E^\mathcal{G}(X) = \int_0^\infty \varphi_s dX_s;$$

où $(X_s, s \in \mathbf{R}_+)$ désigne la $(\mathcal{F}_s)$ -martingale de variable terminale X .

On a alors le :

COROLLAIRE 7. — Si $\mathcal{G}$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}$ telle que $E^{\mathcal{G}}$ soit un opérateur d'intégrale stochastique, il existe un $(\mathcal{F}_t)$ -temps d'arrêt T , tel que $\mathcal{F}_{T-} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F}_T$.

Démonstration. — Posons $\mathcal{G}_t = \mathcal{G} \cap \mathcal{F}_t$.

Remarquons que, d'après (3), on a

$$(4) \quad E^{\mathcal{F}_t} E^{\mathcal{G}} = E^{\mathcal{G}} E^{\mathcal{F}_t} = E^{\mathcal{G}_t}.$$

On en déduit que $\bigvee_t \mathcal{G}_t = \mathcal{G}$ (ce qui n'était pas évident *a priori*!). La filtration $(\mathcal{G}_t)$ a donc pour tribu terminale $\mathcal{G}$. On peut donc appliquer le théorème 6, et il suffit de montrer l'assertion (j).

D'après (4), $(\mathcal{H})$ est vérifiée sous P . D'après le lemme 4, (8), il reste à montrer : pour toute $g \in b\mathcal{G}$ et $f_t \in b\mathcal{F}_t$, la variable $I_t = (g - E(g | \mathcal{G}_t)) \cdot (f_t - E(f_t | \mathcal{G}_t))$ est $\mathcal{G}$ -mesurable.

Or, d'après (3), on a

$$I_t = \left(\int_t^\infty \varphi_s dg_s \right) \left(\int_0^t (1 - \varphi_s) df_s \right).$$

Notons

$$N_u = \int_0^{t \wedge u} (1 - \varphi_s) df_s \quad \text{et} \quad M_u = \int_{t \wedge u}^u \varphi_s dg_s.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} I_t &= M_\infty N_\infty = \int_0^\infty N_{u-} dM_u + \int_0^\infty M_{u-} dN_u + [M, N]_\infty \\ &= \int_t^\infty \varphi_u N_{u-} dg_u + \int_0^t M_{u-} dN_u + \int_0^t d[M, N]_u. \end{aligned}$$

Or, pour $u \in [0, t]$, on a $M_u = 0$, d'où

$$I_t = \int_t^\infty \varphi_u N_{u-} dg_u$$

est $\mathcal{G}$ -mesurable, car d'après (3),

$$I_t = E(X | \mathcal{G}), \quad \text{où} \quad X = \int_t^\infty N_{u-} dg_u.$$

$\mathcal{G}_0$ étant égale à $\mathcal{F}_0$ [d'après (3)], le corollaire est démontré.

En particulier, il découle du corollaire 7 que, si toute $(\mathcal{F}_t, P)$ -martingale est continue, une sous-tribu $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$ induit un opérateur d'intégrale stochastique (au moyen de $E^{\mathcal{G}}$) si, et seulement si $\mathcal{G} = \mathcal{F}_T$, où T est un $(\mathcal{F}_t)$ -temps d'arrêt prévisible.

La proposition suivante donne la caractérisation cherchée :

PROPOSITION 8. — Soit $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$, supposée $(\mathcal{F}, P)$ -complète. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $E^{\mathcal{G}}$ est un opérateur d'intégrale stochastique;

(ii) il existe un $(\mathcal{F}_t)$ -temps d'arrêt T , un ensemble $B \in \mathcal{F}_{T-}$, tels que : T_B est prévisible, et

$$(5) \quad \mathcal{G} = \{C \in \mathcal{F}_T, \exists C_{T-} \in \mathcal{F}_{T-}, C \cap B = C_{T-} \cap B\}.$$

Démonstration. — En suivant Dellacherie et Stricker [5], on dira que deux processus prévisibles bornés u et v sont indistinguables pour les martingales, si pour toute martingale bornée X , on a

$$\int_0^\infty u_s dX_s = \int_0^\infty v_s dX_s.$$

On écrit alors $u \doteq v$.

(a) Supposons que $\mathcal{G}$ vérifie (i). Il existe alors un processus ϕ prévisible borné, tel que

$$(3) \quad \forall X \in L^2(\mathcal{F}, P), \quad E(X \mid \mathcal{G}) = \int_0^\infty \phi_s dX_s;$$

$E^\mathcal{G}$ étant idempotent, on a

$$\phi \doteq \phi^2 \doteq 1_{(\phi=1)}.$$

En outre, d'après le corollaire 7, il existe un $(\mathcal{F}_t)$ -temps d'arrêt T tel que $\mathcal{F}_{T-} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F}_T$. Posons alors

$$A = \{(T < +\infty) \cap (\phi_T = 1)\} \cup (T = +\infty) \in \mathcal{F}_{T-} \quad \text{et} \quad B = A^c.$$

On a alors, pour tout $X \in b\mathcal{F}$:

$$E(X \mid \mathcal{F}_{T-}) = E\left(\int_0^\infty \phi_s dX_s \mid \mathcal{F}_{T-}\right) = (\phi \cdot X)_{T-} + 1_A E(\Delta X_T \mid \mathcal{F}_{T-});$$

on a également :

$$E(X \mid \mathcal{F}_{T-}) = X_{T-} + E(\Delta X_T \mid \mathcal{F}_{T-}).$$

En comparant ces deux expressions, il vient :

- sur $B = A^c$, $(\phi \cdot X)_{T-} = E(X_T \mid \mathcal{F}_{T-})$;
- sur A , $(\phi \cdot X)_{T-} = X_{T-}$.

Ce calcul permet de donner une expression explicite de $E^\mathcal{G}$, à savoir :

$$E(X \mid \mathcal{G}) = 1_A X_T + 1_{A^c} E(X_T \mid \mathcal{F}_{T-}).$$

Cette expression de $E^\mathcal{G}$ donne en particulier (5). Nous allons montrer qu'en fait T_{A^c} est prévisible; on aura alors :

$$1_{A^c} E(X_T \mid \mathcal{F}_{T-}) = 1_{A^c} X_{T-}.$$

Soit donc a_t la projection duale prévisible de $1_{(T \leq t)}$ et M_t la martingale $1_{(T \leq t)} - a_t$.

Remarquons que pour U prévisible borné $U \cdot M$ est $(\mathcal{G}_t)$ -adapté; pour tout $X \in b\mathcal{F}$, on a alors :

$$\begin{aligned} E(X((1-\phi) \cdot M)_t) &= E((\phi \cdot X)_t((1-\phi) \cdot M)_t) \\ &= E\left(\int_0^t \phi_s(1-\phi_s) d[X, M]_s\right) = 0. \end{aligned}$$

Par suite, $(1 - \varphi) \cdot M = 0$, ce qui donne

$$(\eta) \quad ((1 - \varphi) \cdot a)_{T-} = 0$$

et

$$(\varepsilon) \quad (1 - \varphi_T)(1 - \Delta a_T) 1_{(T < +\infty)} = 0.$$

Désignons par Z la surmartingale $1_{[0, T]}$ et par $\dot{Z}$ sa projection prévisible; $Z_- = \dot{Z} + \Delta a$.

a est constant après T , d'où $(\Delta a = 1) = (\dot{Z} = 0) \cap [0, T]$; si τ est le début de $(\Delta a = 1)$, $\Delta a_\tau = 1$ sur $(\tau < +\infty)$; en outre τ est prévisible et $P(\tau < T) = E(\dot{Z}_\tau, \tau < +\infty) = 0$. τ est donc le temps d'arrêt prévisible $T_{(\Delta a_T = 1)}$ (cf. Yoeurp [10]).

La condition (ε) donne alors $A^c \subset (\Delta a_T = 1)$; par suite, $A^c \in \mathcal{F}_{\tau-}$ et $T_{A^c} = \tau_{A^c}$ est prévisible. On a bien (ii).

(b) Réciproquement, supposons (ii) vérifiée. Il suffit alors de prendre

$$\varphi = 1_{[0, T]} - 1_{[T, \infty)}.$$

Remarques. — Il découle immédiatement de la proposition 8 que :

— si T est prévisible, toute tribu $\mathcal{G}$ définie par (5) ($B \in \mathcal{F}_{T-}$) induit un opérateur d'intégrale stochastique au moyen de $E^\mathcal{G}$;

— si T est totalement inaccessible, et si la tribu $\mathcal{G}$ vérifie $\mathcal{F}_{T-} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F}_T$ et induit un opérateur d'intégrale stochastique, alors $\mathcal{G} = \mathcal{F}_T$;

— de façon générale, si T est un $(\mathcal{F}_t)$ temps d'arrêt, alors les tribus $\mathcal{G}$ vérifiant $\mathcal{F}_{T-} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}_T$, et induisant un opérateur d'intégrale stochastique, sont exactement les tribus $\mathcal{G} = \mathcal{G}_B$ [formule (5)], indexées par les ensembles $B \in \mathcal{F}_{T-}$, $B \subseteq A = \text{ess sup}(C \in \mathcal{F}_{T-}; T_C \text{ est prévisible})$. En effet, d'après Dellacherie [14] (t. 48, p. 61), T_A est prévisible (et mérite le nom de « partie prévisible de T »). De plus, on montre aisément que, pour tout ensemble $B \in \mathcal{F}_{T-}$, $B \subseteq A$, T_B est prévisible. D'où le résultat annoncé.

Il résulte en outre de la démonstration de la proposition 8 que, avec nos notations

$$\begin{aligned} A &= (\Delta a_T = 1) \cap (T < \infty) + (T = \infty) \\ &= (\dot{Z}_T = 0) \cap (T < \infty) + (T = \infty). \end{aligned}$$

B. Quelques résultats généraux

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t)$ un espace probabilisé filtré vérifiant les conditions habituelles. Rappelons, en suivant Meyer [8], que l'espace $H^p(\mathcal{F}_t)$ de semi-martingales, est constitué des $(\mathcal{F}_t)$ -semi-martingales spéciales Y , dont la décomposition canonique $Y = X + B$ (X désigne toujours ici la partie martingale locale de Y , et B sa partie processus prévisible à variation bornée, nul en 0) vérifie :

$$(6) \quad \left\| [X, X]_\infty^{1/2} + \int_0^\infty |dB_s| \right\|_p < +\infty.$$

(6) définit sur $H^p(\mathcal{F}_\cdot)$ une norme, que l'on notera $\|Y\|_{H^p(\mathcal{F}_\cdot)}$, ou simplement $\|Y\|_{H^p}$ s'il n'y a pas de risque de confusion. On prolonge cette notation, en posant pour toute semi-martingale Y , qui n'appartient pas à $H^p(\mathcal{F}_\cdot)$ (par exemple, toute semi-martingale qui n'est pas spéciale...), $\|Y\|_{H^p(\mathcal{F}_\cdot)} = +\infty$.

Ce paragraphe a pour but de donner des conséquences du théorème suivant, démontré en [13] à propos de la construction des intégrales stochastiques optionnelles :

THÉORÈME 9. — Soit Λ^p l'espace des processus $(\mathcal{F}_t)$ -optionnels minces tels que

$$\|Z\|_{\Lambda^p} = \|(\sum_s Z_s^2)^{1/2}\|_p \text{ est fini.}$$

$\hat{Z}$ désignant la projection $(\mathcal{F}_t)$ -prévisible de Z , il existe une constante universelle c_p finie telle que

$$(7) \quad \|\hat{Z}\|_{\Lambda^p} \leq c_p \|Z\|_{\Lambda^p} \quad (1 \leq p < +\infty).$$

Une première conséquence du théorème 9 est la :

PROPOSITION 10. — Soit Y une $(\mathcal{F}_t)$ -semi-martingale spéciale, de décomposition canonique $Y = X + B$. Alors, pour tout p , $1 \leq p < +\infty$, on a

$$(8) \quad \|\Delta B\|_{\Lambda^p} \leq c_p \|\Delta Y\|_{\Lambda^p} \leq c_p \|[Y, Y]_\infty^{1/2}\|_p,$$

$$(8') \quad \|[X, X]_\infty^{1/2}\|_p \leq (1 + c_p) \|[Y, Y]_\infty^{1/2}\|_p.$$

Démonstration. — (8) traduit (7), puisque $\Delta B = (\widehat{\Delta Y})$; (8') s'en déduit aisément : $[X, X]_\infty^{1/2}$ est majoré par

$$[Y, Y]_\infty^{1/2} + [B, B]_\infty^{1/2} = [Y, Y]_\infty^{1/2} + (\sum_s (\Delta B_s)^2)^{1/2};$$

en outre, $\|\Delta Y\|_{\Lambda^p}$ est majoré par $\|[Y, Y]_\infty^{1/2}\|_p$.

On déduit encore du théorème 9 la :

PROPOSITION 11. — Notons $\mathcal{J}$ l'ensemble des processus prévisibles J tels que $|J| \leq 1$. Pour tout p , $1 \leq p < +\infty$, et toute semi-martingale Y , on pose

$$(9) \quad \sigma_p(Y) = \sup_{t \in \mathbf{R}_+, \mathcal{J}} \left\| \int_0^t J_s dY_s \right\|_p.$$

Il existe deux constantes universelles $0 < c'_p \leq c''_p < +\infty$ telles que

$$(10) \quad c'_p \|Y\|_{H^p} \leq \sigma_p(Y) \leq c''_p \|Y\|_{H^p}.$$

Pour la démonstration, on renvoie à [12].

Examinons maintenant les applications de ces résultats au grossissement des tribus. Soit $(\mathcal{G}_t)$ une seconde filtration, vérifiant les conditions habituelles et $\mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}_t$ pour tout t . On suppose en outre vérifiée l'hypothèse $(\mathcal{H}')$:

$(\mathcal{H}')$ toute $(\mathcal{G}_t)$ -semi-martingale est une $(\mathcal{F}_t)$ -semi-martingale.

On peut alors énoncer la :

PROPOSITION 12. — (i) pour tout p , $1 \leq p < \infty$, il existe une constante universelle finie K_p , telle que, pour toute $(\mathcal{G}_t)$ -semi-martingale Y , on ait

$$(11) \quad \|Y\|_{H^p(\mathcal{G}_t)} \leq K_p \|Y\|_{H^p(\mathcal{F}_t)};$$

(ii) soit X une $(\mathcal{G}_t)$ -martingale locale et soit $X = \bar{X} + A$ sa décomposition canonique en somme d'une $(\mathcal{F}_t)$ -martingale locale $\bar{X}$ et d'un processus $(\mathcal{F}_t)$ -prévisible à variation finie A . Alors :

$$(12) \quad \|\bar{X}\|_{H^p(\mathcal{F}_t)} \leq (1 + c_p) \|X\|_{H^p(\mathcal{G}_t)}.$$

Démonstration. — (i) est une conséquence directe de la proposition 11, tandis que (ii) découle de la proposition 10 et des définitions des diverses normes.

C. Fins d'optionnels et grossissement

Soient $[\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{G}_t)]$ un espace de probabilité filtré vérifiant les conditions habituelles, et L la fin d'un ensemble $(\mathcal{G}_t)$ -optionnel. On définit la filtration (continue à droite) $(\mathcal{F}_t)$, où $\mathcal{F}_t$ est la tribu engendrée par $\mathcal{G}_t$ et $(t < L)$. On a alors :

l'hypothèse $(\mathcal{H}')$ est vérifiée par $(\mathcal{G}_t)$ et $(\mathcal{F}_t)$.

Ce résultat a été établi indépendamment par Barlow [1] et Yor [11]. X étant une $(\mathcal{G}_t)$ -martingale locale, le problème s'est en outre posé d'expliciter la décomposition canonique de la $(\mathcal{F}_t)$ -semi-martingale spéciale X . Il a été résolu par Barlow [1] et Jeulin-Yor [6]. Nous allons en donner un peu plus loin une solution plus rapide (et sans doute plus « intuitive ») que celle exposée en [6].

Dans la situation envisagée, ce qui rend les choses particulièrement agréables est la forme des processus $(\mathcal{F}_t)$ -prévisibles :

LEMME 13 ([4], [6]). — Soit H un processus $(\mathcal{F}_t)$ -prévisible borné; il existe alors J et K , $(\mathcal{G}_t)$ -prévisibles bornés tels que

$$H = J 1_{[0, L]} + K 1_{[L, +\infty[}.$$

On a alors la :

PROPOSITION 14. — Pour tout p , $1 \leq p < \infty$, il existe deux constantes universelles $0 < k_p \leq K_p < +\infty$, telles que, pour toute $(\mathcal{G}_t)$ -semi-martingale Y , on ait :

$$(13) \quad k_p \|Y\|_{H^p(\mathcal{F}_t)} \leq \|Y\|_{H^p(\mathcal{G}_t)} \leq K_p \|Y\|_{H^p(\mathcal{F}_t)}.$$

Démonstration. — L'existence de K_p a été l'objet de (11). Soit alors $Y \in H(\mathcal{G}^p)$, de $(\mathcal{G}_t)$ -décomposition canonique $Y = X + B$, avec B $(\mathcal{G}_t)$ -prévisible à variation finie et X $(\mathcal{G}_t)$ -martingale locale; B est $(\mathcal{F}_t)$ -prévisible, d'où

$$\|B\|_{H^p(\mathcal{F}_t)} = \|B\|_{H^p(\mathcal{G}_t)} \leq \|Y\|_{H^p(\mathcal{G}_t)}.$$

Si $X = \bar{X} + A$ est la $(\mathcal{F}_t)$ -décomposition canonique de X , on a d'après la proposition 12,

$$\|[\bar{X}, \bar{X}]_\infty^{1/2}\|_p \leq (1 + c_p) \| [X, X]_\infty^{1/2} \|_p \leq (1 + c_p) \|Y\|_{H^p(\mathcal{G}_t)}.$$

Reste à traiter le cas de A ; il existe un processus $(\mathcal{F}_t)$ -prévisible a , à valeurs dans

$$\{-1, +1\}, \quad \text{tel que} \quad \int_0^\cdot |dA_s| = \int_0^\cdot a_s dA_s.$$

D'après le lemme 13, il existe j et k , processus $(\mathcal{G}_t)$ -prévisibles, bornés par 1, vérifiant :

$$a_s = j_s 1_{(s \leq L)} + k_s 1_{(L < s)}.$$

On a alors :

$$\int_0^\infty |dA_s| = ((j-k) \cdot X)_L + (k \cdot X)_\infty - (a \cdot \bar{X})_\infty;$$

les inégalités de Burkholder-Davis-Gundy impliquent alors :

— le processus croissant optionnel associé à la $(\mathcal{F}_t)$ -martingale locale $a \cdot \bar{X}$ est $[\bar{X}, \bar{X}]$ et il existe une constante universelle finie α_p telle que

$$\|(a \cdot \bar{X})_\infty\|_p \leq \|(a \cdot \bar{X})_\infty^*\|_p \leq \alpha_p \|[\bar{X}, \bar{X}]_\infty^{1/2}\|_p \leq \alpha_p (1 + c_p) \| [X, X]_\infty^{1/2} \|_p$$

[prop. 12, (12)];

— $|((j-k) \cdot X)_L|$ est majoré par $\sup_s |((j-k) \cdot X)_s|$; sa norme dans L^p est donc majorée par $2\alpha_p \| [X, X]_\infty^{1/2} \|_p$ (car $|j-k| \leq 2$), et on a une majoration analogue pour $\|(k \cdot X)_\infty\|_p$. Pour conclure, il suffit de prendre $1/k_p = (6 + c_p)(1 + \alpha_p)$.

Remarque. — L'inégalité de gauche de (13) a été établie, pour $p = 1$ par Dellacherie et Meyer [4]; et pour $p = 2$ par Barlow [1]. La proposition 14, valable pour tout p , $1 \leq p < \infty$, est une réponse à la question posée à la fin de [6].

La proposition 14 va nous conduire tout naturellement à la $(\mathcal{F}_t)$ -décomposition canonique d'une $(\mathcal{G}_t)$ -martingale locale.

Rappelons quelques propriétés et notations : si Z désigne la $((\mathcal{G}_t)$ -sur-martingale) projection $(\mathcal{G}_t)$ -optionnelle de $1_{[0, L]}$; Z_- est la projection $(\mathcal{G}_t)$ -prévisible de $1_{[0, L]}$; $\tilde{A}$ est la projection duale $(\mathcal{G}_t)$ -optionnelle du processus croissant $1_{(L \leq t)}$. Si $\tilde{M}_t$ est la version continue à droite de la martingale $E(\tilde{A}_\infty | \mathcal{G}_t)$, on a

$$\|\tilde{M}\|_{\text{BMO}(\mathcal{G}_t)} \leq \sqrt{3} \quad (\text{cf. [7]}).$$

Les crochets étant relatifs à la filtration $(\mathcal{G}_t)$, on peut énoncer :

THÉORÈME 15 ([1], [6]). — X étant une $(\mathcal{G}_t)$ -martingale locale, soit $X = \bar{X} + A$ la décomposition canonique de la $(\mathcal{F}_t)$ -semi-martingale spéciale X en somme d'une $(\mathcal{F}_t)$ -martingale locale $\bar{X}$ et d'un processus $(\mathcal{F}_t)$ -prévisible A à variation finie. Alors :

$$(14) \quad A_s = \int_0^{L \wedge s} \frac{1}{Z_{u-}} d\langle X, \tilde{M} \rangle_u - \int_0^s 1_{(L < u)} \frac{1}{1 - Z_{u-}} d\langle X, \tilde{M} \rangle_u.$$

Démonstration. — Par arrêt, on peut se limiter au cas où $X \in H^1(\mathcal{G}_t)$ (et donc $X \in H^1(\mathcal{F}_t)$) d'après la proposition 14). En outre, on peut supposer $X_0 = 0$.

Si H est un processus $(\mathcal{F}_t)$ -prévisible borné, on a, avec les notations du lemme 13,

$$E((H.A)_\infty) = E((H.X)_\infty) = E(((J-K).X)_L).$$

Or $Y \rightarrow E(Y_L)$ est une forme linéaire continue sur l'espace $H_m^1(\mathcal{G}_\cdot)$ des martingales appartenant à $H^1(\mathcal{G}_\cdot)$, et s'écrit donc sous la forme $E([Y, \tilde{M}]_\infty)$; en effet, l'égalité $E(Y_L) = E([Y, \tilde{M}]_\infty)$ est aisée si Y est une $(\mathcal{G}_t)$ -martingale de carré intégrable et se prolonge par densité et continuité à $H_m^1(\mathcal{G}_\cdot)$. D'où

$$\begin{aligned} E((H.A)_\infty) &= E\left(\int_0^\infty (J_s - K_s) d[X, \tilde{M}]_s\right) \\ &= E\left(\int_0^\infty (J_s - K_s) d\langle X, \tilde{M} \rangle_s\right) \\ &= E\left(\int_0^L \frac{1}{Z_{s-}} J_s d\langle X, \tilde{M} \rangle_s\right) - E\left(\int_{L+}^\infty \frac{1}{1 - Z_{s-}} K_s d\langle X, \tilde{M} \rangle_s\right). \end{aligned}$$

La dernière égalité est justifiée par les remarques suivantes :

- $\langle X, \tilde{M} \rangle$ commute avec la projection $(\mathcal{G}_t)$ -prévisible;
- $(Z_- = 0)$ est inclus dans $]L, +\infty]$ et on peut donc supposer : $J = J 1_{(Z_- \neq 0)}$;
- $(Z_- = 1)$ est inclus dans $[0, L]$ et on peut donc supposer $K = K 1_{(Z_- \neq 1)}$.

Enfin on a

$$\begin{aligned} E\left(\int_0^\infty |dA_s|\right) &\leq 2 E\left(\int_0^\infty |d\langle X, \tilde{M} \rangle_s|\right) \\ &\leq 2\sqrt{2} \|X\|_{H^1(\mathcal{G}_\cdot)} \|\tilde{M}\|_{\text{BMO}(\mathcal{G}_\cdot)}, \end{aligned}$$

donc A est $(\mathcal{F}_t)$ -prévisible, à variation intégrable, et la démonstration est achevée.

Remarques. - (a) les résultats de ce paragraphe sont encore valables si on grossit la filtration $(\mathcal{G}_t)$ à l'aide d'un nombre fini de fins d'ensembles $(\mathcal{G}_t)$ -optionnels. La formule (14) doit bien sûr être remplacée par une formule plus compliquée, dont le calcul est possible grâce au résultat suivant de Dellacherie [3] :

soit M un fermé aléatoire gauche; alors $(\hat{1}_M) = 1$ est inclus dans M (en particulier, si M et M^c sont fermés gauche, $(\hat{1}_M)$ n'est pas nul sur M);

(b) de même, si L est une variable aléatoire quelconque [$P(0 < L < +\infty) = 1$] pour simplifier], on introduit la filtration $(\mathcal{F}_t^-)$ où

$$\mathcal{F}_t^- = (A \in \mathcal{F}, \exists A_t \in \mathcal{G}_t, A \cap (t < L) = A_t \cap (t < L)).$$

Alors, si X est une $(\mathcal{G}_t)$ -martingale locale, X^L est une $(\mathcal{F}_t^-)$ -semi-martingale (cf. [11]), de décomposition canonique $\bar{X}^L + A^L$.

On a alors :

$$A_s^L = \int_0^{s \wedge L} \frac{1}{Z_{u-}} d\langle X, \tilde{M} \rangle_u$$

et

$$(13') \quad k_p \|X^L\|_{H^p(\mathcal{F}_t^-)} \leq \|X\|_{H^p(\mathcal{G}_\cdot)}, \quad \text{pour tout } p, \quad 1 \leq p < \infty;$$

(c) X étant une $(\mathcal{G}_t)$ -martingale locale, notons

$$V(\mathcal{F}., X) = \sup \sum_i E(|E(X_{t_{i+1}}^1 - X_{t_i}^1 | \mathcal{F}_{t_i})|),$$

le sup étant pris sur les subdivisions finies $\delta = (0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n)$ de $\mathbf{R}_+$.

On a alors :

$$(15) \quad V(\mathcal{F}., X) \leq K_1 \|X\|_{H^1(\mathcal{G}.)}.$$

En effet, seul le cas $X \in H^1(\mathcal{G}.)$ est à considérer; avec les notations du théorème 15, on a

$$\begin{aligned} E(|E(X_{t+s} - X_t | \mathcal{F}_t)|) &= E(|E(A_{t+s} - A_t | \mathcal{F}_t)|) \\ &\leq E\left(\int_t^{t+s} |dA_u|\right), \end{aligned}$$

soit

$$V(\mathcal{F}., X) \leq E\left(\int_0^\infty |dA_s|\right) \leq \|X\|_{H^1(\mathcal{F}.)} \leq K_1 \|X\|_{H^1(\mathcal{G}.)}.$$

Remarquons que, quitte à changer la constante K_1 , l'inégalité (15) s'étend aisément à toute $(\mathcal{G}_t)$ -semi-martingale.

D'après les inégalités de Doob et de Burkholder-Davis-Gundy, pour tout p , $1 < p < \infty$, il existe donc une constante universelle finie K'_p telle que

$$(15-p) \quad V(\mathcal{F}., X) \leq K'_p \|X_\infty\|_p.$$

(d) L'énoncé suivant constitue une réciproque aux inégalités du type (15-p) :

PROPOSITION 16. — Soient $(\mathcal{G}_t)$ et $(\mathcal{H}_t)$ deux filtrations. Soit en outre $1 < p < \infty$, et q son conjugué. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) il existe une constante D_p ne dépendant que de $(\mathcal{G}_t)$ et $(\mathcal{H}_t)$ telle que : pour toute $(\mathcal{G}_t)$ -martingale de puissance p -ième-intégrable X , on a

$$V(\mathcal{H}., X) \leq D_p \|X_\infty\|_p.$$

(ii) il existe une constante D'_q telle que, pour tout n , pour tout n -uplet

$$0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n < +\infty,$$

pour tout ensemble de variables $(a^i)_{0 \leq i \leq n}$, telles que a^i soit $\mathcal{H}_{t_i}$ -mesurable et bornée par 1, on a

$$(16) \quad \left\| \left[\sum_{i=0}^{n-1} (E(a^i | \mathcal{G}_{t_{i+1}}) - E(a^i | \mathcal{G}_{t_i}))^2 \right]^{1/2} \right\|_q \leq D'_q$$

Démonstration. — Notons $\mathcal{A}$ la donnée d'une subdivision $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n < +\infty$ et d'une famille de variables aléatoires $(a^i)_{0 \leq i \leq n}$, vérifiant : pour tout i , a^i est $\mathcal{H}_{t_i}$ -mesurable; notons $Z.(\mathcal{A})$ la $(\mathcal{G}_{t_i})_{0 \leq i \leq n}$ -martingale discrète, nulle en 0, dont l'accroissement entre t_i et t_{i+1} est $E(a^i | \mathcal{G}_{t_{i+1}}) - E(a^i | \mathcal{G}_{t_i})$.

Pour X $(\mathcal{G}_t)$ -martingale uniformément intégrable, soit

$$S(\mathcal{A}, X) = \sum_{i=0}^{n-1} E(a^i(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})).$$

On a alors

$$V(\mathcal{H}, X) = \sup_{\mathcal{A}} S(\mathcal{A}, X)$$

et

$$\begin{aligned} S(\mathcal{A}, X) &= \sum_{i=0}^{n-1} E((X_{t_{i+1}} - X_{t_i})(Z_{t_{i+1}}(\mathcal{A}) - Z_{t_i}(\mathcal{A}))) \\ &= E(X_{t_n} Z_{t_n}(\mathcal{A})). \end{aligned}$$

(i) équivaut donc à : pour tout $\mathcal{A}$, $\|Z_{t_n}(\mathcal{A})\|_q \leq D_p$, et équivaut donc à (ii) par application des inégalités de Burkholder-Davis-Gundy relatives aux filtrations $(\mathcal{G}_t)_{0 \leq t \leq n}$.

N.B. — La croissance en t des tribus $(\mathcal{H}_t)$ n'a pas été utilisée.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. BARLOW, *Study of a Filtration Expanded to Include an Honest Time* (à paraître).
- [2] P. BRÉMAUD and M. YOR, *Changes of Filtrations and of Probability Measures* (soumis pour publication au *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.*, 1977).
- [3] C. DELLACHERIE, *Supports optionnels et prévisibles d'une P-mesure et applications* [Séminaire de Probabilités XII (Lecture Notes in Math., n° 649, 1978, Springer)].
- [4] C. DELLACHERIE et P. A. MEYER, *A propos du travail de Yor sur le grossissement des tribus* [Séminaire de Probabilités XII (Lecture Notes in Math., n° 649, 1978 Springer)].
- [5] C. DELLACHERIE et C. STRICKER, *Changements de temps et intégrales stochastiques* [Séminaire de Probabilités XI (Lecture Notes in Math., n° 581, 1977, p. 365-375, Springer, Berlin-Heidelberg-New York)].
- [6] T. JEULIN et M. YOR, *Grossissement d'une filtration et semi-martingales : formules explicites* [Séminaire de Probabilités XII (Lecture Notes in Math., n° 649, 1978, Springer)].
- [7] P. A. MEYER, *Un cours sur les intégrales stochastiques* [Séminaire de Probabilités X (Lecture Notes in Math., n° 511, 1976, p. 246-400, Springer, Berlin-Heidelberg-New York)].
- [8] P. A. MEYER, *Inégalités de normes pour les intégrales stochastiques* [Séminaire de Probabilités XII (Lecture Notes in Math., n° 649, 1978, Springer)].
- [9] C. STRICKER, *Quasimartingales, martingales locales, semi-martingales et filtrations naturelles* (*Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.*, vol. 39, 1977, p. 55-64).
- [10] Ch. YOEURP, *Décompositions des martingales locales et formules exponentielles* [Séminaire de Probabilités X (Lecture Notes in Math., n° 511, 1976, p. 432-480, Springer, Berlin-Heidelberg-New York)].
- [11] M. YOR, *Grossissement d'une filtration et semi-martingales : théorèmes généraux* [Séminaire de Probabilités XII (Lecture Notes in Math., n° 649, 1978, Springer)].
- [12] M. YOR, *Quelques interactions entre mesures vectorielles et intégrales stochastiques*, 1978 (à paraître).
- [13] M. YOR, *En cherchant une définition naturelle des intégrales stochastiques optionnelles*, 1978 (à paraître).
- [14] C. DELLACHERIE, *Capacités et processus stochastiques*, 1972, Springer Verlag.

(Manuscrit reçu le 27 février 1978,
révisé le 31 mai 1978.)

T. JEULIN et M. YOR,
63, rue de la Liberté,
92220 Bagneux.