

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

F. HIRZEBRUCH

**Modulflächen und Modulkurven zur symmetrischen
Hilbertschen Modulgruppe**

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 11, n° 1 (1978), p. 101-165

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1978_4_11_1_101_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MODULFLÄCHEN UND MODULKURVEN ZUR SYMMETRISCHEN HILBERTSCHEN MODULGRUPPE

VON F. HIRZEBRUCH

INHALT

Einleitung.....	101
1. Die Hilbertsche Modulfläche $X(p)$ und die Kurven F_N	104
2. Die Kurven F_N und F_N^* auf den desingularisierten Hilbertschen Modulflächen.....	119
3. Numerische Invarianten, exzeptionelle Kurven.....	130
4. Klassifikation.....	143
5. Weitere Beispiele.....	155
Literatur.....	164

Einleitung

Es sei p eine Primzahl $\equiv 1 \pmod{4}$ und \mathcal{O} der Ring der ganzen Zahlen des Körpers $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$. Die Gruppe $SL_2(\mathcal{O})$ operiert auf H^2 , dem Produkt der oberen Halbebene H der komplexen Ebene mit sich. Der Quotient $X(p) = H^2/SL_2(\mathcal{O})$ ist eine nicht kompakte komplexe Fläche mit endlich vielen Quotientensingularitäten, die Hilbertsche Modulfläche genannt wird und um 1900 von Hilbert, Hecke und Blumenthal eingeführt wurde. Die Punkte von $X(p)$ repräsentieren abelsche Varietäten der Dimension 2, die \mathcal{O} als Endomorphismenring zulassen, jedoch wird dieser Gesichtspunkt in der vorliegenden Arbeit keine Rolle spielen. Das Studium der Hilbertschen Modulflächen wurde von Gundlach und Freitag intensiv weitergeführt (vgl. [7] und die dort angegebene Literatur).

In [7] wurde die Kompaktifizierung $\overline{X}(p)$ von $X(p)$ durch $h(p)$ Spitzen untersucht : Die Spitzen sind singuläre Punkte von $\overline{X}(p)$, welche in Zyklen von rationalen Kurven aufgeblasen und dadurch als singuläre Punkte aufgelöst werden können. Da die Quotientensingularitäten leicht aufzulösen sind, kann man durch minimale Desingularisierung aller Singularitäten von $\overline{X}(p)$ zu einem singularitätenfreien Modell $Y(p)$ von $\overline{X}(p)$ übergehen. Die kompakte Fläche $Y(p)$ ist algebraisch. Sie hat einige exzeptionelle Kurven, die niedergeblasen werden können, was zu der Fläche $Y^0(p)$ führt, die jedenfalls für $p > 5$ wohldefiniert ist. Auf H^2 operiert die Involution $(z_1, z_2) \mapsto (z_2, z_1)$, die eine Involution T von $Y^0(p)$ induziert, deren Fixpunktmenge eine singularitätenfreie Kurve von $Y^0(p)$ ist. Die algebraische Fläche $Y^0(p)/T$ ist deshalb auch singularitätenfrei. Die Flächen $Y^0(p)$ und $Y^0(p)/T$ sind einfach-zusammenhängend [18].

Die einfach-zusammenhängenden algebraischen Flächen lassen sich im Sinne der Klassifikation von Enriques und Kodaira in vier grosse Klassen einteilen (I. Rationale Flächen. II. Flächen, die birational äquivalent zu K 3-Flächen sind. III. Flächen, die birational äquivalent zu echt elliptischen Flächen sind. IV. Flächen vom allgemeinen Typ.) (siehe § 4.1). In einer gemeinsamen Arbeit mit van de Ven [8] wurde bewiesen, dass $Y(p)$ für $p = 5, 13, 17$ zur Klasse I, für $p = 29, 37, 41$ zur Klasse II, für $p = 53, 61, 73$ zur Klasse III und für $p > 73$ zur Klasse IV gehört. Das Hauptergebnis der vorliegenden Arbeit ist die »grobe« Klassifikation der Flächen $Y^0(p)/T$ (siehe 4.6) :

Für 24 Primzahlen gehört $Y^0(p)/T$ zur Klasse I, für 9 Primzahlen zur Klasse II, für 6 Primzahlen zu Klasse III und für alle anderen Primzahlen zur Klasse IV.

Die Rationalität von $Y^0(p)/T$ für 24 Primzahlen wurde bereits in [7] bewiesen. Die grobe Klassifikation der Hilbertschen Modulflächen $Y(D)$ für einen reell-quadratischen Körper beliebiger Diskriminante D wurde in [9] durchgeführt, während die Flächen $Y(D)/T$ noch nicht behandelt wurden.

Bei der Untersuchung der Hilbertschen Modulflächen spielen die Modulkurven F_N eine grosse Rolle [10] : Für gegebenes N betrachten wir alle Punkte $(z_1, z_2) \in H^2$, die einer Gleichung der Form

$$a\sqrt{p}z_1z_2 + \lambda z_2 - \lambda' z_1 + b\sqrt{p} = 0,$$

genügen, wo $a, b \in \mathbb{Z}$, $\lambda \in \mathcal{O}$, $abp + \lambda\lambda' = N$ und das Tripel (a, b, λ) primitiv ist, also durch keine natürliche Zahl > 1 teilbar sein soll. Diese Menge ist $SL_2(\mathcal{O})$ -invariant.

Ihr Bild ist eine Kurve in $X(p)$, die für $\left(\frac{N}{p}\right) \neq -1$ nicht leer und für $N \equiv 0 \pmod{p^2}$

irreduzibel ist (vgl. § 1). Die Kurve kann zu einer kompakten Kurve in $Y(p)$ erweitert werden. Sie definiert für $N \geq 5$ eine Kurve F_N in $Y^0(p)$ und eine Bildkurve F_N^* in $Y^0(p)/T$. Es werde von nun an $\left(\frac{N}{p}\right) = 1$ vorausgesetzt ($N \geq 5$) und $N = N_1 N_2$

gesetzt, wo N_1 nur durch Primzahlen, die quadratische Reste mod p sind, und N_2 nur durch Primzahlen, die quadratische Nichtreste mod p sind, teilbar ist. Die Kurve F_N hat ein singularitätenfreies Modell \overline{H}/Γ , wo Γ eine diskrete Untergruppe von $PSL_2(\mathbb{R})$ ist, deren Urbild in $SL_2(\mathbb{R})$ konjugiert zur Gruppe der Einheiten positiver Norm einer Ordnung einer über \mathbb{Q} definierten indefiniten Quaternionenalgebra ist, und \overline{H}/Γ die Kompaktifizierung von H/Γ durch endlich viele Spitzen ist. Entsprechend hat F_N^* ein singularitätenfreies Modell \overline{H}/Γ_* , wo Γ_* eine Erweiterung vom Index 2 von Γ ist. Die Gruppe Γ ist Untergruppe der Hilbertschen Modulgruppe $G = SL_2(\mathcal{O})/\{\pm 1\}$, während Γ_* Untergruppe der symmetrischen Hilbertschen Modulgruppe $G \cup G.T$ ist. In § 1 bestimmen wir allein in Abhängigkeit von dem Zahlenpaar N_1, N_2 die Anzahlen der inäquivalenten elliptischen Fixpunkte der Ordnung m von Γ^* und Γ , wobei nur Fixpunkte mit $m = 2$ oder 3 vorkommen, die Anzahl der Spitzen von Γ und die Geschlechter von \overline{H}/Γ und \overline{H}/Γ^* . Es gibt mindestens 120 Paare N_1, N_2 mit $N = N_1 N_2 \geq 5$, für die das Geschlecht von \overline{H}/Γ_* gleich 0 ist, die Kurve also rational ist (vgl. 2.4 Tabelle 3). Jeder elliptische Fixpunkt von Γ entspricht einem Durchgang

von F_N durch einen elliptischen Fixpunkt von G , ähnliches gilt für Γ_* und die symmetrische Gruppe $G \cup G.T.$ Eine Spitze von Γ wird auf eine Spitze von G abgebildet, man kann dies genau verfolgen und angeben, wie die Kurve F_N in $Y(p)$ die rationalen Kurven schneidet, die durch die Auflösung der Spitzen von G als singuläre Punkte von $\overline{X(p)}$ entstanden sind. Auf Grund von [10] sind die Schnittpunkte von F_N und F_M in $Y^0(p)$ (für $N \neq M$) und die Doppelpunkte einer Kurve F_N bekannt. Daraus lässt sich auf das Schnittverhalten der F_N^* in $Y^0(p)/T$ schliessen.

Für die Anwendungen muss man den Wert der ersten Chernschen Klasse c_1 von $Y^0(p)$ auf F_N kennen, der mit $c_1[F_N]$ bezeichnet wird und gleich $-K.F_N$ ist, wenn K ein kanonischen Divisor von $Y^0(p)$ ist. Entsprechend ist $c_1^*[F_N^*]$ zu berechnen, wo c_1^* die erste Chernsche Klasse von $Y^0(p)/T$ ist. Dies wird in Paragraph 2 durchgeführt. Jedem Paar N_1, N_2 lässt sich eine Zahl $c_1^*(N_1, N_2)$ zuordnen, so dass stets $c_1^*[F_N^*] \geq c_1^*(N_1, N_2)$ ist und das Gleichheitszeichen jedenfalls dann gilt, wenn p verglichen mit $N = N_1 N_2$ hinreichend gross ist. In Paragraph 2 schreiben wir $c_1^*(N)$ statt $c_1^*(N_1, N_2)$, da die Aufspaltung $N = N_1 N_2$ durch die gegebene Primzahl p festgelegt ist. Man kann übrigens leicht nachrechnen, dass $-c_1^*(N_1, N_2) + 1 - g^*$ gleich der Dimension des Raumes der Spitzenformen vom Gewicht 4 für die zu N_1, N_2 gehörige Gruppe Γ_* bezüglich des nicht-trivialen Charakters der zweielementigen Gruppe Γ_*/Γ ist (g^* sei das Geschlecht von H/Γ_*). Diese Tatsache werden wir aber nicht benutzen. Es ist also $c_1^*(N_1, N_2) \leq 1 - g^*$. Für $p \gg N$ ist F_N^* singularitätenfrei. Wenn F_N^* singularitätenfrei ist, dann gilt nach der Adjunktionsformel $F_N^* F_N^* = c_1^*[F_N^*] - (2 - 2g^*)$. Wir können bei vorgegebenem p entscheiden, welche F_N^* singularitätenfreie rationale Kurven der Selbstschnittzahl a , kurz a -Kurven genannt, sind. Von besonderem Interesse sind die (-1) -Kurven (exzeptionelle Kurven) und die (-2) -Kurven. Für $p \gg N$ liefern die 17 Paare N_1, N_2 der Tabelle 3 in Paragraph 2 mit $c_1^*(N_1, N_2) = 1$ und die 30 Paare N_1, N_2 mit $c_1^*(N_1, N_2) = 0$ exzeptionelle Kurven F_N^* bzw. (-2) -Kurven F_N^* auf den Flächen $Y^0(p)/T$, für die $\left(\frac{N}{p}\right) = 1$ und N die Zerlegung $N = N_1 N_2$ hat.

Das arithmetische Geschlecht von $Y^0(p)/T$ wurde in [7] berechnet. Es hat für genau 24 Primzahlen den Wert 1, nur für diese Primzahlen kann $Y^0(p)/T$ rational sein. Diese 24 Flächen sind in der Tat rational, wie in [7] bewiesen wurde und in Paragraph 2 erneut gezeigt wird. Für die nicht-rationalen Flächen $Y^0(p)/T$ und die Flächen, die aus ihnen durch Niederblasen bekannter exzeptioneller Kurven entstehen, kann das Quadrat der ersten Chernschen Klasse (Selbstschnittzahl eines kanonischen Divisors) berechnet werden. Sobald diese Selbstschnittzahl positiv ausfällt, ist die Fläche vom allgemeinen Typ. In Paragraph 3 ergibt sich auf diese Weise, dass $Y^0(p)/T$ für $p > 557$ vom allgemeinen Typ ist und für höchstens 15 Primzahlen zur Klasse II oder III gehört.

Die Untersuchung dieser 15 Flächen erfolgt in Paragraph 4, wo mit Hilfe von Kurven F_N^* , die (-2) -Kurven sind, und von Kurven der Spitzenauflösungen, die in bestimmten Fällen ebenfalls (-2) -Kurven auf $Y^0(p)/T$ liefern, elliptische Konfigurationen konstruiert werden, die als Ausnahmefasern elliptischer Faserungen auftreten. Die Existenz einer solchen Konfiguration garantiert, dass $Y^0(p)/T$ zur Klasse II oder III gehört. Für diese 15 Flächen können wir minimale Modelle angeben — die Selbstschnittzahl des kanonischen Divisors

ist dann gleich 0 – und nachweisen, dass man in 9 Fällen ein K 3-Fläche und in 6 Fällen eine elliptische Fläche erhält, wo die Fasern kanonische Divisoren sind.

Die Ergebnisse dieser Arbeit wurden zum grossen Teil während meines Gastaufenthalts am Department of Mathematics der University of California in Berkeley während des Sommers 1973 gefunden. Dem Department in Berkeley danke ich ganz herzlich für eine anregende Zeit konzentrierten Arbeitens. In Berkeley hatte ich Computer-Unterstützung durch D. Lehmer und E. Lehmer, denen herzlich gedankt sei. Profitiert habe ich während diese Zeit auch durch einen Briefwechsel mit M. Eichler. Nach 1973 hatte ich nur wenig Zeit, die Überlegungen weiterzuverfolgen. Jedoch wurden in den gemeinsamen Arbeiten mit D. Zagier ([9], [10]) auch manche Dinge geklärt, die für die vorliegende Arbeit wesentlich sind und die Darstellung erleichtert haben. D. Zagier muss ich für viele Diskussionen und umfangreiche Hilfe durch die Erstellung von Computerprogrammen danken. Ruhe und Konzentration für abschliessende Überlegungen und das Aufschreiben fand ich erst während meines Gastaufenthalts am »Institut des Hautes Études Scientifiques« während der Monate November, Dezember 1977 und Januar 1978. Dem I.H.E.S. vielen Dank! In diesen Dank eingeschlossen ist M^{me} J. Martin vom I.H.E.S., die mit Geduld und Sorgfalt und unter Zeitdruck das Manuskript geschrieben hat.

1. Die Hilbertsche Modulfläche $X(p)$ und die Kurven F_N

1.1. Es sei p eine Primzahl mit $p \equiv 1 \pmod{4}$ und \mathcal{O} der Ring der ganzen Zahlen in $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$. Die Gruppe $SL_2(\mathcal{O})$ operiert auf H^2 , dem Produkt der oberen Halbebene von \mathbb{C} mit sich, und $H^2/SL_2(\mathcal{O})$ ist die Hilbertsche Modulfläche $X(p)$. Der Einfachheit wegen deuten die Bezeichnungen die fest gegebene Primzahl p nicht immer an. Die Fläche $X(p)$ ist nicht kompakt. Sie hat eine endliche Anzahl von Quotientensingularitäten, die von den Punkten $z \in H^2$ herrühren, wo die Isotropiegruppe der Aktion von $SL_2(\mathcal{O})/\{\pm 1\}$ nicht trivial ist. Für jede natürliche Zahl $N \geq 1$ soll nun eine Kurve F_N in $X(p)$ erklärt werden. Wir betrachten dazu alle Punkte $(z_1, z_2) \in H^2$, die einer Gleichung der Form

$$(1) \quad a\sqrt{p}z_1z_2 + \lambda z_2 - \lambda' z_1 + b\sqrt{p} = 0,$$

genügen mit $a, b \in \mathbb{Z}$, $\lambda \in \mathcal{O}$ und $\lambda\lambda' + abp = N$, wobei ferner verlangt werden soll, dass das Tripel (a, b, λ) primitiv, d. h. durch keine natürliche Zahl > 1 teilbar sei. Die Menge der Punkte (z_1, z_2) , die eine solche Gleichung erfüllen, ist invariant unter $SL_2(\mathcal{O})$, und F_N bezeichnet ihr Bild in $X(p)$. Die Kurve F_N ist offenbar genau dann nicht leer, wenn

$$\left(\frac{N}{p}\right) \neq -1$$

Die Gleichung (1) kann auch in der Form

$$(2) \quad (z_2, 1)A\begin{pmatrix} z_1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

geschrieben werden, wo A die Matrix $\begin{pmatrix} a\sqrt{p} & \lambda \\ -\lambda' & b\sqrt{p} \end{pmatrix}$ ist, welche primitiv, ganzzahlig und schief-hermitesch ist, d. h. der Beziehung $A' = -A^t$ genügt. Es ist $N = \det A$. Die Anzahl der irreduziblen Komponenten der Kurve F_N in $X(p)$ ist gleich der Anzahl der

$SL_2(\mathcal{O})$ -Äquivalenzklassen primitiver ganzzahliger schief-hermitescher Matrizen der Determinante N , wobei A_1, A_2 äquivalent heißen sollen, wenn ein $T \in SL_2(\mathcal{O})$ mit $A_2 = \pm {}^tT' A_1 T$ existiert. Wir zitieren zunächst den folgenden Satz von G. Franke [3], der durch Anwendung von Resultaten von Shimura [17] erhalten wurde.

SATZ 1. — Es sei $\left(\frac{N}{p}\right) \neq -1$. Die Kurve F_N ist irreduzibel, wenn $N \not\equiv 0 \pmod{p^2}$.

Sie hat genau zwei Komponenten, wenn $N \equiv 0 \pmod{p^2}$.

Die durch (2) definierte Kurve in H^2 ist der Graph der durch die Matrix $\begin{pmatrix} \lambda' & -b\sqrt{p} \\ a\sqrt{p} & \lambda \end{pmatrix}$ gegebenen gebrochen linearen Transformation von H in H und kann deshalb mit H identifiziert werden (Koordinate z_1). Für gegebene Matrix A soll die Standgruppe G_A aller $X \in SL_2(\mathcal{O})$ mit $A = \pm {}^tX' A X$ bestimmt werden. Für A werde die Algebra \mathcal{Q}_A aller (2×2) -Matrizen X mit Koeffizienten in $Q(\sqrt{p})$ betrachtet, für die

$$(3) \quad {}^tX' A = A X^*,$$

dabei ist $X^* = (\det X) X^{-1}$. Es lässt sich dann leicht zeigen, dass \mathcal{Q}_A eine indefinite Quaternionenalgebra über Q ist, und zwar gilt

$$(4) \quad \mathcal{Q}_A \cong \left(\frac{p, -N/p}{Q} \right), \quad (N = \det A),$$

(für die Bezeichnung von Quaternionenalgebren vgl. z. B. [14]).

Die Isomorphie (4) beweist man, indem man A über $Q(\sqrt{p})$ in die Normalform $\pm \begin{pmatrix} \sqrt{p} & 0 \\ 0 & (N/p)\sqrt{p} \end{pmatrix}$ bringt. Die Grundzahl einer indefiniten Quaternionenalgebra über Q ist Produkt einer geraden Anzahl verschiedener Primzahlen und zwar derjenigen Primzahlen r , so dass die Algebra über den r -adischen Zahlen Q_r ein Schiefkörper ist. Durch die Grundzahl ist die Algebra bis auf Isomorphie festgelegt.

Es werde gesetzt

$$(5) \quad N = p^k N_1 N_2 \quad \text{mit} \quad (N_1 N_2, p) = 1 \quad \text{und} \quad (N_1, N_2) = 1,$$

wo alle Primzahlen, die N_1 teilen, quadratische Reste mod p und alle Primzahlen, die N_2 teilen, quadratische Nichtreste mod p sind. Es sei N'_2 der quadratfreie Teil von N_2 .

Für $\left(\frac{N}{p}\right) \neq -1$ lässt sich dann die Grundzahl d der Quaternionenalgebra $\left(\frac{p, -N/p}{Q}\right)$ wie folgt angeben :

$$(6) \quad \begin{cases} d = N'_2, & \text{falls } N \not\equiv 0 \pmod{p}, \\ d = N'_2, & \text{falls } N \equiv 0 \pmod{p} \text{ und } \left(\frac{N'_2}{p}\right) = 1, \\ d = p N'_2, & \text{falls } N \equiv 0 \pmod{p} \text{ und } \left(\frac{N'_2}{p}\right) = -1. \end{cases}$$

In der Algebra \mathcal{Q}_A werde die Ordnung \mathcal{O}_A derjenigen Matrizen X betrachtet, die (3) erfüllen und deren Koeffizienten im Ring \mathcal{O} der ganzen Zahlen von $Q(\sqrt{p})$ liegen. Jede Ordnung hat eine Diskriminante, nämlich die Diskriminante der Normenform der Quaternionenalgebra beschränkt auf die Ordnung. (Für $X \in \mathcal{Q}_A$ ist die Norm gleich $\det X$.) Die Diskriminante ist stets eine Quadratzahl, für \mathcal{O}_A ist sie gleich N^2 , für jede Maximalordnung von \mathcal{Q}_A ist sie gleich d^2 .

Es sei \mathcal{E}_A die Gruppe der Einheiten von \mathcal{O}_A mit Norm gleich $+1$. Die oben erwähnte Standgruppe G_A der primitiven ganzzahligen schief-hermiteschen Matrix A ist offensichtlich gleich \mathcal{E}_A oder eine Erweiterung von \mathcal{E}_A vom Index 2. Franke [3] beweist, dass $\mathcal{E}_A = G_A$, wenn $N \not\equiv 0 \pmod{p}$, und $|G_A : \mathcal{E}_A| = 2$ sonst.

Es sei \mathcal{O}_{\max} eine Maximalordnung von \mathcal{Q}_A , die \mathcal{O}_A enthält, und \mathcal{E}_{\max} die Gruppe der Einheiten von \mathcal{O}_{\max} der Norm $+1$. Um mehr Informationen über die Standgruppe G_A zu erhalten, muss der Index von \mathcal{E}_A in \mathcal{E}_{\max} bestimmt werden. Er wird von Franke [3] berechnet. Kennt man diesen Index, dann kann man leicht eine Formel für das Volumen von H/G_A angeben. (In H wird dabei die $SL_2(\mathbb{R})$ -invariante Volumenform $-(2\pi)^{-1}(dx dy/y^2)$ benutzt, welche für frei operierende diskrete Untergruppen von $SL_2(\mathbb{R})$ mit kompakten Quotienten die Eulersche Zahl des Quotienten liefert.)

Nach Eichler [1] ist nämlich das Volumen von $H/\mathcal{E}_{\max} = -(1/6)\varphi(d)$, wo d die Grundzahl der Quaternionenalgebra ist. Das Volumen von H/G_A ist dann (man beachte, dass $-1 \in \mathcal{E}_A$) :

$$\text{vol}(H/G_A) = -\frac{1}{6}\varphi(d) \cdot |\mathcal{E}_{\max} : \mathcal{E}_A| \cdot |G_A : \mathcal{E}_A|.$$

Die natürliche Abbildung $H/G_A \rightarrow F_N$ ($N = \det A$) ist vom Grad 1; sie ist surjektiv nach Satz 1, wenn $N \not\equiv 0 \pmod{p}$. Wenn $N \equiv 0 \pmod{p^2}$, dann muss man zwei inäquivalente Matrizen A_1, A_2 der Determinante N wählen, und F_N ist dann die Vereinigung der Bilder von H/G_{A_1} und H/G_{A_2} . Unter $\text{vol}(F_N)$ ist natürlich das Volumen von H/G_A bzw. die Summe der Volumina von H/G_{A_1} und H/G_{A_2} zu verstehen. Das Endergebnis der Index- und damit der Voluminaabestimmung lautet wie folgt (siehe [3]).

SATZ 2. — *Das Volumen der Kurve F_N in der Hilbertschen Modulfläche $X(p)$ wird (für $\left(\frac{N}{p}\right) \neq -1$) durch folgende Formeln gegeben.*

(i) für $N \not\equiv 0 \pmod{p}$:

$$\text{vol}(F_N) = -\frac{1}{6}N \cdot \prod_{q|N_1} \left(1 + \frac{1}{q}\right) \prod_{q|N_2} \left(1 - \frac{1}{q}\right);$$

(ii) für $N \equiv 0 \pmod{p}$, $N \not\equiv 0 \pmod{p^2}$:

$$\text{vol}(F_N) = -\frac{1}{12}N \left(1 + \left(\frac{N_2}{p}\right)\frac{1}{p}\right) \prod_{q|N_1} \left(1 + \frac{1}{q}\right) \prod_{q|N_2} \left(1 - \frac{1}{q}\right);$$

(iii) für $N \equiv 0 \pmod{p^2}$:

$$\text{vol}(F_N) = -\frac{1}{12}N \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \prod_{q|N_1} \left(1 + \frac{1}{q}\right) \prod_{q|N_2} \left(1 - \frac{1}{q}\right).$$

In den vorstehenden Formeln ist das Produkt über alle Primzahlen q zu nehmen, die N_1 bzw. N_2 teilen.

Wenn $N_2 = 1$ ist, dann ist in den Fällen (i) und (ii) von Satz 2 die Gruppe \mathcal{E}_A konjugiert in $SL_2(\mathbb{R})$ zu $\Gamma_0(N)$, vgl. hierzu [7], Paragraph 4.1. Der Fall (i) von Satz 2 wird im folgenden eine besondere Rolle spielen. Wir können die Formel (i) auch in der Form schreiben :

$$(7) \quad \text{vol}(F_N) = -\frac{1}{6} N \prod_{q|N} (1 + \chi_p(q)/q) \quad \text{für} \quad \left(\frac{N}{p}\right) = 1,$$

wo χ_p der zum Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ gehörige Charakter ist, also

$$\chi_p(n) = \left(\frac{n}{p}\right).$$

In [10] wird die Kurve T_N betrachtet. Sie ist das Bild in $X(p)$ von allen Punkten $(z_1, z_2) \in H^2$, die einer Gleichung (1) mit $\lambda\lambda' + abp = N$ genügen, wobei nicht mehr verlangt wird, dass das Tripel (a, b, λ) primitiv ist. Natürlich ist

$$(8) \quad T_N = \bigcup_{\substack{n \geq 1 \\ n^2 | N}} F_{N|n^2}.$$

Aus Satz 2 folgt die für alle $N \geq 1$ gültige Formel (vgl. [3] und [10] 1.5 (46))

$$(9) \quad \text{vol}(T_N) = -\frac{1}{12} \sum_{\substack{d \geq 1 \\ d | N}} (\chi_p(d) + \chi_p(N/d)) d.$$

1.2. Bevor wir die Untersuchung der Kurven F_N weiterführen, müssen wir an die Theorie der speziellen Punkte von H^2 erinnern ([10] Chap. 1). Hierfür sind einige einfache Begriffe über quadratische Formen nötig.

Für ein orientiertes Gitter (freier \mathbb{Z} -Modul) L vom Rang 2 kann eine ganzzahlige quadratische Form $\varphi : L \rightarrow \mathbb{Z}$ bezüglich einer mit der Orientierung verträglichen \mathbb{Z} -Basis e_1, e_2 von L in der Gestalt

$$\varphi(ue_1 + ve_2) = \alpha u^2 + \beta uv + \gamma v^2 \quad (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}),$$

geschrieben werden. Die Form wird dann mit $[\alpha, \beta, \gamma]$ bezeichnet. Ihre Diskriminante ist $\beta^2 - 4\alpha\gamma$. Sie heisst primitiv, wenn $(\alpha, \beta, \gamma) = 1$. Quadratische Formen sollen stets über orientierten Gittern erklärt sein. Zwei quadratische Formen heissen äquivalent (\cong), wenn es einen orientierungserhaltenden Isomorphismus der Gitter gibt, bei dem die beiden Formen ineinander übergeführt werden. Da jede Äquivalenzklasse durch eine Form $[\alpha, \beta, \gamma]$ über dem kanonisch orientierten Gitter $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ repräsentiert werden kann, sprechen wir auch von $SL_2(\mathbb{Z})$ -Äquivalenz. Zwei Darstellungen einer Zahl N durch Formen $\varphi_1 : L_1 \rightarrow \mathbb{Z}$ und $\varphi_2 : L_2 \rightarrow \mathbb{Z}$ mit $\varphi_1(\xi) = N$ und $\varphi_2(\eta) = N$ heissen entsprechend $SL_2(\mathbb{Z})$ -äquivalent, wenn es einen orientierungserhaltenden Isomor-

phismus der Gitter L_1, L_2 gibt, der φ_1 in φ_2 und ξ in η überführt. Eine Darstellung $\varphi(\xi) = N$ (für $\varphi : L \rightarrow Z$) heisst primitiv, wenn ξ in L durch keine natürliche Zahl > 1 teilbar ist.

Ein Punkt $z = (z_1, z_2) \in H^2$ wird *speziell* genannt, wenn das Gitter \mathcal{M}_z aller ganzzahligen, schief-hermiteschen Matrizen $\begin{pmatrix} a\sqrt{p} & \lambda \\ -\lambda' & b\sqrt{p} \end{pmatrix}$ mit

$$a\sqrt{p}z_1z_2 + \lambda z_2 - \lambda' z_1 + b\sqrt{p} = 0,$$

den Rang 2 hat. Die Gitter \mathcal{M}_z werden für alle speziellen Punkte z in kohärenter Weise orientiert ([10], 1.1). Dann ist $\varphi_z = \det | \mathcal{M}_z$ eine positiv-definite ganzzahlige quadratische Form mit einer durch p teilbaren Diskriminante. Damit ist den Punkten $z \in X(p)$, die von speziellen Punkten $z \in H^2$ herrühren, eine $SL_2(Z)$ -Äquivalenzklasse φ_z von ganzzahligen positiv-definiten quadratischen Formen zugeordnet. (Es ist dann klar, was die Aussage $\varphi_z \cong [\alpha, \beta, \gamma]$ bedeuten soll.) Die Kurve T_M [siehe (8)] geht durch z (repräsentiert durch den speziellen Punkt z) genau dann, wenn φ_z die Zahl M darstellt, die Kurve F_M geht durch z genau dann, wenn φ_z die Zahl M primitiv darstellt.

Es sei φ eine positiv-definite ganzzahlige quadratische Form (definiert über einem orientierten Gitter vom Rang 2). In [10] 1.1, Theorem 1 wurde die »Anzahl« $s(\varphi)$ der Punkte $z \in X(p)$ bestimmt, die von speziellen Punkten $z \in H^2$ herrühren, so dass φ_z und φ zueinander $SL_2(Z)$ -äquivalent sind. Wir geben $s(\varphi)$ hier nur in einem Spezialfall an. Zunächst eine Bezeichnung. Wenn eine Form ψ primitiv ist und durch p teilbare Diskriminante hat, dann stellt ψ entweder nur quadratische Reste mod p dar (darunter auch zu p teilerfremde) oder die durch ψ dargestellten zu p teilerfremden Zahlen sind alle quadratische Nichtreste mod p . Im ersten Fall definiert man $\chi_p(\psi) = 1$, im zweiten $\chi_p(\psi) = -1$.

Wenn φ primitiv und positiv-definit ist, eine durch p teilbare Diskriminante Δ hat ($\Delta < 0$) und $\chi_p(\varphi) = 1$, dann ist

$$(10) \quad s(\varphi) = h'(\Delta/p).$$

Hier ist h' die modifizierte Klassenzahl ($h'(-3) = 1/3$, $h'(-4) = 1/2$, $h'(n) = h(n)$ sonst, wo $h(n)$ für $n < 0$ die Anzahl der $SL_2(Z)$ -Äquivalenzklassen primitiver positiv-definiten quadratischer Formen der Diskriminante n ist. Es ist damit $h(n) = 0$, wenn n keine Diskriminante ist.) In der Formel (10) werden Punkte z , die eine Quotientensingularität der Ordnung 2 bzw. 3 sind, $1/2$ mal bzw. $1/3$ mal gezählt.

Es sei ψ eine positiv-definite ganzzahlige quadratische Form definiert über dem orientierten Gitter $Z \oplus Z$. Mit $s_0(\psi)$ wurde in [10], 1.3 die »Anzahl« der Orientierungserhaltenden Einbettungen $j : Z \oplus Z \rightarrow \mathcal{M}_z$ mit $\psi = \varphi_z \circ j$ bezeichnet, wo z die speziellen Punkte durchläuft. Die Gruppe $SL_2(\mathcal{O})$ operiert auf H^2 . Jedes Element $B \in SL_2(\mathcal{O})$ liefert auch einen Orientierungserhaltenden Isomorphismus von \mathcal{M}_z auf \mathcal{M}_{Bz} , der φ_z in φ_{Bz} überführt (und sich nicht ändert, wenn B durch $-B$ ersetzt). Bei der Definition

der Anzahl $s_0(\psi)$ werden Einbettungen, die bei der erwähnten $SL_2(\mathcal{O})$ -Aktion ineinander übergehen identifiziert und ausserdem jede Einbettung mit der Multiplizität $1/|\text{Kern } \pi|$ gezählt, wo π der natürliche Homomorphismus von der Isotropiegruppe $SL_2(\mathcal{O})_z$ in $\text{Aut}(\varphi_z)$ ist. Wenn der durch z bestimmte Punkt $z \in X(p)$ keine Quotientensingularität ist (d. h. $SL_2(\mathcal{O})_z = \{\pm 1\}$), dann werden zwei Einbettungen in \mathcal{M}_z , die sich nur um das Vorzeichen unterscheiden jeweils $1/2$ mal gezählt, und ein Paar solcher Einbettungen gibt für $s_0(\psi)$ den Beitrag 1. Wir geben $s_0(\psi)$ wieder nur in einem Spezialfall an (vgl. [10], 1.3, Theorem 2 für die allgemeine Formel).

Wenn die Form ψ primitiv und positiv-definit ist, eine durch p teilbare Diskriminante Δ hat und $\chi_p(\psi) = 1$, dann ist

$$(11) \quad s_0(\psi) = H(-\Delta/p).$$

Dabei ist für $n > 0$ per definitionem

$$(12) \quad H(n) = \sum_{\substack{d \geq 1 \\ d^2 | n}} h'(-n/d^2).$$

Bei den obigen speziellen Voraussetzungen über ψ ist übrigens bei allen Einbettungen $j: Z \oplus Z \rightarrow \mathcal{M}_z$ stets $\text{Kern } \pi = SL_2(\mathcal{O})_z$ (vgl. die in 1.1 erwähnte Tatsache: $\varepsilon_A = G_A$, wenn $\det A \not\equiv 0 \pmod{p}$), in Uebereinstimmung mit dem Zählen der speziellen Punkte in (10).

Die Kurven T_M, T_N [siehe (8)] haben gemeinsame Komponenten genau dann, wenn MN eine Quadratzahl ist. Die Schnitte einer Komponente von T_M mit einer davon verschiedenen Komponente von T_N sind jedoch stets transversal. In [10], 1.3, Theorem 3 wird die Anzahl dieser transversalen Schnittpunkte von T_M, T_N in $X(p)$ bestimmt: Jeder orientierungserhaltenden Einbettung der quadratischen Form $[M, b, N]$, wo $b \in Z$ mit $b^2 < 4MN$ und $b^2 \equiv 4MN \pmod{p}$, in ein Gitter \mathcal{M}_z (mit $z \in H^2$ und z speziell) entspricht ein transversaler Schnitt von T_M und T_N in dem Punkte $z \in X(p)$, der durch z gegeben wird. Für die transversale Schnittzahl von T_M und T_N in $X(p)$ hat man deshalb die Formel ([10], 1.3 (35)):

$$(13) \quad (T_M T_N)_{X(p)}^{\text{tr}} = \sum_{\substack{b \in Z \\ b^2 < 4MN \\ b^2 \equiv 4MN \pmod{p}}} s_0([M, b, N]).$$

Wenn $(M, N) = 1$ und M, N quadratische Reste mod p sind, dann kann (11) angewandt werden, und man bekommt

$$(14) \quad (T_M T_N)_{X(p)}^{\text{tr}} = \sum_{\substack{b \in Z \\ b^2 < 4MN \\ b^2 \equiv 4MN \pmod{p}}} H\left(\frac{4MN - b^2}{p}\right).$$

1.3. Wir beschränken uns im folgenden auf die Untersuchung der Kurven F_N für $\left(\frac{N}{p}\right) = \chi_p(N) = 1$. Die Kurve F_N ist nach Satz 1 irreduzibel. Sie möge wie in (1) und (2) durch eine primitive ganzzahlige schief-hermitesche Matrix A der Determinante N

gegeben sein, d. h. F_N ist das Bild in $X(p)$ der durch (1) in H^2 gegebenen Kurve. Die Standgruppe G_A ist eine Untergruppe von $SL_2(\mathcal{O})$, sie enthält das Element -1 . Die projektiv gemachte Standgruppe $\Gamma_A = G_A/\{\pm 1\}$ ist Untergruppe der Hilbertschen Modulgruppe $SL_2(\mathcal{O})/\{\pm 1\}$. Um die Kurve H/Γ_A näher untersuchen zu können, ist es erforderlich, die Konjugationsklassen von Elementen endlicher Ordnung in Γ_A zu bestimmen. Ein Element γ der Ordnung $n \geq 2$ von $SL_2(\mathcal{O})/\{\pm 1\}$ hat genau einen Fixpunkt $z \in H^2$.

Bezüglich geeigneter Koordinaten (u, v) im Tangentialraum von z operiert γ in der Weise, dass $\gamma(u, v) = (\zeta u, \zeta^r v)$, wo ζ eine n -te Einheitswurzel ist, sowie $1 \leq r < n$ und $(n, r) = 1$. Da Γ_A die Standgruppe des Graphen

$$z_2 = \frac{\lambda' z_1 - b\sqrt{p}}{a\sqrt{pz_1} + \lambda} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} a\sqrt{p} & \lambda \\ -\lambda' & b\sqrt{p} \end{pmatrix}$$

ist, folgt für $\gamma \in \Gamma_A$, dass $r = 1$. Die Hilbertsche Modulgruppe $SL_2(\mathcal{O})/\{\pm 1\}$ hat nur Elemente der endlichen Ordnung n mit $n = 2$ oder $n = 3$ (und für $p = 5$ auch $n = 5$, aber dann ist $r = 2$); siehe [15]. Deshalb hat Γ_A nur Elemente endlicher Ordnung mit $n = 2$ oder 3 . Die Anzahl der Konjugationsklassen von Elementen der Ordnung 2 bzw. 3 in Γ_A hängt wegen Satz 1 nur von N (und der fest vorgegebenen Primzahl $p \equiv 1 \pmod{4}$) ab. Wir bezeichnen diese Anzahlen mit $a_2(N)$ bzw. $a_3(N)$ und werden folgenden Satz beweisen.

SATZ 3. — Es sei $\left(\frac{N}{p}\right) = 1$. Die Anzahl der Konjugationsklassen von Elementen der Ordnung 2 bzw. 3 in einer zu F_N gehörigen Standgruppe Γ_A ist gegeben durch

$$(15) \quad \begin{cases} a_2(N) = 0, & \text{wenn } N \equiv 0 \pmod{4}. \text{ Sonst gilt,} \\ a_2(N) = \prod_{\substack{q|N \\ q \text{ Primzahl}}} (1 + \chi_{-4p}(q)); \end{cases}$$

$$(16) \quad \begin{cases} a_3(N) = 0, & \text{wenn } N \equiv 0 \pmod{9}. \text{ Sonst gilt,} \\ a_3(N) = \prod_{\substack{q|N \\ q \text{ Primzahl}}} (1 + \chi_{-3p}(q)). \end{cases}$$

Mit χ_D wird dabei der Charakter des quadratischen Zahlkörpers der Diskriminante D bezeichnet.

Beweis. — Die Fixpunkte in H der Elemente der Ordnung 2 , die zu einer bestimmten Konjugationsklasse von Γ_A gehören, bilden das Urbild in H eines Punktes x von H/Γ_A . Der Punkt x geht bei der Abbildung $H/\Gamma_A \rightarrow X(p)$ in eine Quotientensingularität von $X(p)$ der Ordnung 2 über. Es gibt $h(-4p)$ Quotientensingularitäten der Ordnung 2 in $X(p)$ (vgl. [15]). Die Hälfte davon kommt von speziellen Punkten von H^2 , wo die zugehörige quadratische Form äquivalent zu $[p, 0, p]$ ist, also N nicht darstellen kann (vgl. [10] Example am Schluss von 1.1). Also geht F_N nicht durch einen solchen Punkt hindurch. Die andere Hälfte der Quotientensingularitäten der Ordnung 2 kommt von den speziellen Punkten in H^2 , wo die zugehörige quadratische Form ϕ die Diskriminante $-4p$ hat und $\chi_p(\phi) = 1$ ist. Die Anzahl der $SL_2(\mathbb{Z})$ -Äquivalenzklassen solcher

(positiv-definiten) quadratischen Formen ist $(1/2)h(-4p)$. Diese $SL_2(\mathbb{Z})$ -Äquivalenzklassen entsprechen so bijektiv den übrigen $(1/2)h(-4p)$ Quotientensingularitäten der Ordnung 2 von $X(p)$ [vgl. (10)]. Das Bild von H/Γ_A in $X(p)$, d. h. die Kurve F_N , geht also nur durch diese Quotientensingularitäten hindurch und zwar folgt jetzt aus Satz 1 und den Ueberlegungen von [10] Chap. 1, die in 1.2 wiederholt wurden, dass $a_2(N)$ gleich der Anzahl der $SL_2(\mathbb{Z})$ -inäquivalenten *primitiven* Darstellungen von N durch positiv-definite quadratische Formen der Diskriminante $-4p$ ist. Also ist $a_2(N)$ gleich der Anzahl der ganzen Ideale von $\mathbb{Q}(\sqrt{-4p})$, die primitiv sind, d. h. durch keine natürliche Zahl > 1 teilbar sind, und deren Norm gleich N ist. Damit ist (15) bewiesen. Der Beweis von (16) geht genauso: Es gibt $h(-3p)$ Quotientensingularitäten der Ordnung 3 in $X(p)$. Die Hälfte davon kommt von speziellen Punkten mit quadratischer Form $[p, p, p]$ (und hat die oben angegebene tangentielle Darstellung mit $r = 2$). Also geht F_N nicht durch einen solchen Punkt hindurch. Die übrigen $(1/2)h(-3p)$ Quotientensingularitäten der Ordnung 3 entsprechen bijektiv den $SL_2(\mathbb{Z})$ -Äquivalenzklassen von positiv-definiten quadratischen Formen φ der Diskriminante $-3p$ mit $\chi_p(\varphi) = 1$. Es ist $a_3(N)$ gleich der Anzahl der $SL_2(\mathbb{Z})$ -inäquivalenten *primitiven* Darstellungen von N durch Formen der Diskriminante $-3p$.

Bemerkung. — Da $\chi_{-4p}(2) = \chi_{-3p}(3) = 0$ und

$$\chi_{-4p}(q) = \left(\frac{-1}{q}\right)\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{-1}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) \quad \text{für } q \text{ ungerade } (q \neq p),$$

$$\chi_{-3p}(q) = \left(\frac{-3}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) \quad \text{für } q \neq 3 \text{ und } q \neq p,$$

kann man unter Verwendung der Darstellung von N als Produkt von N_1 und N_2 [siehe (5)] den Satz 3 auch so formulieren.

1) Wenn $N \equiv 0 \pmod{4}$ oder N_1 durch eine Primzahl $q \equiv 3 \pmod{4}$ oder N_2 durch eine Primzahl $q \equiv 1 \pmod{4}$ teilbar ist, dann $a_2(N) = 0$. Anderenfalls

$$a_2(N) = 2^v,$$

wo v die Anzahl der ungeraden N teilenden Primzahlen ist.

2) Wenn $N \equiv 0 \pmod{9}$ oder N_1 durch eine Primzahl $q \equiv 2 \pmod{3}$ oder N_2 durch eine Primzahl $q \equiv 1 \pmod{3}$ teilbar ist, dann $a_3(N) = 0$. Anderenfalls

$$a_3(N) = 2^\mu,$$

wo μ die Anzahl der N teilenden von 3 verschiedenen Primzahlen ist.

1.4. Wir betrachten wieder den Fall $\left(\frac{N}{p}\right) = 1$. Die Matrix A sei wie in 1.3 gewählt.

Die Abbildung $H/\Gamma_A \rightarrow F_N$ ist also surjektiv vom Grad 1. Die Kurve F_N kann Doppelpunkte in $X(p)$ haben. Sie kommen her von speziellen Punkten in H^2 , wo die zugehörige quadratische Form mehrere ($SL_2(\mathbb{Z})$ -inäquivalente) Darstellungen von N besitzt. Die Kurve H/Γ_A ist singularitätenfreies Modell von F_N . Wir wollen jetzt die Anzahl der

Spitzen von Γ_A bestimmen, d. h. die Anzahl der Punkte, durch die H/Γ_A zu einer kompakten Kurve $\overline{H/\Gamma_A}$ kompaktifiziert wird. Diese Zahl, die wiederum nur von N und der gegebenen Primzahl p abhängt, werde mit $\sigma(N)$ bezeichnet und auch Anzahl der Spitzen von F_N genannt. Um $\sigma(N)$ zu bestimmen, betrachten wir die Kompaktifizierung $\overline{X(p)}$ von $X(p)$ durch $h(p)$ Spitzen [7]. Die Fläche, die entsteht, wenn wir diese Spitzen von $\overline{X(p)}$, welche alle singuläre Punkte von $\overline{X(p)}$ sind, auflösen, soll mit $\tilde{X}(p)$ bezeichnet werden. Die Kurve F_N kann zu einer Kurve in $\tilde{X}(p)$ erweitert werden, welche auch F_N genannt werden möge. Die Kurve $\overline{H/\Gamma_A}$ ist singularitätenfreies Modell für die erweiterte Kurve F_N . Offensichtlich ist $\sigma(N)$ gleich der Anzahl der irreduziblen Zweige (irreduziblen Kurvenkeime) von F_N in Punkten des Kurvensystems $\tilde{X}(p) - X(p) = \bigcup S_k$. Die Kurven S_k sind zyklisch angeordnet in $h(p)$ Zyklen [7]. Dem Schnittpunkt von S_{k-1} und S_k ist ein in diesem Punkt zentriertes lokales Koordinatensystem u_k, v_k zugeordnet, sowie eine quadratische Form $[N_{k-1}, M_k, N_k]$ der Diskriminante p . In diesem Koordinatensystem wird S_{k-1} durch $u_k = 0$ und S_k durch $v_k = 0$ gegeben. Den ganzen Idealen b von $Q(\sqrt{p})$, deren Norm $N(b)$ gleich N ist, entsprechen Tripel $(k | s, t)$ mit $s \geq 0, t \geq 0$ und

$$s^2 N_{k-1} + st M_k + t^2 N_k = N.$$

Ein solches Tripel wiederum liefert eine lokale Kurve $u_k^t = v_k^s$, die in T_N enthalten ist (vgl. [7] 4.1, [9] 3.3 und [10] 1.4 (43)). Dabei ist $(s, t) = n(b)$, wo $n(b)$ per definitionem die natürliche Zahl sein soll, so dass b durch $n(b)$ teilbar und $b/n(b)$ ein primitives Ideal ist, also durch keine natürliche Zahl > 1 teilbar ist. Es sind dann

$$u_k^{t/n(b)} = \zeta v_k^{s/n(b)},$$

wo ζ eine primitive $n(b)$ -te Einheitswurzel ist, irreduzible Kurvenzweige von F_N und alle irreduziblen Kurvenzweige von F_N in Punkten von $\tilde{X}(p) - X(p)$ können so erhalten werden. Also ist

$$(17) \quad \sigma(N) = \sum_{N(b)=N} \varphi(n(b)).$$

Die Summation ist über alle ganzen Ideale von $Q(\sqrt{p})$ mit Norm N .

Es folgt, dass $\sigma(N) \neq 0$ genau dann, wenn N_2 ein Quadrat ist, d. h. wenn die Grundzahl der Quaternionenalgebra \mathcal{Q}_A gleich 1 ist. Wenn N_2 kein Quadrat ist, dann ist H/Γ_A kompakt und F_N eine kompakte Kurve in der nichtkompakten Fläche $X(p)$. Das Ergebnis (17) lässt sich so umformulieren.

SATZ 4. — Es sei $\left(\frac{N}{p}\right) = 1$. Wie in (5) sei $N = N_1 N_2$, wo N_1 nur durch Primzahlen, die quadratische Reste, und N_2 nur durch Primzahlen, die quadratische Nichtreste mod p sind, teilbar ist. Die Kurve F_N ist in $X(p)$ kompakt (d. h. F_N hat keine Spitzen), wenn N_2 kein Quadrat ist. Wenn N_2 ein Quadrat ist, dann gilt für die Anzahl der Spitzen

$$(18) \quad \sigma(N) = \sum_{d|N_1} \varphi((d, N_1/d)) \cdot \varphi(\sqrt{N_2}).$$

Beweis. — Die durch (17) gegebene zahlentheoretische Funktion $\sigma(N)$ ist multiplikativ, ebenso die rechte Seite von (18). Es genügt deshalb (18) zu beweisen, wenn $N = N_1 = q^r$ mit $\left(\frac{q}{p}\right) = 1$ oder $N = N_2 = q^{2r}$ mit $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$. Im ersten Fall sei $(q) = \mathbf{q}\mathbf{q}'$. Die Ideale b in (17) sind dann $\mathbf{q}^i(\mathbf{q}')^j$ mit $i+j = r$. Es ist aber $n(\mathbf{q}^i(\mathbf{q}')^j) = q^{\min(i,j)} = (q^i, q^j)$. Damit folgt (18) für $N = N_1 = q^r$. Wenn $N = N_2 = q^{2r}$, dann ist $b = (q^r)$ das einzig mögliche Ideal in (17), was wiederum (18) ergibt.

1.5. Wir haben in 1.4 die kompakte Fläche $\tilde{X}(p)$ betrachtet, die übrigens noch nicht singularitätenfrei ist, da die Quotientensingularitäten nicht aufgelöst wurden. Für $\left(\frac{N}{p}\right) = 1$ wurde die irreduzible Kurve F_N in $\tilde{X}(p)$ und ihr singularitätenfreies Modell $\overline{H/\Gamma_A}$ untersucht. Auf Grund der Sätze 2, 3, 4 kann die Eulersche Zahl des singularitätenfreien Modells, die wir mit $e(N)$ bezeichnen wollen ($e(N) = 2 - 2g(N)$, wo $g(N)$ das Geschlecht ist), mit Hilfe einer klassischen Formel (vgl. z. B. [7], 4.3, (21)) berechnet werden.

SATZ 5. — Es sei $\left(\frac{N}{p}\right) = 1$. Die Eulersche Zahl $e(N)$ des singularitätenfreien Modells der (kompakten) irreduziblen Kurve F_N auf der Modulfläche $\tilde{X}(p)$ wird durch folgende Formel gegeben

$$(19) \quad e(N) = \text{vol}(F_N) + \frac{a_2(N)}{2} + \frac{2}{3}a_3(N) + \sigma(N),$$

wo $\text{vol}(F_N)$, $a_2(N)$, $a_3(N)$, $\sigma(N)$ in Satz 2 (i), Satz 3 und Satz 4 bestimmt wurden.

In der Bezeichnung $\text{vol}(F_N)$, $a_2(N)$, $a_3(N)$, $\sigma(N)$, $e(N)$ ist die Abhängigkeit von p nicht mehr zum Ausdruck gebracht. Durch die Primzahl p wird die Darstellung von N als Produkt $N_1 N_2$ geregelt, in der Tat hängen dann $\text{vol}(F_N)$, \dots , $e(N)$ nur von dem Zahlenpaar N_1, N_2 ab. Wir geben jetzt in zwei Tabellen einige Werte von vol , a_2 , a_3 , σ , e in Abhängigkeit von N_1, N_2 an. Für die Rechnung ist es nützlich festzustellen, dass

$$\text{vol}(F_N) = -\frac{1}{6}\mu(N_1) \cdot \varphi(N_2),$$

wo $\mu(N_1)$ der Index von $\Gamma_0(N_1)$ in $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist, und

$$\sigma(N) = \sigma_0(N_1) \cdot \varphi(\sqrt{N_2}),$$

wo $\sigma_0(N_1)$ die Anzahl der Spitzen von $H/\Gamma_0(N_1)$ ist und $\varphi(\sqrt{N_2})$ gleich 0 gesetzt wird, wenn N_2 kein Quadrat ist. Die Werte von μ und σ_0 wurden nämlich in [2] tabelliert. In den beiden folgenden Tabellen werden in vier zusätzlichen Spalten weitere Werte angegeben. Diese werden später erläutert. In den Tabellen sind Paare N_1, N_2 ausgewählt, die eine besondere Rolle spielen werden.

1.6. Die Involution $T : (z_1, z_2) \rightarrow (z_2, z_1)$ von H^2 induziert Involutionen von $X(p)$, $\overline{X(p)}$ und $\tilde{X}(p)$, die auch mit T bezeichnet werden sollen. Dabei geht die Kurve F_N in sich über. Nach [16] und [7] 5.4 besteht die Fixpunktmenge von T auf $\tilde{X}(p)$ aus $F_1 \cup F_p$, einem isolierten Fixpunkt I auf $X(p)$, falls $p \equiv 1 \pmod{8}$, und einem isolierten

TABELLE 1

N_1	N_2	-6 vol	a_2	a_3	σ	e	c_1	f	e^*	c_1^*
1	1	1	1	1	1	2	1			
2	1	3	1	0	2	2	1	2	2	
3	1	4	0	1	2	2	1	2	2	
4	1	6	0	0	3	2	1	2	2	
1	4	2	0	2	1	2	1	2	2	
5	1	6	2	0	2	2	0	2	2	1
1	6	2	2	2	0	2	0	2	2	1
6	1	12	0	0	4	2	0	2	2	1
7	1	8	0	2	2	2	0	2	2	1
8	1	12	0	0	4	2	0	2	2	1
1	9	6	2	0	2	2	0	2	2	1
9	1	12	0	0	4	2	0	2	2	1
1	10	4	0	4	0	2	0	2	2	1
11	1	12	0	0	2	0	-2	4	2	1
3	4	8	0	2	2	2	0	2	2	1
1	14	6	2	0	0	0	-2	4	2	1
1	15	8	0	2	0	0	-2	4	2	1
1	16	8	0	2	2	2	0	2	2	1
5	4	12	0	0	2	0	-2	4	2	1
1	24	8	0	2	0	0	-2	4	2	1
1	26	12	0	0	0	-2	-4	6	2	1
1	36	12	0	0	2	0	-2	4	2	1

Fixpunkt P_0 auf derjenigen Kurve $S_0 \subset \tilde{X}(p) - X(p)$, für die $T(S_0) = S_0$. Die Kurve F_4 (und keine andere Kurve F_N) geht durch P_0 . Vgl. hierzu 1.4 und [7] 5.5. Der Punkt l ist eine Quotientensingularität der Ordnung 2. Bläst man diese auf in eine rationale Kurve L der Selbstschnittzahl -2 , dann hat das auf die Auflösung angehobene T zwei isolierte Fixpunkte auf L , die in [7] 5.4 (8) mit P_3 und P_4 bezeichnet wurden. Man beachte jedoch, dass wir hier in $\tilde{X}(p)$ arbeiten, wo die Quotientensingularitäten noch nicht aufgelöst wurden. Die Involution T induziert für jeden speziellen Punkt z einen Isomorphismus $\mathcal{M}_z \rightarrow \mathcal{M}_{Tz}$, der die Orientierung *umkehrt* und φ in φ_{Tz} überführt. Wenn z einen Fixpunkt von T in $X(p)$ repräsentiert und B ein Element von $SL_2(\mathcal{O})$ ist mit $B(Tz) = z$, dann induziert BT einen orientierungsumkehrenden Automorphismus t von \mathcal{M}_z mit $\varphi_z \circ t = \varphi_z$.

Zu einer quadratischen Form φ definiert auf dem orientierten Gitter M kann man die Form φ' betrachten, die auf dem umgekehrt orientierten Gitter M erklärt ist, aber mit φ als Funktion $M \rightarrow \mathbb{Z}$ übereinstimmt. Die Form φ (und auch ihre Klasse) heisst ambig, wenn φ und φ' orientierungserhaltend äquivalent sind, d. h. wenn es einen orientierungsumkehrenden Automorphismus t von M gibt, der die Funktion $\varphi : M \rightarrow \mathbb{Z}$ in sich überführt. Wenn $\text{Aut}(\varphi) = \{\pm 1\}$, dann ist t bis auf Multiplikation mit -1 eindeutig bestimmt.

Wenn der spezielle Punkt $z \in H^2$ einen Fixpunkt von T in $X(p)$ repräsentiert, dann ist φ_z ambig und $t : \mathcal{M}_z \rightarrow \mathcal{M}_z$ ist (bis auf Multiplikation mit -1) jedenfalls dann

TABELLE 2

N_1	N_2	-6 vol	a_2	a_3	σ	e	c_1	f	e^*	c_1^*
10	1	18	2	0	4	2	-2	2	2	0
12	1	24	0	0	6	2	-2	2	2	0
13	1	14	2	2	2	2	-2	2	2	0
14	1	24	0	0	4	0	-4	4	2	0
15	1	24	0	0	4	0	-4	4	2	0
16	1	24	0	0	6	2	-2	2	2	0
17	1	18	2	0	2	0	-4	4	2	0
2	9	18	2	0	4	2	-2	2	2	0
19	1	20	0	2	2	0	-4	4	2	0
1	21	12	4	0	0	0	-4	4	2	0
1	22	10	2	4	0	2	-2	2	2	0
23	1	24	0	0	2	-2	-6	6	2	0
1	25	20	0	2	4	2	-2	2	2	0
7	4	16	0	4	2	2	-2	2	2	0
3	10	16	0	4	0	0	-4	4	2	0
5	6	12	4	0	0	0	-4	4	2	0
1	34	16	0	4	0	0	-4	4	2	0
1	35	24	0	0	0	-4	-8	8	2	0
9	4	24	0	0	4	0	-4	4	2	0
1	38	18	2	0	0	-2	-6	6	2	0
1	39	24	0	0	0	-4	-8	8	2	0
1	40	16	0	4	0	0	-4	4	2	0
7	6	16	0	4	0	0	-4	4	2	0
11	4	24	0	0	2	-2	-6	6	2	0
1	54	18	2	0	0	-2	-6	6	2	0
1	56	24	0	0	0	-4	-8	8	2	0
1	60	16	0	4	0	0	-4	4	2	0
11	6	24	0	0	0	-4	-8	8	2	0
1	84	24	0	0	0	-4	-8	8	2	0
1	90	24	0	0	0	-4	-8	8	2	0

eindeutig bestimmt, wenn φ_z eine zu p teilerfremde Zahl darstellt. (Die Diskriminante von φ_z ist durch p teilbar.)

Wir wollen jetzt an das Verhalten der Quotientensingularitäten der Ordnung 2 und 3 unter T erinnern. Der Hälfte der Quotientensingularitäten der Ordnung 2 ist die Form $[p, 0, p]$ zugeordnet (siehe 1.3, Beweis von Satz 3). Sie ist ambig. Eine solche Quotientensingularität liegt auf F_p , ist also ein Fixpunkt von T . Die andere Hälfte der Quotientensingularitäten der Ordnung 2 entspricht bijektiv den $SL_2(\mathbb{Z})$ -Äquivalenzklassen positiv-definiten quadratischer Formen der Diskriminante $-4p$ mit $\chi_p(\varphi) = 1$. Hiervon ist die Klasse von $[1, 0, p]$ ambig, sie ist die einzige ambige Klasse mit $\chi_p(\varphi) = 1$, wenn $p \equiv 5 \pmod{8}$. Die entsprechende Quotientensingularität e ist der Schnittpunkt von F_1 und F_p in $X(p)$, also Fixpunkt von T . Für $p \equiv 1 \pmod{8}$ kommt noch eine ambige Klasse hinzu, nämlich die von $[2, 2, (1/2)(1+p)]$. Diese Form stellt weder 1 noch p dar. Die entsprechende Quotientensingularität ist der oben erwähnte isolierte Fixpunkt l von T in $X(p)$. Die Kurve F_2 geht durch l . Die übrigen Quotien-

tensingularitäten der Ordnung 2 mit $\chi_p(\varphi_z) = 1$ werden durch T paarweise miteinander vertauscht. Für die quadratischen Formen entspricht dies der Isomorphie $\varphi_{Tz} \simeq \varphi'_z$. Sie sind alle nicht ambig.

Zur Hälfte der Quotientensingularitäten der Ordnung 3 gehört die Form $[p, p, p]$. Sie ist ambig. Eine solche Quotientensingularität liegt auf F_p , ist also ein Fixpunkt von T . Die andere Hälfte der Quotientensingularitäten der Ordnung 3 entspricht bijektiv den $SL_2(Z)$ -Äquivalenzklassen positiv-definiter quadratischer Formen φ der Diskriminante $-3p$ mit $\chi_p(\varphi) = 1$. Die Klasse von $[1, 1, (1/4)(3p+1)]$ ist ambig, und sie ist die einzige ambige Klasse, wenn $p \equiv 2 \pmod{3}$. Die entsprechende Quotientensingularität b_1 liegt auf F_1 , ist also ein Fixpunkt von T . Für $p \equiv 1 \pmod{3}$ kommt noch eine ambige Klasse hinzu, nämlich die von $[3, 3, (1/4)(p+3)]$. Diese Form stellt p dar. Die entsprechende Quotientensingularität b_2 liegt also auf F_p und ist ein Fixpunkt von T .

Der Punkt b_2 ist ein Schnittpunkt von F_3 und F_p in $X(p)$. Die übrigen Quotientensingularitäten der Ordnung 3 mit $\chi_p(\varphi) = 1$ werden durch T paarweise miteinander vertauscht.

Die erwähnten ambigen Klassen, welche die 1 darstellen, entsprechen den Hauptidealklassen von $Q(\sqrt{-4p})$ und $Q(\sqrt{-3p})$, während die zusätzlichen ambigen Klassen Idealklassen entsprechen, die in $Q(\sqrt{-4p})$ bzw. $Q(\sqrt{-3p})$ durch ein ganzen Ideal der Norm 2 bzw. 3 repräsentiert werden können.

Die Kurve F_N auf $\tilde{X}(p)$ wird durch die Involution T von $\tilde{X}(p)$ in sich übergeführt. Es gibt nur endlich viele Fixpunkte auf F_N , sofern $N \neq 1$ und $N \neq p$. Wir beschränken uns wieder auf den Fall $\left(\frac{N}{p}\right) = 1$ mit $N > 1$ und betrachten ein singularitätenfreies

Modell $\overline{H/\Gamma_A}$ von F_N . Die Involution T lässt sich auf $\overline{H/\Gamma_A}$ anheben. Es sei $f(N)$ die Anzahl der Fixpunkte auf $\overline{H/\Gamma_A}$. Ihre Anzahl wird durch folgenden Satz bestimmt.

SATZ 6. — Es sei $\left(\frac{N}{p}\right) = 1$ und $N \geq 5$. Für die Involution T auf einem singularitätenfreien Modell $\overline{H/\Gamma_A}$ von F_N gilt dann

- (i) T vertauscht paarweise die Spitzen, d. h. die Punkte von $\overline{H/\Gamma_A} - H/\Gamma_A$;
- (ii) T vertauscht paarweise die Punkte von H/Γ_A , die von Punkten in H mit nicht-trivialer Isotropiegruppe von Γ_A herrühren;
- (iii) die Anzahl der Fixpunkte $f(N)$ von T auf $\overline{H/\Gamma_A}$ ist gegeben durch

$$(20) \quad \begin{cases} f(N) = h(-4N), & \text{wenn } N \not\equiv 3 \pmod{4}, \\ f(N) = h(-4N) + h(-N), & \text{wenn } N \equiv 3 \pmod{4}, \end{cases}$$

[in diesem Fall ist $h(-4N) = h(-N)$, wenn $N \equiv 7 \pmod{8}$, und $h(-4N) = 3h(-N)$, wenn $N \equiv 3 \pmod{8}$];

- (iv) bei der Abbildung $H/\Gamma_A \rightarrow X(p)$ gehen die Fixpunkte von T auf H/Γ_A in $f(N)$ Schnittpunkte von F_N mit F_p über und zwar in die $h(-4N)$ Punkte von $X(p)$, die von speziellen

Punkten $z \in H^2$ mit $\varphi_z \simeq [p, 0, N]$ herrühren und darüberhinaus für $N \equiv 3 \pmod{4}$ in die $h(-N)$ Punkte von $X(p)$, die von speziellen Punkten $z \in H^2$ mit $\varphi_z \simeq [p, p, (1/4)(p+N)]$ herrühren.

Beweis. — Die in 1.4 angegebenen Kurvenzweige $u_k^{t/n(b)} = \zeta v_k^{s/n(b)}$ entsprechen den Paaren (b, ζ) bestehend aus einem Ideal positiver Norm von $Q(\sqrt{p})$ und einer primitiven $n(b)$ -ten Einheitswurzel. Bei der Involution geht b in b' über. Wenn $b = b'$, dann $b = (n)$ oder $b = (n\sqrt{p})$, wo n eine natürliche Zahl ist. In diesem Fall geht die primitive n -te Einheitswurzel ζ bei der Involution in ζ^{-1} über. Nur die Paare $((1), 1)$, $((2), -1)$, $((\sqrt{p}), 1)$, $((\sqrt{p}), -1)$ bleiben fest. Es folgt, dass unter allen F_N nur F_1, F_4, F_p, F_{4p} eine Spitze haben, die bei T invariant ist. Damit ist (i) bewiesen.

Die folgende triviale Bemerkung über quadratische Formen wird nützlich sein. Es sei $\varphi : M \rightarrow Z$ eine positiv-definite ganzzahlige quadratische Form. Die Elemente $e_1, e_2 \in M$ seien Z -linear unabhängig. Es sei t ein Automorphismus von M , der die Orientierung ändert, mit $\varphi \circ t = \varphi$ und $t(e_1) = \pm e_1$. Dann gilt $t(e_2) = \mp e_2$ genau dann, wenn $\varphi \mid Z e_1 + Z e_2$ gegeben wird durch $[\varphi(e_1), 0, \varphi(e_2)]$.

Wir betrachten jetzt die gegebene Kurve F_N mit $\left(\frac{N}{p}\right) = 1$ und $N \geq 5$ und eine weitere Kurve F_M . (Es sei $M \neq N$; die Zahl M braucht nicht zu p teilerfremd zu sein.) Auf den singularitätenfreien Modellen von F_M und F_N möge es Fixpunkte von T geben, die in $X(p)$ in ein und denselben Punkt z übergehen. (Dabei sind die Fixkurven F_1 und F_p als F_M zugelassen.) Der Punkt z kommt dann von einem speziellen Punkt $z \in H^2$, und es gibt Elemente $e_1, e_2 \in \mathcal{M}_z$ mit $\varphi_z(e_1) = M$, $\varphi_z(e_2) = N$, so dass für den (bis auf Multiplikation mit -1 wohlbestimmten) orientierungsumkehrenden Automorphismus t von \mathcal{M}_z gilt: $t(e_1) = \pm e_1$ und $t(e_2) = \mp e_2$. Die Form $\varphi_z \mid Z e_1 + Z e_2$ wird dann nach vorstehender trivialer Bemerkung gegeben durch $[M, 0, N]$. Sie hat Diskriminante $-4MN$. Da die Diskriminante von φ_z durch p teilbar ist, folgt $M \equiv 0 \pmod{p}$. Deshalb kann ein Fixpunkt der Involution T des singularitätenfreien Modells H/Γ_A von F_N bei der natürlichen Abbildung $H/\Gamma_A \rightarrow X(p)$ nicht in $F_1 \cup \{l\} \cup \{b_2\}$ abgebildet werden, da sonst $M = 1$ bzw. 2 bzw. 3 genommen werden könnte. Also wird ein solcher Fixpunkt in F_p abgebildet und zwar auf einen regulären Punkt von $X(p)$, da den auf F_p liegenden Quotientensingularitäten (abgesehen von $e = F_1 \cup F_p$ und b_2) als speziellen Punkten die Form $[p, 0, p]$ bzw. $[p, p, p]$ zugeordnet ist, die N nicht darstellt. Es folgt, dass die in (ii) angegebenen Punkte von H/Γ_A nicht Fixpunkte der Involution T von H/Γ_A sein können.

Der Beweis von (iii) lässt sich jetzt zu Ende führen. Wir betrachten die Form $\psi = [p, 0, N]$ definiert auf $Z \oplus Z$ und die in 1.2 besprochenen Einbettungen $j : Z \oplus Z \rightarrow \mathcal{M}_z$ mit $\varphi_z \cdot j = \psi$. Wenn eine solche Einbettung gegeben ist, dann repräsentiert z in $X(p)$ einen Punkt von F_p , also einen Fixpunkt der Involution T von $X(p)$. Setzt man $j(1, 0) = e_1$ und $j(0, 1) = e_2$, dann gilt für den (bis auf Multiplikation mit -1) wohlbestimmten orientierungsumkehrenden Automorphismus t von \mathcal{M}_z die Gleichung $t(e_1) = \pm e_1$, da F_p Fixkurve ist, und nach der trivialen Bemerkung auch $t(e_2) = \mp e_2$.

Die Einbettung j liefert deshalb einen Fixpunkt von T auf dem singularitätenfreien Modell von F_N , sofern e_2 ein primitives Element von \mathcal{M}_2 ist, und jeder Fixpunkt kann so erhalten werden. Also gilt nach 1.2 :

$$\begin{aligned} f(N) &= h(-4N), & \text{wenn } N \equiv 0 \pmod{4}, \\ f(N) &= h(-4N) + h(-N), & \text{wenn } N \not\equiv 0 \pmod{4}, \end{aligned}$$

wie zu beweisen war [vgl. 1.2 (11), (12)]. Die in (iii) angegebene Beziehung zwischen $h(-4N)$ und $h(-N)$ folgt aus einer klassischen Formel (vgl. [10], 1.2, Prop. 1). Zu (iv) ist nur festzustellen, dass nach 1.2 (10) :

$$s([p, 0, N]) = h(-4N) \quad \text{und} \quad s\left(\left[p, p, \frac{1}{4}(p+N)\right]\right) = h(-N)$$

und dass $[p, p, (1/4)(p+N)]$ die Form $[p, 0, N]$ darstellt. Es ist übrigens $[p, p, (1/4)(p+N)] \simeq [N, N, (1/4)(p+N)]$.

Bemerkungen : 1) Die Zahl $f(N)$ ist unabhängig von der Aufspaltung $N = N_1 N_2$, also auch unabhängig von der Quaternionenalgebra \mathcal{Q}_A der Grundzahl N'_2 (siehe 1.1). Es hat sich für alle Fälle die Zahl ergeben, die von der Erweiterung der Gruppe

$$\Gamma_0(N) \quad \text{zu} \quad \Gamma_*(N) = \Gamma_0(N) \cup \Gamma_0(N) \begin{pmatrix} 0 & -N^{-1/2} \\ N^{1/2} & 0 \end{pmatrix}$$

bekannt ist [4]. Dieses Ergebnis von Fricke entspricht $N_2 = 1$ (vgl. [7], 5.3, Remark). Die Werte von $h(-4N)$ wurden in [2] tabelliert für die Berechnung des Geschlechts von $\overline{H/\Gamma_*(N)}$.

2) Da F_2, F_3, F_4 das Geschlecht 0 haben (vgl. Tabelle 1) ist $f(2) = f(3) = f(4) = 2$. Für das singularitätenfreie Modell von F_2 wird einer der Fixpunkte von T auf l abgebildet, der andere auf denjenigen Punkt z_2 in $X(p)$ mit $\varphi_{z_2} \simeq [p, 0, 2]$. Für F_3 wird einer der Fixpunkte auf b_2 abgebildet, der andere auf denjenigen Punkt z_3 in $X(p)$ mit $\varphi_{z_3} \simeq [p, 0, 3]$. Für F_4 bleibt eine Spitze fest, der andere Fixpunkt wird auf denjenigen Punkt z_4 in $X(p)$ abgebildet mit $\varphi_{z_4} \simeq [p, 0, 4]$. Man beachte, dass $s([p, 0, 2]) = h(-8)$, $s([p, 0, 3]) = h(-12)$, $s([p, 0, 4]) = h(-16)$ und dass diese Klassenzahlen gleich 1 sind.

Für die Kurve F_N von $\tilde{X}(p)$ mit $\left(\frac{N}{p}\right) = 1$ und $N > 1$ haben wir ein singularitätenfreies Modell $\overline{H/\Gamma_A}$ benutzt. In der Fläche $\tilde{X}(p)/T$ sind Kurven F_N^* als Bilder der F_N definiert. Die Kurve F_N^* hat das singularitätenfreie Modell $\overline{(H/\Gamma_A)/T}$, dessen Eulerzahl wir mit $e^*(N)$ bezeichnen wollen. Es ist dann

$$(21) \quad e^*(N) = \frac{1}{2}(e(N) + f(N)).$$

In den Tabellen 1, 2 von 1.6 wurden in einigen Fällen die Werte von $f(N)$ und $e^*(N)$ angegeben. In diesen Beispielen ist stets $e^* = 2$. Wie wir sehen werden, gibt es noch viele andere Fälle mit $e^* = 2$. Es ist aber $\lim e^*(N) = -\infty$ für $N \rightarrow \infty$.

2. Die Kurven F_N und F_N^* auf den desingularisierten Hilbertschen Modulflächen

2.1. Aus der Hilbertschen Modulfläche $X(p) = H^2/SL_2(\mathcal{O})$ entsteht durch Hinzufügung von $h(p)$ Spitzen die kompakte Fläche $\overline{X(p)}$, die endlich viele singuläre Punkte hat, nämlich die erwähnten Spitzen und die Quotientensingularitäten von $X(p)$. Löst man die Spitzen auf, dann erhält man die in 1.4 eingeführte Fläche $\tilde{X}(p)$. Die singularitätenfreie algebraische Fläche, die aus $\tilde{X}(p)$ durch Auflösung der Quotientensingularitäten in der kanonischen minimalen Weise entsteht, soll $Y(p)$ genannt werden ([7], [8]). Die Kurven F_N und T_N lassen sich auch als Kurven in $Y(p)$ auffassen.

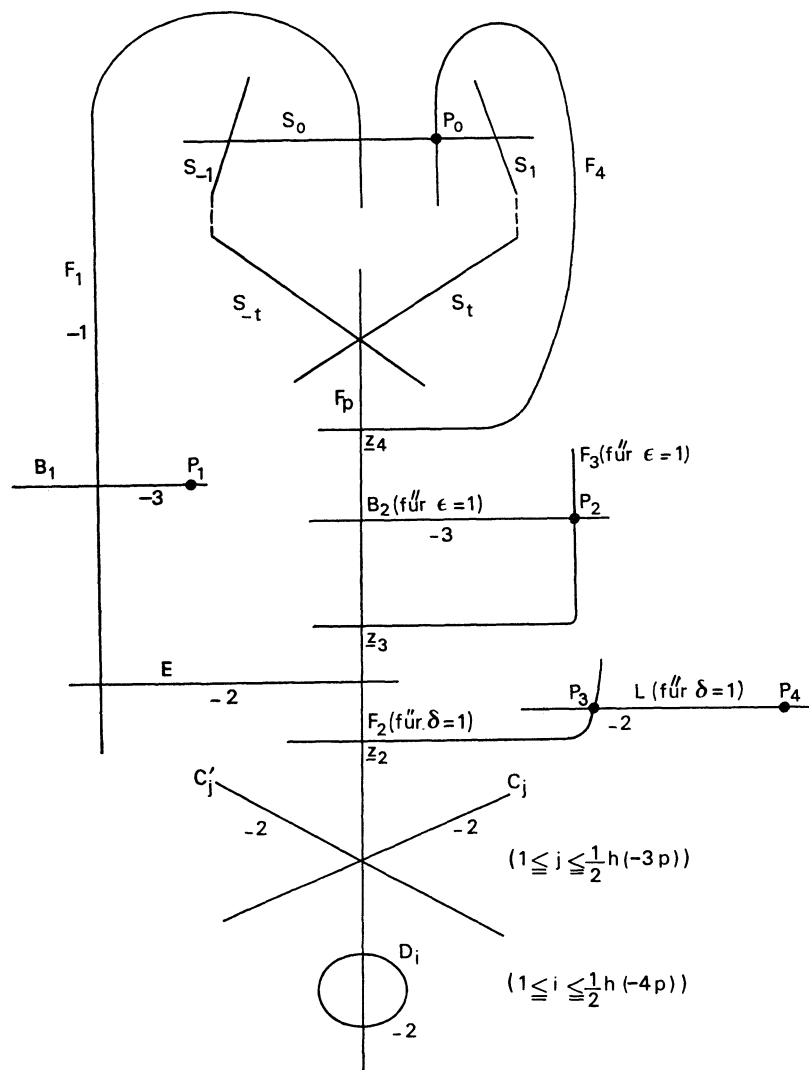
In 1.6 wurden die Quotientensingularitäten und ihr Verhalten unter der Involution T beschrieben. Auf der Fläche $Y(p)$ operiert T ebenfalls. Auf $Y(p)$ hat man die folgende grundlegende T -symmetrische Konfiguration von Kurven ([7], 5.3, (8) und [8], II). Bei der Beschreibung spielt die Restklasse von p modulo 24 eine Rolle. Es werde deshalb wie in [7] gesetzt :

$$\begin{aligned} \varepsilon = 1 & \quad \text{für } p \equiv 1 \pmod{3} & \quad \text{und} & \quad \varepsilon = 0 & \quad \text{für } p \equiv 2 \pmod{3}, \\ \delta = 1 & \quad \text{für } p \equiv 1 \pmod{8} & \quad \text{und} & \quad \delta = 0 & \quad \text{für } p \equiv 5 \pmod{8}. \end{aligned}$$

In dieser Konfiguration sind alle irreduziblen Kurven singularitätenfrei (bis auf $p = 5$, wo $t = 0$ und S_0 einen Doppelpunkt hat und auch F_4 einen Doppelpunkt hat). Alle Kurven bis auf F_p sind rational. Im einzelnen entsteht diese Konfiguration so :

Die Auflösung der Hauptspitze wurde eingezeichnet. Die Kurven sind mit S_k bezeichnet ($k \bmod (2t+1)$) mit $T(S_k) = S_{-k}$. Die zugehörigen Ideale b , siehe 1.4, sind genau die Hauptideale. Die Zyklen von Kurven S_k , die zu den anderen Spitzen gehören, werden durch T paarweise vertauscht. Sie sind nicht in die Konfiguration eingetragen. Die Kurven F_2, F_3 treffen die Zyklen der Spitzenauflösungen in jeweils 2 Punkten, da $\sigma(2) = \sigma(3) = 2$. Diese Schnittpunkte wurden nicht eingezeichnet. Auch die weiteren Schnittpunkte von F_4 mit den Zyklen (für $\delta = 1$ und $\sigma(4) = 3$) und mit V_j, V'_j für $\delta = 0$ sind nicht berücksichtigt. Für die folgenden Ausführungen vergleiche 1.6.

Jede Quotientensingularität der Ordnung 2 mit zugehöriger quadratischer Form $[p, 0, p]$ wird aufgeblasen in eine Kurve D_i der Selbstschnittzahl -2 mit $T(D_i) = D_i$. Jede Quotientensingularität der Ordnung 3 mit zugehöriger quadratischer Form $[p, p, p]$ wird aufgeblasen in zwei Kurven C_j, C'_j der Selbstschnittzahl -2 , die unter der Involution T vertauscht werden ($T(C_j) = C'_j$). Man beachte, dass in diesem Fall $r = 2$ ist (vgl. 1.3). Die Quotientensingularität e der Ordnung 2 (quadratische Form $[1, 0, p]$) wird aufgeblasen in eine Kurve E der Selbstschnittzahl $EE = -2$. Die Quotientensingularität l der Ordnung 2 wird aufgeblasen in eine Kurve L mit $LL = -2$, auf der T die



$$\begin{array}{cc} \frac{-2}{U_i \ (1 \leq i \leq ((1/2)h(-4p)-1-\delta)/2)}, & \frac{-2}{U'_i} \\ \frac{-3}{V_j \ (1 \leq j \leq ((1/2)h(-3p)-1-\varepsilon)/2)}, & \frac{-3}{V'_j} \end{array}$$

isolierten Fixpunkte P_3, P_4 hat. Durch P_3 geht die Kurve F_2 . Die Quotientensingularitäten b_1, b_2 der Ordnung 3 werden aufgeblasen in Kurven B_1, B_2 der Selbstschnittzahl -3 , auf denen T jeweils einen isolierten Fixpunkt P_1 bzw. P_2 hat. Durch P_2 geht die Kurve F_3 . Die übrigen Quotientensingularitäten der Ordnung 2 bzw. 3 treten in Paaren auf. Sie werden aufgelöst in Kurven U_i, U'_i bzw. V_j, V'_j der Selbstschnittzahl -2

bzw. -3 , die unter T paarweise miteinander vertauscht werden ($T(U_i) = U'_i$ und $T(V_j) = V'_j$).

2.2. Es soll der Wert der ersten Chernschen Klasse c_1 von $Y(p)$ auf F_N berechnet werden. Das wurde im wesentlichen in [7] 4.3 durchgeführt, allerdings waren dort nur Kurven F_N mit $N_2 = 1$ betrachtet worden.

Die duale Homologieklassse von c_1 kann als Element γ von $H_2(Y(p), \mathbb{R})$ aufgefasst werden. Dann gilt ([7], 3.2, (9), 4.3) :

$$(1) \quad \gamma = \gamma_0 + \frac{1}{3}(B_1 + B_2) + \frac{1}{3} \sum_j (V_j + V'_j) + \sum S_k,$$

wo k alle Zyklen durchläuft, die auftretenden Kurven als Homologieklassen aufgefasst werden und γ_0 eine Homologieklassse des regulären Ortes X_0 von $X(p)$ ist, deren duale Kohomologieklassse in X_0 durch eine geschlossene Differentialform $\tilde{\gamma}_0$ mit kompaktem Träger repräsentiert werden kann. Die Form $\tilde{\gamma}_0$ wird durch »Abschneiden« aus

$$\omega = -\frac{1}{2\pi}(y_1^{-2} dx_1 dy_1 + y_2^{-2} dx_2 dy_2), \quad z_j = x_j + iy_j,$$

erhalten ([7], 3.4). Die Form ω ist die $SL_2(\mathbb{R}) \times SL_2(\mathbb{R})$ -invariante Chernsche Form. Da die Kurven F_N von Graphen gebrochener linearer Transformationen (1.3) herrühren, ist

$$(2) \quad \int_{F_N} \omega = 2 \text{vol}(F_N),$$

und die Form $\tilde{\gamma}_0$ ist so beschaffen, dass

$$(3) \quad \gamma_0 \cdot F_N = \int_{F_N} \tilde{\gamma}_0 = \int_{F_N} \omega = 2 \text{vol}(F_N).$$

Der Wert von c_1 auf der Kurve $F_N \subset Y(p)$ werde mit $c_1[F_N]$ bezeichnet. Der Einfachheit halber werde wieder $\left(\frac{N}{p}\right) = 1$ vorausgesetzt. Dem Beweis des Satzes 3 im 1.3 entnimmt man, dass

$$a_3(N) = F_N \cdot (B_1 + B_2 + \sum (V_j + V'_j)).$$

Aus (1) und (3) folgt

$$(4) \quad c_1[F_N] = 2 \text{vol}(F_N) + \frac{1}{3} a_3(N) + F_N \sum S_k.$$

Die Schnitzzahlsumme $\sum F_N S_k$ kann nach 1.4 bestimmt werden : Jede Spitze von F_N mit dem Kurvenkeim

$$u_k^{t/n(b)} = \zeta v_k^{s/n(b)},$$

liefert für diese Summe den Beitrag $(s+t)/n(b)$, der stets ≥ 1 ist. Für das ganze Ideal b von $Q(\sqrt{p})$ mit $N(b) = N$ definieren wir die nicht negative Zahl

$$(5) \quad \rho(b) = (s+t)/n(b) - 1$$

und erhalten

$$F_N \sum S_k = \sigma(N) + \sum_{\substack{b \\ N(b)=N}} \varphi(n(b)) \rho(b).$$

Aus 1.5 (19) folgt

$$(6) \quad c_1[F_N] = 2e(N) - a_2(N) - a_3(N) - \sigma(N) + \rho(N),$$

wo per definitionem

$$\rho(N) = \sum_{\substack{b \\ N(b)=N}} \varphi(n(b)) \rho(b).$$

Wir definieren

$$(7) \quad c_1(N) = 2e(N) - a_2(N) - a_3(N) - \sigma(N).$$

Für eine Spitze von F_N mit dem oben angegebenen Kurvenkeim ist bei der üblichen Aufspaltung $N = N_1 N_2$ die Zahl N_2 eine Quadratzahl ($N_2 = r^2$). Wir haben

$$N = s^2 N_{k-1} + st M_k + t^2 N_k \quad \text{mit } r|s \text{ und } r|t.$$

(Der Leser möge die Faktoren N_1, N_2 der Aufspaltung von N nicht mit den N_k der Spitzenauflösungen verwechseln.) Da $M_k^2 - 4 N_{k-1} N_k = p$, gilt $M_k \geq \sqrt{p+4}$; deshalb verschwindet s oder t , wenn $N_1 < \sqrt{p+4} + 2$. Der Kurvenkeim ist dann regulär, schneidet S_k transversal und geht nicht durch einen Schnittpunkt $S_{j-1} \cap S_j$.

DEFINITION. — Die Kurve F_N heisst transversal in den Spitzen, wenn F_N die Kurve $\cup S_k$ (k durchläuft alle Zyklen) transversal schneidet, d. h. F_N in jedem Punkt von $\cup S_k$ regulär ist, nicht durch die Doppelpunkte von $\cup S_k$ geht und jedes S_k in endlich vielen Punkten transversal schneidet.

Die vorstehenden Ueberlegungen ergeben

SATZ 1. — Es sei $\left(\frac{N}{p}\right) = 1$. Für die Kurve F_N auf der Fläche $Y(p)$ gilt

$$c_1[F_N] \underset{\text{Def}}{\geq} c_1[N] = 2e(N) - a_2(N) - a_2(N) - a_3(N) - \sigma(N).$$

Die Kurve F_N ist transversal in den Spitzen genau dann, wenn für jedes ganze Ideal b von $Q(\sqrt{p})$ mit $N(b) = N$ gilt: $\rho(b) = 0$. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn $c_1[F_N] = c_1(N)$. Wenn N_2 kein Quadrat ist oder $N_1 < \sqrt{p+4} + 2$, dann ist F_N transversal in den Spitzen und somit $c_1[F_N] = c_1(N)$.

Die Tabellen 1, 2 in 1.6 geben den Wert von $c_1(N)$ in einigen Fällen an ($N = N_1 N_2$).

2.3. Aus 1.2 (13) folgt, dass die Kurven F_M, F_N in $X(p)$ die transversale Schnittzahl 0 haben, wenn kein $b \in \mathbb{Z}$ existiert mit $b^2 < 4MN$ und $b^2 \equiv 4MN \pmod{p}$. Da $(1/p)(b^2 - 4MN)$ eine Diskriminante ist, ergibt sich, dass die transversale Schnittzahl

in $X(p)$ verschwindet, wenn $MN < 3p/4$. Im folgenden sei $\left(\frac{N}{p}\right) = 1$. Wenn $4MN - b^2 = 3p$, dann ist $[M, b, N]$ bis auf Äquivalenz die einer wohlbestimmten Quotientensingularität z der Ordnung 3 zugeordnete quadratische Form und F_M, F_N schneiden sich in z transversal. Entsprechendes gilt, wenn $4MN - b^2 = 4p$, dann schreiben sich F_M, F_N in einer Quotientensingularität z der Ordnung 2: Bläst man z auf in eine Kurve der Selbstschnitzzahl -3 bzw. -2 , dann zeigen F_M, F_N auf $Y(p)$ folgendes Verhalten

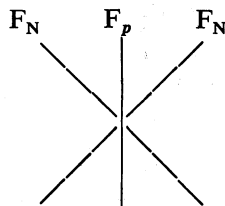
$$(8) \quad \frac{F_M}{-3} \Big| \frac{F_N}{-3} \quad \text{bzw.} \quad \frac{F_M}{-2} \Big| \frac{F_N}{-2}.$$

Die transversale Schnitzzahl in $Y(p) - \cup S_k$ ist also bereits 0, wenn $MN < 7p/4$. Wenn $a_3(N) = 0$ bzw. $a_2(N) = 0$, dann kann eine Situation (8) nicht auftreten. Wir bemerken auch noch, dass F_M und F_N sich in $X(p)$ nicht in einer Quotientensingularität der Ordnung 2 schneiden können, wenn $MN < p$; sie können sich dann in $X(p)$ höchstens in einer Quotientensingularität der Ordnung 3 schneiden. Bei diesen Überlegungen war $M = N$ zugelassen.

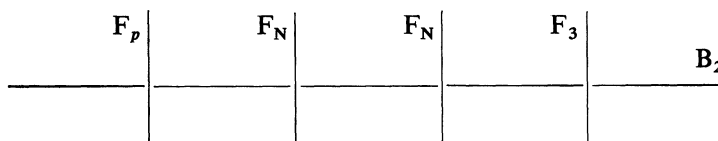
Wenn $M \neq N$ und $M < \sqrt{p}$, $N < \sqrt{p}$, dann sind F_M und F_N in $Y(p)$ disjunkt. Die Kurven treffen sich nämlich auch in Punkten von $\cup S_k$ nicht (vgl. 2.2 Satz 1): Schneiden sie die gleiche Kurve S_k , dann ist $M = t_1^2 N_k$ und $N = t_2^2 N_k$. Die Kurve S_k (gegeben durch $v_k = 0$) hat die laufende Koordinate u_k , und $F_M \cap S_k$ bzw. $F_N \cap S_k$ entspricht vermöge u_k der Menge der t_1 -ten bzw. t_2 -ten primitiven Einheitswurzeln.

Die Kurve F_N hat keine Doppelpunkte in $X(p)$, wenn $N < p/4$. Die Bedingung $0 < 4N^2 - x^2 \equiv 0 \pmod{p}$ ist nämlich unter der Annahme $N < p/4$ nicht erfüllbar. Insbesondere geht F_N dann durch $a_2(N)$ verschiedene Quotientensingularitäten der Ordnung 2 und $a_3(N)$ verschiedene Quotientensingularitäten der Ordnung 3 (vgl. 1.3). Für $N \geq 4$ bedeutet dies, dass genau $a_2(N)/2$ verschiedene Kurvenpaare U_i, U'_i von F_N transversal geschnitten werden und entsprechendes für $a_3(N)/2$ Kurvenpaare V_j, V'_j gilt. Wir werden diese Kurvenpaare oft auch U_N, U'_N und V_N, V'_N nennen (versehen mit einem Index, der von 1 bis $a_2(N)/2$ bzw. $a_3(N)/2$ läuft).

Wenn $N > p/4$ und $\left(\frac{N}{p}\right) = 1$, dann hat F_N Doppelpunkte in $X(p)$. Man betrachte nämlich die quadratische Form $[N, 2N - p, N]$ der Diskriminante $-(4N - p)p$. Diese Form ist ambig, sie ist äquivalent zu $[N, p, p]$. Da $s_0([N, p, p]) = H(4N - p)$ [siehe 1.2, (11)] erhält man auf diese Weise $H(4N - p)$ Doppelpunkte von F_N in $X(p)$, die auf F_p liegen. Wenn $H(4N - p)$ keine ganze Zahl ist, bedeutet dies, dass einer der Doppelpunkte der Punkt b_2 ist (siehe 1.6). In $Y(p)$ hat man $[H(4N - p)]$ Doppelpunkte mit jeweils einer Konfiguration



Wenn $H(4N-p)$ nicht ganz ist, kommt eine Konfiguration hinzu.



Wenn $p/4 < N < p/2$, dann hat F_N keine weiteren Doppelpunkte in $X(p)$ bzw. $Y(p)$.

2.4. Es sei Y eine singularitätenfreie algebraische Fläche. Die auf Y liegende Kurve D heisst *exzeptionell*, wenn sie singularitätenfrei, irreduzibel und rational ist und wenn $DD = -1$. Für jede singularitätenfreie Kurve D gilt die Adjunktionsformel

$$c_1[D] - DD = e(D),$$

wo c_1 die erste Chernsche Klasse von Y und $e(D)$ die Eulersche Zahl ist. Deshalb kann die Bedingung $DD = -1$ in der Definition einer exzeptionellen Kurve durch $c_1[D] = 1$ ersetzt werden.

Auf Grund von 1.6 Tabelle 1 und 2.2 Satz 1, sowie 2.3 sind F_1, F_2 ($\delta = 1$), F_3 ($\varepsilon = 1$) exzeptionelle Kurven auf $Y(p)$, und F_4 ist eine exzeptionelle Kurve auf $Y(p)$ für $p \neq 5$. In $Y(5)$ hat F_4 genau einen Doppelpunkt. Für $p \geq 13$ sind die reduziblen Kurven $F_1 \cup E \cup B_1, F_2 \cup L, F_3, F_4$ disjunkt in $Y(p)$. Dies folgt aus 2.3. Die Kurven $F_1, E, B_1, F_2, L, F_3, F_4$ (es handelt sich um $4 + 2\delta + \varepsilon$ Kurven) können sukzessive niedergeblasen werden. Die so erhaltene algebraische Fläche wird $Y^0(p)$ genannt (vgl. [7], 5.5. Dort wurde $Y^0(p)$ nur für $p \geq 29$ eingeführt. Wir haben die Fläche $Y^0(p)$ hier für $p \geq 13$ definiert). Für $p \geq 13$ sind die Kurven F_1, F_2, F_3, F_4 auch in $X(p)$ disjunkt, mit einer Ausnahme für $p = 13$: Die Kurven F_3 und F_4 schneiden sich in der Quotientensingularität b_2 (vgl. 2.3), wo F_4 einen Doppelpunkt hat. Auf $Y^0(13)$ hat deshalb B_2 einen Doppelpunkt. Es sei im folgenden stets $p \geq 13$.

Die Involution T operiert auch auf $Y^0(p)$. Das Bild der Kurve F_N ($N \geq 5$) in $Y^0(p)$ soll mit F_N^0 bezeichnet werden. Die (singularitätenfreie) Fixpunktmenge von T auf $Y^0(p)$ ist F_p^0 . Es gibt keine isolierten Fixpunkte. Deshalb ist $Y^0(p)/T$ eine *singularitätenfreie* algebraische Fläche. Die erste Chernsche Klasse von $Y^0(p)$ werde mit c_1^0 , die von $Y^0(p)/T$ mit c_1^* bezeichnet. Das Bild von F_N^0 in $Y^0(p)/T$ soll F_N^* heissen. (Eine Konfusion mit dem Schluss von 1.6, wo wir das Bild von F_N in $\tilde{X}(p)/T$ ebenfalls F_N^* genannt haben, ist nicht zu befürchten.) Für $N \neq p$ gilt (vgl. [7] 5.1 und 5.7) :

$$(9) \quad c_1^*[F_N^*] = \frac{1}{2}(c_1^0[F_N^0] + F_N^0 \cdot F_p^0).$$

Wir wollen $c_1^*[F_N^*]$ für $N \geq 5$ und $\left(\frac{N}{p}\right) = 1$ berechnen. Wenn die Schnitzzahlen von

F_N mit F_1 und F_2 in $X(p)$ verschwinden und sich F_N mit F_3 und F_4 in $X(p)$ höchstens in Quotientensingularitäten der Ordnung 3 schneidet, dann ist $c_1^0[F_N^0] = c_1[F_N]$, da F_N in $Y(p)$ die beim Uebergang zu $Y^0(p)$ niederzublasenden Kurven nicht schneidet. Nach 2.3 sind diese Bedingungen erfüllt, wenn $N < 7p/16$. In jedem Fall ist

$c_1^0[F_N^0] \geq c_1[F_N]$. Die Schnittzahl $F_N^0 F_p^0$ ist grösser oder gleich der in 1.6 Satz 6 angegebenen Zahl $f(N)$. Wir können jetzt folgenden Satz beweisen.

SATZ. 2. — Es sei $\left(\frac{N}{p}\right) = 1$ und $N \geq 5$. Für die Kurve F_N^* auf der Hilbertschen Modulfläche $Y^0(p)/T$ (mit $p \geq 13$) gilt

$$(10) \quad c_1^*[F_N^*] \geq \frac{1}{2}(c_1[F_N] + f(N)),$$

wo die Zahl $f(N)$ in 1.6 (20) angegeben ist. Wenn $N < p/4$, dann ist

$$c_1^*[F_N^*] = \frac{1}{2}(c_1[F_N] + f(N)).$$

Beweis. — Die Ungleichung (10) folgt aus (9). Die Schnittzahl von F_N und F_p in $X(p)$ kann nach Formel 1.2 (14) berechnet werden. Wenn $4Np - b^2$ durch p teilbar sein soll, dann muss $b = rp$ sein ($r \in \mathbb{Z}$). Aber $4N - r^2 p$ ($r^2 \geq 1$) ist negativ für $N < p/4$. Also tragen zur Schnittzahl von F_N und F_p in $X(p)$ nur die in 1.6 besprochenen Schnittpunkte bei, welche den Fixpunkten von T auf dem singularitätenfreien Modell von F_N entsprechen. Da F_N (für $N < 7p/16$) die auf $Y(p)$ niederzublasenden Kurven nicht schneidet, ist die Schnittzahl von F_N und F_p auf $Y(p)$ gleich der von F_N^0 und F_p^0 auf $Y^0(p)$. Die Kurven F_N und F_p schneiden sich in Punkten von $\cup S_k$ höchstens in $S_t \cap S_{-t}$ (siehe 2.1, Fig. 1). Zu diesem Eckpunkt gehört die quadratische Form $[N_t, M_{t+1}, N_t]$ (vgl. 1.4) der Diskriminante p , für die $2N_t + M_{t+1} = p$. Es handelt sich also um die Form $[(p-1)/4, (p+1)/2, (p-1)/4]$. Die Kurve T_M mit minimalem M , die durch diesen Eckpunkt hindurchgeht, ist F_p . Deshalb ist $F_N^0 \cdot F_p^0 = f(N)$ für $N < p/4$.

DEFINITION :

$$(11) \quad c_1^*(N) = \frac{1}{2}(c_1(N) + f(N)).$$

Die Zahl $c_1(N)$ wurde in 2.2 (7) definiert. In die Tabellen 1, 2 von 1.6 wurde auch c_1^* aufgenommen. Wegen 2.2 Satz 1 und 2.3 erhalten wir :

KOROLLAR. — Es sei $\left(\frac{N}{p}\right) = 1$ und $N \geq 5$ und wie üblich $N = N_1 N_2$. Für die Kurve F_N^* auf der Fläche $Y^0(p)/T$ (mit $p \geq 13$) gilt

$$c_1^*[F_N^*] \geq c_1^*(N).$$

Wenn N_2 kein Quadrat ist oder $N_1 < \sqrt{p+4}+2$ und wenn ferner $N < p/4$, dann ist F_N^* singularitätenfrei in $Y^0(p)/T$ und

$$c_1^*[F_N^*] = c_1^*(N).$$

Wenn $N > p/4$, dann

$$(12) \quad c_1^*[F_N^*] \geq c_1^*(N) + [H(4N - p)].$$

Wenn N_2 kein Quadrat ist oder $N_1 < \sqrt{p+4}+2$ und wenn ferner $p/4 < N < 7p/16$, dann ist F_N^* singularitätenfrei in $Y^0(p)/T$ und

$$(13) \quad c_1^*[F_N] = c_1^*(N) + [H(4N-p)].$$

Beweis. — Es muss nur noch zu (12) und (13) etwas gesagt werden. Die Formel (12) folgt aus der Existenz der in 2.3 erwähnten auf F_p liegenden Doppelpunkte von F_N . Die Voraussetzungen zu (13) implizieren, dass F_N transversal durch die Spitzen geht und also $c_1[F_N] = c_1(N)$. Wegen $N < 7p/16$ ist $c_1[F_N] = c_1^0[F_N^0]$ und wegen $N < p/2$ gibt es keine weiteren Doppelpunkte von F_N und auch keine weiteren Schnittpunkte von F_N mit F_p , als die in 2.3 erwähnten, also ist $F_N^0 F_p^0 = f(N) + 2[H(4N-p)]$ und (9) impliziert (13). Jeder der Doppelpunkte von F_N^0 ergibt nach Teilung durch T einen regulären Punkt von F_N^* . Die Kurve F_N^* berührt F_p^* in $[H(4N-p)]$ Punkten.

2.5. Die Kurve F_N^* (mit $\left(\frac{N}{p}\right) = 1$) hat das am Schluss von 1.6 besprochen singularitätenfreie Modell mit der Eulerzahl $e^*(N)$. Es ist nicht schwer zu zeigen, dass $e^*(N)$ und $c_1^*(N)$ nach $-\infty$ streben, wenn $N \rightarrow \infty$. Die Werte von $e^*(N)$, $c_1^*(N)$ hängen von dem Zahlenpaar N_1, N_2 mit $N = N_1 N_2$ ab, wo die Aufspaltung von N in diese beiden Faktoren durch p bestimmt wird. Es wäre nützlich alle Paare N_1, N_2 zu kennen, für die $e^* = 2$ oder $e^* = 0$. D. Zagier hat vor einigen Jahren auf meinen Wunsch mit Hilfe des Hewlett-Packard Computers am I.H.E.S. die Paare (N_1, N_2) mit $e^* = 2$ oder $e^* = 0$ für $N \leq 809$ bestimmt. In den folgenden Tabellen geben wir diese Paare an nach den Werten von c_1^* geordnet (und zwar nur für $N \geq 5$, da die Kurven F_N mit $N \leq 4$ in $Y(p)$ niedergeblasen wurden). In jeder c_1^* -Spalte stehen die zugehörigen Paare N_1, N_2 . In die Tabellen 1, 2 von 1.6 wurden die Paare N_1, N_2 mit $e^* = 2$ und $c_1^* = 1$ bzw. $c_1^* = 0$ aufgenommen.

Die Fälle $e^* = 2$ mit $N = N_1$ (also $N_2 = 1$) sind wohlbekannt. Das singularitätenfreie Modell ist hier $H/\Gamma_*(N)$ (vgl. 1.6 Bemerkung 1). Die in der Tabelle 3 angegebenen 34 Fälle sind die einzigen N mit $N \geq 5$ und $e(H/\Gamma_*(N)) = 2$ (vgl. [7], 5.7; die Abschätzungen in [6] wurden durch Kluit [12] ergänzt). Ebenso enthält Tabelle 4 alle Fälle mit $e^* = 0$ und $N_2 = 1$.

Vermutlich sind die Tabellen 3, 4 vollständig, d. h. enthalten alle Paare N_1, N_2 mit $e^* = 2$ oder 0. Um dies zu beweisen sind jedoch weitere Abschätzungen erforderlich.

2.6. In der Hilbertschen Modulfläche $Y^0(p)/T$ (mit $p \geq 13$) sind die Kurven F_N^* ($N = N_1 N_2$) exzeptionell (2.4), wenn das Paar N_1, N_2 zu den in der ersten Spalte von Tabelle 3 angegebenen 17 Fällen gehört und wenn ferner F_N^* singularitätenfrei und $c_1^*(F_N^*) = c_1^*(N) = 1$. Nach 2.4 Korollar treffen diese Bedingungen zu, wenn p hinreichend gross ist.

Die Hilbertsche Modulfläche $Y(p)$ ist einfach-zusammenhängend [18], also auch $Y^0(p)$ und ebenfalls $Y^0(p)/T$, da die Involution T auf $Y^0(p)$ nicht frei operiert.

Eine einfach-zusammenhängende algebraische Fläche Y ist rational, d. h. birational äquivalent zur projektiven Ebene, wenn es eine irreduzible Kurve D auf Y gibt mit $c_1[D] \geq 1$, die nicht exzeptionell ist. Hierbei bezeichnet c_1 die erste Chernsche Klasse von Y . Dieses Rationalitätskriterium wurde in [7], [8] und [9] häufig benutzt. Ein

TABELLE 3

 $e^* = 2$ (Geschlecht 0)

$c_1^* = 1$	$c_1^* = 0$	$c_1^* = -1$	$c_1^* = -2$	$c_1^* = -3$	$c_1^* = -4$	$c_1^* = -5$	$c_1^* = -6$	$c_1^* = -7$
5 1	10 1	18 1	24 1	39 1	36 1	3 25	50 1	1 159
1 6	12 1	20 1	26 1	49 1	71 1	41 4	1 119	1 206
6 1	13 1	21 1	32 1	2 25	21 4		1 194	
7 1	14 1	25 1	35 1	59 1	1 95		37 6	
8 1	15 1	27 1	41 1	1 69	5 22		23 10	
1 9	16 1	29 1	5 9	1 81	1 111		1 276	
9 1	17 1	31 1	47 1	1 87	1 134			
1 10	2 9	1 33	1 49	1 94	1 146			
11 1	19 1	4 9	1 55	29 4	29 6			
3 4	1 21	1 46	7 9		31 6			
1 14	1 22	3 16	3 22		1 204			
1 15	23 1	1 51	7 10					
1 16	1 25	13 4	19 4					
5 4	7 4	1 62	13 6					
1 24	3 10	1 64	5 16					
1 26	5 6	17 4	1 86					
1 36	1 34	1 74	1 100					
	1 35	1 96	1 104					
	9 4		11 10					
	1 38		19 6					
	1 39		1 126					
	1 40		1 132					
	7 6		1 140					
	11 4		1 144					
	1 54		1 150					
	1 56							
	1 60							
	11 6							
	1 84							
	1 90							

ähnliches Kriterium besagt, dass die einfach-zusammenhängende Fläche Y rational ist, wenn es zwei verschiedene exzeptionelle Kurven auf Y gibt, die sich schneiden. In [7] wurden alle Primzahlen $p \equiv 1 \pmod{4}$ bestimmt, für die $Y^0(p)/T$ rational sind. Man kann Rationalitätsbeweise in mannigfacher Weise mit Hilfe der angegebenen Kriterien führen. Zum Beispiel gilt.

SATZ 3. — *Es sei p eine Primzahl $\equiv 1 \pmod{4}$ und $p \geq 13$. Es sei N eine natürliche Zahl ≥ 5 mit $\left(\frac{N}{p}\right) = 1$ und $N = N_1 N_2$, wo N_1 nur durch quadratische Reste mod p und N_2 nur durch Primzahlen, welche quadratische Nichtreste mod p sind, teilbar ist. Wenn $p < 4N$ und*

$$c_1^*(N) + H(4N - p) > 1,$$

TABELLE 4

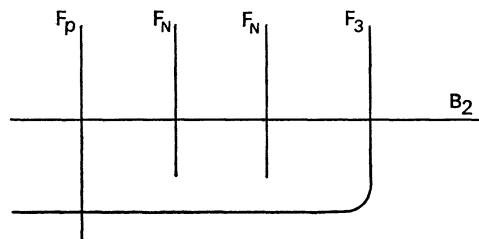
 $e^* = 0$ (Geschlecht 1)

$c_1^* = -2$	$c_1^* = -3$	$c_1^* = -4$	$c_1^* = -5$	$c_1^* = -6$	$c_1^* = -7$	$c_1^* = -8$	$c_1^* = -9$	$c_1^* = -10$
$\begin{array}{cc} 2 & 15 \\ 3 & 14 \end{array}$	$\begin{array}{cc} 22 & 1 \\ 1 & 58 \end{array}$	$\begin{array}{cc} 28 & 1 \\ 33 & 1 \\ 37 & 1 \\ 2 & 21 \\ 43 & 1 \\ 1 & 57 \\ 15 & 4 \\ 1 & 65 \\ 5 & 14 \\ 1 & 82 \\ 1 & 88 \\ 9 & 10 \\ 13 & 4 \\ 17 & 6 \\ 5 & 24 \\ 23 & 6 \\ 1 & 156 \\ 1 & 210 \end{array}$	$\begin{array}{cc} 34 & 1 \\ 38 & 1 \\ 53 & 1 \\ 25 & 4 \\ 1 & 106 \\ 1 & 122 \end{array}$	$\begin{array}{cc} 30 & 1 \\ 40 & 1 \\ 44 & 1 \\ 45 & 1 \\ 51 & 1 \\ 55 & 1 \\ 61 & 1 \\ 2 & 33 \\ 8 & 9 \\ 1 & 77 \\ 11 & 9 \\ 7 & 15 \\ 27 & 4 \\ 7 & 16 \\ 1 & 118 \\ 3 & 40 \\ 31 & 4 \\ 13 & 10 \\ 1 & 135 \\ 1 & 136 \\ 25 & 6 \\ 1 & 152 \\ 1 & 160 \\ 7 & 24 \\ 17 & 10 \\ 5 & 36 \\ 1 & 198 \\ 1 & 216 \\ 1 & 234 \\ 1 & 240 \end{array}$	$\begin{array}{cc} 79 & 1 \\ 83 & 1 \\ 1 & 196 \end{array}$	$\begin{array}{cc} 48 & 1 \\ 56 & 1 \\ 63 & 1 \\ 64 & 1 \\ 65 & 1 \\ 89 & 1 \\ 5 & 21 \\ 13 & 9 \\ 1 & 129 \\ 35 & 4 \\ 9 & 16 \\ 7 & 22 \\ 1 & 166 \\ 11 & 16 \\ 13 & 14 \\ 1 & 220 \\ 1 & 224 \\ 41 & 6 \\ 1 & 260 \\ 11 & 24 \\ 1 & 294 \\ 1 & 306 \\ 1 & 330 \\ 1 & 336 \\ 1 & 360 \\ 1 & 390 \end{array}$	$\begin{array}{cc} 54 & 1 \\ 81 & 1 \\ 101 & 1 \\ 1 & 324 \end{array}$	$\begin{array}{cc} 75 & 1 \\ 10 & 9 \\ 95 & 1 \\ 1 & 121 \\ 1 & 143 \\ 19 & 9 \\ 13 & 15 \\ 49 & 4 \\ 59 & 4 \\ 19 & 14 \\ 29 & 10 \end{array}$

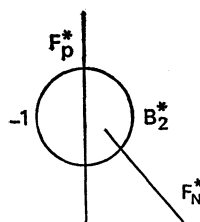
$c_1^* = -11$	$c_1^* = -12$	$c_1^* = -13$	$c_1^* = -14$	$c_1^* = -15$	$c_1^* = -16$
$\begin{array}{cc} 2 & 49 \\ 131 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{cc} 119 & 1 \\ 5 & 46 \\ 11 & 21 \\ 17 & 15 \\ 7 & 60 \\ 71 & 6 \\ 1 & 510 \\ 1 & 546 \end{array}$	$\begin{array}{cc} 1 & 314 \end{array}$	$\begin{array}{cc} 1 & 215 \\ 7 & 33 \end{array}$		$\begin{array}{cc} 17 & 22 \end{array}$

dann ist die algebraische Fläche $Y^0(p)/T$ rational. Wenn $e^*(N) \neq 2$, dann kann man bereits aus der Ungleichung $c_1^*(N) + H(4N - p) > 0$ auf die Rationalität von $Y^0(p)/T$ schliessen.

Beweis. — Wenn $H(4N-p)$ eine ganze Zahl ist, dann folgt die Behauptung nach dem Rationalitätskriterium wegen 2.4 (12). Wenn $H(4N-p)$ nicht ganz ist, dann gibt es nach 2.3 die Konfiguration



Auf $Y^0(p)$ wird B_2 eine singularitätenfreie Kurve der Selbstschnittzahl -2 (auf $Y^0(13)$ hat sie einen Doppelpunkt, und es ist $c_1^0[B_2] = 2$, woraus die Rationalität von $Y^0(13)$ und $Y^0(13)/T$ ohnehin folgt). Auf $Y^0(p)/T$ hat man die Konfiguration



Dabei ist das Bild B_2^* eine exzeptionelle Kurve in $Y^0(p)/T$. Wird B_2^* niedergeblasen, dann wird F_N^* eine Kurve auf einer neuen Fläche, so dass der Wert der ersten Chernschen Klasse dieser Fläche auf der Kurve *größer* als $c_1^*(N) + [H(4N-p)]$ ist. Das Rationalitätskriterium kann wieder angewandt werden.

2.7. Es sei p eine Primzahl $\equiv 1 \pmod{8}$. Wir wollen Satz 3 auf F_N^* mit $N = 64$ (d. h. hier $N_1 = 64, N_2 = 1$) anwenden. Es ist $e^*(N) = 0$ und $c_1^*(N) = -8$ (siehe Tabelle 4). Für die Primzahlen $p = 17, 41, 73, 89, 97, 113, 137$ ist $H(256-p) = 15, 14, 8, 11, 10, 10, 10$. Also sind die Flächen $Y^0(p)/T$ für diese sieben Primzahlen, abgesehen von vielleicht $p = 73$, rational. Für $p = 73$ schneidet F_{64}^* die exzeptionelle Kurve F_9^* dreifach, da $4 \cdot 9 \cdot 64 - 25^2 = 73 \cdot 23$ und $h(-23) = 3$. Daraus folgt die Rationalität von $Y^0(73)/T$.

Es sei jetzt p eine Primzahl $\equiv 5 \pmod{8}$. Wir wenden Satz 3 auf F_N^* mit $N = 64$ an ($N_1 = 1, N_2 = 64$). Es ist $e^*(N) = 2$ und $c_1^*(N) = -1$.

Für die Primzahlen $p = 13, 29, 37, 53, 61, 101, 109, 149, 157, 173, 181, 197, 229$ ist $H(256-p) = 4 \frac{1}{3}, 5, 4, 4, 4, 2 \frac{1}{3}, 3, 3, 3, 2 \frac{1}{3}, 3, 1 \frac{1}{3}$. Also sind diese Flächen $Y^0(p)/T$ rational, abgesehen vielleicht im Falle von $p = 229$. Aber F_{64}^* und F_{20}^* schneiden sich in $Y(229)$, da $4 \cdot 64 \cdot 20 - 51^2 = 229 \cdot 11$. Daraus folgt die Rationalität von $Y^0(229)/T$, da $F_{20}^*(N_1 = 5, N_2 = 4)$ und F_{64}^* nach 2.4 Korollar und dem Beweis von Satz 3 exzeptionelle Kurven auf derjenigen Fläche sind, die sich aus $Y^0(229)/T$ durch Niederblasen von B_2^* ergibt.

Für $p = 269, 293, 317$ betrachten wir die Kurve F_{144}^* mit $N_1 = 1, N_2 = 144$ und $e^* = 2, c_1^* = -2$. Es ist $H(576-p) = 3$, bzw. 3 bzw. 4. Also ist die Fläche $Y^0(317)/T$ rational. Da [64, 77, 144] die Diskriminante -269.115 hat und $h(-115) = 2$, schneiden sich F_{64}^* und F_{144}^* auf $Y^0(269)/T$ in 2 Punkten; wenn F_{144}^* exzeptionell ist, dann kann es niedergeblasen werden und $F_{64}^*(c_1^*(64) = -1)$ wird eine Kurve mit Doppelpunkt auf einer neuen Fläche Y' mit $c_1'[F_{64}^*] = 1$, wo c_1' die erste Chernsche Klasse von Y' ist. Also ist dann $Y^0(269)/T$ rational. (Wenn F_{144}^* nicht exzeptionell wäre, würde die Rationalität sofort folgen. Aber es ist leicht zu kontrollieren, dass F_{144}^* exzeptionell ist.) Das gleiche Argument ergibt die Rationalität von $Y^0(293)/T$. Nämlich, die Diskriminante von [64, 101, 144] ist -293.91 und $h(-91) = 2$.

Die Hilbertschen Modulflächen $Y(p)$ sind genau für $p = 5, 13, 17$ rational ([7], [8]). (Die Rationalität von $Y(5)$ folgt zum Beispiel aus der Tatsache dass F_4 auf $Y(5)$ einen Doppelpunkt hat.) Also sind auch schon deshalb $Y(5)/T, Y^0(13)/T$ und $Y^0(17)/T$ rational. Die vorstehenden Rationalitätsbeweise wurden gebracht als Anwendungsbeispiele für das Schnittverhalten der F_N in den Hilbertschen Modulflächen. Dabei wurde $p = 5$ nur deshalb ausgeschlossen, weil $Y^0(5)$ nicht definiert werden konnte. Wir erhalten erneut folgenden Satz (vgl. [7], 5.8).

SATZ 4. — *Es sei p eine Primzahl $\equiv 1 \pmod{4}$. Es sei G_T die symmetrische Hilbertsche Modulgruppe für $Q(\sqrt{p})$, d. h. $G_T = G \cup G \cdot T$, wo $G = \text{SL}_2(\mathcal{O})/\{\pm 1\}$. Dann ist die Fläche H^2/G_T genau dann rational, wenn $p < 193$ oder $p = 197, 229, 269, 293, 317$.*

Die Fläche $\overline{H^2/G_T}$ ist natürlich als $\overline{H^2/G}/T$ definiert. Sie hat Singularitäten. Für $p \geq 13$ ist $Y^0(p)/T$ ein singularitätenfreies Modell dieser Fläche.

Rationalität ist auch für singuläre Flächen wohldefiniert. Die Rationalität von $\overline{H^2/G_T}$ ist äquivalent dazu, dass der Körper der meromorphen Funktionen auf H^2 , die automorph bezüglich G_T sind, eine rein transzendente Erweiterung von C ist. Die Rationalität wurde für die in Satz 4 erwähnten 24 Primzahlen vorstehend erneut nachgewiesen. Diese sind die einzigen Primzahlen $p \equiv 1 \pmod{4}$ mit rationaler Hilbertscher Modulfläche $\overline{H^2/G_T}$, weil für alle anderen p das arithmetische Geschlecht $\chi(Y_0(p)/T)$ grösser als 1 ist (vgl. § 3).

Es ist amüsant, weitere Rationalitätsbeweise zu finden. Zum Beispiel ist $Y^0(197)/T$ rational, weil

$$4.26.36 - 1^2 = 19.197,$$

und sich deshalb die exzeptionellen Kurven F_{26}^* und F_{36}^* auf $Y^0(197)/T$ schneiden.

3. Numerische Invarianten, exzeptionelle Kurven

3.1. Die Berechnung der numerischen Invarianten der Hilbertschen Modulflächen $X(p), \tilde{X}(p), Y(p), Y^0(p), Y^0(p)/T$ wurde in [7] durchgeführt (vgl. auch [9]). Es soll dabei p weiterhin eine Primzahl $\equiv 1 \pmod{4}$ sein. Es sei $K = Q(\sqrt{p})$. Die ζ -Funktion von K wird mit ζ_K bezeichnet. Mit e wird die Eulersche Zahl angedeutet. Wir erinnern

kurz an die Berechnung der Eulerschen Zahl für die verschiedenen Flächen. Es ist (für $p \geq 13$, was stets vorausgesetzt wird)

$$(1) \quad e(X(p)) = 2\zeta_K(-1) + \frac{1}{2}h(-4p) + \frac{2}{3}h(-3p),$$

$$(2) \quad e(\tilde{X}(p)) = e(X(p)) + l(p).$$

In (1) ist $2\zeta_K(-1)$ das Volumen von $X(p)$ normiert im Sinne des Gauss-Bonnetschen Satzes. Ferner sind $(1/2)h(-4p)$ und $(2/3)h(-3p)$ die Beiträge der Quotientensingularitäten von $X(p)$. Die Zahl $l(p)$ gibt die Anzahl der Kurven in der Auflösung der Spitzen an, d. h. die Anzahl der irreduziblen Komponenten von $\tilde{X}(p) - X(p) = \cup S_k$. Von der Konstruktion der Auflösungen her weiss man, dass $l(p)$ gleich der Anzahl der reduzierten quadratischen Irrationalitäten w der Diskriminante p ist (»reduziert« bedeutet: $0 < w' < 1 < w$). Diese reduzierten Irrationalitäten sind in Zyklen angeordnet, den Auflösungszyklen entsprechend. Es ist

$$(3) \quad w_k = \frac{M_k + \sqrt{p}}{2N_k}, \quad w_k = b_k - \frac{1}{w_{k+1}} \quad (b_k = [w_k] + 1).$$

Die natürlichen Zahlen M_k, N_k wurden bereits in 1.4 benutzt. Die Selbstschnittzahl der Kurve S_k ist $-b_k$.

Für $l(p)$ wurde in [9] 4.2 (10) eine Formel angegeben

$$(4) \quad l(p) = \sum_{\substack{1 \leq k < \sqrt{p} \\ k \text{ ungerade}}} \sigma_0\left(\frac{p-k^2}{4}\right).$$

Hierbei ist $\sigma_r(n)$ die Summe der r -ten Potenzen der Teiler von n . Die Formel (4) ist analog zur Siegelschen Formel (vgl. [7] 1.4 (11)) :

$$(5) \quad 2\zeta_K(-1) = \frac{1}{15} \sum_{\substack{1 \leq k < \sqrt{p} \\ k \text{ ungerade}}} \sigma_1\left(\frac{p-k^2}{4}\right).$$

Die Auflösung der Quotientensingularitäten ergibt

$$(6) \quad e(Y(p)) = e(\tilde{X}(p)) + h(-4p) + \frac{3}{2}h(-3p),$$

und das Niederblasen von $F_1, E, B_1, F_2, L, F_3, F_4$ (siehe 2.4 und die Figur in 2.1) impliziert

$$(7) \quad e(Y^0(p)) = e(Y(p)) - 4 - 2\delta - \varepsilon.$$

Die Involution T operiert auf $Y^0(p)$ mit F_p^0 als Fixkurve und keinen weiteren Fixpunkten (2.4). Es ist deshalb

$$(8) \quad e(Y^0(p)/T) = \frac{1}{2}(e(Y^0(p)) + e(F_p^0)).$$

Die Kurve F_p^0 ist isomorph zu $\overline{H/\Gamma_*(p)}$. Man hat

$$(9) \quad \begin{cases} e(\overline{H/\Gamma_0(p)}) = -\frac{p+1}{6} + \frac{4}{3}\varepsilon + 3, \\ e(\overline{H/\Gamma_*(p)}) = \frac{1}{2}(e(\overline{H/\Gamma_0(p)}) + h(-4p)). \end{cases}$$

Die in (9) angegebenen Werte sind e und e^* (vgl. 1.5 (19) und 1.6 (21)) für das Zahlenpaar $N_1 = p, N_2 = 1$. Jedoch kommt $\Gamma_*(p)$ hier anders zustande als im Falle einer Zahl N mit $\left(\frac{N}{p}\right) = 1$. Die Standgruppe G_A einer schief-hermiteschen Matrix A der Determinante p ist eine Erweiterung von \mathcal{E}_A von Index 2 (siehe 1.1). Dies entspricht dem Uebergang von $\Gamma_0(p) \simeq \mathcal{E}_A$ zu $\Gamma_*(p) \simeq G_A$. Die $h(-4p)$ Fixpunkte von $\Gamma_*(p)/\Gamma_0(p)$ auf $H/\Gamma_0(p)$ werden abgebildet auf die $h(-4p)/2$ Quotientensingularitäten von $X(p)$ der Ordnung 2, die auf F_p liegen.

Sie haben alle die quadratische Form $[p, 0, p]$ [und sind Doppelpunkte von F_p in $X(p)$]. Sie werden aufgelöst durch die Kurven D_i (Figur in 2.1). Aus den vorstehenden Formeln (1), (2), (6)-(9) folgt

$$(10) \quad e(Y^0(p)/T) = \zeta_K(-1) + h(-4p) + \frac{13}{12}h(-3p) + \frac{1}{2}l(p) - \frac{p+1}{24} - \frac{5}{4} - \frac{\varepsilon}{6} - \delta.$$

Das arithmetische Geschlecht $\chi(Y)$ einer singularitätenfrei algebraischen Fläche Y ist per definitionem $1 - q + p_g$, wo q die Irregularität (halbe erste Bettische Zahl) und p_g das geometrische Geschlecht (Dimension des Raumes der holomorphen 2-Formen) ist.

Die Hilbertschen Modulflächen $Y^0(p)$, $Y^0(p)/T$ sind einfach-zusammenhängend. Ihr arithmetisches Geschlecht $\chi = 1 + p_g$ wurde in [7] berechnet.

$$(11) \quad \chi(Y^0(p)) = \frac{1}{4}e(X(p)),$$

$$(12) \quad \chi(Y^0(p)/T) = \frac{1}{2} \left(\chi(Y^0(p)) + \frac{1}{4}c_1^0[F_p^0] \right),$$

wobei
$$c_1^0[F_p^0] = -\frac{p+1}{6} + \frac{4}{3}\varepsilon + 2\delta + 5.$$

Für die Berechnung von $c_1^0[F_p^0]$ kann man die Methoden von 2.2 verwenden, muss aber beim Uebergang von $c_1[F_p]$ in $Y(p)$ zu $c_1^0[F_p^0]$ in $Y^0(p)$ genau beachten, wie die niederzublasenden Kurven F_p schneiden (siehe Figur in 2.1).

Für eine algebraische Fläche Y mit erster Chernscher Klasse c_1 hat man die Noethersche Formel

$$(13) \quad \chi(Y) = \frac{1}{12} (c_1^2[Y] + e(Y)).$$

Das arithmetische Geschlecht ist eine birationale Invariante (g, p_g sind sogar birational invariant), während $e(Y)$ beim Aufblasen um 1 steigt und $c_1^2[Y]$ um 1 abnimmt.

Aus (10), (12) und (13) ergibt sich (wir schreiben c_1^2 statt $(c_1^*)^2$, obwohl die erste Chernsche Klasse von $Y^0(p)/T$ in 2.4 mit c_1^* bezeichnet wurde) :

$$(14) \quad c_1^2(Y^0(p)/T) = 2\zeta_K(-1) - \frac{h(-4p)}{4} - \frac{1}{12}h(-3p) - \frac{1}{2}l(p) \\ - \frac{5p}{24} + \frac{13}{6}\varepsilon + 4\delta + 8 + \frac{13}{24}.$$

Dies ist die Formel 2.5 (39) von [9].

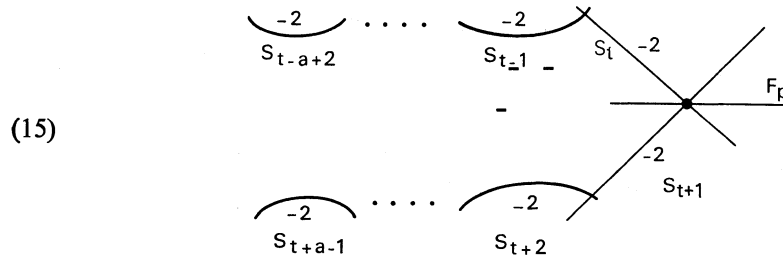
3.2. Es werde daran erinnert, dass wir eine feste Primzahl $p \equiv 1 \pmod{4}$ gewählt haben und stets $p \geq 13$ voraussetzen, da $Y^0(p)$ für $p = 5$ nicht gebildet werden kann. Die Konfiguration der Figur in 2.1 liegt auf $Y(p)$. Wir betrachten ihr Bild in $Y^0(p)/T$. Dabei haben S_j, S_{-j} dieselbe Bildkurve, die wir S_j^* nennen. Ebenso haben C_j, C'_j die gleiche Bildkurve. Sie soll C_j^* heissen. Entsprechend sind U_i^* und V_j^* definiert, wobei wir auch wie in 2.3 die Bezeichnung U_N^* bzw. V_N^* verwenden wollen. Schliesslich sollen natürlich D_i^* und B_2^* die Bildkurven von D_i und B_2 sein. Die übrigen in der Figur ange-deuteten Kurven wurden beim Uebergang von $Y(p)$ zu $Y^0(p)$ niedergeblasen. Zunächst stellen wir fest, dass C_j^* eine exzeptionelle Kurve ist, die F_p^* berührt, und dass D_i^* eine exzeptionelle Kurve ist, die F_p^* in zwei Punkten transversal schneidet. Damit können in $Y^0(p)/T$ jedenfalls $(1/2)(h(-4p) + h(-3p))$ Kurven niedergeblasen werden. Die so entstehende Fläche heisse $(Y^0(p)/T)'$.

Wir wollen $(Y^0(p)/T)'$ für $p = 13$ und $p = 17$ genauer ansehen.

p	$6\zeta_K(-1)$	$h(-4p)$	$h(-3p)$	l	$e(Y^0(p))$	$e(F_p^0)$	$e(Y^0(p)/T)$	$e((Y^0(p)/T)')$
13.....	1	2	4	3	10	2	6	3
17.....	2	4	2	5	10	2	6	3

Wir wissen, dass $Y^0(p)$ und $Y^0(p)/T$ in diesen beiden Fällen rational sind. Die einzige rationale Fläche mit Eulerscher Zahl 3 ist aber die projektive Ebene $P_2(C)$. Also ist $(Y^0(p)/T)'$ für $p = 13, 17$ isomorph zu $P_2(C)$. Die Fläche $Y^0(13)$ ist die minimal desingularisierte doppelte Ueberlagerung von $P_2(C)$ entlang einer Kurve 4-ter Ordnung mit einem Doppelpunkt und zwei Spitzen. Dasgleiche trifft zu für $Y^0(17)$, nur dass hier der Verzweigungsort einer Kurve 4-ter Ordnung mit zwei Doppelpunkten und einer Spitze ist.

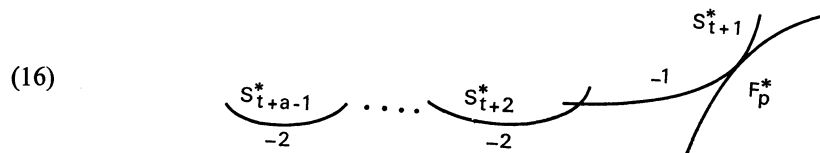
Jetzt wieder zurück zur allgemeinen Situation. Der Zykel der Hauptspitze (siehe Figur in 2.1) hat $2t+1$ Kurven, die mit S_k bezeichnet werden, wo $k \bmod 2t+1$ zu betrachten ist. Es ist also $S_{t+i} = S_{-t+i-1}$ und $S_{t+i}^* = S_{-i+1}^*$. Auf $Y(p)$ haben die Kurven $S_{t+1}, S_{t+2}, \dots, S_{t+a-1}$ die Selbstschnittzahl -2 , wo $a = [(1+\sqrt{p})/2]$. Man hat also die folgende Konfiguration auf $Y(p)$:



Diese Teilkonfiguration der Figur nennt man den »Schwanz« der Hauptspitze (vgl. [7] 5.4 (9), (13) und [9] 5.4). Dem Schnittpunkt von S_{t+k} und S_{t+k-1} ist die quadratische Form $[N_{t+k-1}, M_{t+k}, N_{t+k}]$ zugeordnet mit

$$N_{t+k} = \frac{1}{4}(p - (2k-1)^2), \quad M_{t+k} = 2N_{t+k} + (2k-1) \quad (1 \leq k \leq a-1).$$

Die Kurve S_{t+k} und die dazu symmetrische Kurve $T(S_{t+k}) = S_{t-k+1}$ werden von $F_{(p-(2k-1)^2)/4}$ transversal geschnitten (vgl. 1.4). Für $p = 13$ und $p = 17$ ist $a = 2$ und $(p-1)/4 = 3$ bzw. $= 4$. Dies führt beim Uebergang zu $Y^0(p)$ zu einem Rationalitätsbeweis für $Y^0(13)$ und $Y^0(17)$, da S_{t+1} und S_t exzeptionelle Kurven von $Y^0(13)$ bzw. $Y^0(17)$ werden, die sich schneiden. Für $p \geq 29$, was wir im folgenden voraussetzen wollen, schneiden die Kurven, welche beim Uebergang von $Y(p)$ zu $Y^0(p)$ niedergeblasen werden, die Kurven S_i der Konfiguration (15) nicht, weil $(p-(2a-3)^2)/4 \geq 5$. Also existiert die Konfiguration (15) in unveränderter Weise auch auf $Y^0(p)$. Man hat deshalb auf $Y^0(p)/T$ folgende Konfiguration



Die Konfiguration (16) bleibt auch in $(Y^0(p)/T)'$ bestehen. Die Kurven $S_{t+1}^*, \dots, S_{t+a-1}^*$ können in $(Y^0(p)/T)'$ sukzessive wiedergeblasen werden, das Resultat ist eine algebraische Fläche, die wir $Y_T(p)$ nennen wollen. Dieses singularitätenfreie Modell von $\overline{H^2/G_T}$ (vgl. 2.7, Satz 4) ist also für $p \geq 29$ wohldefiniert. Es entstand aus $Y^0(p)/T$ durch Niederblasen von $(1/2)(h(-4p) + h(-3p)) + a - 1$ Kurven. Formel (14) impliziert für

$p \geq 29$ (siehe [9], 2.5 (40)).

$$(17) \quad c_1^2(Y_T(p)) = 2\zeta_K(-1) + \frac{h(-4p)}{4} + \frac{5}{12}h(-3p) - \frac{1}{2}l(p) - \frac{5p}{24} \\ + \left[\frac{\sqrt{p-1}}{2} \right] + \frac{13}{6}\varepsilon + 4\delta + 8 + \frac{13}{24},$$

$$(18) \quad c_1^2(Y_T(p)) > 2\zeta_K(-1) - \frac{1}{2}l(p) - \frac{5p}{24} + \frac{\sqrt{p}}{2}.$$

3.3. Für die grobe Klassifikation der Flächen $Y_T(p)$ ist es entscheidend festzustellen, für welche p die Chernsche Zahl $c_1^2(Y_T(p))$ positiv ist. Da

$$(19) \quad 2\zeta_K(-1) > p^{3/2}/180,$$

$$(20) \quad l(p) = O(p),$$

wie leicht aus (4) und (5) folgt (vgl. [9], 4.2, (4) und 4.4, Lemma), ist es wegen (18) klar, dass $c_1^2(Y_T(p))$ für fast alle p positiv ist. Genauere Abschätzungen ([9], 4.3) zeigen, dass die rechte Seite für $p > 1500$ positiv ist. Durch Computer hergestellte Tafeln [19] ergeben dann.

SATZ 1. — Für die Hilbertsche Modulfläche $Y_T(p)$ (definiert für $p \equiv 1 \pmod{4}$ und $p \geq 29$) ist die Chernsche Zahl $c_1^2(Y_T(p))$ für $p > 821$ positiv und für $p = 821$ gleich null.

Das arithmetische Geschlecht von $Y_T(p)$ ist als birationale Invariante gleich dem von $Y^0(p)/T$ [siehe (12)]. Aus (19) folgt

$$(21) \quad \chi(Y_T(p)) > \frac{p^{3/2}}{1440} - \frac{p+1}{48}.$$

Da Computertafeln [19] für $p < 10\,000$ vorliegen, ist leicht festzustellen :

SATZ 2. — Für das arithmetische Geschlecht der Hilbertschen Modulfläche $Y_T(p)$ gilt

$$\chi(Y_T(p)) = 1 \Leftrightarrow p < 193 \text{ oder } p = 197, 229, 269, 293, 317,$$

$$\chi(Y_T(p)) = 2 \Leftrightarrow p = 193, 233, 257, 277, 349, 389, 397, 461, 509,$$

$$\chi(Y_T(p)) = 3 \Leftrightarrow p = 241, 281, 353, 373, 421, 557,$$

$$\chi(Y_T(p)) = 4 \Leftrightarrow p = 313, 653, 677, 773.$$

Nur die Flächen mit $\chi(Y_T(p)) = 1$ können rational sein. Sie sind in der Tat rational (2.7, Satz 4).

In der folgenden Tabelle befinden sich einige Angaben über die Primzahlen $p \geq 29$ mit $\chi(Y_T(p)) = 1$, insbesondere wird $c_1^2(Y_T(p))$ angegeben. Für eine rationale Fläche ist der höchste Wert von c_1^2 gleich 9. Er wird angenommen genau dann, wenn die Fläche isomorph zum $P_2(\mathbb{C})$ ist. In der Tabelle wird $c_1^2 = 9$ nie erreicht. Es entsteht die Frage, welche Kurven noch niedergeblasen werden können. Darauf gehen wir später ein.

TABELLE 5

$$\chi(Y_T(p)) = 1$$

p	$6\zeta_K(-1)$	$h(-4p)$	$h(-3p)$	$l(p)$	$e(Y_0(p))$	$e(F_p^0(p))$	$c_1^*(Y_T(p))$
29.....	3	6	6	5	24	2	7
37.....	5	2	8	7	24	0	7
41.....	8	8	2	11	24	2	6
53.....	7	6	10	7	36	0	5
61.....	11	6	8	11	36	0	4
73.....	22	4	4	21	36	-2	2
89.....	26	12	2	21	46	0	0
97.....	34	4	4	27	46	-4	-1
101.....	19	14	10	11	56	0	0
109.....	27	6	12	17	56	-4	-1
113.....	36	8	6	23	54	-4	-2
137.....	48	8	6	27	62	-6	-4
149.....	35	14	14	15	74	-4	-4
157.....	43	6	16	19	72	-8	-4
173.....	39	14	18	13	82	-6	-4
181.....	57	10	12	25	80	-8	-7
197.....	49	10	22	15	90	-10	-6
229.....	81	10	12	29	92	-12	-10
269.....	83	22	14	21	108	-10	-12
293.....	85	18	22	17	116	-14	-11
317.....	101	10	26	21	122	-20	-13

3.4. Wir betrachten jetzt nur Primzahlen $p \equiv 1 \pmod{4}$, für welche die Hilbertsche Modulfläche nicht rational ist. Die Primzahlen mit $\chi(Y_T(p)) = 1$ werden also ausgeschlossen. Es sei F_N^* mit $\left(\frac{N}{p}\right) = 1$ eine Kurve auf $Y^0(p)/T$, so dass das Paar (N_1, N_2)

mit $N = N_1 N_2$ zur ersten Spalte der Tabelle 3 in 2.6 gehört [d. h. $c_1^*(N) = 1$]. Dann ist $c_1^*[F_N^*] \geq c_1^*(N) = 1$ (siehe 2.4). Aber in der Tat ist F_N^* exzeptionell, insbesondere $c_1^*[F_N^*] = 1$, weil sonst $Y^0(p)/T$ rational wäre. Die Kurve F_N^* ist also transversal in den Spitzen und schneidet auf $Y(p)$ keine der Kurven, die beim Uebergang zu $Y^0(p)$ niedergeblasen wurden, weil sonst $c_1^*[F_N^*] > 1$ wäre. Es folgt auch, dass zwei derartige exzeptionelle Kurven F_M^*, F_N^* sich in $Y^0(p)/T$ nicht schneiden. Die exzeptionelle Kurve F_N^* schneidet keine der Kurven von $Y^0(p)/T$, die beim Uebergang zu $Y_T(p)$ niedergeblasen wurden, weil sonst in $Y_T(p)$ der Wert der ersten Chernschen Klasse auf dem Bild von F_N^* grösser als 1 wäre und man wieder auf die Rationalität von $Y_T(p)$ schliessen könnte. Die Bilder von Kurven F_N^* (N beliebig) in $Y_T(p)$ wollen wir auch F_N^* nennen. Wir erhalten so für die Zahlen N mit $c_1^*(N) = 1$ exzeptionelle Kurven auf der Fläche $Y_T(p)$, die zueinander disjunkt sind.

Für die Kurven F_N^* mit $c_1^*(N) = 1$ gilt

$$(22) \quad a_2(N) = 2, \quad a_3(N) = 0 \quad \text{für } (N_1, N_2) = (5, 1), (1, 9), (1, 14)$$

(vgl. 1.6, Tabelle 1). Jede dieser Kurven F_N gibt also in $Y(p)$ Anlass zu einer Konfiguration.

$$(22') \quad \begin{array}{c} | \\ -2 \\ \hline F_N \\ \hline | \\ -2 \end{array}$$

Die Kurve F_N schneidet nämlich Auflösungskurven der Quotientensingularitäten der Ordnung 2, die auf F_N liegen, genau zweimal transversal (siehe 1.3, Beweis von Satz 3, und 2.3). Die beiden (-2) -Kurven in (22') können nicht zusammenfallen, sie sind ein Paar U_i, U'_i (siehe Figur in 2.1).

Man hat ferner

$$(23) \quad a_2(6) = 2, \quad a_3(6) = 2 \quad \text{für } (N_1, N_2) = (1, 6)$$

und auf $Y(p)$ die Konfiguration [für $p \equiv 5 \pmod{24}$] :

$$(23') \quad \begin{array}{c} | \quad | \quad | \quad | \\ -2 \quad -2 \quad -3 \quad -3 \\ \hline F_6 \end{array}$$

Die (-2) -Kurven bilden wie vorhin ein Paar U_i, U'_i . Die (-3) -Kurven sind ein Paar V_j, V'_j . Sie können nicht zusammenfallen (2.3). In $Y^0(p)/T$ und dann auch in $Y_T(p)$ bilden sich (22') und (23') auf eine Konfiguration

$$(24) \quad \begin{array}{c} \begin{array}{c} | \\ U_N^* \\ \hline -1 \quad F_N^* \\ \hline -2 \end{array} \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{c} U_6^* \quad | \quad V_6^* \\ \hline -1 \quad F_6^* \\ \hline -2 \quad -3 \end{array} \end{array}$$

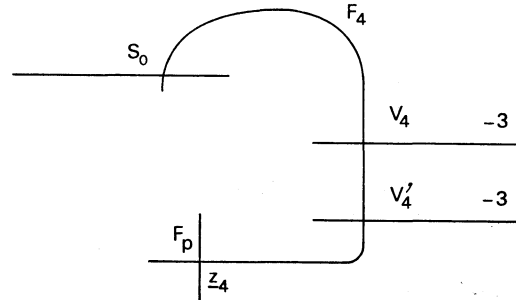
ab. Wir haben uns wie früher (vgl. 2.3) erlaubt, das Bild des Paares U_i, U'_i von (22') bzw. (23') mit U_N^* zu bezeichnen, ebenso ist V_6^* erklärt.

Wir können noch weitere exzeptionelle Kurven in $Y_T(p)$ angeben.

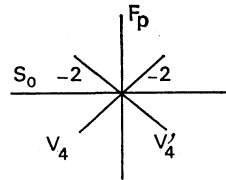
Für $\varepsilon = 1$ [d. h. $p \equiv 1 \pmod{3}$] wird das Bild von B_2 in $Y_T(p)$ exzeptionell

$$\begin{array}{c} F_p^* \\ | \\ -1 \quad \bigcirc \quad B_2^* \\ | \end{array}$$

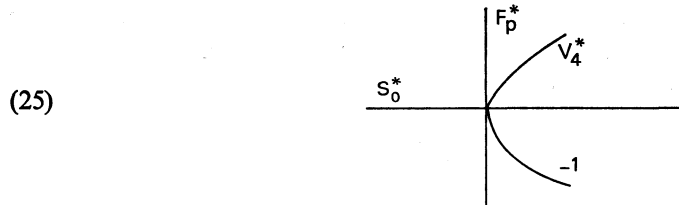
Dies entnimmt man wieder der Figur in 2.1. Die Tatsache wurde schon in 2.6 (Beweis von Satz 3) erwähnt. Für $\delta = 0$, d. h. $p \equiv 5 \pmod{8}$, ist $a_2(4) = 0$, $a_3(4) = 2$. (vgl. 1.6, Tabelle 1). Man erhält in $Y(p)$ die Konfiguration



Man beachte, dass F_4 die Kurven F_1 und F_3 in $X(p)$ nur für $p = 5, 13$ schneidet. Diese Primzahlen wurden aber ausgeschlossen. Also hat man in $Y^0(p)$ eine Konfiguration



Dies ergibt in $Y^0(p)/T$ und damit auch in $Y_T(p)$ die Konfiguration



Wir geben eine Uebersicht der niederzublasenden Kurven von $Y_T(p)$.

TABELLE 6

N_1	N_2	Niederblasen	N_1	N_2	Niederblasen
3	1	B_2^*	11	1	F_{11}^*
1	4	V_4^*	3	4	F_{12}^*
5	1	F_5^*, U_5^*	1	14	F_{14}^*, U_{14}^*
1	6	F_6^*, U_6^*, V_6^*	1	15	F_{15}^*
6	1	F_6^*	1	16	F_{16}^*
7	1	F_7^*	5	4	F_{20}^*
8	1	F_8^*	1	24	F_{24}^*
1	9	F_9^*, U_9^*	1	26	F_{26}^*
9	1	F_9^*	1	36	F_{36}^*
1	10	F_{10}^*			

Welche Ausnahmekurven für ein gegebenes p wirklich existieren, hängt von der Restklasse von p modulo 8.3.5.7.11.13 ab. Alle Niederblasungen lassen sich unabhängig von einander durchführen, weil sonst $Y_T(p)$ rational wäre.

3.5. Wir bleiben weiterhin bei den Primzahlen p , für die $Y_T(p)$ nicht rational ist. In 3.2 (17) wurde eine Formel für $c_1^2(Y_T(p))$ angegeben. Berücksichtigt man in Tabelle 6 nur die sieben Paare mit $N_2 = 1$, so ergibt dies

$$A(p) = \varepsilon + \left(1 + \left(\frac{p}{5}\right)\right) + \varepsilon\delta + \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{p}{7}\right)\right) + \delta + \varepsilon + \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{p}{11}\right)\right),$$

niederzublasende Kurven. Die so erhaltene Fläche soll $Y'_T(p)$ heißen. Für sie ist $c_1^2[Y'_T(p)] = c_1^2[Y_T(p)] + A(p)$. Sie wird nur deshalb eingeführt, weil zu einem bestimmten Zeitpunkt nur diese exzeptionellen Kurven bekannt waren (vgl. auch [7], 5.7) und nur sie in das Computerprogramm [19] aufgenommen wurden. Wir werden in Tabelle 7 diejenigen Primzahlen auflisten, für die $Y_T(p)$ nicht rational und $c_1^2(Y'_T(p))$ nicht positiv ist. Nach 3.3 Satz 1 kommen nur Primzahlen ≤ 821 in Betracht. Bläst man die weiteren Ausnahmekurven der Tabelle 6 herunter, so erhält man eine Fläche $Y_T^0(p)$. Wir wollen den Uebergang zu $Y_T^0(p)$ jedoch in zwei Schritten machen. Zunächst nehmen wir nur die Paare (N_1, N_2) mit $N_2 \neq 1$ für die $N_1 N_2$ nur durch die Primzahlen 2

TABELLE 7

p	$\hat{\chi}$	ε	δ	$c_1^2(Y'_T(p))$	$c_1^2(Y''_T(p))$	Niederblasen	$c_1^2(Y_T^0(p))$
193.....	2	1	1	-1	-1		-1
233.....	2	0	1	-4	-2	F_{15}^*	-1
241.....	3	1	1	0	0		0
257.....	2	0	1	-5	-3	F_{15}^*	-2
277.....	2	1	0	-4	-1	F_{10}^*	0
281.....	3	0	1	-2	0		0
349.....	2	1	0	-8	-5	$F_{14}^*, U_{14}^*, F_{20}^*, F_{26}^*$	-1
353.....	3	0	1	-4	-2	F_{15}^*	-1
373.....	3	1	0	-4	-1	F_{10}^*	0
389.....	2	0	0	-10	-1	F_{20}^*	0
397.....	2	1	0	-9	-6	$F_{10}^*, F_{14}^*, U_{14}^*, F_{26}^*$	-2
421.....	3	1	0	-5	-2	F_{20}^*, F_{26}^*	0
461.....	2	0	0	-14	-5	$F_{14}^*, U_{14}^*, F_{20}^*, F_{26}^*$	-1
509.....	2	0	0	-15	-6	$F_{14}^*, U_{14}^*, F_{20}^*, F_{26}^*$	-2
557.....	3	0	0	-12	-3	$F_{10}^*, F_{15}^*, F_{26}^*$	0
653.....	4	0	0	-9	0	F_{10}^*, F_{15}^*	2
677.....	4	0	0	-11	-2	$F_{10}^*, F_{14}^*, U_{14}^*, F_{15}^*$	2
701.....	6	0	0	-1	8		8
773.....	4	0	0	-12	-3	$F_{10}^*, F_{14}^*, U_{14}^*, F_{15}^*, F_{26}^*$	2
797.....	5	0	0	-8	1	$F_{10}^*, F_{14}^*, U_{14}^*, F_{15}^*$	5

oder 3 teilbar ist. Man erhält dann eine Fläche $Y_T''(p)$. Beim Uebergang von $Y_T'(p)$ nach $Y_T''(p)$ sind also niederzublasen :

für $\varepsilon = 1, \delta = 1$ keine Kurve,

für $\varepsilon = 0, \delta = 1$ die 2 Kurven F_9^*, U_9^* ,

für $\varepsilon = 1, \delta = 0$ die 3 Kurven $V_4^*, F_{12}^*, F_{16}^*$,

für $\varepsilon = 0, \delta = 0$ die 9 Kurven $V_4^*, F_6^*, U_6^*, V_6^*, F_9^*, U_9^*, F_{16}^*, F_{24}^*, F_{30}^*$.

In die Tabelle tragen wir die Werte von $c_1^2(Y_T'(p))$, $c_1^2(Y_T''(p))$ ein, sowie die in $Y_T'(p)$ niederzublasenden Kurven und den Wert von $c_1^2(Y_T^0(p))$. Wir nehmen auch das arithmetische Geschlecht $\chi(Y_T(p))$, abgekürzt durch $\hat{\chi}$, mit auf.

3.6. Die Tabelle 7 zeigt, dass $c_1^2(Y_T^0(p))$ genau dann nicht positiv ist, wenn das arithmetische Geschlecht von $Y_T(p)$ gleich 2 oder 3 ist (vgl. 3.3, Satz 2).

Von den vier Primzahlen mit $\chi(Y_T(p)) = 4$ kommt $p = 313$ nicht in Tabelle 7 vor, da $c_1^2(Y_T'(p)) = 2$. Es ist aber $Y_T'(313) = Y_T^0(313)$, weil $\varepsilon = \delta = 1$; somit ist für alle vier Primzahlen mit $\chi(Y_T(p)) = 4$ der Wert von $c_1^2(Y_T^0(p))$ gleich 2.

Für die Primzahlen mit $\chi(Y_T(p)) = 2, 3, 4$ wird es nützlich sein, Angaben wie die von Tabelle 5 zur Verfügung zu haben. Das soll jetzt geschehen. Wir verzichten jedoch auf die Angabe von $e(Y^0(p))$ und $e(F_p^0)$. Diese Werte, sowie $\chi(Y^0(p))$, $c_1^2(Y^0(p))$, $c_1^2(Y^0(p)/T)$ können bei Bedarf leicht auf Grund der Formeln von 3.1 berechnet werden.

TABELLE 8

$$\chi(Y_T(p)) = 2$$

p	$6\zeta_K(-1)$	$h(-4p)$	$h(-3p)$	$l(p)$	$c_1^2(Y_T^0(p))$
193.....	98	4	8	47	-1
233.....	106	12	10	39	-1
257.....	120	16	6	39	-2
277.....	103	6	28	29	0
349.....	151	14	16	37	-1
389.....	151	22	22	31	0
397.....	171	6	24	35	-2
461.....	183	30	18	29	-1
509.....	215	30	14	31	-2

$$\chi(Y_T(p)) = 3$$

241.....	142	12	4	59	0
281.....	150	20	6	49	0
353.....	192	16	6	47	-1
373.....	161	10	32	37	0
421.....	209	10	20	47	0
557.....	233	18	38	29	0

$$\chi(Y_T(p)) = 4$$

313.....	200	8	8	65	2
653.....	303	14	42	35	2
677.....	299	30	38	27	2
773.....	369	26	30	31	2

19

Liste der Spitzenauflösungen

$$\chi(Y_T(p)) = 3$$

Wir verzichten auf die Angabe der M_k und schreiben die b_k und N_k vertikal ($0 \leq k \leq t$)

k	$p = 241$		$p = 281$		$p = 353$		$p = 373$		$p = 421$		$p = 557$	
	b_k	N_k	b_k	N_k	b_k	N_k	b_k	N_k	b_k	N_k	b_k	N_k
0.....	17	1	17	1	19	1	21	1	21	1	25	1
1.....	2	12	9	2	10	2	2	17	5	5	2	17
2.....	2	15	2	10	2	11	2	27	2	21	2	19
3.....	3	10	5	4	6	4	2	31	2	31	5	7
4.....	2	18	4	5	2	17	2	29	2	35	2	29
5.....	2	20	3	8	2	22	2	21	2	33	2	49
6.....	2	16	2	14	2	19	4	7	2	25	2	67
7.....	4	6	3	10	4	8	3	9	3	11	2	83
8.....	2	12	2	17	2	23	2	13	4	7	2	97
9.....	3	8	2	16	2	34	8	3	2	15	2	109
10.....	3	9	4	7	2	41	2	21	3	9	2	119
11.....	2	20	2	20	2	44	2	37	8	3	2	127
12.....	2	27	2	29	2	43	2	51	2	17	2	133
13.....	2	30	2	34	2	38	2	63	2	21	2	137
14.....	2	29	2	35	2	29	2	73	3	15	2	139
15.....	2	24	2	32	3	16	2	81	2	33		
16.....	2	15	2	25	2	32	2	87	2	49		
17.....	9	2	3	14	2	46	2	91	2	63		
18.....	3	6	2	28	2	58	2	93	2	75		
19.....	4	5	2	40	2	68			2	85		
20.....	2	10	2	50	2	76			2	93		
21.....	6	3	2	58	2	82			2	99		
22.....	5	4	2	64	2	86			2	103		
23.....	2	18	2	68	2	88			2	105		
24.....	2	30	2	70								
25.....	2	40										
26.....	2	48										
27.....	2	54										
28.....	2	58										
29.....	2	60										

läuft. Der Zyklus hat ungerade Länge $2t+1$ (vgl. 2.1, Figur). Er ist symmetrisch unter T . Die Selbstschnittzahlen $-b_k$ der Kurven S_k ergeben sich aus der Kettenbruchentwicklung von

$$w_0 = \frac{2a+1+\sqrt{p}}{2} \quad \text{mit} \quad a = \left[\frac{1+\sqrt{p}}{2} \right].$$

Es ist

$$w_k = b_k - \frac{1}{w_{k+1}}, \quad b_k = [w_k] + 1,$$

$$w_k = \frac{M_k + \sqrt{p}}{2N_k}.$$

Überall ist $k \bmod 2t+1$ zu nehmen. Wegen der Symmetrie unter T ist $w_{-k} = (w_{k+1}^{-1})'$, $b_{-k} = b_k$, $N_{-k} = N_k$ und $M_{-k} = M_{k+1}$. Es ist $T(S_k) = S_{-k}$.

Dem Schnittpunkt von S_{k-1} und S_k ist die quadratische Form $[N_{k-1}, M_k, N_k]$ der Diskriminante p zugeordnet (vgl. 1.4). Man kann diesen symmetrischen Zyklus in folgender Weise andeuten

$$(26) \quad \begin{array}{ccccccc} & | & & & & & \\ & b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_t & | \\ N_0 & & N_1 & N_2 & & N_t & \\ | & M_1 & M_2 & \dots & M_t & M_{t+1} & \end{array}$$

Die Striche sollen andeuten, dass nur der halbe Zyklus dargestellt wird und man den ganzen erhält, wenn man an den Strichen spiegelt. Es ist $b_0 = 2a+1$, $N_0 = 1$, $M_0 = M_1 = 2a+1$. Die letzten $a-1$ Kurven in (26) von rechts und ihre Bilder unter T bilden den »Schwanz« [3.2, (15)].

Die Klassenzahl $h(p)$ ist genau dann gleich 1, wenn $2t+1 = l(p)$. Für die Primzahlen der Tabelle 8 ist $h(p) = 1$, wenn $p \neq 257$. Dagegen ist $h(257) = 3$. Für $p = 257$ sind also zwei weitere Zyklen vorhanden. Sie werden durch T aufeinander abgebildet und sind bis auf den Durchlaufungssinn isomorph.

Wir haben die Spitzenauflösungen vorstehend nur für die 15 Primzahlen mit arithmetischem Geschlecht $\chi(Y_T(p)) = 2$ oder 3 aufgelistet.

4. Klassifikation

4.1. Da die Hilbertschen Modulflächen $Y(p)$ und $Y_T(p)$ einfach-zusammenhängend sind (vgl. 2.6) und dieser Paragraph die Flächen $Y_T(p)$ betrifft, genügt es, an die grobe Klassifikation im Sinne von Enriques-Kodaira der einfach-zusammenhängenden algebraischen Flächen zu erinnern (vgl. [8]). Es werde deshalb in diesem Abschnitt 4.1 immer vorausgesetzt, dass *es sich um einfach-zusammenhängende algebraische Flächen handelt*.

Wenn die Fläche Y nicht rational ist, dann hat sie ein eindeutig bestimmtes minimales Modell Y_0 , das man so bekommt: Die exzeptionellen Kurven auf Y sind disjunkt (vgl. 2.4, 2.6), und ihre Anzahl ist deshalb endlich. Sie können niedergeblasen werden. Man erhält eine Fläche Y' . Die exzeptionellen Kurven auf Y' können wieder alle niedergeblasen werden usw. Nach endlich vielen Schritten bricht der Prozess ab, man hat Y_0 erhalten. Die Fläche Y heisst minimal, wenn sie keine exzeptionellen Kurven hat. Wenn Y nicht rational ist, dann ist Y minimal genau dann, wenn $Y = Y_0$. Eine minimale nicht rationale Fläche ist entweder eine K 3-Fläche (d. h. ihre erste Chernsche Klasse verschwindet), eine echt elliptische Fläche über $P_1(C)$, d. h. eine elliptische Fläche über $P_1(C)$ mit nicht-verschwindender erster Chernscher Klasse c_1 und $c_1^2 = 0$, oder eine Fläche vom allgemeinen Typ. Wir sagen, dass die nicht rationale Fläche Y von K 3-Typ, vom echt elliptischen Typ oder vom allgemeinen Typ ist, wenn Y_0 die entsprechende Eigenschaft

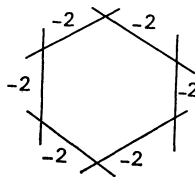
hat. Damit sind die einfach-zusammenhängenden algebraischen Flächen in vier Klassen eingeteilt :

- I. Rationale Flächen.
- II. Flächen vom K 3-Typ.
- III. Flächen vom echt elliptischen Typ.
- IV. Flächen vom allgemeinen Typ.

Natürlich gehört mit einer Fläche auch jede zu ihr birational äquivalente in die gleiche Klasse. Eine nicht-rationale Fläche Y ist vom allgemeinen Typ genau dann, wenn $c_1^2(Y_0) > 0$; da $c_1^2(Y)$ beim Niederblasen exzeptioneller Kurven zunimmt, impliziert $c_1^2[Y] > 0$, dass Y vom allgemeinen Typ ist.

Für rationale Flächen ist das arithmetische Geschlecht $\chi = 1 + p_g$ gleich 1, für Flächen vom K 3-Typ ist χ gleich 2.

Eine elliptische Konfiguration auf einer Fläche Y (mit Chernscher Klasse c_1) ist ein endliches System von irreduziblen Kurven E_i mit $c_1[E_i] = 0$, welches eine Schnittmatrix $E_i E_j$ hat, die mit der Schnittmatrix einer Faser einer elliptischen »Faserung« übereinstimmt ([13], vgl. auch [8], [9]). Zum Beispiel ist ein Zykel von singularitätenfreien rationalen Kurven der Selbstschnittzahl -2 eine elliptische Konfiguration :



Bei Kodaira [13] heisst diese Konfiguration I_k , wenn es k Kurven im Zykel gibt.

Wir werden das folgende Klassifikationsprinzip verwenden (vgl. [8], [9]).

SATZ 1. — *Wenn eine Fläche eine elliptische Konfiguration besitzt, dann ist sie nicht vom allgemeinen Typ; wenn sie eine elliptische Konfiguration besitzt, die von einer nicht zu ihr gehörenden singularitätenfreien rationalen Kurve der Selbstschnittzahl -2 geschnitten wird, dann ist sie rational oder vom K 3-Typ.*

Eine Fläche Y vom Typ II oder III ist minimal genau dann, wenn $c_1^2[Y] = 0$.

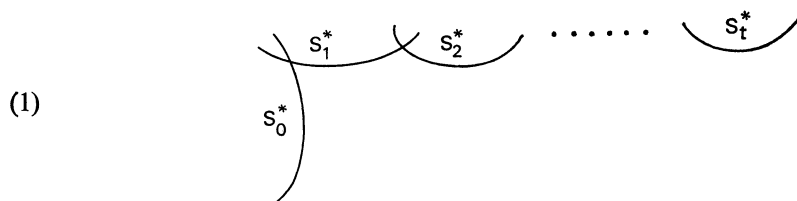
Wenn Y minimal und von Typ III ist, dann ist die elliptische Faserung eindeutig bestimmt, jede elliptische Konfiguration ist eine Faser, die Kohomologieklass $-c_1$ ist dual zu einem Vielfachen der durch eine reguläre Faser repräsentierten Homologieklass und zwar ist dieses Vielfache grösser oder gleich $\chi(Y) - 2$ und genau dann gleich $\chi(Y) - 2$, wenn Y keine multiplen Fasern hat. Es sei S eine singularitätenfreie rationale Kurve der Selbstschnittzahl $-\chi(Y)$ auf der minimalen Fläche Y vom Typ III mit $\chi(Y) \geq 3$. Nach der Adjunktionsformel ist dann $-c_1[S] = \chi(Y) - 2$. Es folgt, dass S ein Schnitt ist und keine multiplen Fasern vorhanden sind. Umgekehrt ist auch jeder Schnitt eine singularitätenfreie rationale Kurve der Selbstschnittzahl $-\chi(Y)$.

4.2. Für eine Primzahl $p \equiv 1 \pmod{4}$ haben wir die Hilbertsche Modulgruppe $G = \mathrm{SL}_2(\mathcal{O})/\{\pm 1\}$, sowie die symmetrische Hilbertsche Modulgruppe $G_T = G \cup G.T$

betrachtet. Es wurden dann mehrere singularitätenfreie Modelle für $\overline{H^2/G_T}$ angegeben, die alle zueinander birational äquivalent sind. Für gegebenes p ist es also sinnvoll zu fragen, in welche der Klassen I-IV die Fläche $\overline{H^2/G_T}$ gehört. Wir sagen auch kurz, dass die Primzahl p zur Klasse I, II, III bzw. IV gehört. Nach 2.7 Satz 4 gehören genau 24 Primzahlen zur Klasse I. Nach 3.3 Satz 2 können höchstens die 9 Primzahlen 193, 233, 257, 277, 349, 389, 397, 461, 509 zur Klasse II gehören. Es soll nachgewiesen werden, dass sie in der Tat alle zur Klasse II gehören. Nach 3.5 gehören alle Primzahlen bis auf die 24 Primzahlen der Klasse I, die neun gerade erwähnten Primzahlen und die sechs Primzahlen 241, 281, 353, 373, 421, 557 mit $\chi(Y_T(p)) = 3$ zur Klasse IV (allgemeiner Typ). Es soll nachgewiesen werden, dass die sechs Primzahlen mit $\chi(Y_T(p)) = 3$ zur Klasse III gehören. Es sind also insgesamt 15 Primzahlen zu betrachten und ihre Zugehörigkeit zur Klasse II bzw. III zu beweisen. Danach ist dann die Aufteilung der Primzahlen $p \equiv 1 \pmod{4}$ in die vier Klassen vollständig erledigt.

Bei den folgenden Ueberlegungen werden singularitätenfreie rationale Kurven der Selbstschnitzzahl a häufig einfach a -Kurven genannt.

4.3. Wir setzen stets voraus, dass p nicht zur Klasse I gehört. Auf $Y^0(p)/T$ hat man eine Konfiguration von singularitätenfreien Kurven, die aus der Auflösung



der Hauptspitze entsteht (vgl. 2.1, Figur, und 3.2) und eventuell zyklische Konfigurationen, die jeweils von einem Spitzenpaar (Spitze und ihr Bild unter T) herrühren. Für $\delta = 1$ schneidet S_0^* auch noch die Kurve S_k^* mit $N_k = 4$, die jedoch nicht der Konfiguration (1) anzugehören braucht, sondern Bestandteil eines anderen Zyklus sein kann. Im allgemeinen ist [vgl. 3.1, (3)] :

$$S_k^* \cdot S_k^* = -b_k \quad \text{in } Y^0(p)/T.$$

Es gelten jedoch *Ausnahmen*. Es ist in (1)₁:

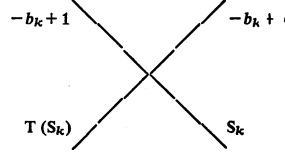
$$S_{t+1}^* \cdot S_{t+1}^* = S_t^* \cdot S_t^* = -b_t + 1 = -1 \quad [\text{vgl. 3.2, (15), (16)}].$$

Der Figur in 2.1 entnimmt man leicht, dass S_0 in $Y^0(p)$ eine Spitze hat, aber S_0^* in $Y^0(p)/T$ singularitätenfrei ist mit

$$(2) \quad S_0^* \cdot S_0^* = -a + 3 \quad \text{in } Y^0(p)/T \quad (b_0 = 2a + 1).$$

Wenn $p \equiv 1 \pmod{3}$, dann schneidet F_3 in $Y(p)$ genau das Kurvenpaar $S_k, T(S_k)$ mit $N_k = 3$ transversal. Es gehört sicherlich nicht zum »Schwanz« [3.2, (15)]; es braucht nicht in der Hauptspitze vorzukommen, sondern kann einem anderen Zyklus angehören.

In $Y^0(p)$ hat man die Konfiguration



Es ist $S_k^* \cdot S_k^* = (1/2) (S_k + T(S_k)) (S_k + T(S_k))$, also gilt

$$(3) \quad S_k^* \cdot S_k^* = -b_k + 2, \quad \text{falls } N_k = 3.$$

Analog gilt für $p \equiv 1 \pmod{8}$

$$(4) \quad \begin{cases} S_k^* \cdot S_k^* = -b_k + 4, & \text{falls } N_k = 2, \\ S_k^* \cdot S_k^* = -b_k + 2, & \text{falls } N_k = 4. \end{cases}$$

Beim Uebergang zu $Y_T^0(p)$ ändern sich die Schnittzahlen erneut. Wir betrachten zunächst S_0^* in $Y_T^0(p)$ und erhalten (für ε, δ , siehe 2.1) :

$$(5) \quad \begin{cases} S_0^* S_0^* = -a + 4, & \text{falls } \varepsilon = 1, \delta = 1 & (F_9^*), \\ S_0^* S_0^* = -a + 5, & \text{falls } \varepsilon = 0, \delta = 1 & (F_9^*, U_9^*), \\ S_0^* S_0^* = -a + 6, & \text{falls } \varepsilon = 1, \delta = 0 & (F_9^*, V_4^*, F_{16}^*), \\ S_0^* S_0^* = -a + 8, & \text{falls } \varepsilon = 0, \delta = 0 & (F_9^*, U_9^*, V_4^*, F_{16}^*, F_{36}^*). \end{cases}$$

In Klammern wurden die exzeptionellen Kurven von 3.4 Tabelle 6 angegeben, die für die Erhöhung der Selbstschnittzahl im Vergleich zu (2) verantwortlich sind. Benutzt wird hier, dass F_{m^2} die Kurve S_0 in $Y(p)$ in $\varphi(m)$ Punkten transversal schneidet [$b = (m)$, $n(b) = m$ in 1.4], für $m \neq 2$ diese Schnittpunkte unter T paarweise miteinander vertauscht werden und somit $F_{m^2}^*$ die Kurve S_0^* in $(1/2) \varphi(m)$ Punkten transversal trifft. Es ist $(1/2) \varphi(m) = 1$ genau für $m = 3, 4, 6$.

Beim Uebergang zu $Y_T^0(p)$ wurde auch die Konfiguration 3.2 (16) niedergeblasen. Es ist im allgemeinen in $Y_T^0(p)$:

$$(6) \quad S_{t+a}^* \cdot S_{t+a}^* = S_{t-a+1}^* \cdot S_{t-a+1}^* = -b_{t-a+1} + 1,$$

aber die Selbstschnittzahl erhöht sich, falls eine der exzeptionellen Kurven der Tabelle 6 in 3.4 die Kurve S_{t-a+1}^* schneidet. Ueberhaupt ist der Durchgang der exzeptionellen Kurven der Tabelle 6 durch die Spitzen noch zu betrachten, die eine von S_0^* verschiedene Kurve S_k^* schneiden.

Es müssen deshalb folgende Kurven berücksichtigt werden :

$$B_2^*, F_5^*, U_5^*, F_6^*, F_7^*, F_8^*, F_9^*, F_{11}^* \quad (\text{alle mit } N_2 = 1),$$

$$F_{12}^*, F_{20}^* \quad (\text{mit } N_2 = 4).$$

Man beachte, dass F_8^* , F_{12}^* bzw. F_{20}^* auch die Kurve S_k^* mit $N_k = 2, 3$ bzw. 5 transversal schneidet (1.4). Das Endergebnis besagt :

LEMMA. — In $Y_T^0(p)$ gilt $S_k^* S_k^* = -b_k$ bis auf folgende Fälle :

$$\begin{aligned} S_0^* S_0^* &\text{ wird durch (5) gegeben,} \\ S_k^* S_k^* &= -b_k + 5, \quad \text{falls } N_k = 2, \\ S_k^* S_k^* &= -b_k + 2, \quad \text{falls } N_k = 4, \\ S_k^* S_k^* &= -b_k + 3, \quad \text{falls } N_k = 3, \quad \delta = 1, \\ S_k^* S_k^* &= -b_k + 4, \quad \text{falls } N_k = 3, \quad \delta = 0, \\ S_k^* S_k^* &= -b_k + 2, \quad \text{falls } N_k = 5, \quad \delta = 1, \\ S_k^* S_k^* &= -b_k + 3, \quad \text{falls } N_k = 5, \quad \delta = 0, \\ S_k^* S_k^* &= -b_k + 1, \quad \text{falls } N_k = 6, 7, 8, 9, 11. \end{aligned}$$

Falls $k = t - a + 1$ [in Konfiguration 3.2, (16)], dann erhöht sich die vorstehend angegebene Selbstschnittzahl um 1.

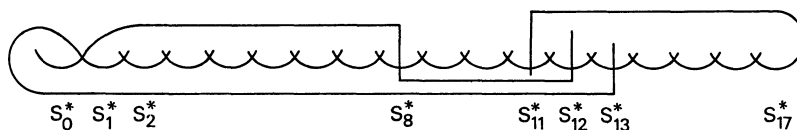
In $Y_T^0(p)$ schneidet S_0^* die Kurven S_k^* mit $N_k = 4$ oder 9 (falls $\delta = 1$ bzw. $\varepsilon = 1$). Es schneiden sich auch die Kurven S_k^* und S_l^* mit $N_k = 2$ und $N_l = 8$ (falls $\delta = 1$). Wenn $\varepsilon = \delta = 1$, dann gibt es zwei Kurven $S_{k_1}^*$, $S_{k_2}^*$ mit $N_{k_1}^* = N_{k_2}^* = 6$. Sie schneiden sich. Alle diese Schnitte sind transversal. Weitere Schnitte gibt es nicht. Die Schnittkonfiguration (einschliesslich Selbstschnittzahlen) der Kurven S_k^* auf $Y_T^0(p)$, wobei k einem beliebigen Zyklus angehört, ist jetzt vollständig beschrieben.

4.4. Wir betrachten die 9 Primzahlen, von denen nachgewiesen werden soll, dass sie zur Klasse II gehören (siehe 4.2).

Für eine K 3-Fläche ist $c_1^2 = 0$. Nach 3.6 Tabelle 8 erwarten wir deshalb, dass in 7 Fällen noch 1 bzw. 2 Kurven in $Y_T^0(p)$ niedergeblasen werden können, um das gewünschte minimale Modell, nämlich eine K 3-Fläche, zu bekommen. Es wird uns immer gelingen, diese Kurven zu finden. Auf einer K 3-Fläche hat jede singularitätenfreie rationale Kurve die Selbstschnittzahl -2 . Wir erwarten deshalb, dass wir die Selbstschnittzahlen $-b_k$ in unseren 9 Fällen durch Anwendung des Lemmas in 4.3 und der zusätzlichen Niederblasungen auf -2 bringen können. Bei dem Beweis, dass es sich wirklich um eine K 3-Fläche handelt, wird 4.1 Satz 1 benutzt. Nach Möglichkeit werden wir nur die Kurven S_k^* verwenden. Man konsultiere dazu stets die Liste der Spitzenauflösungen in 3.6. Wir behandeln die 9 Primzahlen getrennt ihrer Restklasse mod 24 entsprechend.

$$\varepsilon = \delta = 1 : \quad p = 193, \quad c_1^2(Y_T^0(193)) = -1.$$

Die Konfiguration der S_k^* auf $Y_T^0(p)$ sieht so aus :



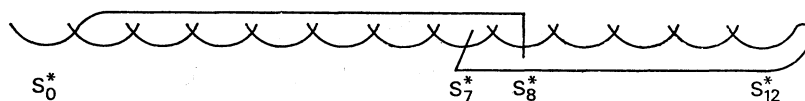
Die S_k^* sind von links nach rechts fortlaufend durch $\cup \dots \cup$ angedeutet, aber nicht alle gekennzeichnet. Alle Kurven haben Selbstschnittzahl -2 bis auf

$$S_1^* S_1^* = -1, \quad S_0^* S_0^* = S_2^* S_2^* = S_{13}^* S_{13}^* = -3.$$

Blasen wir S_1^* nieder, so ergibt sich eine Fläche $Y_T^{00}(193)$, die nach 4.1 Satz 1 eine K 3-Fläche ist (Verwendung einer zyklischen elliptischen Konfiguration) :

$$\varepsilon = 0, \quad \delta = 1, \quad p = 233, 257,$$

$$p = 233, \quad c_1^2(Y_T^0(233)) = -1.$$

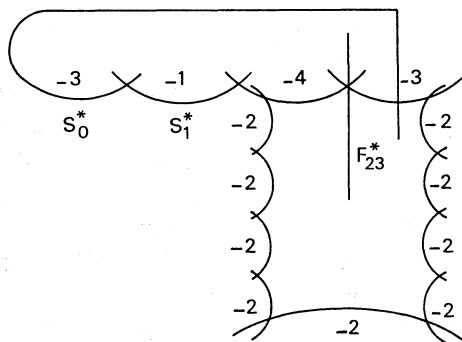


Alle S_k^* haben Selbstschnittzahl -2 bis auf

$$S_0^* S_0^* = S_8^* S_8^* = S_{12}^* S_{12}^* = -3.$$

Für die Kurve F_{16}^* gilt $c_1^*(16) = 0$ (siehe 2.6, Tabelle 3). Sie schneidet in $Y^0(233)/T$ die Schwanzkurve S_{13}^* . Deshalb ist auf $Y_T^0(233)$ die Zahl $c_1^*[F_{16}^*]$ gleich 1 und die Kurve F_{16}^* exzeptionell. Die Kurve F_{16}^* schneidet S_0^*, S_8^*, S_{12}^* transversal. Bläst man sie herunter, dann erhält man eine K 3-Fläche $Y_T^{00}(233)$. Der Beweis erfolgt wieder mit einer zyklischen elliptischen Konfiguration.

$$p = 257, \quad c_1^2(Y_T^0(p)) = -2, \quad h(257) = 3$$



Der weitere Zyklus ist eingezeichnet. Diese Kurven sind nicht besonders benannt, nur mit ihren Selbstschnittzahlen versehen. Durch den Schnittpunkt der (-4) -Kurve mit der (-3) -Kurve geht »diagonal« die Kurve F_{23}^* , da diesem Schnittpunkt die quadratische Form $[4, 17, 2]$ zugeordnet ist. Es ist $c_1^*(23) = 0$ (Tabelle 3 in 2.6), aber $c_1[F_{23}^*] > c_1(23)$ in $Y^0(p)$, da F_{23}^* nicht transversal durch die Spitzen geht (2.2 Satz 1). Also ist $c_1^*[F_{23}^*] = 1$; grösser kann es nicht sein, da sonst die Fläche rational wäre. Damit ist F_{23}^* exzeptionell. Bläst man S_1^* und F_{23}^* nieder, dann erhält man eine K 3-Fläche $Y_T^{00}(257)$.

Beim Beweis wird die elliptische Konfiguration

$$\begin{array}{c} \diagup \\ -2 \\ \diagdown \end{array}$$

(Konfiguration III bei Kodaira [13])

benutzt, die aus der (-4) -Kurve und der (-3) -Kurve entsteht.

$$\varepsilon = 1, \quad \delta = 0, \quad p = 277, 349, 397,$$

$$p = 277, \quad c_1^2[Y_T^0(277)] = 0$$



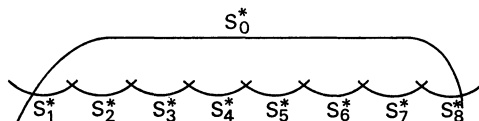
Alle Kurven haben die Selbstschnittzahl -2 . Also ist $Y_T^0(277)$ eine K 3-Fläche. (Eine zyklische elliptische Konfiguration wird benutzt.)

$$p = 349, \quad c_1^2[Y_T^0(349)] = -1$$



Alle Kurven haben die Selbstschnittzahl -2 bis auf $S_0^* S_0^* = S_1^* S_1^* = -3$. Durch den Schnittpunkt von S_0^* und S_1^* geht F_{23}^* . Die Kurve ist exzeptionell. Bläst man sie nieder erhält man die K 3-Fläche $Y_T^{00}(349)$. (Eine elliptische Konfiguration III wird benutzt.)

$$p = 397, \quad c_1^2[Y_T^0(397)] = -2$$



Alle Selbstschnittzahlen sind -2 bis auf

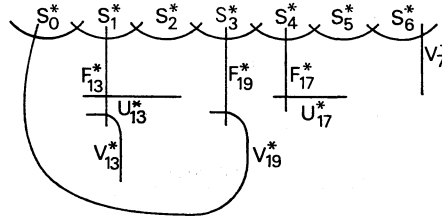
$$S_0^* S_0^* = S_2^* S_2^* = -4, \quad S_1^* S_1^* = -1.$$

Die Kurve S_1^* wird von F_{44}^* ($N_1 = 11, N_2 = 4$) transversal geschnitten. Für sie ist $c_1^*[F_{44}^*] = 0$ (siehe 2.6 Tabelle 3). Also ist F_{44}^* eine (-2) -Kurve. Bläst man S_1^* und F_{44}^*

nieder, so ergibt sich die K 3-Fläche Y_T^{00} (397). Beim Beweis wird wieder eine elliptische Konfiguration III benutzt, die aus S_0^* und S_2^* entsteht.

$$e = \delta = 0, \quad p = 389, 461, 509$$

$$p = 389, \quad c_1^2[Y_T^0(389)] = 0$$

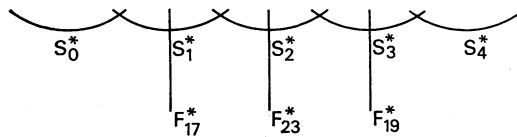


Die Kurven S_i^* und F_{13}^* , F_{19}^* , F_{17}^* haben alle die Selbstschnittzahl -2 , also ist Y_T^0 (389) eine K 3-Fläche. Man verwende zum Beispiel die elliptische Konfiguration, die bei Kodaira [13] mit I_2^* bezeichnet und hier durch $S_0^*, \dots, S_4^*, F_{13}^*, F_{19}^*$ realisiert wird. Die weiteren Kurven, die wir eingetragen haben, rühren her von den Quotientensingularitäten, durch die F_{13} , F_{19} , F_{17} , F_7 in $X(p)$ hindurchgehen. Die Bezeichnung ist wie in 2.3 und 3.2 verabredet. Die Selbstschnittzahl von U_{13}^* , U_{17}^* ist -2 , das gilt aber auch für V_7^* , V_{13}^* , V_{19}^* , was an den exzeptionellen Kurven F_7^* , F_{24}^* , F_{16}^* liegt. Weil $4 \cdot 24 \cdot 13 - 9^2 = 3 \cdot 389$ bzw. $4 \cdot 16 \cdot 19 - 7^2 = 3 \cdot 389$, ist $V_{24}^* = V_{13}^*$ und $V_{16}^* = V_{19}^*$. Um dieses Beispiel noch weiter zu erläutern, sei erwähnt, dass $h(-4 \cdot 389) = h(-3 \cdot 389) = 22$. Es muss also 5 Paare U_i, U_i^* und 5 Paare V_j, V_j^* in der Figur von 2.1 geben. Diese sind repräsentiert durch

$$U_5^*, U_6^*, U_9^* (\text{niedergeblasen}), \quad U_{13}^*, U_{17}^* \text{ bzw.}$$

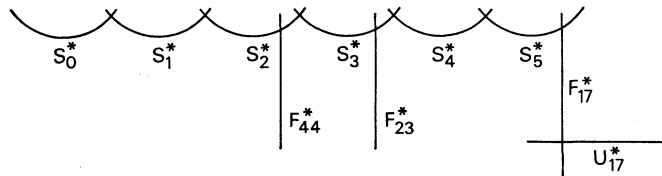
$$V_4^*, V_6^* (\text{niedergeblasen}), \quad V_7^*, V_{13}^*, V_{19}^*.$$

$$p = 461, \quad c_1^2(Y_T(461)) = -1$$



Alle Kurven haben die Selbstschnittzahl -2 bis auf $S_0^* S_0^* = -3$. Da $4 \cdot 9 \cdot 54 - 10^2 = 4 \cdot 461$, schneidet F_{54}^* die Kurve U_9^* in $Y^0(461)/T$, d. h. $U_{54}^* = U_9^*$. In $Y_T^0(461)$ ist U_9^* bereits niedergeblasen und deshalb F_{54}^* exzeptionell in $Y_T^0(461)$. Diese exzeptionelle Kurve schneidet S_0^* transversal. Nach Niederblasung erhielt man die K 3-Fläche $Y_T^{00}(461)$. (Verwendung einer Konfiguration I_2^* .)

$$p = 509, \quad c_1^2[Y_T^0(509)] = -2$$

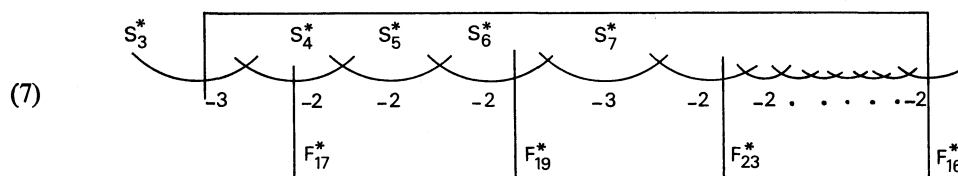


Alle Kurven haben die Selbstschnittzahl -2 bis auf $S_0^* S_0^* = -3$. Wegen $4.16.24 - 3^2 = 3.509$, gilt für die exzeptionellen Kurven F_{16}^*, F_{24}^* , dass $V_{16}^* = V_{24}^*$. Deshalb ist V_{16}^* exzeptionell in $Y_T^0(509)$. Diese exzeptionelle Kurve schneidet S_0^* transversal. Ferner ist F_{56}^* exzeptionell. Wegen $4.56.26 - 15^2 = 11.509$ schneidet nämlich die (-2) -Kurve F_{56}^* auf $Y^0(509)/T$ die exzeptionelle Kurve F_{26}^* . Nach Niederblasung erhält man die K 3-Fläche $Y_T^{00}(509)$. Man benutze z. B. die elliptische Konfiguration E_9 , bei Kodaira mit IV^* bezeichnet.

4.5. Wir kommen jetzt zu den 6 Primzahlen, von denen nachgewiesen werden soll, dass sie zur Klasse III gehören (4.2). Nach Tabelle 8 in 3.6 ist $c_1^2[Y_T^0(p)] = 0$ für alle 6 Fälle bis auf $p = 353$. Da $c_1^2[Y_T^0(353)] = -1$ ist, erwarten wir, dass in $Y_T^0(353)$ noch eine Kurve niedergeblasen werden kann. Wir betrachten zunächst diese Fläche. Für diesen Fall und alle weiteren ziehe man die Liste der Spitzenaufösungen in 3.6 heran. Es wird immer das Lemma in 4.3 benutzt.

$$p = 353, \quad \varepsilon = 0, \quad \delta = 1.$$

Es ist $b_2 = 2$ und $N_2 = 11$ und deshalb $S_2^* S_2^* = -1$ in $Y_T^0(353)$. Durch Niederblasung von S_2^* erhält man eine Fläche $Y_T^{00}(353)$ mit $c_1^2 = 0$. Auf $Y_T^{00}(353)$ gibt es folgende Konfiguration (die Kurven S_0^*, S_1^* wurden nicht eingezeichnet).



Nach 2.5 Tabelle 3 ist $c_1^*(17) = c_1^*(19) = c_1^*(23) = c_1^*(16) = 0$. Daraus folgt, dass $F_{17}^*, F_{19}^*, F_{23}^*, F_{16}^*$ singularitätenfreie rationale Kurven der Selbstschnittzahl -2 sind. Wir werden jetzt F_{17}^* und F_{19}^* durch eine Kette von weiteren (-2) -Kurven verbinden und betrachten dazu die folgende Kette quadratischer Formen :

Form	Diskriminante
[17, 4, 21]	-4.353
[21, 10, 18]	-4.353
[18, 7, 35]	-7.353
[35, 26, 25]	-8.353
[25, 21, 15]	-3.353
[15, 9, 19]	-3.353

Nach 2.6 Tabelle 3 ist für 21 ($N_1 = 1$), 18 ($N_1 = 2, N_2 = 9$), 35 ($N_1 = 1$) und 25 ($N_1 = 1$) der Wert von c_1^* gleich 0. Ferner war F_{15}^* eine exzeptionelle Kurve in $Y^0(p)/T$. Beim Niederblasen wurde die zugehörige (-3) -Kurve eine (-2) -Kurve (und zwar ist $V_{25}^* = V_{15}^* = V_{19}^*$, wie die beiden letzten quadratischen Formen zeigen. Für die Kurve F_{21}^* gibt es zwei Kurven U^* der Selbstschnittzahl -2 , die $U_{21}^{*(1)}$ und $U_{21}^{*(2)}$ heißen mögen. Die beiden ersten quadratischen Formen besagen, dass $U_{21}^{*(1)} = U_{17}^*$ und $U_{21}^{*(2)} = U_{18}^*$. Für

die quadratischen Formen $\varphi = [18, \pm 7, 35]$ bzw. $[35, \pm 26, 25]$ gilt $s(\varphi) = 1$, da $h(-7) = h(-8) = 1$ (vgl. 1.2). Es wird also ein eindeutig bestimmter Schnittpunkt von F_{18}^* und F_{35}^* bzw. F_{35}^* und F_{25}^* durch die entsprechenden speziellen Punkte festgelegt. Wir haben eine elliptische Konfiguration gefunden, die *aus einem Zyklus von 12 rationalen singularitätenfreien Kurven der Selbstschnittzahl -2 besteht*, nämlich $S_6^*, S_5^*, S_4^*, F_{17}^*, U_{17}^*, F_{21}^*, U_{18}^*, F_{18}^*, F_{35}^*, F_{25}^*, V_{15}^*, F_{19}^*$. Also gehört 353 zur Klasse III. Der Zyklus ist eine Faser der eindeutig bestimmten elliptischen Faserung. Wir möchten noch einen Zyklus angeben, nämlich den der F_{32}^* und F_{16}^* enthält. Er wird uns gegeben durch folgende Kette von quadratischen Formen :

Form	Diskriminante
$[23, 21, 47]$	-11.353
$[47, 25, 39]$	-19.353
$[39, 5, 16]$	-7.353

Es ist $c_1^*(23) = c_1^*(39) = c_1^*(16) = 0$ und $h(-11) = h(-19) = h(-7) = 1$. Ferner ist $c_1^*(47) = -2$. Jedoch geht F_{47} nicht transversal durch die Spitzen. Dem Schnittpunkt von S_0 und S_1 ist die quadratische Form $[N_0, M_1, N_1] = [1, 19, 2]$ zugeordnet mit $N_0 t^2 + M_1 ts + N_1 s^2 = 47$ für $(t, s) = (1, 2)$. Deshalb ist $c_1^*[F_{47}^*] = 0$, und wir erhalten in der Tat einen weiteren *Zyklus von 12 singularitätenfreien rationalen Kurven der Selbstschnittzahl -2* , nämlich $F_{23}^*, F_{47}^*, F_{39}^*, F_{16}^*, S_{15}^*, \dots, S_8^*$. Das Diagramm (7) zeigt zwei Schnitte der elliptischen Faserung, die (-3) -Kurven S_3^*, S_7^* .

In den folgenden fünf Fällen ist $c_1^2[Y_T^0(p)] = 0$. Wir werden zeigen, dass immer $Y_T^0(p)$ vom elliptischen Typ ist. Es ist dann auch nachgewiesen, dass diese Fläche minimal ist

$$p = 281, \quad \varepsilon = 0, \quad \delta = 1.$$

Es sollen zunächst die folgenden (-2) -Kurven benutzt werden : $F_{16}^*, F_{39}^*, F_{18}^*, F_{17}^*$ (Tabelle 3 in 2.6) :

Form	Diskriminante
$[16, 23, 39]$	$(-7).281$
$[39, 29, 18]$	$(-7).281$
$[18, 10, 17]$	$(-4).281$

Zyklus der Länge 7 von (-2) -Kurven : $S_8^*, S_9^*, F_{16}^*, F_{39}^*, F_{18}^*, U_{17}^*, F_{17}^*$. Damit ist bereits nachgewiesen, dass 281 zur Klasse III gehört. Die (-3) -Kurven S_7^*, S_{10}^* sind *Schnitte*. Wir geben weitere Zyklen von (-2) -Kurven an und verwenden dafür : $F_{10}^*, F_{14}^*, F_{20}^*, F_{31}^*, F_{33}^*$. Es ist $c_1^*(10) = c_1^*(14) = 0$, $c_1^*(20) = c_1^*(31) = c_1^*(33) = -1$. Aber F_{20}^*, F_{31}^* gehen nicht transversal durch die Spitzen. Dem Schnittpunkt von S_0^* und S_1^* ist die Form $[1, 17, 2]$, dem Schnittpunkt von S_1^* und S_2^* die Form $[2, 19, 10]$ zugeordnet. Diese Formen stellen 20 bzw. 31 für $s = t = 1$ dar. Also haben wir auch die (-2) -Kurven F_{20}^*, F_{31}^* . Zur Kurve F_{33}^* gehören zwei Kurven $U_{33}^{*(1)}$ und $U_{33}^{*(2)}$. Da $[33, 8, 9]$ die Diskriminante -4.281 hat, ist eine der beiden, sagen wir $U_{33}^{*(2)}$, gleich U_9^* und wurde also niedergeblasen. Also ist F_{33}^* eine (-2) -Kurve.

Zyklus der Länge 12 von (-2) -Kurven : $F_{14}^*, S_6^*, S_5^*, S_4^*, F_{20}^*, S_{11}^*, S_{12}^*, \dots, S_{17}^* |, F_{14}^*$
 schliesslich gibt es einen *Zyklus der Länge 6*, nämlich

$$F_{31}^*, V_7^*, F_{33}^*, U_{10}^*, F_{10}^*, S_2^* |, F_{31}^*.$$

Die zugehörige Kette quadratischer Formen ist :

Form	Diskriminante
$[31, 5, 7]$	$-3.281 (V_{31}^* = V_7^*)$
$[7, 9, 33]$	$-3.281 (V_7^* = V_{33}^*)$
$[33, 14, 10]$	$-4.281 (U_{33}^{*(1)} = U_{10}^*)$

$$p = 241, \quad \varepsilon = \delta = 1.$$

Wir verwenden die (-2) -Kurven $F_{12}^*, F_{15}^*, F_{16}^*, F_{18}^*, F_{25}^*$. Es ist $c_1^*(18) = -1$, jedoch schneidet F_{18}^* in $Y^0(241)/T$ die Kurve S_{23}^* , welche niedergeblasen wird. Für F_{25}^* ist zu beachten, dass $c_1^*(25) = -1$, jedoch F_{25}^* nicht transversal durch die Spitzen geht : Dem Schnittpunkt von S_{17}^* und S_{18}^* ist die Form $[2, 17, 6]$ zugeordnet, die 25 für $s = t = 1$ darstellt.

Zyklus der Länge 13 von (-2) -Kurven : $F_{12}^*, S_1^*, S_2^*, F_{15}^*, S_{16}^*, S_{15}^*, S_{14}^*, S_{13}^*, S_{12}^*, S_{11}^*, S_{10}^*, S_9^*, S_8^* |, F_{12}^*$.

Zyklus der Länge 6 von (-2) -Kurven : $F_{16}^*, S_6^*, S_5^*, S_4^*, F_{18}^*, S_{22}^* |, F_{16}^*$

Zyklus der Länge 6 von (-2) -Kurven : $F_{25}^*, U_{10}^*, F_{10}^*, S_{20}^*, S_{19}^*, S_{18}^* |, F_{25}^*$.

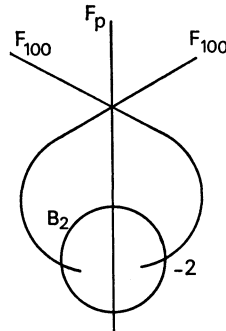
Hier benutzt man, dass $[25, 6, 10]$ die Diskriminante -4.241 hat und deshalb $U_{25}^* = U_{10}^*$.

Schnitte sind S_3^*, S_7^*, S_{21}^* .

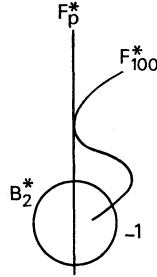
$$p = 373, \quad \varepsilon = 1, \quad \delta = 0.$$

Wir verwenden die (-2) -Kurven $F_{13}^*, F_{17}^*, F_{21}^*, F_{22}^*, F_{25}^*, F_{28}^*, F_{30}^*, F_{36}^*, F_{38}^*, F_{40}^*, F_{100}^*$. Es ist $c_1^* = 0$ (Tabelle 3 in 2.6) bis auf $c_1^*(21) = -1$ und $c_1^*(100) = -2$. Die Kurve F_{21}^* schneidet S_{10}^* transversal. Aber S_{10}^* wird beim Uebergang zu $Y_T^0(373)$ niedergeblasen.

Da $H(4.100-373) = H(27) = 4/3$, hat man auf $Y^0(373)$ eine Konfiguration



[vgl. 2.4 (13) und 2.6, Beweis von Satz 3] und auf $Y^0(373)/T$:



Es folgt $c_1^*[F_{100}^*] = 0$ auf $Y_T^0(373)$.

1) Zyklus der Länge 10 von (-2) -Kurven : $F_{17}^*, S_1^*, S_2^*, S_3^*, S_4^*, S_5^*, F_{21}^*, V_{16}^*, F_{22}^*, U_{17}^* |, F_{17}^*$:

Form	Diskriminante
$[21, 15, 16]$	$-3.373 (V_{21}^* = V_{16}^*)$
$[16, 17, 22]$	$-3.373 (V_{16}^* = V_{22}^{*(1)})$
$[22, 2, 17]$	$-4.373 (U_{22}^* = U_{17}^*)$

2) Zyklus der Länge 6 von (-2) -Kurven : $F_{13}^*, S_8^*, S_7^*, F_{36}^*, F_{38}^*, U_{13}^* |, F_{13}^*$:

Quadratische Form	Diskriminante
$[36, 37, 38]$	-11.373
$[38, 22, 13]$	$-4.373 (U_{38}^* = U_{13}^*)$

3) Zyklus der Länge 3 von (-2) -Kurven : $F_{40}^*, V_7^*, F_{100}^* |, F_{40}^*$:

Quadratische Form	Diskriminante
$[40, 1, 7]$	$-3.373 (V_{40}^{*(1)} = V_7^*)$
$[7, 41, 100]$	$-3.373 (V_{100}^* = V_7^*)$
$[100, 77, 40]$	$-27.373 (h(-27) = 1)$

4) Zyklus der Länge 6 von (-2) -Kurven : $F_{28}^*, V_{10}^{*(1)}, V_{10}^{*(2)}, F_{30}^*, F_{25}^*, V_{12}^* |, F_{28}^*$:

Quadratische Form	Diskriminante
$[28, 1, 10]$	$-3.373 (V_{28}^{*(1)} = V_{10}^{*(1)})$
$[10, 9, 30]$	$-3.373 (V_{10}^{*(2)} = V_{30}^{*(1)})$
$[30, 4, 25]$	-8.373
$[25, 9, 12]$	$-3.373 (V_{25}^* = V_{12}^*)$
$[12, 15, 28]$	$-3.373 (V_{12}^* = V_{28}^{*(2)})$

Da F_{12}^* niedergeblasen wurde, ist V_{12}^* eine (-2) -Kurve. Da F_{10}^* niedergeblasen wurde, sind $V_{10}^{*(1)}$ und $V_{10}^{*(2)}$ auch (-2) -Kurven. Sie schneiden sich transversal. Es ist leicht zu kontrollieren, dass F_{28} und F_{30} sich in $X(373)$ nicht schneiden und deshalb $V_{28}^{*(i)} \neq V_{30}^{*(j)}$. Da $h(-3.373) = 32$ gibt es 7 Paare V_i, V_j in der Figur von 2.1. Sie werden repräsentiert

durch V_4^* (niedergeblasen), V_{16}^* , V_7^* , V_{12}^* , $V_{10}^{*(1)}$, $V_{10}^{*(2)}$ und die Kurve $V_{22}^{*(2)}$, die mit V_{13}^* , $V_{40}^{*(2)}$ und $V_{30}^{*(2)}$ übereinstimmt (spezieller Punkt mit der Form [22, 39, 30], welche 13, 22, 30, 40 primitiv darstellt).

Schnitte der elliptischen Faserung : S_6^* , S_9^* , $V_{22}^{*(2)}$.

$$p = 421, \quad \varepsilon = 1, \quad \delta = 0.$$

Benutzt werden die (-2) -Kurven F_{15}^* , F_{17}^* , F_{27}^* , F_{28}^* , F_{36}^* , F_{38}^* , F_{44}^* , F_{64}^* , F_{104}^* . In allen Fällen ist $c_1^* = 0$, bis auf $c_1^*(27) = c_1^*(48) = c_1^*(64) = -1$ und $c_1^*(104) = -2$. Jedoch ist F_{27}^* nicht transversal in den Spitzen. Dem Schnittpunkt von S_0^* und S_1^* ist die Form [1, 21, 5] zugeordnet, welche 27 für $s = t = 1$ darstellt. In $Y^0(p)/T$ schneiden F_{48}^* und F_{64}^* die exzeptionelle Kurve F_{26}^* und F_{104}^* die exzeptionellen Kurven F_{12}^* und F_{16}^* (vgl. unten angegebene Ketten von quadratischen Formen).

1) *Zyklus der Länge 9 von (-2) -Kurven* : F_{27}^* , S_1^* , S_2^* , S_3^* , S_4^* , S_5^* , S_6^* , S_7^* , F_{44}^* |, F_{27}^* :

Form	Diskriminante
[44, 11, 27]	-11.421

2) *Zyklus der Länge 10 von (-2) -Kurven* : F_{17}^* , S_{12}^* , S_{13}^* , S_{14}^* , F_{15}^* , S_9^* , S_{10}^* , F_{36}^* , F_{38}^* , U_{17}^* |, F_{17}^* :

Form	Diskriminante
[36, 29, 38]	-11.421
[38, 30, 17]	- 4.421 ($U_{38}^* = U_{17}^*$)

3) *Zyklus der Länge 3 von (-2) -Kurven* : F_{64}^* , V_7^* , F_{48}^* |, F_{64}^* :

Form	Diskriminante
[64, 23, 7]	- 3.421 ($V_{64}^* = V_7^*$)
[7, 9, 48]	- 3.421 ($V_{48}^* = V_7^*$)
[48, 19, 26]	-11.421
[26, 45, 64]	-11.421

4) *Zyklus der Länge 4 von (-2) -Kurven* : F_{28}^* , V_{16}^* , F_{104}^* , V_{12}^* |, F_{28}^* :

Form	Diskriminante
[28, 23, 16]	- 3.421 ($V_{28}^{*(1)} = V_{16}^*$)
[16, 45, 104]	-11.421
[104, 19, 12]	-11.421
[12, 9, 28]	- 3.421 ($V_{28}^{*(2)} = V_{12}^*$)

Schnitt : S_8^* .

$$p = 557, \quad \varepsilon = 0, \quad \delta = 0.$$

Die folgenden (-2) -Kurven sollen benutzt werden : F_{17}^* , F_{19}^* , F_{22}^* , F_{25}^* , F_{28}^* , F_{29}^* , F_{39}^* , F_{40}^* , F_{42}^* , F_{54}^* , F_{60}^* , F_{62}^* , F_{64}^* , F_{150}^* . In allen Fällen ist $c_1^* = 0$ in Tabelle 3 von 2.6 bis auf F_{29}^* , F_{62}^* , F_{64}^* , F_{150}^* , wo $c_1^*(29) = c_1^*(62) = c_1^*(64) = -1$ und $c_1^*(150) = -2$. Aber F_{29}^*

schneidet in $Y^0(557)/T$ die Kurve S_4^* , welche niedergeblasen wird, und F_{62}^* und F_{64}^* schneiden U_9^* bzw. F_{26}^* , welche niedergeblasen werden ($4.62.9 - 2^2 = 4.557$ bzw. $4.64.26 - 23^2 = 11.557$). Die Kurve F_{150}^* schneidet die exzeptionelle Kurve V_4^* in $Y^0(p)/T$, d. h. $V_4^* = V_{150}^{*(1)}$, wegen $4.150.4 - 27^2 = 3.557$, und ausserdem ist $H(4.150 - 557) = H(43) = 1$, was eine Situation wie für die Kurve F_{100}^* bei $p = 373$ bewirkt (abgesehen von B_2).

1) Zyklus der Länge 7 von (-2) -Kurven : $F_{17}^*, U_{17}^*, F_{54}^*, F_{62}^*, F_{19}^*, S_2^*, S_1^* |, F_{17}^*$

Form	Diskriminante
[17, 38, 54]	- 4.557 ($U_{17}^* = U_{54}^*$)
[54, 53, 62]	- 19.557
[62, 16, 19]	- 8.557

2) Zyklus der Länge 5 von (-2) -Kurven : $F_{40}^*, V_{15}^*, F_{28}^*, V_{16}^*, F_{150}^* |, F_{40}^*$

Form	Diskriminante
[40, 27, 15]	- 3.557 ($V_{40}^{*(1)} = V_{15}^*$)
[15, 3, 28]	- 3.557 ($V_{15}^* = V_{28}^{*(1)}$)
[28, 11, 16]	- 3.557 ($V_{28}^{*(2)} = V_{16}^*$)
[16, 54, 150]	- 12.557 ($V_{16}^* = V_{150}^{*(2)}$)
[150, 7, 40]	- 43.557

Aus $4.16.150 - 54^2 = 12.557$ kann nicht ohne weiteres auf $V_{16}^* = V_{150}^{*(2)}$ geschlossen werden, da die Form [16, 54, 150] nicht primitiv ist und deshalb 1.2 (10) oder (11) nicht angewandt werden kann. In der Tat ist $s([16, 54, 150]) = 0$ (siehe [10], Chap. I, Th. 1). Nach [10], Chap. I, Theorem 2 ist jedoch $s_0([16, 54, 150]) = 1$. Dies entspricht der Tatsache, dass [28, 11, 16] die Zahl 150 primitiv darstellt ($150 = 28.2^2 + 2.11 + 16$). In $Y^0(557)/T$ wird V_{16}^* transversal von F_{16}^* (exzeptionelle Kurve), F_{28}^* und F_{150}^* geschnitten.

3) Zyklus der Länge 6 von (-2) -Kurven : $F_{42}^*, V_{10}^{*(1)}, V_{10}^{*(2)}, F_{60}^*, V_7^*, F_{64}^* |, F_{42}^*$

Form	Diskriminante
[42, 3, 10]	- 3.557 ($V_{42}^{*(1)} = V_{10}^{*(1)}$)
[10, 27, 60]	- 3.357 ($V_{10}^{*(2)} = V_{60}^{*(1)}$)
[60, 3, 7]	- 3.557 ($V_{60}^{*(2)} = V_7^*$)
[7, 11, 64]	- 3.557 ($V_7^* = V_{64}^*$)
[64, 13, 42]	- 19.557

4) Zyklus der Länge 6 von (-2) -Kurven : $F_{29}^*, F_{39}^*, F_{25}^*, V_{24}^*, F_{22}^*, U_{22}^* |, F_{29}^*$

Form	Diskriminante
[29, 25, 39]	- 7.557
[39, 1, 25]	- 7.557
[25, 27, 24]	- 3.557 ($V_{25}^* = V_{24}^*$)
[24, 21, 22]	- 3.557 ($V_{24}^* = V_{22}^{*(1)}$)
[22, 18, 29]	- 4.557 ($U_{22}^* = U_{29}^*$)

F_{24}^* war exzeptionell in $Y^0(557)/T$. Deshalb ist V_{24}^* eine (-2) -Kurve.

Schnitte : S_3^* , $V_{22}^{*(2)}$.

Bemerkung. — Es ist $h(-4.557) = 18$. Es gibt also 4 Paare U_i , U'_i in Figur 1 von 2.1. Diese werden repräsentiert durch U_5^* , U_6^* , U_9^* (niedergeblasen), U_{17}^* . Es ist $h(-3.557) = 38$. Es gibt 9 Paare V_i , V'_i . Diese werden repräsentiert durch V_4^* , V_6^* (niedergeblasen), V_{15}^* , V_{16}^* , $V_{10}^{*(1)}$, $V_{10}^{*(2)}$, V_7^* , V_{24}^* (Bestandteile der Zyklen), sowie $V_{22}^{*(2)}$, welches übereinstimmt mit V_{19}^* , $V_{40}^{*(2)}$, $V_{42}^{*(2)}$ und somit jeden Zyklus schneidet, wie es sein muss, da $V_{22}^{*(2)}$ als (-3) -Kurve ein Schnitt ist. Die Kurve F_{90}^* ist auch eine (-2) -Kurve. Da $c_1^*[F_{90}^*] = 0$ ist, muss F_{90}^* Komponente einer Ausnahmefaser sein. Es ist unmöglich, diese Ausnahmefaser mit Hilfe der F_N^* und S_k^* anzugeben. Der Schnitt S_3^* schneidet nämlich jede der vier explizit konstruierten Ausnahmefasern in genau einem Punkt (Schnittpunkt mit S_2^* bzw. F_{28}^* bzw. V_7^* bzw. F_{29}^* ; bezüglich der laufenden Koordinate u_3 auf S_3^* sind dies die Punkte 0, -1 , 1 , ∞), und es gibt keine Kurve F_N^* oder S_k^* , die S_3^* transversal in genau einem Punkt schneidet, der von diesen vier Punkten verschieden ist.

4.6. Die Klassifikation im Sinne von 4.1 und 4.2 wurde durch die Angabe der elliptischen Konfiguration in 4.5 abgeschlossen. Wir fassen zusammen.

SATZ. — Es sei p eine Primzahl $\equiv 1 \pmod{4}$ und \mathcal{O} der Ring der ganzen Zahlen von $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$. Es sei ferner $G = \mathrm{SL}_2(\mathcal{O})/\{\pm 1\}$ die Hilbertsche Modulgruppe und $G_T = G \cup G.T$ die symmetrische Hilbertsche Modulgruppe.

Die Fläche $\overline{H^2/G_T}$ ist rational für 24 Primzahlen, nämlich für alle $p < 193$ und $p = 197, 229, 269, 293, 317$.

Die Fläche $\overline{H^2/G_T}$ ist von K 3-Typ für 9 Primzahlen, nämlich für $p = 193, 233, 257, 277, 349, 389, 397, 461, 509$.

Die Fläche $\overline{H^2/G_T}$ ist vom echt elliptischen Typ für 6 Primzahlen, nämlich für $p = 241, 281, 353, 373, 421, 557$.

Die Fläche $\overline{H^2/G_T}$ ist für alle anderen Primzahlen $p \equiv 1 \pmod{4}$ vom allgemeinen Typ.

5. Weitere Beispiele

5.1. In 3.3 Tabelle 5 wurden die rationalen Flächen $Y_T(p)$ gelistet (für $p \geq 29$) und die Werte $c_1^2(Y_T(p))$ angegeben. Es entsteht die Frage, welche Kurven niedergeblasen werden können? Bei rationalen Flächen ist der Prozess des Niederblasens nicht eindeutig bestimmt. Man muss immer kontrollieren, dass zwei exzeptionelle Kurven, die niedergeblasen werden sollen, sich nicht schneiden.

Die minimalen rationalen Flächen sind wohlbekannt. Es sind die projektive Ebene $P_2(\mathbb{C})$, das cartesische Produkt $\Sigma_0 = P_1(\mathbb{C}) \times P_1(\mathbb{C})$ und die Regelflächen Σ_m ($m \geq 2$). Für jedes $m \geq 0$ ist dabei Σ_m das komplex-analytische Faserbündel über $P_1(\mathbb{C})$ mit $P_1(\mathbb{C})$ als Faser, \mathbb{C}^* als Strukturgruppe und m als charakteristischer Zahl des \mathbb{C}^* -Bündels. Für $m > 0$ hat Σ_m genau eine irreduzible Kurve mit negativer Selbstschnittzahl und diese ist gleich $-m$. Die Fläche Σ_1 ist $P_2(\mathbb{C})$ mit einem aufgeblasenen Punkt. Jede rationale Fläche mit Eulerzahl 3 (d. h. $c_1^2 = 9$) ist isomorph zu $P_2(\mathbb{C})$ und jede mit Eulerzahl 4 (d. h. $c_1^2 = 8$)

isomorph zu einer Fläche Σ_m ($m \geq 0$). Jede beliebige rationale Fläche entsteht aus einer minimalen $[P_2(C)$ oder Σ_m ($m = 0, m \geq 2$)] durch sukzessives Aufblasen.

In $Y_T(p)$ haben wir die Kurven $B_2^*, F_N^*, S_k^*, U_i^*, V_i^*$ zur Verfügung.

SATZ 1. — Für jede der 21 rationalen Flächen $Y_T(p)$ mit $p \geq 29$ kann man durch sukzessives Niederblasen unter alleiniger Verwendung von Kurven $B_2^*, F_N^*, S_k^*, U_i^*, V_i^*$ zu einer minimalen rationalen Fläche gelangen.

Wir deuten den Beweis nur in einigen Beispielen an. Der Prozess des Niederblasens ist nicht eindeutig. Für $p = 29, 37, 41, 53, 61, 73, 89, 97, 101, 109$ geben wir in einer Tabelle Kurven an, die niedergeblasen werden können, um ein minimales Modell zu erreichen. Anschliessend soll $p = 229$ noch erläutert werden. Unter unseren 21 Primzahlen ist 229 die einzige mit $h(p) \neq 1$. Es ist $h(229) = 3$.

Man beachte, dass wegen des möglichen Schneidens von exzeptionellen Kurven die Fläche $Y_T^0(p)$ (siehe 3.5) nicht eingeführt werden kann. Mit F_N^* werden Kurven auf $Y_T(p)$, bzw. auf Flächen die durch den jeweiligen Prozess des Niederblasens entstehen, bezeichnet. Eine Liste der Spitzenauflösungen ist für einige Fälle erforderlich. Es wird auch benutzt, dass $S_0^* S_0^* = -a + 3$ in $Y_T(p)$, falls $p \neq (2a-1)^2 + 4$. Wenn $p = (2a-1)^2 + 4$, dann beeinflusst das Niederblasen der Konfiguration 3.2 (16) die Selbstschnittzahl von S_0^* . In diesem Fall ist $S_{t+a-1}^* = S_1^*$ und $S_0^* S_0^* = -a + 4$ in $Y_T(p)$.

Liste von Spitzenauflösungen

k	$p = 41$		$p = 73$		$p = 89$		$p = 97$		$p = 101$		$p = 109$	
	$\overbrace{b_k}^{\quad}$	$\overbrace{N_k}^{\quad}$	$\overbrace{b_k}^{\quad}$	$\overbrace{N_k}^{\quad}$	$\overbrace{b_k}^{\quad}$	$\overbrace{N_k}^{\quad}$	$\overbrace{b_k}^{\quad}$	$\overbrace{N_k}^{\quad}$	$\overbrace{b_k}^{\quad}$	$\overbrace{N_k}^{\quad}$	$\overbrace{b_k}^{\quad}$	$\overbrace{N_k}^{\quad}$
0.....	7	1	9	1	11	1	11	1	11	1	11	1
1.....	4	2	5	2	2	8	2	6	3	5	4	3
2.....	2	5	2	6	2	11	4	3	2	13	3	5
3.....	3	4	3	4	2	10	6	2	2	19	2	9
4.....	2	8	4	3	3	5	2	9	2	23	3	7
5.....	2	10	2	8	3	4	2	12	2	25	2	15
6.....			2	9	6	2	2	11			2	21
7.....			3	6	2	10	3	6			2	25
8.....			2	12	2	16	2	8			2	27
9.....			2	16	2	20	4	4				
10.....			2	18	2	22	2	12				
11.....							2	18				
12.....							2	22				
13.....							2	24				

Für diese Primzahlen ist $h(p) = 1$

Die Kurve S_0^* wird für $p = 29, 37, 41, 53, 97$ eine Gerade, für $p = 89$ ein Kegelschnitt von $P_2(C)$. Für $p = 101$ werden S_1^* und F_{13}^* in Σ_0 Kurven der Selbstschnittzahl 0 mit $S_1^* F_{13}^* = 1$. Analoges gilt im Falle $p = 109$ für S_1^* und S_2^* . Für $p = 101, 109$ wird S_0^* eine Kurve der Selbstschnittzahl 2.

TABELLE 9

Niederblasen zu minimalen rationalen Flächen

p	Niederblasen	Min. Modell
29.....	F_6^*, U_6^*	$P_2(C)$
37.....	$B_2^*; V_4^*$	$P_2(C)$
41.....	F_5^*, S_2^*, F_9^*	$P_2(C)$
53.....	$F_6^*, U_6^*, V_6^*, V_4^*$	$P_2(C)$
61.....	$F_5^*, U_5^*, B_2^*, F_{12}^*, S_0^*$	$P_2(C)$
73.....	$F_6^*, S_2^*, B_2^*, F_8^*, S_5^*, S_6^*, S_0^*$	$P_2(C)$
89.....	$F_8^*, S_1^*, S_2^*, S_3^*, F_5^*, U_5^*, S_5^*, F_9^*, U_9^*$	$P_2(C)$
97.....	$F_6^*, S_1^*, B_2^*, F_9^*, S_4^*, S_5^*, S_6^*, F_8^*, S_8^*, F_{16}^*$	$P_2(C)$
101.....	$F_5^*, U_5^*, V_4^*, F_6^*, U_6^*, F_9^*, U_9^*, F_{16}^*$	Σ_0
109.....	$B_2^*, F_5^*, U_5^*, F_9^*, S_3^*, F_7^*, V_4^*, F_{16}^*, F_{12}^*$	Σ_0

Beachte, dass für $p = 97$ die Kurve F_{16}^* durch den Schnittpunkt von S_2^* und S_3^* geht und deshalb exzeptionell ist.

Als letztes Beispiel für Satz 1 betrachten wir $p = 229$. Da $c_1^2(Y_T(229)) = -10$, werden wir versuchen 19 Kurven niederzublasen, um $P_2(C)$ zu erhalten. Es ist $h(p) = 3$ und $p = 15^2 + 4$ mit $a = 8$. Die Konfiguration 3.2 (15) ist also (bis auf S_0) die ganze Hauptspitze, aber es gibt ein Paar zusätzlicher Zyklen in $Y(229)$ (vgl. [7], 5.9, (28)), von denen jeder so aussieht :

$$(1) \quad \begin{array}{c} \text{Ende der Periode} \rightarrow \\ \downarrow \\ \begin{array}{c|cccccc} b_k & 6 & 2 & 3 & 2 & 2 & 2 & 4 & 6 \\ \hline N_k & 3 & 11 & 9 & 17 & 19 & 15 & 5 & 3 \end{array} \end{array}$$

In $Y_T(229)$ werden zunächst folgende 15 Kurven niedergeblasen :

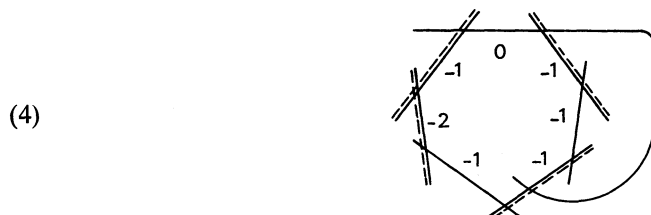
$$(2) \quad V_4^*; B_2^*; F_{12}^*, F_{16}^*, V_{12}^*, F_{19}^*; F_{11}^*; F_9^*; F_{14}^*, U_{14}^*, F_{17}^*; F_{15}^*; F_5^*, U_5^*; F_{20}^*.$$

Dabei ist zu beachten, dass $4 \cdot 12 \cdot 16 - 9^2 = 3 \cdot 229$ und $4 \cdot 12 \cdot 19 - 15^2 = 3 \cdot 229$. Deshalb ist $V_{12}^* = V_{16}^* = V_{19}^*$. Nach Niederblasen der exzeptionellen Kurven F_{12}^*, F_{16}^* (vgl. 3.4, Tabelle 6) kann deshalb auch V_{12}^* niedergeblasen werden. Danach wird die ursprüngliche (-2) -Kurve F_{19}^* (vgl. 2.5, Tabelle 3 mit $c_1^*(19) = 0$) exzeptionell :

$$(3) \quad \begin{array}{c|c|c|c} F_{12}^* & & F_{16}^* & F_{19}^* \\ \hline & V_{12}^* & & \\ \hline \end{array}$$

Ferner ist $4 \cdot 14 \cdot 17 - 6^2 = 4 \cdot 229$, d. h. $U_{14}^* = U_{17}^*$. Nach Niederblasen von F_{14}^*, U_{14}^* wird F_{17}^* exzeptionell ($c_1^*(17) = 0$). Schliesslich ist F_{15}^* (eine (-2) -Kurve in $Y^0(229)/T$) exzeptionell in $Y_T(229)$, weil F_{15}^* wegen $(229 - 13^2)/4 = 15$ die Kurve S_1^* transversal

schneidet, welche beim Uebergang zu Y_T (229) niedergeblasen wurde. Nach den Niederblasungen (2) nimmt der Exrazyklus (1) folgende Gestalt an (vgl. auch 4.3, Lemma) :



Die Kurven mit $N_k = 3$ bzw. $N_k = 19$ schneiden sich wegen (3). Die gestrichelten 4 Kurven können niedergeblasen werden, und man erhält die projektive Ebene. Von den Kurven der Spitzenaufösungen sind in der projektive Ebene nur noch S_0^* und drei Kurven des Exrazyklus (siehe 4) übriggeblieben. Es handelt sich um zwei Kegelschnitte und zwei Geraden. Die beiden Kegelschnitte schneiden sich in 2 Punkten (Multiplizität 3 bzw. 1). Die Kurve F_{26}^* ist exzeptionell in $Y_T(p)$. Sie schneidet F_{19}^* , weil $4 \cdot 19 \cdot 26 - 12^2 = 8 \cdot 229$. Deshalb wird F_{26}^* eine Gerade von $P_2(C)$ und zwar die gemeinsame Tangente der beiden Kegelschnitte.

5.2. Die Hilbertsche Modulfläche $Y^0(p)$ ist rational für $p = 5, 13, 17$. Für $29 \leq p < 89$ ist $Y^0(p)$ eine K 3-Fläche oder eine echt elliptische Fläche ($c_1^2[Y^0(p)] = 0$) und deshalb minimal. Für $p \geq 89$ ist $Y^0(p)$ vom allgemeinen Typ. Diese Ergebnisse finden sich in [8], wo die Vermutung ausgesprochen wurde (siehe [8], S. 21), dass $Y^0(p)$ auch für $p \geq 89$ eine minimale algebraische Fläche ist, was van der Geer und van de Ven [5] in vielen Fällen bestätigt haben. Wir können die Minimalität leicht beweisen für den Fall, dass $Y^0(p)/T$ nicht rational und nicht vom allgemeinen Typ ist (vgl. 4.6). Dabei wird das minimale Modell von $Y^0(p)/T$ benutzt, das wir in 4.4, 4.5 besprochen haben.

SATZ 2. — Die Hilbertsche Modulfläche $Y^0(p)$ ist minimal für die 9 Primzahlen p , für die $Y^0(p)/T$ vom K 3-Typ ist, und für die 6 Primzahlen p , für die $Y^0(p)/T$ vom echt elliptischen Typ ist (vgl. 4.6).

Beweis. — Es sei p eine der angegebenen Primzahlen und C eine exzeptionelle Kurve auf $Y^0(p)$. Diese Annahme soll zum Widerspruch geführt werden. Wäre $T(C) = C$, dann müsste T auf C einen in $Y^0(p)$ isolierten Fixpunkt haben (vgl. [7], 5.4, Lemma). Ein solcher existiert aber nicht. Daher sind C und $T(C)$ verschiedene exzeptionelle Kurven, die sich nicht schneiden, weil $Y^0(p)$ nicht rational ist. Die Kurven C , $T(C)$ und F_p^0 (Fixkurve von T) sind also disjunkt. Das Bild von C und $T(C)$ in $Y^0(p)/T$ ist eine exzeptionelle Kurve C^* . Da das Urbild in $Y^0(p)$ der beim Uebergang von $Y^0(p)/T$ zum minimalen Modell niedergeblasenen Kurven keine exzeptionellen Kurven enthält, kann C^* keine dieser niederzublasenden Kurven sein, muss aber wenigstens eine dieser Kurven schneiden, da es sonst als exzeptionelle Kurve auf dem minimalen Modell verbliebe. Auf dem minimalen Modell wäre dann $c_1[C^*] \geq 2$, und das ist ein Widerspruch (vgl. 2.6), weil $Y^0(p)/T$ nicht rational ist.

Bemerkungen :

1) Der vorstehende Beweis kann nach leichter Modifikation auch in einigen Fällen verwandt werden, wo $Y^0(p)/T$ rational ist. So besteht zum Beispiel für $p = 89, 97, 101, 109$ das Urbild in $Y^0(p)$ der beim Uebergang zu $Y_T(p)$ (siehe 3.2) und dann zum minimalen Modell (5.1) niedergeblasenen Kurven aus mehreren zueinander disjunkten Ketten (A_n -Konfiguration) von (-2) -Kurven :

$$(5) \quad \begin{array}{c} \text{---} \cup \cap \text{---} \cup \cap \text{---} \cdots \cdots \cup \cap \text{---} \cup \cap \text{---} \quad (n \text{ Kurven}) \\ \quad \quad \quad -2 \quad \quad -2 \quad \quad \quad -2 \quad \quad -2 \\ \text{(Konfiguration } A_n) \end{array}$$

Jede dieser A_n -Konfiguration wird durch T in sich übergeführt. Wenigstens eine dieser Ketten würde von C und $T(C)$ geschnitten, was die Rationalität von $Y^0(p)$ ergäbe.

2) Nach [5] ist $Y^0(p)$ minimal für $29 \leq p \leq 317$.

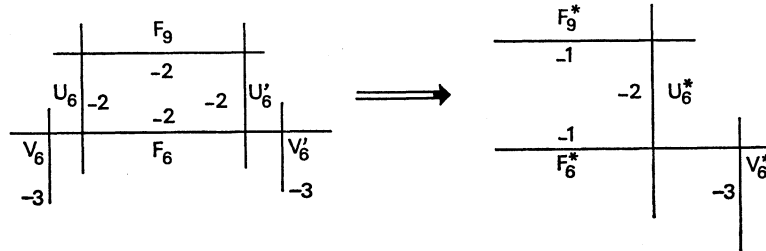
5.3. In den Fällen der Tabelle 9 kann die Art des Niederblasens von $Y^0(p)/T$ auf $Y_T(p)$ und dann auf das minimale Modell durch die besondere Struktur der Flächen $Y^0(p)$ motiviert werden. Bekanntlich [8] ist $Y^0(p)$ für $p = 29, 37, 41$ eine K 3-Fläche, die (mehrere) elliptische Faserungen zulässt. Wir zeichnen diejenige Faserung aus, für die der Schwanz [3.2, (15)] in einer Ausnahmefaser enthalten ist. Für $p = 53, 61, 73$ ist $Y^0(p)$ echt elliptisch [8], die elliptische Faserung ist eindeutig bestimmt und der Schwanz ist automatisch Bestandteil einer Ausnahmefaser. Die Involution T ist faserstreu, die Fixkurve F_p schneidet eine reguläre Faser transversal in 4 Punkten. Deshalb hat $Y^0(p)/T$ beinahe die Struktur einer Regelfläche. Die durch T geteilten Ausnahmefasern können bis auf eine Kurve niedergeblasen werden. Dann erhält man eine Regelfläche Σ_m . Man kann dieses Niederblasen so einrichten, dass sich Σ_1 ergibt und die exzeptionelle Kurve von Σ_1 wie folgt entsteht : Sie ist das Bild einer (eventuell reduzierbaren) Kurve C von $Y^0(p)$, welche mit jeder Faser der elliptischen Faserung die Schnittzahl 2 hat. Von Σ_1 geht man dann durch einmaliges Niederblasen zu $P_2(C)$ über. Für $p = 29, 37, 41, 53, 61, 73$ ist in Tabelle 9 jeweils $U_6^*, V_4^*, F_9^*, V_6^*, S_0^*, S_0^*$ das Bild von C .

Wir betrachten das Beispiel $p = 53$ etwas genauer (vgl. auch [8]). Es ist $h(-4.53) = 6$ und $h(-3.53) = 10$. Die echt elliptische Fläche $Y^0(53)$ hat folgende 4 Ausnahmefasern (alle zyklisch) :

- 1) V_4, V_4', F_{10} ($V_4^* = V_{10}^{*(1)}$, wegen $4.4.10 - 1^2 = 3.53$);
- 2) $F_7, S_1, S_2, S_3, S_{-3}, S_{-2}, S_{-1}$;
- 3) F_6, U_6', F_9, U_6 ($U_6^* = U_9^*$, wegen $4.6.9 - 2^2 = 4.53$);
- 4) F_{16} (F_{16} hat einen auf F_p liegenden Doppelpunkt, wegen $4.16 - 53 = 11$; siehe 2.3).

Darüberhinaus sind $\begin{array}{c} c_j \quad c_j' \\ \diagdown \quad \diagup \\ \times \end{array}$ ($1 \leq j \leq 5$) und $\begin{array}{c} D_i \\ \circ \end{array}$ ($1 \leq i \leq 3$) Bestandteile von Ausnahmefasern (siehe 2.1). Aber es ist nicht bekannt, wie sie sich zu Ausnahmefasern schliessen. Vermutlich ergeben sich 8 verschiedene Ausnahmefasern durch Hinzufügung von jeweils einer Kurve. Die Kurven V_6 und V_6' sind Schnitte, da $V_6^* = V_{10}^{*(2)} = V_7^* = V_{16}^*$. Für C wählen wir $V_6 + V_6'$. Beim Uebergang von $Y^0(53)/T$ zu $Y_T(53)$ wurden S_3^*, S_2^*, S_1^* und

alle C_j^* und D_i^* niedergeblasen, danach müssen nur noch die Ausnahmefasern 1), 3) berücksichtigt werden, zum Beispiel



(F_p wurde gestrichelt eingetragen).

In der Regelfläche Σ_1 ist F_9^* eine Faser und V_6^* ein Schnitt der Selbstschnittzahl -1 .

5.4. Nach Horikawa [11] ist eine minimale algebraische Fläche X mit $p_g = 3$ und $c_1^2 = 2$ die minimale Desingularisierung einer doppelten verzweigten Ueberlagerung der projektiven Ebene mit einer Kurve der Ordnung 8 als Verzweigungsort. Die Ueberlagerungsabbildung $X \rightarrow P_2(C)$ ist dabei die »kanonische« Abbildung, die durch eine Basis des 3-dimensionalen Vektorraumes V der holomorphen 2-Formen gegeben wird. Für $p = 89,97$ ist $Y^0(p)$ minimal mit $p_g = 3$ und $c_1^2 = 2$. Wir haben bereits eine 2-fache Ueberlagerung von $P_2(C)$ konstruiert, da wir $Y^0(p)/T$ durch Niederblasen auf $P_2(C)$ gebraucht haben. Dies muss die Horikawasche Ueberlagerung sein, da T auf V als »minus Identität« operiert und das Urbild der in $Y^0(p)/T$ niedergeblasenen Kurven in $Y^0(p)$ nur aus (-2) -Kurven besteht. Wir geben jetzt für $p = 89,97$ die in 5.2 (5) erwähnten A_n -Konfigurationen auf $Y^0(p)$ an (vgl. die Liste der Spitzenauflösungen und Tabelle 9 in 5.1).

$$p = 89 \quad (h(-4.89) = 12, h(-3.89) = 2)$$

$$S_7, S_8, S_9, S_{10}, S_{-10}, S_{-9}, S_{-8}, S_{-7} \quad A_8$$

$$C_1, C'_1 \quad A_2$$

$$D_i, \quad 1 \leq i \leq 6, \quad 6 \text{ mal } A_1$$

$$S_3, S_2, S_1, F_8, S_{-1}, S_{-2}, S_{-3} \quad A_7$$

$$U_5, F_5, U'_5 \quad A_3$$

$$S_5, S_{-5} \quad A_2$$

$$U_9, F_9, U'_9 \quad A_3$$

$$p = 97 \quad (h(-4.97) = h(-3.97) = 4)$$

$$S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{-13}, S_{-12}, S_{-11}, S_{-10} \quad A_8$$

$$C_j, C'_j, \quad 1 \leq j \leq 2, \quad 2 \text{ mal } A_2$$

$$D_i, \quad 1 \leq i \leq 2, \quad 2 \text{ mal } A_1$$

$$S_1, F_6, S_{-1} \quad A_3$$

B_2	A_1
$S_6, S_5, S_4, F_9, S_{-4}, S_{-5}, S_{-6}$	A_7
S_8, F_8, S_{-8}	A_3
F_{16}	A_1

Bläst man eine Konfiguration A_n auf einen Punkt, dann erhält man eine Singularität vom Typ $x^{n+1} + y^2 + z^2 = 0$. Dies entspricht der Tatsache, dass die Verzweigungskurve eine Singularität vom Typ $x^{n+1} + y^2 = 0$ hat; eine Kurvensingularität dieses Typs wollen wir a_n nennen. Damit ist beweisen :

SATZ 3. — *Der Verzweigungsort von $Y^0(89)$, d. h. das Bild von $F_{89}^0 \simeq \overline{H/\Gamma_*}(89)$ in der projektiven Ebene, ist eine Kurve der Ordnung 8 mit sechs singulären Punkten a_1 , zwei singulären Punkten a_2 , zwei singulären Punkten a_3 , einem singulären Punkt a_7 und einem singulären Punkt a_8 . Entsprechendes gilt für $Y^0(97)$. Hier ist der Verzweigungsort eine Kurve der Ordnung 8 mit vier singulären Punkten a_1 , zwei singulären Punkten a_2 , zwei singulären Punkten a_3 , einem singulären Punkt a_7 und einem singulären Punkt a_8 .*

Bemerkungen :

1) Die Singularität a_k hat die Plückerzahl (Reduktion des Geschlechts) $[(k+1)/2]$. Die Summe der Plückerzahlen für die Singularitäten der Kurven der Ordnung 8 bei $p = 89$ bzw. 97 ist 20 bzw. 18. Eine singularitätenfreie Kurve der Ordnung 8 hat das Geschlecht 21, deshalb haben die beiden Kurven das Geschlecht 1 bzw. 3, in Uebereinstimmung mit den in 3.3 Tabelle 5 angegebenen Werten für die Eulersche Zahl von $\overline{H/\Gamma_*}(p) \simeq F_p^0$.

2) Es wäre schön, explizite Gleichungen für die beiden Kurven zu kennen.

3) Van der Geer und Van de Ven haben ebenfalls diese Flächen untersucht (vgl. [5], § 4).

5.5. Nach [11] kann man eine minimale algebraische Fläche X mit $p_g = c_1^2 = 4$ mit Hilfe der kanonischen Abbildung als verzweigte doppelte Ueberlagerung einer Regelfläche Σ_m erhalten. Für $p = 101, 109$ ist $Y^0(p)$ minimal mit $p_g = c_1^2 = 4$. Die Regelfläche ist $\Sigma_0 = P_1(C) \times P_1(C)$ (siehe Tabelle 9), und die Verzweigungskurve hat nach [11] den Doppelgrad (6, 6). Wir geben wieder die A_n -Konfigurationen von $Y^0(p)$ an.

$p = 101 \quad (h(-4.101) = 14, h(-3.101) = 10)$	
$S_2, S_3, S_4, S_5, S_{-5}, S_{-4}, S_{-3}, S_{-2}$	A_8
$C_j, C'_j, \quad 1 \leq j \leq 5,$	5 mal A_2
$D_i, \quad 1 \leq i \leq 7$	7 mal A_1
U_5, F_5, U'_5	A_3
V_4, V'_4	A_2
U_6, F_6, U'_6	A_3
U_9, F_9, U'_9	A_3
F_{16}	A_1

$p = 109 \quad (h(-4.109) = 6, h(-3.109) = 12)$	
$S_5, S_6, S_7, S_8, S_{-8}, S_{-7}, S_{-6}, S_{-5}$	A_8
$C_j, C'_j, \quad 1 \leq j \leq 6$	6 mal A_2
$D_i, \quad 1 \leq i \leq 3$	3 mal A_1
B_2	A_1
U_5, F_5, U'_5	A_3
S_3, F_9, S_{-3}	A_3
F_7	A_1
V_4, V'_4	A_2
F_{16}	A_1
F_{12}	A_1

Eine singularitätenfreie Kurve vom Doppelgrad (6, 6) in $P_1(C) \times P_1(C)$ hat das Geschlecht 25. Die Summe der Plückerzahlen ist 24 für $p = 101$ und 22 für $p = 109$, in Uebereinstimmung damit, dass $H/\Gamma_*(101)$ bzw. $H/\Gamma_*(109)$ das Geschlecht 1 bzw. 3 hat. Analog zu Satz 3 kennen wir die Singularitäten der beiden Kurven vom Doppelgrad (6, 6). Wie lauten explizite Gleichungen für die beiden Kurven?

5.6. Man kann vermuten, dass die Hilbertschen Modulflächen $Y_T^0(p)$, sofern vom allgemeinen Typ, minimale Flächen sind. Diese Vermutung ist bisher noch in keinem einzigen Fall bewiesen worden. Insbesondere sollte man feststellen, ob die vier Flächen $Y_T^0(p)$ mit $p_g = 3$ (siehe 3.6, Tabelle 8) minimal sind. Wenn ja, dann wären sie Horikawasche Flächen (5.4), da $c_1^2(Y_T^0(p)) = 2$ für diese 4 Primzahlen, und man hätte eine Involution auf $Y_T^0(p)$, die nicht von einem Automorphismus von $H \times H$ induziert werden kann.

LITERATUR

- [1] M. EICHLER, *Ueber die Einheiten der Divisionsalgebren* (Math. Ann., Bd 114, 1937, p. 635-654).
- [2] H. FELL, M. NEWMAN and E. ORDMAN, *Tables of Genera of Groups of Linear Fractional Transformations* (J. Res. Nat. Bur. Stand., Bd 67 B, 1963, p. 61-68).
- [3] H. G. FRANKE, *Kurven in Hilbertschen Modulflächen und Humbertsche Flächen im Siegel-Raum* (Dissertation, Bonn, 1977, Erscheint in Bonner Mathematischen Schriften).
- [4] R. FRICKE, *Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen. Zweiter Teil.*, B. G. TEUBNER, éd., Leipzig und Berlin, 1922.
- [5] G. VAN DER GEER and A. VAN DE VEN, *On the Minimality of Certain Hilbert Modular Surfaces, in Complex Analysis and Algebraic Geometry*, p. 137-150, Iwanami Shoten, Publishers, and Cambridge University Press, 1977.
- [6] H. HELLING, *Note über das Geschlecht gewisser arithmetischer Gruppen* (Math. Ann., Bd 205, 1973, p. 173-179).
- [7] F. HIRZEBRUCH, *Hilbert Modular Surfaces* (Ens. Math., Bd 19, 1973, p. 183-281).

- [8] F. HIRZEBRUCH and A. VAN DE VEN, *Hilbert Modular Surfaces and the Classification of Algebraic Surfaces* (*Inventiones math.*, Bd 23, 1974, p. 1-29).
- [9] F. HIRZEBRUCH and D. ZAGIER, *Classification of Hilbert Modular Surfaces*, in *Complex Analysis and Algebraic Geometry*, p. 43-77, Iwanami Shoten, Publishers, and Cambridge University Press, 1977.
- [10] F. HIRZEBRUCH and D. ZAGIER, *Intersection Numbers of Curves on Hilbert Modular Surfaces and Modular Forms of Nebentypus* (*Inventiones math.*, Bd 36, 1976, p. 57-113).
- [11] E. HORIKAWA, *Algebraic Surfaces of General Type with small c_1^2* , I (*Annals Math.*, Bd 104, 1976, p. 357-387).
- [12] P. G. KLUIT, *On the Normalizer of $\Gamma_0(N)$* , p. 239-246, *In Modular Functions of One Variable V*, Bonn, 1976 (*Lecture Notes in Mathematics*, Nr. 601, Springer-Verlag, 1977).
- [13] K. KODAIRA, *On Compact Analytic Surfaces*, II (*Ann. Math.*, Bd 77, 1963, p. 563-626).
- [14] O. T. O'MEARA, *Introduction to Quadratic Forms*, Springer-Verlag, 1963.
- [15] A. PRESTEL, *Die elliptischen Fixpunkte der Hilbertschen Modulgruppen* (*Math. Ann.*, Bd 177, 1968, p. 181-209).
- [16] A. PRESTEL, *Die Fixpunkte der symmetrischen Hilbertschen Modulgruppe zu einem reell-quadratischen Zahlkörper mit Primzahldiskriminante* (*Math. Ann.*, Bd 200, 1973, p. 123-139).
- [17] G. SHIMURA, *Arithmetic of Unitary Groups* (*Ann. Math.*, Bd 79, 1964, p. 369-409).
- [18] O. V. ŠVARČMAN, *Simply-Connectedness of the Factor Space of the Hilbert Modular Group* (in Russian) [*Funct. Anal. and Appl.*, Bd (8), Nr. 2, 1974, p. 99-100].
- [19] D. ZAGIER, *Tafeln über numerische Invarianten der Hilbertschen Modulflächen mit Primzahldiskriminante p ($1 < p < 10\,000$)*, U. NM. 306, Universität Bonn, 5 September 1972 (nicht veröffentlicht).

(Manuscrit reçu le 30 janvier 1978.)

F. HIRZEBRUCH,
 Mathematisches Institut der Universität Bonn,
 10 Wegelerstrasse,
 5300 Bonn,
 R.F.A.,
 und
 Institut des Hautes Études scientifiques,
 35, route de Chartres,
 91440 Bures-sur-Yvette,
 France.