

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

J.-M. LEMAIRE

« Autopsie d'un meurtre » dans l'homologie d'une algèbre de chaînes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 11, n° 1 (1978), p. 93-100

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1978_4_11_1_93_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

« AUTOPSIE D'UN MEURTRE » DANS L'HOMOLOGIE D'UNE ALGÈBRE DE CHAINES

PAR J.-M. LEMAIRE

ABSTRACT. — Let \mathcal{A} be a connected, associative chain algebra, and let \mathcal{B} be obtained by freely adding a generator a to \mathcal{A} , whose differential $da = r$ "kills" some cycle r in \mathcal{A} . Let I be the 2-sided ideal in $A = H \mathcal{A}$ generated by the class of r , and let $\gamma : A/I \rightarrow B = H \mathcal{B}$ be the morphism induced by the inclusion $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.

A sufficient condition for γ to be an isomorphism is given. Applications are made to the determination of $H_*(\Omega X)$ and the Eilenberg-Moore spectral sequence for some finite cw -complexes X .

Introduction

Soit \mathcal{A} une DG algèbre de chaînes, associative, connexe, sur un corps \mathbf{k} (cf. [2] pour la définition). On se propose d'étudier ce qui se passe en homologie lorsqu'on « tue » un cycle r de \mathcal{A} en adjoignant librement à \mathcal{A} un générateur a de différentielle $da = r$.

Le mobile de ce « meurtre » est fourni par la méthode de J. F. Adams et P. Hilton pour calculer l'homologie d'un espace de lacets [1] : il constitue en effet le pas de la récurrence sur les cellules du cw -complexe X qui permet de construire l'algèbre de chaînes libre $A(X)$ telle que $H(A(X)) \xrightarrow{\cong} H_*(\Omega X)$.

Soit \mathcal{B} l'algèbre de chaînes obtenue en ajoutant le générateur a à \mathcal{A} comme ci-dessus, et soit $B = H \mathcal{B}$ son homologie. Soit \bar{r} la classe de r dans $A = H \mathcal{A}$, et soit $I = (\bar{r})$ l'idéal bilatère de A engendré par \bar{r} . L'inclusion $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ induit évidemment un morphisme de \mathbf{k} -algèbres graduées :

$$\gamma : A/I \rightarrow B.$$

L'objet de ce travail est de donner une condition suffisante (et peut-être d'ailleurs nécessaire) pour que γ soit un isomorphisme. Soit $\pi : A \rightarrow A/I$ la surjection canonique, et soit $\text{Tor}_p^{\bar{r}} : \text{Tor}_p^A(\mathbf{k}, \mathbf{k}) \rightarrow \text{Tor}_p^{A/I}(\mathbf{k}, \mathbf{k})$ l'homomorphisme de \mathbf{k} -espaces vectoriels gradués induit par π , pour chaque entier $p > 0$. Soit \bar{A} l'idéal d'augmentation de A : un élément de \bar{A} est dit décomposable s'il appartient à \bar{A}^2 , indécomposable sinon.

THÉORÈME. — (1) Si \bar{r} est indécomposable, γ est un isomorphisme si $\text{Tor}_p^{\bar{r}}$ est bijectif pour $p > 1$.

(2) Si \bar{r} est décomposable ($\bar{r} \neq 0$), γ est un isomorphisme si $\text{Tor}_p^{\mathbb{A}}$ est injectif pour $p = 2$ et bijectif pour $p > 2$.

Remarque 1. — Si $\bar{r} = 0$, il existe α dans \mathcal{A} tel que $d\alpha = r$ et $a - \alpha$ est un cycle de \mathcal{B} . Il n'est pas difficile alors de voir que $B = A \coprod T((\overline{a - \alpha}))$. L'homomorphisme γ n'est alors jamais surjectif. Nous supposons désormais $\bar{r} \neq 0$.

Remarque 2. — Soit $QI = I/\bar{A}.I + I.A = \mathbf{k}.\bar{r}$. La suite exacte ([7], 1.2.1) :

$$\text{Tor}_2^{\mathbb{A}}(\mathbf{k}, \mathbf{k}) \xrightarrow{\text{Tor}_2^{\mathbb{A}}} \text{Tor}_2^{\mathbb{A}/I}(\mathbf{k}, \mathbf{k}) \rightarrow QI \rightarrow \text{Tor}_1^{\mathbb{A}}(\mathbf{k}, \mathbf{k}) \rightarrow \text{Tor}_1^{\mathbb{A}/I}(\mathbf{k}, \mathbf{k}) \rightarrow 0$$

montre que l'hypothèse (1) du théorème entraîne que $\text{Tor}_1^{\mathbb{A}}$ est surjectif de noyau QI , et que l'hypothèse (2) entraîne que $\text{Tor}_1^{\mathbb{A}}$ est bijectif et $\text{Tor}_2^{\mathbb{A}}$ injectif de conoyau QI .

Dans le paragraphe 1, nous précisons la description de la suite spectrale associée à la filtration de \mathcal{B} par le « poids en a », déjà considérée par Adams et Hilton comme un « outil approprié » au problème considéré ([1], p. 318); nous en déduisons le résultat intermédiaire suivant :

PROPOSITION 1. — γ est un isomorphisme si I est un A -module (à gauche) libre et $I/\bar{A}.I = \mathbf{k} \otimes_A I$ est un A/I -module (à droite) libre.

Dans le paragraphe 2 on déduit le théorème de cette proposition. Le paragraphe 3 est consacré à quelques applications du théorème au calcul d'algèbres de Pontryagin d'espaces de lacets et de suites spectrales d'Eilenberg-Moore.

L'essentiel de cet article a été esquissé dans une note aux *Comptes rendus* [8], et l'exemple 2 du paragraphe 3 sera utilisé dans [10].

1. La suite spectrale $E_{p,q}^r \mathcal{B}$

Définissons une bigraduation sur \mathcal{B} comme suit : le bidegré d'un élément $\alpha \in \mathcal{A}_n$ est $(0, n)$ et celui de a est $(1, m)$ avec $m = \text{degré de } r$.

On peut considérer \mathcal{B} comme un double complexe avec différentielle $d = d' + d''$ définie par

$$d' \mid \mathcal{A} = 0, \quad d' a = r$$

et

$$d'' \mid \mathcal{A} = d_{\mathcal{A}}, \quad d'' a = 0,$$

d' et d'' sont donc de bidegrés respectifs $(-1, 0)$ et $(0, -1)$. Par définition de \mathcal{B} (cf. [2], p. 232, remark), on a

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{0,*} &= E_{0,*}^0 \mathcal{B} = \mathcal{A}, \\ \forall p > 0, \quad \mathcal{B}_{p,*} &= E_{p,*}^0 \mathcal{B} = \mathcal{A} \otimes (\mathbf{k}a \otimes \mathcal{A})^{\otimes p}. \end{aligned}$$

La suite spectrale considérée n'est autre que la suite spectrale associée à la filtration par le premier degré, qui vérifie $d^0 = d''$. Le théorème de Künneth fournit les isomorphismes

$$\begin{aligned} E_{0,*}^1 \mathcal{B} &= A, \\ \forall p > 0, \quad E_{p,*}^1 \mathcal{B} &= A \otimes (\mathbf{k}a \otimes A)^{\otimes p}. \end{aligned}$$

La différentielle d^1 est induite par la dérivation d' : on a donc, pour tout $p \geq 1$:

$$(\star) \quad \begin{cases} d_p^1 : E_{p, * }^1 \mathcal{B} \rightarrow E_{p-1, * }^1 \mathcal{B}, \\ d_p^1(\alpha_0 \otimes a \otimes \alpha_1 \otimes \dots \otimes a \otimes \alpha_p) \\ = \sum_{j=0}^{p-1} (-1)^{\varepsilon_j} \alpha_0 \otimes \dots \otimes a \otimes \alpha_j \bar{r} \alpha_{j+1} \otimes a \otimes \dots \otimes \alpha_p, \end{cases}$$

où

$$\varepsilon_j = j(m+1) + \sum_{k=0}^j |\alpha_k|, \quad |\alpha_k| = \text{degré de } \alpha_k \in \mathcal{A}.$$

En particulier, on a

$$\begin{aligned} d_1^1 : A \otimes \mathbf{k} a \otimes A &\rightarrow A, \\ \alpha_0 \otimes a \otimes \alpha_1 &\mapsto \alpha_0 r \alpha_1, \end{aligned}$$

de sorte que $\text{Im } d_1^1 = I$ et $E_{0, * }^2 = A/I$.

Il est clair que le « coin » :

$$A/I = E_{0, * }^2 \rightarrow E_{0, * }^\infty \hookrightarrow B = H \mathcal{B}$$

s'identifie à $\gamma : A/I \rightarrow B$. Si la suite $(E_{p, * }^1, d_p^1)$ est exacte pour tout $p \geq 1$, on a $E_{p, * }^2 = 0 = E_{p, * }^\infty$ pour tout $p \geq 1$, d'où $E_{0, * }^2 = E^\infty = B$ et par conséquent γ est un isomorphisme.

Nous avons donc établi le :

LEMME 1. — γ est un isomorphisme si $(E_{p, * }^1, d_p^1)$ est une résolution du A-bimodule A/I .

Réciproquement, si γ est un isomorphisme, on a $E_{0, * }^2 = E_{0, * }^\infty = B$, d'où $E_{p, * }^\infty = 0$ pour $p > 0$ et $d_p^p = 0$ pour $p \geq 2$. Pour conclure à la réciproque du lemme 1, il faudrait avoir la nullité de toutes les différentielles, et pas seulement de celles qui aboutissent sur l'axe $p = 0$: j'ignore s'il s'agit d'une condition plus forte.

Observons maintenant que $E_{p, * }^1 \mathcal{B}$ est un A-module libre (à droite ou à gauche) pour tout $p \geq 0$, et un A-bimodule libre pour $p \geq 1$.

Nous allons en déduire le résultat suivant :

LEMME 2. — La suite $(E_{p, * }^1 \mathcal{B}, d_p^1)$ est exacte si et seulement si I est un A-module à gauche (resp. à droite) libre et $\mathbf{k} \otimes_A I$ (resp. $I \otimes_A \mathbf{k}$) un A/I-module à droite (resp. à gauche) libre.

Démonstration. — Supposons la suite $(E_{p, * }^1 \mathcal{B}, d_p^1)$ exacte. Comme $\text{Im } d_p^1 = I$, la suite $(E_{p, * }^1 \mathcal{B}, d_p^1)$ pour $p \geq 1$ est une résolution A-libre de I : elle permet donc de calculer $\text{Tor}_{p, * }^A(\mathbf{k}, I)$. Or, d'après l'expression (\star) ci-dessus, on voit que

$$\mathbf{k} \otimes_A d_{p+1}^1 = \mathbf{k} a \otimes A \otimes (\mathbf{k} a \otimes A)^{\otimes p} \rightarrow (\mathbf{k} a \otimes A)^{\otimes p}$$

vérifie, pour tout $p > 0$,

$$(\star\star) \quad \mathbf{k} \otimes_A d_{p+1}^1 = (-1)^{m+1} \mathbf{k} a \otimes d_p^1.$$

On en déduit immédiatement que la suite $(\mathbf{k} \otimes_A E_p^1 \mathscr{B}, \mathbf{k} \otimes_A d_p^1)$ est exacte pour $p \geq 2$, d'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall p \geq 1, \quad \text{Tor}_{p,*}^A(\mathbf{k}, I) = 0, \\ \mathbf{k} \otimes_A I = \mathbf{k} \cdot \bar{r} \otimes A/I. \end{array} \right.$$

La première condition entraîne que I est A -libre, car A est connexe ([7], app. 1, 1.2), et la seconde, qui est un isomorphisme de A -modules et donc de A/I -modules exprime que $\mathbf{k} \otimes_A I$ est A/I -libre de rang 1.

Réciproquement, remarquons d'abord que si $\mathbf{k} \otimes_A I$ est A/I -libre, il est libre de rang 1 sur \bar{r} puisque

$$(\mathbf{k} \otimes_A I) \otimes_{A/I} \mathbf{k} = \mathbf{k} \otimes_A I \otimes_A \mathbf{k} = QI = \mathbf{k} \cdot r.$$

On a donc $\mathbf{k} \otimes_A I \cong \mathbf{k} \cdot \bar{r} \otimes (A/I)$. Montrons l'exactitude en $p = 1$. Soit N_1 le noyau de d_1^1 ; on a la suite exacte :

$$0 \rightarrow N_1 \rightarrow A \otimes \mathbf{k} \cdot a \otimes A \xrightarrow{d_1^1} I \rightarrow 0.$$

Comme I est A -libre, en tensorisant par \mathbf{k} sur A la suite reste exacte :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathbf{k} \otimes_A N_1 & \rightarrow & \mathbf{k} a \otimes A & \rightarrow & \mathbf{k} \otimes_A I \rightarrow 0 \\ & & & & & & \parallel \\ & & & & & & \mathbf{k} \cdot a \otimes (A/I) \end{array}$$

et l'expression de d_1^1 montre que $\mathbf{k} \otimes_A d_1^1$ peut être identifiée à $\mathbf{k} \cdot a \otimes \pi$: on en déduit que $\mathbf{k} \otimes_A N_1 = \mathbf{k} \cdot a \otimes I$. D'après (★★), on a $\mathbf{k} \otimes_A d_2^1 = (-1)^{m+1} \mathbf{k} \cdot a \otimes d_1^1$: l'image de $\mathbf{k} \otimes_A d_2^1$ est donc $\mathbf{k} \otimes_A N_2$, et le « lemme de Nakayama » pour les algèbres connexes ([11], prop. 1.4) permet de conclure que l'image de d_2^1 est N_2 . La démonstration de l'exactitude en $p > 1$ se fait de manière analogue, par récurrence sur p et en utilisant (★★).

La proposition 1 est donc établie.

2. Fin de la démonstration du théorème

Nous allons montrer que la condition : I est A -libre et $\mathbf{k} \otimes_A I$ est A/I -libre est équivalente à l'une ou l'autre des conditions sur Tor_p^π du théorème. Ceci en achèvera la démonstration.

Considérons la suite spectrale de changement d'anneaux associée à $\pi : A \rightarrow A/I$ ([4], chap. XVI, § 5; [7], p. 8). On a

$$E_{p,q}^2 = \text{Tor}_p^{A/I}(\text{Tor}_q^A(\mathbf{k}, A/I), \mathbf{k}) \Rightarrow \text{Tor}_{p+q}^A(\mathbf{k}, \mathbf{k})$$

et le coin :

$$\text{Tor}_p^A(\mathbf{k}, \mathbf{k}) \rightarrow E_{p,0}^\infty \xrightarrow{\gamma} E_{p,0}^2 = \text{Tor}_p^{A/I}(\mathbf{k}, \mathbf{k})$$

peut être identifié à Tor_p^π .

Remarquons d'abord que $\text{Tor}_{q+1}^A(\mathbf{k}, A/I) = \text{Tor}_q^A(\mathbf{k}, I)$ pour tout $q \geq 0$. Si I est A -libre, on a donc $E_{p,q}^2 = 0$ pour tout $q \geq 2$. Ensuite, comme $E_{p,1}^2 = \text{Tor}_p^{A/I}(\mathbf{k} \otimes_A I, \mathbf{k})$, on a $E_{p,1}^2 = 0$ pour $p \geq 1$ si $\mathbf{k} \otimes_A I$ est A/I -libre. La seule différentielle éventuellement non nulle est donc

$$d_{2,0}^2 : E_{2,0}^2 = \text{Tor}_2^{A/I}(\mathbf{k}, \mathbf{k}) \rightarrow E_{0,1}^2 = (\mathbf{k} \otimes_A I) \otimes_{A/I} \mathbf{k} = \text{QI} = \mathbf{k} \cdot \bar{r}$$

Si $d_{2,0}^2 = 0$, \bar{r} subsiste dans $E_{0,1}^\infty \subset \text{Tor}_1^A(\mathbf{k}, \mathbf{k}) = \overline{A/A}^2$, par suite \bar{r} est indécomposable et les conditions du cas (1) du théorème sont vérifiées. Si $d_{2,0}^2 \neq 0$, elle est surjective puisque $E_{0,1}^2$ est de dimension 1, donc $E_{0,1}^3 = E_{0,1}^\infty = 0$; par suite Tor_1^π est bijectif, donc \bar{r} est décomposable et les conditions du cas (2) sont vérifiées.

Réciproquement, supposons \bar{r} décomposable, Tor_p^π bijectif pour $p \neq 2$ et injectif pour $p = 2$. D'après l'identification de Tor_p^π au coin de la suite spectrale, il vient :

$$\forall p \geq 0, \quad \text{Tor}_p^A(\mathbf{k}, \mathbf{k}) \xrightarrow{=} E_{p,0}^\infty$$

et par conséquent $E_{p,q}^\infty = 0$ pour $p \geq 0, q > 0$. De plus, pour $p \neq 2$, on a $E_{p,0}^\infty = E_{p,0}^2$, d'où :

$$\forall r \geq 2, \quad \forall p \neq 2, \quad d_{p,0}^r = 0,$$

en particulier $d_{3,0}^2 = 0$, d'où $E_{1,1}^2 = E_{1,1}^\infty = 0$. Mais $E_{1,1}^2 = \text{Tor}_1^{A/I}(\mathbf{k} \otimes_A I, \mathbf{k}) = 0$, donc $\mathbf{k} \otimes_A I$ est A/I -libre ([7], A.1.2). Mais alors $E_{p,1}^2 = \text{Tor}_p^{A/I}(\mathbf{k} \otimes_A I, \mathbf{k}) = 0$ pour $p \geq 1$, en particulier $E_{2,1}^2 = 0$, d'où $d_{2,1}^2 = 0$. Comme on a déjà $d_{3,0}^2 = 0$, il vient :

$$0 = E_{0,2}^\infty = E_{0,2}^2 = \text{Tor}_2^A(\mathbf{k}, A/I) \otimes_A \mathbf{k} = \text{Tor}_1^A(\mathbf{k}, I) \otimes_A \mathbf{k},$$

soit $\text{Tor}_1^A(\mathbf{k}, I) = 0$ par « Nakayama ». \square

On notera que l'hypothèse sur Tor_p^π n'a en fait été utilisée que pour $p \leq 3$: par suite l'hypothèse pour $p \leq 3$ entraîne l'hypothèse pour tout p .

Nous laissons au lecteur la démonstration analogue de la réciproque dans le cas où \bar{r} est indécomposable.

3. Applications topologiques

3.1. Soit X un cw -complexe fini, dont le 1-squelette est réduit au point de base. On se donne une application essentielle $\rho : S^{m+1} \rightarrow X$, $m \geq 1$ et l'on considère le cw -complexe $Y = X \cup_\rho e^{m+2}$.

Soit $\tilde{\rho} : S^m \rightarrow \Omega X$ l'adjointe de ρ , et soit $\bar{r} \in H_m(\Omega X; \mathbf{k})$ l'image par ρ_* d'un générateur de $H_m(S^m)$. L'inclusion $j : X \rightarrow Y$ induit le morphisme d'algèbres

$$(\Omega_j)_* : H_*(\Omega X; \mathbf{k}) \rightarrow H_*(\Omega Y; \mathbf{k}),$$

et l'on voit facilement que $(\Omega_j)_*(\bar{r}) = 0$; par suite $(\Omega_j)_*$ factorise en

$$\gamma : H_*(\Omega X)/I \rightarrow H_*(\Omega Y),$$

où $I = (\bar{r})$ est l'idéal bilatère engendré par \bar{r} . On désigne encore par $\pi : H_*(\Omega X) \rightarrow H_*(\Omega X)/I$ la surjection canonique.

PROPOSITION 2. — γ est un isomorphisme (d'algèbres de Hopf) dans les deux cas suivants :

- (1) \bar{r} est indécomposable et Tor_p^n est bijectif pour $p \geq 2$;
- (2) \bar{r} est décomposable et Tor_p^n est bijectif pour $p \neq 2$, injectif pour $p = 2$.

Démonstration. — Soit $(A(X), \varphi)$ une algèbre d'Adams-Hilton pour ΩX (à coefficients dans le corps \mathbf{k}) : $\varphi : A(X) \rightarrow C_*(\Omega X; \mathbf{k})$ est donc un morphisme de chaînes qui induit un isomorphisme en homologie. Soit $r \in ZA(X)$ un représentant de $\varphi_*^{-1}(\bar{r})$. Soit $\mathcal{B} = A(X) \amalg T(a)$ l'algèbre de chaînes obtenue en adjoignant à $A(X)$ un générateur a de degré $m+1$ et de différentielle $da = r$. Il résulte de [1] (th. 3.2) qu'on peut choisir une extension $\tilde{\varphi} : \mathcal{B} \rightarrow C_*(\Omega Y; \mathbf{k})$ de φ qui induit un isomorphisme en homologie. La proposition 2 résulte donc du théorème. \square

Exemple 1. — Soit $X = S^{r+1} \vee S^{s+1}$, $r, s \geq 1$ et soit $\rho = [[i_{r+1}, i_{s+1}], i_{s+1}]$ le produit de Whitehead itéré des classes fondamentales $i_{r+1} \in \pi_{r+1}(S^{r+1})$ et $i_{s+1} \in \pi_{s+1}(S^{r+1})$. D'après le théorème de Bott et Samelson [3], $H_*(\Omega X; \mathbf{k})$ est l'algèbre tensorielle sur deux générateurs x_r et y_s , et d'après le théorème de Samelson [13], $\bar{r} = \pm [x_r, y_s], y_s$.

L'algèbre $H_*(\Omega X)/I$ possède donc une seule relation; d'après les arguments de [6], qui s'étendent sans difficulté au cas gradué, on voit que

$$\forall p > 2, \quad \text{Tor}_p^{H_*(\Omega X)/I}(\mathbf{k}, \mathbf{k}) = 0$$

et les conditions (2) de la proposition 2 sont donc vérifiées, par conséquent :

$$H_*(\Omega((S^{r+1} \vee S^{s+1}) \cup_{\rho} e^{r+2s+2}); \mathbf{k}) = T(x_r, y_s)/([x, y], y) = 0.$$

On notera que l'espace $Y = (S^{r+1} \vee S^{s+1}) \cup_{\rho} e^{r+2s+2}$ a la propriété suivante : son « modèle de Quillen » ([2], 3.2) est égal au modèle minimal de l'algèbre de Lie graduée $\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbf{Q}$: nous dirons qu'il est π -formel (cf. [9] pour une discussion de cette notion ⁽¹⁾). En revanche, il n'est pas formel au sens de Sullivan, car sa cohomologie est celle de $S^{r+1} \vee S^{s+1} \vee S^{r+2s+2}$.

Exemple 2. — Supposons $\mathbf{k} = \mathbf{Q}$. Soit $X = S^2 \vee \mathbf{CP}(2)$. On a

$$H_*(\Omega S^2) = P(x_1), \quad H_*(\Omega \mathbf{CP}(2)) = E(y_1) \otimes P(z_4)$$

comme algèbres de Hopf primitivement engendrées : x_1 et y_1 sont les adjoints des classes fondamentales des 2-sphères, et z_4 est l'adjointe de l'application de Hopf $\eta : S^5 \rightarrow \mathbf{CP}(2)$. On a d'après [7] (3.2.5) :

$$H_*(\Omega X; \mathbf{Q}) = P(x_1) \amalg (E(y_1) \otimes P(z_4)).$$

Soit

$$\bar{r} = [x_1, z_4] \in PH_5(\Omega X; \mathbf{Q}) = \pi_5(\Omega X) \otimes \mathbf{Q} = \pi_6(X) \otimes \mathbf{Q}$$

et soit $\rho \in \pi_6(X)$ un représentant de \bar{r} .

⁽¹⁾ Les espaces π -formels ont été également considérés par J. Neisendorfer (Notre-Dame preprint), sous le nom de « coformels ».

Une présentation de $H_*(\Omega X; \mathbf{Q})/(\bar{r} = 0)$ est

$$T(x_1, y_1, z_4)/([x_1, z_4] = 0, y_1^2 = 0, [y_1, z_4] = 0),$$

de sorte que

$$H_*(\Omega X; \mathbf{Q})/(\bar{r} = 0) = (P(x_1) \otimes P(z_4)) \prod_{P(z_4)} (P(z_4) \otimes E(y_1)).$$

La suite exacte « de Mayer-Vietoris » pour les sommes amalgamées d'algèbres de Hopf ([7], 5.1.9) montre que les conditions du cas (2) de la proposition 2 sont vérifiées. On en conclut que

$$H_*(\Omega(X \cup_\rho e^7); \mathbf{Q}) = H_*(\Omega X; \mathbf{Q})/([x_1, z_4] = 0).$$

3.2. Rappelons que la suite spectrale d'Eilenberg-Moore :

$$E_{p,*}^2 = \text{Tor}^{\mathbf{H}^*(\Omega X, \mathbf{k})}(\mathbf{k}, \mathbf{k}) \Rightarrow_p H_*(X)$$

admet pour aboutissement $E^\infty = E^0 H_*(X)$ le gradué associé à la filtration de $H_*(X) = H_*(B \Omega X)$ induite par la filtration du classifiant de Milnor $B \Omega X$ de ΩX « par le nombre de joints ». On désigne par $e_{\mathbf{k}}(X)$ la longueur (éventuellement infinie) de cette filtration, c'est-à-dire :

$$e_{\mathbf{k}}(X) = \inf \{ n \mid \forall p > n, E_{p,*}^\infty = 0 \}.$$

Un théorème de M. Ginsburg assure que [5] :

$$\forall \mathbf{k}, \forall X, \quad \text{cat}(X) \geq e_{\mathbf{k}}(X).$$

Les exemples précédents vérifient $e_{\mathbf{Q}} = 2$. Plus généralement, on a le résultat suivant :

PROPOSITION 3. — *Les notations étant celles de la proposition 2, supposons \bar{r} décomposable et $\text{Tor}_p^{\mathbf{r}}$ bijectif pour $p \neq 2$, injectif pour $p = 2$. Alors :*

$$e_{\mathbf{k}}(X \cup_\rho e^{m+2}) = \sup(e_{\mathbf{k}}(X), 2).$$

Démonstration. — La suspension $\Sigma : H_m(\Omega X) \rightarrow H_{m+1}(X)$ s'annule sur les éléments décomposables ([12], p. 6.10). Par suite $\rho : S^{m+1} \rightarrow X$ est nulle en homologie et

$$H_*(X \cup_\rho e^{m+2}) \cong H_*(X) \oplus \tilde{H}_*(S^{m+2}).$$

L'hypothèse sur $\text{Tor}_p^{\mathbf{r}}$ montre qu'on obtient la suite spectrale d'Eilenberg-Moore de $X \cup_\rho e^{m+2}$ en ajoutant à celle de X un générateur (de \mathbf{k} -espace vectoriel) en $E_{2,m}^2$, et ce générateur subsiste jusqu'en $E_{2,m}^\infty$ où il correspond au facteur $\tilde{H}(S^{m+2})$ de $H_*(X \cup_\rho e^{m+2})$. Le morphisme de suites spectrales induit par l'inclusion $X \hookrightarrow Y$ est donc injectif à tous les niveaux $r \geq 2$ et bijectif sur les termes E_p^∞ pour $p \geq 3$, d'où le résultat. \square

La proposition 3 permet donc de construire des exemples, comme l'exemple ci-dessus ou celui traité dans [8], où l'invariant $e_{\mathbf{k}}(X)$ n'augmente pas lorsqu'on attache une cellule à X .

En revanche, on peut montrer que, dans le cas de l'exemple 2, on a $\text{cat}_{\mathbf{Q}}(X \cup_p e^7) = 3$, où $\text{cat}_{\mathbf{Q}}$ désigne la catégorie (de Lusternik-Schnirelmann) de l'espace « rationalisé » (O-localisé) : ceci fournit un nouveau contre-exemple à la conjecture de [14] et montre que le théorème principal de [14] est le meilleur possible. Pour une discussion détaillée de ces questions, nous renvoyons le lecteur à [10].

Notons pour conclure que si \bar{r} est indécomposable [cas (1) de la proposition (2)], l'invariant e_k augmente en général, même si \bar{r} est dans le noyau de la suspension Σ : l'exemple le plus simple est sans doute $\mathbf{CP}(3) = \mathbf{CP}(2) \cup_{\eta} e^6$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. F. ADAMS et P. HILTON, *Comm. Math. Helv.*, vol. 30, 1956, p. 305-330.
- [2] H. BAUES et J. M. LEMAIRE, *Math. Ann.*, vol. 225, 1977, p. 219-242.
- [3] R. BOTT et H. SAMELSON, *Comm. Math. Helv.*, vol. 27, 1953, p. 320-337.
- [4] H. CARTAN et S. EILENBERG, *Homological Algebra*, Princeton U. Press, 1956.
- [5] M. GINSBURG, *Ann. Math.*, vol. 77, 1963, p. 538-551.
- [6] J. LABUTE, *Invent. Math.*, vol. 4, 1967, p. 142-158.
- [7] J. M. LEMAIRE, *Algèbres connexes et homologie des espaces de lacets (Springer Lecture Notes, n° 422, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1974)*.
- [8] J. M. LEMAIRE, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 280, série A, 1975, p. 1503-1505.
- [9] J. M. LEMAIRE, Exposé aux *Journées Lille-Valenciennes sur les formes différentielles*, Luminy, juin 1976, multigraphié.
- [10] J. M. LEMAIRE et F. SIGRIST, *Sur les invariants d'homotopie rationnelle liés à la L. S. catégorie* (en préparation).
- [11] J. MILNOR et J. C. MOORE, *Ann. Math.*, vol. 81, 1965, p. 211-264.
- [12] J. C. MOORE, *Séminaire H. Cartan*, 1959-1960, Exposé 6, Publ. Math. I.H.P., 1961.
- [13] H. SAMELSON, *Amer. J. Math.*, vol. 75, 1953, p. 744-752.
- [14] G. TOOMER, *Math. Z.*, vol. 138, 1974, p. 123-143.

(Manuscrit reçu le 14 décembre 1977,
révisé le 14 février 1978.)

J.-M. LEMAIRE,
Université de Nice,
parc Valrose,
06034 Nice Cedex.