

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MASAKAZU SUZUKI

**Sur les opérations holomorphes du groupe additif complexe
sur l'espace de deux variables complexes**

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 10, n° 4 (1977), p. 517-546

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1977_4_10_4_517_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES OPÉRATIONS HOLOMORPHES DU GROUPE ADDITIF COMPLEXE SUR L'ESPACE DE DEUX VARIABLES COMPLEXES ⁽¹⁾

PAR MASAKAZU SUZUKI

Introduction

En 1968, R. Rentschler [7] a montré que toute opération algébrique du groupe additif d'un corps k de caractéristique nulle sur le plan affine k^2 est algébriquement équivalente à une opération de la forme $t \circ (x, y) = (x, y + f(x)t)$, où $t \in k$, $(x, y) \in k^2$ et $f \in k[X]$.

Le présent article est consacré à l'étude des opérations holomorphes du groupe additif \mathbb{C} des nombres complexes. Après avoir rappelé au paragraphe 1 quelques notions introduites dans [14], on étudie dans le paragraphe 2 les opérations holomorphes $\varphi : \mathbb{C} \times V \rightarrow V$ de \mathbb{C} sur une variété algébrique affine complexe V telle que, pour tout $t \in \mathbb{C}$, φ_t soit un automorphisme algébrique de V , où $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$. Une telle opération φ sera dite *quasi-algébrique*. On montrera tout d'abord par le passage à l'espace dual de l'espace des fonctions sur V ⁽²⁾, que toute opération quasi-algébrique de \mathbb{C} sur V provient d'une opération de type exponentiel ψ sur un espace vectoriel complexe de dimension finie, c'est-à-dire $\psi_t = \exp t A$, A étant une matrice constante (§ 2, th. 1). Dans le même paragraphe, on trouve le résultat suivant (th. 2) : *Toute opération quasi-algébrique de \mathbb{C} sur le plan affine complexe \mathbb{C}^2 à coordonnées x, y , est algébriquement équivalente à l'une des opérations suivantes* : 1° opérations dégénérées (i. e., opérations laissant invariantes les droites $x = \text{Cte}$); 2° opérations de type exponentiel : $t \circ (x, y) = \exp t A$, où A est une (2,2)-matrice à coefficients dans \mathbb{C} ; 3° opérations de la forme $t \circ (x, y) = (x e^{\lambda t}, (y + tx^m) e^{m\lambda t})$, où m est un entier ≥ 0 et $\lambda \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$.

Dans le paragraphe 3, on étudie les opérations holomorphes de \mathbb{C} sur l'espace \mathbb{C}^2 de deux variables complexes x, y à orbites propres (cf. le n° 6), et on montre, à l'aide du théorème de M^{lle} H. Saito [9], qu'une telle opération φ est analytiquement équivalente à l'une des opérations suivantes : 1° opérations dégénérées; 2° opérations de type exponentiel

⁽¹⁾ Une partie des résultats de cet article est annoncé dans [15].

⁽²⁾ Cf. R. W. Richardson [8]. L'auteur doit cette idée à M. D. I. Lieberman que je voudrais remercier ici.

$t \circ (x, y) = (x e^{\lambda t}, y e^{\mu t})$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}^*$ et $\mu/\lambda \in \mathbb{Q}$; 3° opérations de la forme $t \circ (x, y) = (x e^{n\lambda(z)t}, y e^{-m\lambda(z)t})$, où $m, n \in \mathbb{N} - \{0\}$, $z = x^m y^n$ et λ est une fonction entière d'une variable; 4° opérations de la forme $\alpha^{-1} \circ \rho_l \circ \alpha$, où $\alpha(x, y) = (x, x^l y + a(x))$, $l \in \mathbb{N} - \{0\}$, $a(x)$ est un polynôme en x de degré $\leq l-1$ tel que $a(0) \neq 0$ et ρ est une opération de type 3° ci-dessus telle que $\lambda(z)$ ait un zéro d'ordre $\geq l/m$ en $z = 0$.

En combinant ce résultat avec le théorème de [14], on obtient le corollaire suivant : *Toute opération holomorphe du groupe multiplicatif complexe \mathbb{C}^* sur l'espace \mathbb{C}^2 est analytiquement équivalente à une opération de la forme $s \circ (x, y) = (s^m x, s^n y)$, où $s \in \mathbb{C}^*$, $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ et $m, n \in \mathbb{Z}$.*

Dans le paragraphe 4, on étudie les applications holomorphes de type algébrique (cf. le n° 8 pour la définition); on obtient d'abord une formule sur les indices le long des fibres critiques (voir la proposition 2 et son corollaire du n° 9); puis, on établit une proposition sur la finitude des valeurs critiques de ces applications (proposition 3 du n° 10), qui nous permet de généraliser le théorème de Nishino sur les fonctions entières de la classe (A) à notre cas (théorème N de la fin du n° 10). Ces résultats du paragraphe 4 sont utilisés dans les paragraphes 2 et 3.

I. — Généralités

1. ÉQUIVALENCES ALGÈBRIQUES OU ANALYTIQUES. — Soit $\varphi : \mathbb{C} \times V \rightarrow V$ une opération holomorphe du groupe additif complexe \mathbb{C} sur un espace analytique V . On désignera par φ_t pour chaque $t \in \mathbb{C}$ l'automorphisme analytique de V défini par $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$, où $x \in V$. Par définition, on a $\varphi_0 = \text{id}$, $\varphi_{s+t} = \varphi_s \circ \varphi_t$, quels que soient $s, t \in \mathbb{C}$. Si V est une variété algébrique (complexe) et que chaque φ_t est un automorphisme algébrique de V , on dira que φ est *quasi-algébrique*. φ sera dite *algébrique*, si l'application $\varphi : \mathbb{C} \times V \rightarrow V$ est algébrique (régulière).

Deux opérations holomorphes (resp. quasi-algébriques) φ et ψ seront dites analytiquement (resp. algébriquement) *équivalentes* l'une à l'autre, s'il existe un automorphisme analytique (resp. algébrique) α de V tel que l'on ait $\psi_t = \alpha^{-1} \circ \varphi_t \circ \alpha$ pour tout $t \in \mathbb{C}$.

2. TYPES D'ORBITES, TYPES D'OPÉRATIONS. — Si $x \in V$ n'est pas un point fixe de φ , son orbite $C_x = \{\varphi_t(x) \mid t \in \mathbb{C}\}$ par φ est isomorphe, en tant que variété analytique abstraite, à \mathbb{C} , à $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$, ou bien à un tore complexe de dimension un; pour chacun de ces trois cas, on dira que C_x est de type \mathbb{C} , de type \mathbb{C}^* ou de type T , respectivement. Comme on l'a vu dans [14], presque toutes les orbites sont d'un même type (topologique); précisément, il existe un sous-ensemble e de V de capacité logarithmique nulle, invariant par φ et tel que toutes les orbites dans $V - e$ soient d'un même type. On dira que φ est de type \mathbb{C} , de type \mathbb{C}^* ou de type T , si les orbites dans $V - e$ le sont. Lorsque V est une variété de Stein, φ n'a évidemment aucune orbite de type T .

THÉORÈME [14]. — *Soit φ une opération holomorphe de \mathbb{C} sur un espace de Stein V . Alors, pour toute φ -orbite C de type \mathbb{C}^* , l'adhérence \bar{C} dans V de C est une courbe analytique (complexe) dans V . ($\bar{C} - C$ consiste donc en un seul point, ou bien est vide).*

N.B. — σ étant l'ensemble des points singuliers de $\hat{\phi}$ ($\text{codim } \sigma \geq 2$), dans [14] on a dit seulement que : l'adhérence dans $V - \sigma$ de C est une courbe analytique. Mais, en suivant la même idée de raisonnement que dans [14], on peut en fait montrer le théorème énoncé ici.

II. — Opérations quasi-algébriques

3. LINÉARISATION. — Soit \bar{V} un espace analytique complexe compact, normal et irréductible, D un sous-ensemble analytique de \bar{V} purement 1-codimensionnel et posons $V = \bar{V} - D$. Soit $A(V)$ l'espace vectoriel complexe (ou l'algèbre) des fonctions holomorphes sur V qui sont méromorphes sur \bar{V} , $\phi : C \times V \rightarrow V$ une opération holomorphe de C sur V telle que $f \circ \phi_t \in A(V)$ pour tous $f \in A(V)$ et $t \in C$. On a alors :

LEMME 1. — *Quelle que soit $f \in A(V)$, le sous-espace vectoriel E_f de $A(V)$ engendré par l'ensemble $\{f \circ \phi_t \mid t \in C\}$ est de dimension finie sur C .*

En effet, soit P un point régulier de D ; prenons un système de coordonnées locales $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y$ dans un voisinage U de P de façon que $D \cap U$ soit définie par l'équation $y = 0$ et que l'image de U dans l'espace C_n des variables $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y$ soit de la forme $\Delta \times [|y| < 1]$, où Δ est un ouvert dans l'espace (x) , où $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$. Considérons le développement de Laurent :

$$f \circ \phi_t(x, y) = \sum_{-\infty < k < \infty} a_k(x, t) y^k$$

de la fonction $f \circ \phi_t$ dans $\Delta \times [|y| < 1]$. On désignera par e_m ($m \in N$) l'ensemble des points $t \in C$ tels que $a_k(x, t) = 0$ sur Δ pour tout $k < -m$. On a alors,

$$\bigcup_{m \in N} e_m = C,$$

puisque $f \circ \phi_t \in A(V)$ pour chaque $t \in C$. Par suite, il existe un entier positif M tel que e_m soit non-dénombrable, de sorte que e_M possède au moins un point d'accumulation. Or, $a_k(x, t)$ pour $k < -M$ est holomorphe sur $\Delta \times C$ et s'annule sur $\Delta \times e_M$; on a donc, $a_k \equiv 0$ pour $k < -M$, ce qui dit que les diviseurs $v(f \circ \phi_t)$ définis par les fonctions $f \circ \phi_t$ sont $\geq -M \cdot D$ au voisinage de P .

Comme D n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles, on peut donc trouver un entier $k_0 \in N$ tel que $v(f \circ \phi_t) \geq -k_0 \cdot D$ (sur \bar{V}) pour tout $t \in C$. Il en résulte que E_f est dans l'espace vectoriel complexe des fonctions $h \in A(V)$ telles que $v(h) \geq -k_0 \cdot D$, qui est de dimension finie, (d'après K. Kodaira [3] et H. Cartan-J.-P. Serre [2]). Donc, E_f est aussi de dimension finie.

C.Q.F.D.

THÉORÈME 1. — *Soit $\phi : C \times V \rightarrow V$ une opération quasi-algébrique de C sur une variété algébrique affine complexe V . Il existe alors une application algébrique régulière et injective*

$\delta : V \rightarrow \mathbb{C}^m$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$ et une (m, m) -matrice A à coefficients complexes, de façon que l'on ait $\delta \circ \varphi_t = (\exp tA) \circ \delta$ pour tout $t \in \mathbb{C}$.

En effet, soit V un sous-ensemble algébrique de \mathbb{C}^n dont les coordonnées sont x_1, x_2, \dots, x_n , $A(V)$ l'espace des fonctions algébriques régulières sur V . Alors, d'après le lemme 1, le sous-espace vectoriel $E(x_i)$ de $A(V)$ engendré par $\{x_i \circ \varphi_t \mid t \in \mathbb{C}\}$ est de dimension finie pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, n\}$; par suite, la dimension m de $E = \sum_{i=1}^n E(x_i)$ est aussi finie.

On définit sur E une opération holomorphe μ de \mathbb{C} , en posant

$$\mu_t(f) = f \circ \varphi_t$$

pour $f \in E$, $t \in \mathbb{C}$. Chaque μ_t est linéaire. Soit E^* l'espace dual de E , μ^* la \mathbb{C} -opération sur $E^* \cong \mathbb{C}^m$ induite de μ par dualité :

$$\mu_t^*(z)(f) = z(\mu_t(f)),$$

où $z \in E^*$, $f \in E$; on a $\mu^* \in GL(m, \mathbb{C})$ pour tout $t \in \mathbb{C}$. Il existe donc une (m, m) -matrice A à coefficients dans \mathbb{C} tel que l'on ait $\mu^* = \exp tA$ pour tout $t \in \mathbb{C}$.

Soit maintenant $\delta : V \rightarrow E^*$ l'application définie par $\delta(x)f = f(x)$, où $x \in V$ et $f \in E$. Puisque E contient les fonctions coordonnées x_1, x_2, \dots, x_n de \mathbb{C}_n ($\supset V$), δ est injective. On vérifie aisément

$$\delta \circ \varphi_t = \mu_t^* \circ \delta = (\exp tA) \circ \delta.$$

REMARQUE ET NOTATIONS. — Après un changement de coordonnées linéaire dans \mathbb{C}^m , on peut supposer que la matrice A est de la forme canonique de Jordan :

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_r \end{bmatrix},$$

où A_i est de la forme

$$\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & 0 \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix}, \quad \lambda_i \in \mathbb{C}.$$

On désignera par E_i le sous-espace vectoriel de \mathbb{C}^m correspondant au facteur A_i ($\mathbb{C}^m = \bigoplus_{i=1}^r E_i$); par $\delta_i : V \rightarrow E_i$ l'application composée de δ et de la projection canonique $\mathbb{C}^m \rightarrow E_i$. On a

$$\delta_i \circ \varphi_t = (\exp tA_i) \circ \delta_i.$$

Or, $\exp t A_i = e^{\lambda_i t} F_{m_i}(t)$, où $m_i = \dim E_i$ et $F_k(t)$ est (k, k) -matrice de la forme :

$$F_k(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{k-1}}{k-1} \\ & 1 & t & \dots & \frac{t^{k-2}}{k-2} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & t \\ & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Si $u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{im_i}$ sont les coordonnées de E_i , toute orbite dans E_i (l'axe u_{i1}) de la C -opération $\mu_i = (\exp t A_i)_{t \in \mathbb{C}}$ est de type C . On désignera l'axe u_{i1} par L_i . L'opération μ_i restreinte à L_i est de la forme : $t \cdot u_{i1} = e^{\lambda_i t} u_{i1}$. Par conséquent, une orbite C non-triviale de la C -opération $\mu = (\exp t A)_{t \in \mathbb{C}}$ sur \mathbb{C}^m est de type C^* si, et seulement s'il existe un sous-ensemble Λ de $\{1, 2, \dots, r\}$ tel que $C \subset \bigoplus_{i \in \Lambda} L_i (\subset \mathbb{C}^m)$ et que l'on ait $\lambda_i/\lambda_j \in \mathbb{Q}$ pour toute paire $i, j \in \Lambda$ avec $\lambda_j \neq 0$. En particulier, toute μ -orbite de type C^* est une courbe algébrique. Comme $\delta : V \rightarrow \mathbb{C}^m$ est algébrique, il en résulte que :

COROLLAIRE 1. — *Toute orbite de type C^* d'une C -opération quasi-algébrique sur une variété algébrique affine est une courbe algébrique.*

4. OPÉRATIONS DE TYPE C^* .

COROLLAIRE 2. — *A toute C -opération quasi-algébrique φ de type C^* sur une variété algébrique affine V , il correspond une C^* -opération algébrique ψ sur V et un nombre complexe $k (\neq 0)$ tels que l'on ait*

$$\varphi_t = \psi_{\exp k \cdot t}$$

pour tout $t \in \mathbb{C}$. En particulier, φ n'a pas d'orbite de type C .

En effet, en utilisant les notations du numéro précédent, on a $\delta_i(V) \subset L_i$ pour tout i ; l'application $\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r) : V \rightarrow \bigoplus_{i=1}^r L_i \cong \mathbb{C}^r$ satisfait à $\delta \circ \varphi_t = \mu_t \circ \delta$, où $\mu_t(z_1, z_2, \dots, z_r) = (e^{\lambda_1 t} z_1, e^{\lambda_2 t} z_2, \dots, e^{\lambda_r t} z_r)$. Si φ n'est pas triviale, il existe un $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ tel que $\lambda_i \neq 0$. Soit $\lambda_1 \neq 0$ pour fixer les idées. En supposant $\delta_i(V) \neq \{0\}$, on a $\lambda_i/\lambda_1 = n_i/n_1$ ($n_i \in \mathbb{Z}$, $n_1 \in \mathbb{Z} - \{0\}$), car φ est de type C^* . Soit $k = \lambda_1/n_1 (= \lambda_i/n_i)$. On a alors, $\varphi_{[t + (2\pi i/k)]} = \varphi_t$ pour $t \in \mathbb{C}$; par suite, en associant, à chaque $s \in \mathbb{C}^*$, $\psi_s = \varphi_{[(1/k) \log s]}$, on obtient une C^* -opération ψ qui satisfait aux conditions demandées.

C.Q.F.D.

COROLLAIRE 3. — *Si ψ est une C^* -opération quasi-algébrique sur une variété algébrique affine V , il existe une application algébrique régulière et injective $\delta : V \rightarrow \mathbb{C}^r$ ($r \in \mathbb{N}$) telle*

que l'on ait $\delta \circ \psi_s = \mu_s \circ \delta$ pour tout $s \in \mathbb{C}^*$, où

$$\mu_s(z_1, z_2, \dots, z_r) = (s^{n_1} z_1, s^{n_2} z_2, \dots, s^{n_r} z_r)$$

et $n_1, n_2, \dots, n_r \in \mathbb{Z}$. En particulier, ψ est algébrique.

On tire ce résultat de la preuve du corollaire 2 ci-dessus.

5. OPÉRATIONS QUASI ALGÈBRIQUE DE \mathbb{C} SUR LE PLAN AFFINE COMPLEXE. — Soit $E = \mathbb{C}^2$ le plan affine complexe, dont les coordonnées sont x, y . Commençons par donner quelques exemples de \mathbb{C} -opérations typiques sur E :

(1) *Opérations dégénérées.* — Si les droites définies par $x = c$ ($c \in \mathbb{C}$) sont invariantes par une \mathbb{C} -opération holomorphe ϕ sur E , on a alors, comme on le vérifie aisément,

$$(\alpha) \dots \phi_t(x, y) = (x, y + a(x)t),$$

ou bien

$$(\beta) \dots \phi_t(x, y) = (x, e^{\lambda(x)t}(y - b(x)) + b(x)),$$

où $a(x), \lambda(x)$ sont des fonctions entières d'une variable x et $b(x)$ est une fonction méromorphe de x telle que $\lambda(x) \cdot b(x)$ soit holomorphe sur le plan $|x| < \infty$. Ces deux types d'opérations seront dites *dégénérées*. Pour que (α) [resp. (β)] soit *quasi-algébrique*, il faut et il suffit que $a(x)$ [resp. $b(x)$] soit un polynôme de x (et que $\lambda \equiv \text{Cte}$).

(2) *Opérations de type exponentiel.* — Une \mathbb{C} -opération holomorphe ϕ sur \mathbb{C}^2 telle que $\phi_t(x, y) = (x, y) \exp t A$ [où $t \in \mathbb{C}$ et A est une $(2,2)$ -matrice non-nulle à coefficients dans \mathbb{C}] se réduit, par une transformation linéaire de coordonnées, à une opération de la forme :

$$(\gamma) t \circ (x, y) = (e^{\lambda t} x, e^{\mu t} y);$$

ou bien

$$(\delta) t \circ (x, y) = (e^{\lambda t} x, e^{\lambda t}(y + tx)),$$

où $\lambda \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$, $\mu \in \mathbb{C}$.

(3) *Opérations de la forme :*

$$(\delta_n) t \circ (x, y) = (e^{\lambda t} x, e^{n\lambda t}(y + tx^n)),$$

où $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $n \in \mathbb{N}$ ($=$ l'ensemble des entiers ≥ 0).

THÉORÈME 2. — Toute opération quasi-algébrique $\phi : \mathbb{C} \times E \rightarrow E$ de \mathbb{C} sur le plan affine complexe E est algébriquement équivalente (cf. le n° 1) à une opération dégénérée (α) ci-dessus avec $a \in \mathbb{C}[X]$, ou bien à l'une des opérations (γ) et (δ_n) ci-dessus ($n = 0, 1, 2, \dots$).

On commence par faire quelques remarques dont on aura besoin dans la preuve de ce théorème.

LEMME 2. — L'ensemble des valeurs critiques d'une application polynômiale $\alpha : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$ est un sous ensemble algébrique de \mathbb{C}^n [on dit qu'un point $z \in \mathbb{C}^n$ est valeur critique de α , s'il n'existe aucun voisinage U de z tel que $\alpha^{-1}(U)$ soit même topologiquement un espace fibré trivial sur U par rapport à la projection $\alpha|_{\alpha^{-1}(U)}$].

LEMME 3. — Si une application polynômiale $\alpha : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ est injective, α est alors surjective et birégulière (i. e. l'application inverse est aussi polynômiale).

LEMME 4. — Soient (M, p, S) une famille holomorphe de courbes analytiques complexes irréductibles et d'ordre un sur un espace analytique S [i. e. $p : M \rightarrow S$ est une application holomorphe surjective et de rang constant 1 telle que $p^{-1}(z)$ soit irréductible et d'ordre un pour tout $z \in S$], $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ une application holomorphe de M dans une courbe analytique complexe \mathbb{C} et enfin $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ une suite de points de S tendant vers un point $z_0 \in S$ telle que $f|_{p^{-1}(z_n)}$ soit injective pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, si $f_0 = f|_{p^{-1}(z_0)}$ est non-constante, f_0 est injective (Théorème de Hurwitz).

LEMME 5 [12]. — Soit $P(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ un polynôme irréductible de deux variables complexes x, y tel que la courbe définie par $P = 0$ dans \mathbb{C}^2 soit non-singulière et simplement connexe. Alors, toute courbe définie par $P = C$ dans \mathbb{C}^2 est irréductible, non-singulière et simplement connexe. De plus, on peut trouver un autre polynôme $Q(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ tel que l'application $x' = P(x, y), y' = Q(x, y)$ soit un automorphisme algébrique de \mathbb{C}^2 .

Nous allons maintenant montrer le théorème 2 :

1° Commençons par examiner le cas particulier suivant : on suppose qu'il existe deux polynômes non-constants $f, g \in \mathbb{C}[x, y]$ tels que l'on ait

$$(1) \quad f \circ \varphi_t = e^{\lambda t} f,$$

$$(2) \quad g \circ \varphi_t = e^{m\lambda t} (g + t f^m),$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$ et $m \in \mathbb{N}$. Alors, φ est algébriquement équivalente à une opération de la forme (α) (dans le cas $\lambda = 0$), ou bien à une opération de la forme (δ_n) (dans le cas $\lambda \neq 0$), où $n \in \mathbb{N}$. En effet :

— le cas $\lambda = 0$: f est constante sur chaque orbite de φ [d'après (1)] et ces orbites dans $E - f^{-1}(0)$ sont de type \mathbb{C} [d'après (2)]. Soit $f_0 \in \mathbb{C}[x, y]$ le polynôme primitif associé à f (voir le n° 8 du paragraphe 4). Il existe alors un polynôme $\xi \in \mathbb{C}[z]$ tel que $f = \xi(f_0)$; compte tenu du lemme 5, on a $f_0^{-1}(z) \approx \mathbb{C}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Donc, d'après le lemme 5, il existe un polynôme $g_0 \in \mathbb{C}[x, y]$ tel que l'application $\alpha = (f_0, g_0) : E \rightarrow \mathbb{C}^2$ soit birégulière. La \mathbb{C} -opération $(\alpha \circ \varphi_t \circ \alpha^{-1})_{t \in \mathbb{C}}$ sur \mathbb{C}^2 est dégénérée, donc de type (α) ci-dessus.

— le cas $\lambda \neq 0$: comme toute orbite dans $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ de l'opération μ définie par $\mu_t(z, w) = (e^{\lambda t} z, e^{m\lambda t} (w + t z^m))$ est une courbe non-algébrique, l'application $\psi = (f, g) : E \rightarrow \mathbb{C}^2$ n'a pas de valeur critique dans $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ (d'après le lemme 2 ci-dessus); $E - f^{-1}(0)$ est par suite un revêtement fini de $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ par rapport à la projection ψ . Soit v le nombre de feuillets de ce revêtement. Alors, $f_0 = \sqrt[v]{f}$ est régulier sur E , donc un polynôme. Les fibres $f_0^{-1}(z)$ de f_0 sont irréductibles, non-singulières et isomorphes à \mathbb{C} , y compris $f^{-1}(0)$, compte tenu du lemme 5. Si g est constante $\equiv b$ sur la fibre $F_0 = f_0^{-1}(0) (= f^{-1}(0))$, on a $b = 0$, d'après (2). Soit k l'ordre de zéro de g sur F_0 . Alors, le polynôme $g_0 = g/f_0^k$ est non-constant sur F_0 et de degré un sur chaque fibre

$f_0^{-1}(z)$ pour $z \in \mathbb{C}^*$. Donc, d'après le lemme 4 et le lemme 3, l'application

$$\alpha = (f_0, g_0) : E \rightarrow \mathbb{C}^2$$

est birégulière.

On vérifie aisément :

$$(\alpha \circ \varphi_t \circ \alpha^{-1})(z, w) = (e^{\lambda' t} z, e^{n\lambda' t}(w + tz^n)),$$

où $\lambda' = \lambda/v$, $n = m v - k$. φ est donc algébriquement équivalente à une opération de type (δ_n) .

2° Revenons maintenant au cas général : φ est une opération quasi-algébrique de \mathbb{C} sur E . D'après le théorème 1, il existe une application polynômiale injective δ de E dans \mathbb{C}^m ($m < \infty$) et une (m, m) -matrice constante A telle que $\delta \circ \varphi_t = (\exp t A) \cdot \delta$ pour tout $t \in \mathbb{C}$.

On peut supposer :

(★) qu'il n'existe aucun sous-espace vectoriel de \mathbb{C}^m de codimension > 0 , invariant par $\exp t A$ pour tout $t \in \mathbb{C}$ et contenant l'image $\delta(E)$;

et que A est de la forme canonique de Jordan. On utilisera les notations introduites dans la remarque du théorème 1 (n° 3) : $\lambda_i, A_i, E_i, \delta_i, u_{ij}$, etc. ($i = 1, 2, \dots, r; j = 1, 2, \dots, m_i$, où $m_i = \dim E_i$). On posera $f_{ij} = u_{ij} \circ \delta_i$; ce sont des fonctions polynômiales sur E . Comme le sous-espace vectoriel de E_i défini par : $u_{im_i} = 0$ est invariant par $\exp t A_i$, on a, d'après l'hypothèse (★), $f_{im_i} \neq 0$ pour chaque i .

(i) Le cas où $m_i \geq 2$ et $f_{im_i} \neq \text{cte}$ pour un i . L'application

$$\psi = (f_{im_i}, f_{im_i-1}) : E \rightarrow \mathbb{C}^2$$

satisfait à $\psi \circ \varphi_t = \mu_t \circ \psi$ pour tout $t \in \mathbb{C}$, où μ est une \mathbb{C} -opération de la forme (δ_1) . Donc, comme on l'a vu dans le cas 1°, φ est algébriquement équivalente à une opération de la forme (α) , ou bien (δ_n) , où $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Le cas où $m_i \geq 2$ et $f_{im_i} = a$ ($a \neq 0$) pour un i . On a $\lambda_i = 0$. La fonction $g = f_{im_i-1}$ satisfait à $g \circ \varphi_t = g + at$ pour tout $t \in \mathbb{C}$. Il en résulte que $g : E \rightarrow \mathbb{C}$ est une fibration analytique triviale sur \mathbb{C} ; en effet, l'application $h : \mathbb{C} \times g^{-1}(0) \rightarrow E$ définie par $h(t, p) = \varphi_t(p)$ est un isomorphisme analytique. Donc, chaque fibre $g^{-1}(w)$ ($w \in \mathbb{C}$) est isomorphe à \mathbb{C} .

Or, si les λ_j ($j = 1, 2, \dots, r$) sont tous nuls, $\exp t A$ est un polynôme en t [à valeurs dans les (m, m) -matrices]; comme $\delta : E \rightarrow \mathbb{C}^m$ algébrique et injective, il en résulte que $\varphi : \mathbb{C} \times E \rightarrow E$ est aussi algébrique régulière; sa restriction h à $\mathbb{C} \times g^{-1}(0)$ l'est aussi; h est donc un isomorphisme algébrique de $\mathbb{C} \times g^{-1}(0)$ sur E . On vérifie aisément : $(h^{-1} \circ \varphi_t \circ h)(z, w) = (z + t, w)$, où $t, z \in \mathbb{C}, w \in g^{-1}(0) \approx \mathbb{C}$. Donc, φ est algébriquement équivalente à une opération de la forme (α) .

S'il existe un $\lambda_j \neq 0$ ($i \neq j$), l'application $\psi = (f_{jm_j}, g) : E \rightarrow \mathbb{C}^2$ satisfait à $\psi \circ \varphi_t = \mu_t \circ \psi$ pour l'opération μ de la forme (δ_0) avec $\lambda = \lambda_j$. Donc, d'après ce qu'on a vu dans le cas 1°, φ est algébriquement équivalente à une opération de la forme (δ_n) , $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Il ne reste donc qu'à examiner le cas où $\dim E_i = 1$ pour tout i . Remarquons d'abord que, dans ce cas, toute orbite de type C de l'opération $\exp t A$, ainsi que de l'opération φ , est une courbe *non-algébrique* (s'il en existe). Puis, si l'on factorise un $f_i = f_{i1}$ en un produit $g_1^{v_1} g_2^{v_2} \dots g_n^{v_n}$ de polynômes irréductibles $g_k \in C[x, y]$ ($k = 1, 2, \dots, n$), les courbes C_k définies par $g_k = 0$ dans E [les composantes irréductibles de $F_i = f_i^{-1}(0)$] sont invariantes par chaque φ_t ($t \in C$), puisque F_i l'est. (Rappeler : $f_i \circ \varphi_t = e^{\lambda_i t} f_i$). Par suite, on a $g_k \circ \varphi_t = a_k(t) \cdot g_k$ pour chaque $t \in C$, où a_k est une fonction holomorphe de t à valeurs dans C^* . Comme $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$, on a $a_k(t) a_k(s) = a_k(t+s)$ pour tous $s, t \in C$. On a donc, $a_k(t) = e^{\lambda'_k t}$, de sorte que $g_k \circ \varphi_t = e^{\lambda'_k t} g_k$, où $\lambda'_k \in C$. Ainsi, en remplaçant chaque f_i par ses facteurs irréductibles, on peut supposer que *les f_i sont tous irréductibles*.

Voyons maintenant qu'il existe au moins un point fixe pour φ . En effet, si φ n'est pas triviale, les λ_i ne sont pas tous nuls; soit $\lambda_1 \neq 0$ et $f = f_1$ pour fixer les idées. Alors, l'application $f : E \rightarrow C$ n'a pas de valeur critique dans $C^* = C - \{0\}$, car on a pour chaque point c de C^* et un voisinage simplement connexe U de c dans C^* un isomorphisme analytique $h : U \times f^{-1}(c) \rightarrow f^{-1}(U)$ défini par $h(t, p) = \varphi_t(p)$ en vertu de $f \circ \varphi_t = e^{\lambda_1 t} f$ ($\lambda \neq 0$). On a donc, d'après le corollaire de la proposition 2 (n° 9), $\chi(f^{-1}(0)) - \chi(f^{-1}(c)) = 1 - \chi(f^{-1}(c))$, de sorte que $\chi(f^{-1}(0)) = 1$, où $\chi(\star)$ est la caractéristique d'Euler de \star . Or, si φ n'a pas de point fixe sur la fibre $f^{-1}(0)$, celle-ci est une orbite non-triviale et algébrique de φ ; on a donc, comme on l'a remarqué ci-dessus, $f^{-1}(0) \approx C^*$, de sorte que $\chi(C^*) = 1$, ce qui est absurde. Donc, φ possède au moins un point fixe [sur la fibre $f^{-1}(0)$].

Supposons que l'origine $x = y = 0$ est un point fixe de φ . Évidemment, $f_i(0, 0) = 0$ pour tout i . Comme $\delta = (f_1, f_2, \dots, f_r) : E \rightarrow C^r$ est injective, il existe un couple (i, j) d'indices telle que le déterminant fonctionnel

$$\left| \frac{\partial(f_i, f_j)}{\partial(x, y)} \right| \neq 0$$

en l'origine $x = y = 0$. On suppose que φ n'est pas triviale et que $\lambda_i \neq 0$. Nous allons montrer que l'application $\alpha = (f_i, f_j) : E \rightarrow C^2$ est un isomorphisme algébrique. On posera $f = f_i$, $g = f_j$; $\lambda = \lambda_i$, $\mu = \mu_j$. Comme l'opération φ restreinte à la fibre $G = g^{-1}(0)$, irréductible dans E et non-singulière en l'origine $x = y = 0$, est une C -opération holomorphe non-triviale, G est non-singulière dans E et isomorphe à C . Donc, d'après le lemme 5 ci-dessus, on peut supposer que : $g \equiv y$, i. e. G = l'axe x .

— Le cas où $\mu = 0$. Les fibres de g (= les droites : $y = Cte$) sont invariantes par φ . φ est donc dégénérée et équivalente à l'opération de la forme (γ) avec $\mu = 0$.

— Le cas où $\mu \neq 0$. D'après le même raisonnement que celui qu'on a fait pour G , on voit que $F = f^{-1}(0)$ est aussi non-singulière et isomorphe à $C_w =$ le plan $|w| < \infty$ d'une variable complexe w . On suppose que l'origine $(0, 0) \in F$ correspond à $w = 0$. Comme $F \cap G = (0, 0)$ et que F et G sont transversales l'une à l'autre en l'origine $(0, 0)$, la fonction $g \equiv y$ restreinte à F (= un polynôme en w) s'annule seulement en $w = 0$ et à l'ordre un; par suite, $g|_F$ est un polynôme en w de degré un. F est donc une section régulière de $g : E \rightarrow C$. Par conséquent, $f|_{y=Cte}$ sont des polynômes en x de degré un;

l'application $\alpha = (f, g) : E \rightarrow E$ et donc injective et birégulière. Par cette automorphisme α , l'opération φ se transforme en l'opération de la forme $(\gamma) : t \circ (x, y) = (e^{\lambda t} x, e^{\mu t} y)$, où $t \in \mathbb{C}$.

La démonstration du théorème 2 est achevée.

COROLLAIRE. — *Toute opération (quasi-) algébrique ψ de \mathbb{C}^* sur le plan affine complexe E est algébriquement équivalente à une opération de la forme $s \circ (x, y) = (s^m x, s^n y)$, où $s \in \mathbb{C}^*$, $(x, y) \in E$ et $m, n \in \mathbb{Z}$.*

En effet, parmi les opérations (α) , (γ) et (δ_n) du théorème 2, seule (γ) avec $\mu/\lambda \in \mathbb{Q}$ est de type \mathbb{C}^* ; donc, en appliquant le théorème 2 à la \mathbb{C} -opération φ définie par $\varphi_t = \psi_{\exp t}$, on obtient un automorphisme algébrique α de E tel que $(\alpha \circ \psi_s \circ \alpha^{-1})(x, y) = (s^\lambda x, s^\mu y)$; on a $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$.

III. — Opérations holomorphes à orbites propres

6. INTÉGRALES PREMIÈRES. — Soient $\varphi : \mathbb{C} \times M \rightarrow M$ une opération holomorphe non-triviale de \mathbb{C} sur une variété analytique complexe M de dimension complexe 2, Σ l'ensemble des points fixes de φ [ou les zéros du champ de vecteurs holomorphe $V(\varphi)$ associé à φ]. Un point P de M sera appelé *point régulier* de φ , s'il existe une fonction holomorphe h au voisinage de P telle que $(1/h)V(\varphi)$ soit holomorphe et non-nulle en P . Un point non-régulier de φ sera appelé *point singulier* de φ . L'ensemble σ des points singuliers de φ est discret et inclu dans Σ . De plus, on a un feuilletage analytique complexe $\mathcal{F}(\varphi)$ de dimension 1 de $M - \sigma$ tel que les feuilles soient invariantes par chaque φ_t , ($t \in \mathbb{C}$).

Remarque 1. — Lorsque M est une variété de Stein, les feuilles de $\mathcal{F}(\varphi) \mid M - \Sigma$ (les orbites non-triviales de φ) sont isomorphes à \mathbb{C} , ou à $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$; donc, d'après le lemme 5 de [13] et le lemme 6 du n° 9, toute feuille de $\mathcal{F}(\varphi)$ est analytiquement isomorphe ou bien à \mathbb{C} , ou bien à \mathbb{C}^* .

Soient C_x l'orbite d'un point $x \in M - \Sigma$ par φ , $j : \mathbb{C} \rightarrow C_x$ l'application définie par $j(t) = \varphi_t(x)$ et $K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$ une suite de sous-ensembles compacts de C_x telle que $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = C_x$. On appellera

$$\omega(C_x) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{C_x - j(K_n)}$$

ensemble limite de C_x , où $\overline{\star}$ est l'adhérence dans M de \star . On dira que C_x est *propre*, si $\omega(C_x)$ est discret; si cela est le cas, l'adhérence $\overline{C_x}$ est une courbe analytique dans M .

Une fonction méromorphe f sur M sera appelée *intégrale première* de φ , si elle est invariante par φ , c'est-à-dire $f \circ \varphi_t = f$ pour tout $t \in \mathbb{C}$. Comme $\dim M = 2$, s'il existe une intégrale première méromorphe non-constante de φ sur M , toute orbite de φ est propre. Réciproquement, en tenant compte de la remarque 1 ci-dessus, on a, d'après le théorème II de [13],

THÉORÈME 3. — *Si M est une variété de Stein de dimension complexe 2, toute \mathbb{C} -opération holomorphe φ sur M , à orbites propres, admet une intégrale première méromorphe non-*

constante sur M . Plus précisément, on peut trouver une surface de Riemann R , une application holomorphe $f: M - \sigma \rightarrow R$, surjective et invariante par φ , et un sous-ensemble e de R de capacité logarithmique nulle tels que, pour tout $z \in R - e$, $f^{-1}(z)$ consiste en une seule feuille de $\mathcal{F}(\varphi)$.

Ce couple (R, f) sera appelée l'espace de base des intégrales premières (méromorphes) de φ ou de $\mathcal{F}(\varphi)$.

7. OPÉRATIONS HOLOMORPHES DE \mathbb{C} SUR \mathbb{C}^2 A ORBITES PROPRES. — Dans tout ce qui suit, on supposera que φ est une \mathbb{C} -opération holomorphe sur l'espace E de deux variables complexes x, y telle que toute son orbite soit *propre*.

Soit σ l'ensemble des points singuliers de φ ; (R, f) l'espace de base des intégrales premières méromorphes de φ . $f: E - \sigma \rightarrow R$ est une application primitive (cf. le n° 8 du paragraphe 4). D'après la remarque du n° 8, R est isomorphe à \mathbb{C} , ou bien à \mathbb{CP}^1 (= la sphère de Riemann). On peut donc considérer f comme une fonction holomorphe ou méromorphe sur E suivant que $R \approx \mathbb{C}$ ou $R \approx \mathbb{CP}^1$, en tenant compte du fait que σ est discret.

Soit τ l'ensemble des points d'indétermination de f . Comme pour tout ouvert non-compact δ de R l'image réciproque $f^{-1}(\delta)$ dans $E_0 = E - \tau$ est une variété de Stein, on peut appliquer le théorème de Nishino [5 III] : si l'ensemble des points $z \in R$ tels que l'une des surfaces premières (dans E_0) de f à valeurs z soit analytiquement isomorphe à \mathbb{C} est de capacité logarithmique non-nulle, alors toute surface première de f est analytiquement isomorphe à \mathbb{C} . Dans ce cas, on dira que f est *de type C*. Dans l'autre cas, on dira que f est *de type \mathbb{C}^** , car presque toutes les surfaces premières de f sont alors analytiquement isomorphes à \mathbb{C}^* .

1° *Le cas où f est de type C.* f n'a pas de point d'indétermination (dans E). D'après le théorème N' du n° 11, il existe un automorphisme analytique α de E tel que $f' = f \circ \alpha$ soit une fonction rationnelle (primitive) de x, y ; par suite, d'après le corollaire de la proposition 2 (n° 9), on a

$$0 \leq \sum_i \chi_i(f) = 1 - \chi(R).$$

Comme $\chi(\mathbb{CP}^1) = 2$, on a $R \neq \mathbb{CP}^1$. On peut donc supposer : $R = \mathbb{C}$, de sorte que f' est un polynôme (de type C). D'après le lemme 5 (§ 2), il existe un automorphisme algébrique β de E tel que $f' \circ \beta \equiv x$. Comme f est une intégrale première de φ , l'opération transformée

$$\varphi'_t = (\alpha \circ \beta)^{-1} \circ \varphi_t \circ (\alpha \circ \beta), \quad t \in \mathbb{C},$$

laisse invariantes les droites : $x = \text{Cte}$. φ' est donc l'une des opérations (α) , (β) introduites au début du n° 5.

2° *Le cas où f est de type \mathbb{C}^* .* On a le :

THÉORÈME DE H. SAITO. — *Toute fonction méromorphe primitive f de type \mathbb{C}^* sur l'espace E de deux variables complexes x, y se réduit par un automorphisme analytique de E à une*

fonction composée $\xi(f_0)$ d'une fonction rationnelle ξ de degré un, et de

$$f_0 = x^m [x^l y + P_l(x)]^n,$$

où $m, n \in \mathbb{Z} - \{0\}$, $l \in \mathbb{N}$ et $P_l(x)$ est un polynôme de x de degré $\leq l-1$ [si $l = 0$, on suppose que $P_l(x) = 0$].

Ce théorème dû à M^{lle} H. Saito a été démontré dans [9] pour le cas où f est une fonction entière de x, y . Nous allons donc le démontrer ci-dessous en supposant que f est essentiellement méromorphe, c'est-à-dire $f: E_0 \rightarrow \mathbb{CP}^1$ est surjective, où $E_0 = E - \sigma$ et σ est l'ensemble des points d'indétermination de f . Soit q le nombre des points de σ . On a $q \leq 1$, puisque f est de type \mathbb{C}^* . En vertu du théorème N' du n° 11, il suffit de montrer le théorème en supposant que f est une fonction rationnelle (primitive).

(i) le cas où $q = 1$. On a, d'après le corollaire de la proposition 2 (n° 9) :

$$\sum_i \chi_i(f) = 1 - q = 0,$$

de sorte que $\chi_i(f) = 0$ pour tout i . Par suite, d'après la proposition 1 (n° 9), toute fibre $F_z = f^{-1}(z)$ ($z \in \mathbb{CP}^1$) dans E_0 est non-singulière, irréductible et isomorphe à \mathbb{C}^* . Son adhérence \bar{F}_z passe par le point d'indétermination σ . Soit $P(x, y)$ [resp. $Q(x, y)$] $\in \mathbb{C}[x, y]$ le polynôme irréductible s'annulant sur \bar{F}_0 (resp. \bar{F}_∞); on a $f = P^m/Q^n$, où $m, n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Si l'on désigne par h_z pour chaque z une application holomorphe bijective du plan $\mathbb{C}_{(t)}$: $|t| < \infty$ sur \bar{F}_z telle que $h_z(0) = \sigma$, l'application composée :

$$\mathbb{C}_{(t)} \xrightarrow{h_z} \bar{F}_z \xrightarrow{P^m} \mathbb{C} \quad (\text{resp. } \mathbb{C}_{(t)} \xrightarrow{h_z} \bar{F}_z \xrightarrow{Q^n} \mathbb{C})$$

pour $z \neq 0$ (resp. $z \neq \infty$) est un polynôme de t s'annulant seulement en $t = 0$; par suite, il est de la forme $a \cdot t^k$, où $a \in \mathbb{C}^*$, $k \in \mathbb{N} - \{0\}$. Par conséquent, si l'on désigne par $\mu: E \rightarrow \mathbb{C}_{(u,v)}$ l'application définie par

$$u = P^m(x, y), \quad v = Q^n(x, y),$$

chaque F_z ($z \in \mathbb{CP}^1$) est un revêtement fini de $L_z^* = L_z - \text{l'origine}$ par la projection $\mu|_{F_z}$, où L_z est la droite définie dans $\mathbb{C}_{(u,v)}^2$ par $v = zu$. On peut donc définir sur E une \mathbb{C}^* -opération quasi-algébrique $\psi = (\psi_s)_{s \in \mathbb{C}^*}$ satisfaisant à $\mu \circ \psi_s = \rho_s \circ \mu$ pour $s \in \mathbb{C}^*$, où $\rho_s(u, v) = (s^k u, s^l v)$ et k est le nombre des feuillettes de E sur $\mathbb{C}_{(u,v)}^2$ par rapport à la projection μ ($k < \infty$). D'après le corollaire du théorème 2 (§ 2), il existe un automorphisme algébrique α de E par lequel φ se réduit à une opération de la forme $s \circ (x, y) = (s^\lambda x, s^\nu y)$, où $s \in \mathbb{C}^*$ et $\lambda, \nu \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Compte tenu du fait que f est une intégrale première primitive de φ , il en résulte que

$$(f \circ \alpha)(x, y) = \xi(x^\lambda y^\nu),$$

où ξ est une fonction rationnelle de degré 1.

(ii) Le cas où $q = 0$. Comme on a, d'après le lemme 7 du n° 10,

$$\text{rang } H_1(\mathbb{C}^2 - f^{-1}(z)) \leq \text{rang } H_1(\mathbb{C}^*) + \text{rang } H_1(\mathbb{CP}^1 - z) = 1,$$

$F_z = f^{-1}(z)$ est donc irréductible pour tout $z \in \mathbb{CP}^1$. D'après le corollaire de la proposition 2 (n° 9), il existe un seul $c \in \mathbb{CP}^1$ tel que $\chi_c(f) = 1$; par suite F_c est homéomorphe à \mathbb{C} . Comme le nombre de Milner d'un germe irréductible de courbe analytique complexe dans \mathbb{C}^2 est paire, F_c est non-singulière. Il existe donc, d'après le lemme 5 (§ 2), un automorphisme algébrique α de E tel que $\alpha(F_c)$ soit l'axe : $x = 0$. On posera $g = f \circ \alpha^{-1}$.

Pour chaque $z \in \mathbb{CP}^1 - \{c\}$, la fibre $g^{-1}(z)$ est une courbe algébrique non-singulière et isomorphe à $\mathbb{C}_{(t)}^*$: $0 < |t| < \infty$; $x|_{g^{-1}(z)}$ est une fonction rationnelle non-constante de t qui ne prend ni zéro ni pôle sur $0 < |t| < \infty$, par suite, de la forme $a \cdot t_k$, où $a \in \mathbb{C}^*$ et $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$. $g^{-1}(z)$ est donc un revêtement fini de $\mathbb{C}_{(x)}^*$: $0 < |x| < \infty$ par la projection canonique sur le plan x . Par conséquent, à chaque courbe continue fermée c sur $\mathbb{C}_{(x)}^*$ à point de base a , il correspond un automorphisme analytique de monodromie

$$\theta_c : L_a \rightarrow L_a$$

pour le feuilletage définie par les fibres $g^{-1}(z)$ dans $E - (\text{l'axe } y)$, où L_a est la droite : $x = a$. On considérera y comme une fonction de coordonnée de L_a ; alors, $\theta_c(y)$ est un polynôme de y de degré 1.

Or, θ_c possède un (et un seul) point fixe. En effet, si non, $\theta_c(y)$ est de la forme $y + b$ ($b \neq 0$); les points $\{(a, nb) \mid n = 1, 2, \dots\}$ sont tous sur la fibre de g passant par le point (a, b) , qui est un revêtement fini de $\mathbb{C}_{(x)}^*$; ceci est absurde.

On désignera par $\eta(a)$ la y -coordonnée du point fixe de θ_c . Alors, le graphe $G = \{(a, \eta(a)) \mid a \in \mathbb{C}^*\}$ de la fonction η forme un fibre $g^{-1}(c')$ de g ($c' \neq c$). $\eta(x)$ est donc une fonction rationnelle de x ayant un pôle unique en $x = 0$; on a

$$\mu(x) = \frac{P_l(x)}{x^l} + Q(x),$$

où $l \in \mathbb{N} - \{0\}$, $P_l(x), Q(x) \in \mathbb{C}[x]$, $P_l(0) \neq 0$ et le degré de $P_l(x)$ est $\leq l-1$. Faisons un changement de coordonnées

$$\beta : \begin{cases} x = x', \\ y = y' + Q(x'). \end{cases}$$

Alors, la fonction transformée $f' = f \circ \alpha \circ \beta$ prend la valeur c seulement sur l'axe $x' = 0$ et la valeur c' seulement sur la courbe : $(x')^l y' - P_l(x') = 0$. On a donc, $f' = \xi(f_0)$, où $\xi(z) = (z-c)/(z-c')$ et f_0 est la fonction rationnelle de la forme demandée.

C.Q.F.D.

Revenons maintenant à notre problème : soit ϕ une \mathbb{C} -opération holomorphe sur E admettant une intégrale première f de la forme

$$f(x, y) = x^m (x^l y - P_l(x))^n,$$

avec $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$, $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, et $(m, n) = 1$. Considérons l'application birégulière

$$\alpha : \begin{cases} u = x, \\ v = x^l y - P_l(x), \end{cases}$$

du domaine $U : 0 < |x| < \infty, |y| < \infty$ sur le domaine $U' : 0 < |u| < \infty, |v| < \infty$ dans l'espace (u, v) . Soit ϕ' l'opération de \mathbb{C} sur U' induite de ϕ par $\alpha : \phi'_t = \alpha \circ \phi_t \circ \alpha^{-1}$.

Considérons un point (u_0, v_0) de U' . On peut représenter la ϕ' -orbite de (u_0, v_0) par

$$u(s) = u_0 s^n, \quad v(s) = v_0 s^{-m},$$

où s parcourt le plan pointé \mathbb{C}^* . Comme toute opération holomorphe de \mathbb{C} sur \mathbb{C}^* : $0 < |s| < \infty$ est de la forme : $t \circ s = e^{\lambda t} s$, il existe un $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}(u_0, v_0) \in \mathbb{C}$ tel que

$$\begin{aligned} \phi'_t(u(s), v(s)) &= (u(e^{\bar{\lambda}t} s), v(e^{\bar{\lambda}t} s)) \\ &= (u(s) e^{\bar{\lambda}nt}, v(s) e^{-\bar{\lambda}mt}); \end{aligned}$$

en particulier, pour $s = 1$, $\phi'_t(u_0, v_0) = (u_0 e^{\bar{\lambda}nt}, v_0 e^{-\bar{\lambda}mt})$. De ces formules, on voit que $\bar{\lambda}(u, v)$ est une fonction holomorphe sur U' et constante sur chaque ϕ' -orbite : $u^m v^n = \text{Cte}$. On a donc une fonction entière λ d'une variable complexe telle que l'on ait $\bar{\lambda}(u, v) = \lambda(u^m v^n)$ sur U' . Ainsi, on a

$$\phi'_t(u, v) = (u e^{n\lambda(z)t}, v e^{-m\lambda(z)t}), \quad \text{où } z = u^m v^n.$$

Or, pour que $\phi_t = \alpha^{-1} \circ \phi'_t \circ \alpha$ soit holomorphe sur tout l'espace $E : |x| < \infty, |y| < \infty$, il faut et il suffit, comme on le vérifie aisément, que :

1° dans le cas où $m < 0$, $\lambda(z)$ soit holomorphe sur la sphère de Riemann $|z| \leq \infty$, i. e. $\lambda(z) \equiv \lambda(\text{Cte})$;

2° dans le cas où $m > 0$, $\lambda(z)$ ait un zéro d'ordre $\geq l/m$ en $z = 0$. On arrive donc au résultat suivant :

THÉORÈME 4. — *Toute \mathbb{C} -opération holomorphe, à orbites propres sur l'espace \mathbb{C}^2 de deux variables complexes x, y est analytiquement équivalente à l'une des opérations suivantes :*

- opérations dégénérées $(\alpha), (\beta)$ définies au début du n° 5;
- opérations de la forme $(\gamma) : t \circ (x, y) = (x e^{n\lambda t}, y e^{m\lambda t})$ telle que $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $n, m \in \mathbb{N} - \{0\}$;
- opérations de la forme $(\gamma') : t \circ (x, y) = (x e^{n\lambda(z)t}, y e^{-m\lambda(z)t})$ où $n, m \in \mathbb{N} - \{0\}$, $z = x^m y^n$ et λ est une fonction entière d'une variable;
- opérations de la forme $\alpha^{-1} \circ \rho_l \circ \alpha$, où $\alpha(x, y) = (x, x^l y + P_l(x))$, $l \in \mathbb{N} - \{0\}$, $P_l(x)$ est un polynôme de x de degré $\leq l-1$ tel que $P_l(0) \neq 0$ et où ρ est une opération de la forme (γ') ci-dessus telle que $\lambda(z)$ ait un zéro d'ordre $\geq l/m$ en $z = 0$.

En combinant ce résultat avec le théorème 1 de [14] cité au n° 2, on obtient le :

THÉORÈME 5. — *Toute opération holomorphe du groupe multiplicatif complexe \mathbb{C}^* sur l'espace \mathbb{C}^2 est analytiquement équivalente à une opération de la forme $s \circ (x, y) = (s^m x, s^n y)$, où $s \in \mathbb{C}^*$, $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ et $m, n \in \mathbb{Z}$.*

IV. — Applications algébroides

On supposera dans tout ce qui suit que M est une variété analytique complexe connexe de dimension (complexe) 2 et que R est une surface de Riemann (i. e., une variété analytique complexe de dimension 1) connexe.

8. FIBRES GÉNÉRIQUES. — Soit $f : M \rightarrow R$ une application holomorphe non-constante de M dans R . Chaque composante irréductible d'une fibre $f^{-1}(z)$, $z \in R$, sera appelée *surface première de f à valeurs z* (T. Nishino). On dira que $f : M \rightarrow R$ est une *application algébroïde* ou *de type algébrique*, si les deux conditions suivantes sont remplies :

(★) chaque surface première de f est analytiquement isomorphe à une courbe analytique complexe compacte pointée d'un nombre fini de points (i. e., à un ouvert de Zariski non-vide d'une courbe analytique complexe compacte);

(★★) tout point z de R possède un voisinage $\delta = \delta(z)$ tel que $f^{-1}(\delta)$ soit une variété de Stein.

Pour chaque application holomorphe non-constante $f : M \rightarrow R$, on peut trouver, d'après K. Stein [10], une surface de Riemann R_0 et une application holomorphe *surjective* $f_0 : M \rightarrow R_0$ telles que toute application holomorphe $g : M \rightarrow R'$ analytiquement dépendante de f se décompose sous la forme : $g = g' \circ f_0$, où g' est une application holomorphe de R_0 dans R' . Ce couple (R_0, f_0) est déterminé de façon unique à isomorphisme analytique près, et appelé *espace de base* (Komplexer Basisraum [11]) de f . On dira qu'une application holomorphe $f : M \rightarrow R$ est *primitive*, si (R, f) est l'espace de base de f .

Remarque. — Soit f une fonction méromorphe non-constante sur une variété analytique complexe *simplement connexe* M ; τ l'ensemble des points d'indétermination de f ; (R_0, f_0) l'espace de base de l'application holomorphe $f : M - \tau \rightarrow \mathbb{CP}^1$. Alors, R_0 est aussi simplement connexe, de sorte que $R_0 \approx \mathbb{CP}^1$, \mathbb{C} ou bien le disque $|z| < 1$ dans le plan d'une variable complexe z , puisque $M - \tau$ est aussi simplement connexe et que, si R_0 ne l'était pas, il existerait sur R_0 et sur $M - \tau$ une fonction analytique multiforme. De plus, si f est holomorphe, R_0 n'est pas compacte, puisqu'on a une fonction holomorphe f' sur R telle que $f = f' \circ f_0$. On peut donc considérer f_0 comme une fonction méromorphe (ou holomorphe, si f est holomorphe) sur M , en tenant compte du fait que $\text{codim } \tau \geq 2$. On appellera donc f_0 *fonction primitive associée à f* .

THÉORÈME (T. Nishino [5 IV], voir aussi [13]). — Si $f : M \rightarrow R$ est une application algébroïde primitive, il existe alors un sous-ensemble e de R de capacité logarithmique nulle tel que les fibres $f^{-1}(z)$ pour $z \in R - e$ soient irréductibles, d'ordre 1, et homéomorphes les unes aux autres.

On appellera $f^{-1}(z)$ pour $z \in R - e$ *fibre générique* de f et $z \in R - e$ *valeur générique* de f . (L'ensemble e des valeurs non-génériques est une réunion dénombrable de fermés, mais n'est pas nécessairement fermé.)

9. VALEURS CRITIQUES, APPLICATIONS DE TYPE FINI. — Soit $f : M \rightarrow R$ une application holomorphe. Un point z de R sera appelé *valeur régulière* de f , s'il existe un voisinage U de z tel que l'image réciproque $f^{-1}(U)$ soit topologiquement un espace fibré trivial sur U par rapport à la projection $f|_{f^{-1}(U)}$. Les autres points de R seront appelés *valeurs critiques* de f . On dira qu'une application holomorphe surjective $f : M \rightarrow R$ est *de type fini*, si les deux conditions suivantes sont remplies :

(1) M et R , ainsi que les fibres $f^{-1}(z)$, $z \in R$, sont de type homologique fini sur \mathbf{R} [c'est-à-dire, les groupes d'homologie $H(M; \mathbf{Q})$, $H(R; \mathbf{Q})$ et $H(f^{-1}(z); \mathbf{Q})$ sont de dimension finie sur \mathbf{Q}];

(2) l'ensemble K des valeurs critiques de f est fini.

On vérifie aisément qu'une application holomorphe $f: M \rightarrow R$ de type fini est primitive, si et seulement si une fibre régulière $f^{-1}(z)$, $z \in R - K$, est connexe.

Soit $K = \{z_1, z_2, \dots, z_p\}$ l'ensemble des valeurs critiques d'une application holomorphe $f: M \rightarrow R$ de type fini; $z \in R - K$ une valeur régulière. On posera : $F = f^{-1}(z)$, $F_i = f^{-1}(z_i)$, ($i = 1, 2, \dots, p$). On appellera

$$\chi_i(f) = \chi(F_i) - \chi(F)$$

indice de f le long de la fibre F_i , où $\chi(\star)$ est la caractéristique d'Euler de \star .

PROPOSITION 1. — *Si f est primitive et qu'il existe un voisinage U de z_i tel que $f^{-1}(U)$ soit une variété de Stein, on a alors $\chi_i(f) \geq 0$. De plus, si $\chi_i(f) = 0$, F_i est non-singulière, irréductible et homéomorphe à F .*

Comme F est connexe et non-compacte, il suffit, pour vérifier la première assertion de la proposition, de montrer le lemme suivant :

LEMME 6. — *Soit $f: M \rightarrow U$ une application holomorphe d'une variété de Stein M de dimension complexe 2 sur un ouvert U de \mathbf{C} ; $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ une suite de points de U tendant vers un point $z_0 \in U$. On a alors*

$$b^1(F_0) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b^1(F_n),$$

où $F_0 = f^{-1}(z_0)$, $F_n = f^{-1}(z_n)$ et $b^1(\star)$ est le premier nombre de Betti de \star .

Preuve. — On prend une fonction de classe C^2 strictement plurisousharmonique et propre $\eta: M \rightarrow \mathbf{R}^+ = [0, +\infty[$. On désignera, pour chaque $r < \infty$, par Q_r la partie compacte de M définie par $\eta \leq r$. On posera : $\Delta_0^s = F_0 \cap Q_r$, $\Delta_n^s = F_n \cap Q_r$. Prenons un $s \in \mathbf{R}^+$ tel que le contour $\partial \Delta_0^s$ soit non-singulier. Il existe alors un entier $N > 0$ et une application continue $g_n: \Delta_n^s \rightarrow \Delta_0^s$ pour chaque $n \geq N$ tels que $\Delta_n^s - g_n^{-1}(\sigma)$ soit un revêtement fini de $\Delta_0^s - \sigma$ par rapport à la projection g_n , où σ est l'ensemble des points singuliers de Δ_0^s . Les homomorphismes $(g_n)_*: H_1(\Delta_n^s) \rightarrow H_1(\Delta_0^s)$ induits par les g_n sont surjectifs. Par suite, $b^1(\Delta_0^s) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b^1(\Delta_n^s)$.

Or, $\eta|_{F_n}$ étant sousharmonique pour tout $n \geq 0$, $F_n - \Delta_n^s$ ne possède aucune composante simplement connexe (en vertu du principe de maximum), de sorte que l'homomorphisme : $H_1(\Delta_n^s) \rightarrow H_1(F_n)$ induit par l'inclusion est injectif. On a donc

$$b^1(F_0) = \lim_{s \rightarrow \infty} b^1(\Delta_0^s) \leq \lim_{s \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} b^1(\Delta_n^s) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b^1(F_n).$$

La deuxième assertion de la proposition 1 est vérifiée par le fait que, avec les notations ci-dessus, si σ n'est pas vide, le rang du noyau de $(g_n)_*$ (= la somme des nombres de Milner des points singuliers $x_i \in \sigma$ du diviseur (F_0) compte tenu des ordres de zéros de $f - z_0$) est > 0 .

PROPOSITION 2. — Soit $f: M \rightarrow R$ une application algébrique de type fini; z_1, z_2, \dots, z_p ses valeurs critiques. Alors, on a

$$\sum_{i=1}^p \chi_i(f) = \chi(M) - \chi(R) \chi(F),$$

où F est une fibre régulière de f et $\chi(\star)$ est la caractéristique d'Euler de \star .

En effet, il existe, d'après T. Nishino [5 V] [le théorème (NV) du n° suivant], une variété analytique complexe connexe \tilde{M} de dimension 2, munie d'une projection holomorphe propre $\tilde{f}: \tilde{M} \rightarrow R$, et une application holomorphe injective Φ de M dans \tilde{M} telles que l'on ait $f = \tilde{f} \circ \Phi$. $A = \tilde{M} - \Phi(M)$ est alors un sous-ensemble analytique de \tilde{M} (de codimension pure 1). On peut supposer de plus que l'ensemble des valeurs critiques de \tilde{f} coïncide avec celui de f (donc fini). On peut donc munir le compactifié d'Aleksandrov $\hat{M} = M \cup \{\infty\}$ d'une structure de CW-complexe de façon que les $F_i \cup \{\infty\}$ en soient des sous-complexes, où $F_i = f^{-1}(z_i)$, ($i = 1, 2, \dots, p$). En tenant compte de

$$\chi\left(\bigcup_{i=1}^p F_i \cup \{\infty\}\right) = 1 + \sum_{i=1}^p \chi(F_i),$$

on a

$$1 + \sum_{i=1}^p \chi(F_i) = \chi(\hat{M}) - \chi\left(\hat{M}, \bigcup_{i=1}^p F_i \cup \{\infty\}\right).$$

Comme M et $M_0 = M - \bigcup_{i=1}^p F_i$ sont des variétés orientables de dimension réelle paire et régulières à l'infini (en vertu de \tilde{M} et de Φ), on a

$$\chi(\hat{M}) = 1 + \chi(M);$$

$$\chi\left(\hat{M}, \bigcup_{i=1}^p F_i \cup \{\infty\}\right) = \chi(\hat{M}_0) - 1 = \chi(M_0).$$

en utilisant la dualité de Poincaré-Lefschetz. Or, M_0 est topologiquement un espace fibré localement trivial de $R - \bigcup_{i=1}^p z_i$ à fibre F , de sorte que

$$\chi(M_0) = \chi(F) \cdot \chi\left(R - \bigcup_{i=1}^p z_i\right) = \chi(F) \cdot [\chi(R) - p].$$

On a donc,

$$\sum_{i=1}^p (\chi(F_i) - \chi(F)) = \chi(M) - \chi(F) \cdot \chi(R).$$

C.Q.F.D.

Considérons comme exemple une fonction rationnelle non-constante f sur C^2 . Soient $\tau = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_q\}$ l'ensemble des points d'indétermination de f et R l'image $f(C^2 - \tau)$ dans CP^1 . Évidemment, $f: C^2 - \tau \rightarrow R$ est une application algébrique (régulière) de type fini; $R = CP^1$ ou bien $CP^1 - \{\text{un point}\}$. Comme $\chi(C^2 - \tau) = 1 - q$, on a

COROLLAIRE. — (1) si $R = CP^1$, alors $\sum_{i=1}^p \chi_i(f) = 1 - q - 2 \chi(F);$

(2) si f est un polynôme, on a $\sum_{i=1}^p \chi_i(f) = 1 - \chi(F) = \text{rang } H_1(F)$ (le théorème 2 de [12]).

10. FINITUDE DE L'ENSEMBLE DES VALEURS CRITIQUES. — Le but de cette section est de démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION 3. — Soit M une variété analytique complexe de dimension complexe 2 telle que $H_1(M; \mathbb{Z})$ soit de type fini (en tant que \mathbb{Z} -module) et que $H_2(M; \mathbb{Q})$ soit de dimension finie sur \mathbb{Q} ; $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ une application algébroïde primitive. Alors f est de type fini.

Commençons par citer quelques résultats de T. Nishino ([5 IV, V] et [6]) :

THÉORÈME (N IV). — Soit $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ une application algébroïde telle que toute fibre $f^{-1}(z)$, $z \in \mathbb{R}$, soit irréductible. Alors : 1° toute valeur générique de f est régulière et l'ensemble k des valeurs critiques de f est de capacité logarithmique nulle; 2° il existe une variété analytique complexe \tilde{M}_0 de dimension complexe 2 munie d'une projection holomorphe propre (sans valeur critique) \tilde{f} de \tilde{M}_0 sur $\mathbb{R} - k$, un sous-ensemble analytique A de \tilde{M}_0 de codimension pure 1 et un isomorphisme analytique Φ de $M_0 = M - f^{-1}(k)$ sur $\tilde{M}_0 - A$ tels que l'on ait $\tilde{f} \circ \Phi = f$.

THÉORÈME (N V). — Soit $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ une application algébroïde primitive telle que l'ensemble k des valeurs critiques de f soit discret et que chaque fibre critique $f^{-1}(z)$ ($z \in k$) n'ait qu'un nombre fini de composantes irréductibles. Alors, il existe une variété analytique complexe \tilde{M} de dimension complexe 2, munie d'une projection holomorphe propre $\tilde{f}: \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$, un sous-ensemble analytique A de \tilde{M} et un isomorphisme analytique $\Phi: M \rightarrow \tilde{M} - A$ tels que l'on ait $f = \tilde{f} \circ \Phi$. Si de plus \mathbb{R} est de type algébrique (i. e. un ouvert de Zariski d'une surface de Riemann compacte $\bar{\mathbb{R}}$) et si k est fini, il existe alors une variété analytique complexe compacte \bar{M} de dimension complexe 2 munie d'une projection holomorphe $\bar{f}: \bar{M} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, un sous-ensemble analytique B de \bar{M} et un isomorphisme analytique $\Psi: M \rightarrow \bar{M} - B$ tels que l'on ait $f = \bar{f} \circ \Psi$.

THÉORÈME (N [6]). — Soit $f: M \rightarrow U$ une application holomorphe propre de M sur un ouvert U de \mathbb{C} telle que $f^{-1}(z_0)$ soit de genre ≥ 2 pour une valeur régulière $z_0 \in U$ de f . Soit k un sous-ensemble fermé de U de capacité logarithmique nulle. Alors, toute section holomorphe $s: U - k \rightarrow M$ de f se prolonge par continuité en une section holomorphe $\bar{s}: U \rightarrow M$ de f .

En utilisant ces théorèmes, nous allons montrer quelques lemmes dont nous avons besoin pour démontrer la proposition 3.

Section algébroïde d'une application. — Soit $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ une application holomorphe non-constante; x_0 un point de M tel que $f^{-1}(f(x_0))$ soit régulière en x_0 . On peut alors tracer dans un voisinage U de x_0 une courbe analytique complexe non-singulière Γ qui est transversale aux fibres de f .

Prenons un voisinage δ de $f(x_0)$ tel que

$$f|_{\Gamma \cap f^{-1}(\delta)} : \Gamma \cap f^{-1}(\delta) \rightarrow \delta$$

soit propre. On appellera $\Gamma(\delta) = \Gamma \cap f^{-1}(\delta)$ *section algébroïde régulière de f sur δ* .

LEMME 7. — Si $f : M \rightarrow R$ est une application algébroïde primitive et $F = f^{-1}(z_0)$ une fibre générique de f , alors la suite

$$H_1(F; \mathbf{Q}) \xrightarrow{j_*} H_1(M; \mathbf{Q}) \xrightarrow{f_*} H_1(R; \mathbf{Q}) \rightarrow 0$$

est exacte, où \mathbf{Q} est le corps des nombres rationnels et f_* (resp. j_*) est l'homomorphisme induit par f (resp. par l'inclusion $j : F \rightarrow M$).

En effet, f_* est surjective, puisqu'on peut trouver un recouvrement $\{\delta_i\}$ de R par des ouverts δ_i munis d'une section algébroïde $\Gamma(\delta_i)$ de f sur δ_i et que les fibres $f^{-1}(z)$ sont connexes pour les valeurs génériques z qui sont denses sur R . Puis, le fait que $f_* \circ j_* = 0$ est évident. On va donc montrer : $\text{Ker } f_* \subset \text{Im } j_*$ ($\text{Ker } f_* \equiv f_*^{-1}(0)$). Il suffit de le montrer pour le cas où R n'est pas compact.

(i) Considérons d'abord le cas particulier suivant : soit $\Gamma = \Gamma(\delta)$ une section algébroïde régulière et simplement connexe de f telle que $f^{-1}(\delta)$ soit de Stein. Voyons que, pour chaque fibre générique $F = f^{-1}(b)$, $b \in \delta$,

$$H_1(F; \mathbf{Q}) \xrightarrow{j_*} H_1(f^{-1}(\delta); \mathbf{Q})$$

est surjectif. En effet, soit E la réunion dans $f^{-1}(\delta)$ des surfaces premières de f ne passant pas par Γ et à valeur dans δ ; $\Sigma = f^{-1}(\delta) - E$ est alors un domaine pseudo-convexe de $f^{-1}(\delta)$; celui-ci étant une variété de Stein, Σ l'est aussi. Les fibres de $f|_{\Sigma}$ sont évidemment irréductibles. Par suite, d'après le théorème (N IV) ci-dessus, l'ensemble k des valeurs critiques de $f|_{\Sigma}$ est de capacité nulle. De plus, de la même manière qu'au n° 3 du chapitre V de [5 IV], on voit que $E \cap f^{-1}(\delta - k)$ est un sous-ensemble analytique de $f^{-1}(\delta - k)$. Donc, on peut déformer tout 1-cycle c de $f^{-1}(\delta)$ continûment en un 1-cycle $c' \subset \Sigma' = \Sigma \cap f^{-1}(\delta - k)$. Maintenant, soit $(\tilde{\Sigma}', \tilde{f}, \Gamma')$ l'espace fibré topologique sur $\Gamma' = \Gamma(\delta - k)$ induit par $f|_{\Gamma'} : \Gamma' \rightarrow \delta - k$ de l'espace fibré topologique $(\Sigma', f|_{\Sigma'}, \delta - k)$. $\tilde{\Sigma}'$ est un revêtement fini de Σ' ; on désignera par μ la projection $\tilde{\Sigma}' \rightarrow \Sigma'$. On a alors, un 1-cycle \tilde{c}' dans $\tilde{\Sigma}'$ tel que $\mu(\tilde{c}') = m \cdot c'$, où $m \in \mathbf{N} - \{0\}$. Comme $\tilde{\Sigma}'$ est un fibré topologique sur Γ' ayant une section continue Γ' , on a

$$\tilde{c}' \sim \tilde{c}_1 + \tilde{c}_2 \quad \text{dans } \tilde{\Sigma}',$$

où $\tilde{c}_1 \subset \Gamma'$ et $\tilde{c}_2 \subset \tilde{F} = \mu^{-1}(F)$. Or, $\tilde{c}_1 \sim 0$ sur Γ , puisque Γ est simplement connexe. Par suite, $m \cdot c' \sim \mu(\tilde{c}_2) (= F)$ dans $f^{-1}(\delta)$; j_* est donc surjective.

(ii) Prenons maintenant une suite de section algébroïdes régulières et simplement connexes $\Gamma_i = \Gamma(\delta_i)$, ($i = 1, 2, \dots$), de f vérifiant les conditions suivantes:

1° $z_0 \in \delta_1$; 2° $f^{-1}(\delta_i)$ est de Stein; 3° $R = \bigcup_{i=1}^{\infty} \delta_i$; 4° si l'on pose $\Delta_n = \bigcup_{i=1}^n \delta_i$,

on a $H_1(\Delta_n \cap \delta_{n+1}) = 0$ ⁽³⁾ pour tout n ($= 1, 2, \dots$). On posera

$$\Delta_0 = \{z_0\}, \quad \tilde{\Delta}_n = f^{-1}(\Delta_n), \quad \tilde{\delta}_n = f^{-1}(\delta_n)$$

et désignera par

$$j_n : H_1(\Delta_n) \rightarrow H_1(R) \quad [\text{resp. } \tilde{j}_n : H_1(\tilde{\Delta}_n) \rightarrow H_1(M)]$$

l'homomorphisme induit par l'inclusion $\Delta_n \rightarrow R$ (resp. $\tilde{\Delta}_n \rightarrow M$). Soit $c \in \text{Ker } f_*$.

Comme $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{\Delta}_n$, on a un $c_n \in H_1(\tilde{\Delta}_n)$ tel que $\tilde{j}_n(c_n) = c$; ce c_n se trouve dans le $\text{Ker}(f|_{\tilde{\Delta}_n})_*$, puisque j_n est injective (d'après la condition 4°). Nous allons en déduire qu'il existe un $c_{n-1} \in \text{Ker}(f|_{\tilde{\Delta}_{n-1}})_*$ tel que $\tilde{j}_{n-1}(c_{n-1}) = c$. En effet, considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots \rightarrow H_1(\tilde{\Delta}_{n-1} \cap \delta_n) & \xrightarrow{(\theta, -\theta')} & H_1(\tilde{\Delta}_{n-1}) \oplus H_1(\tilde{\delta}_n) & \xrightarrow{\varphi+\psi} & H_1(\tilde{\Delta}_n) & \xrightarrow{\tilde{\partial}} & H_0(\tilde{\Delta}_{n-1} \cap \tilde{\delta}_n) \rightarrow \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow (1) \\ \dots \rightarrow H_1(\Delta_{n-1} \cap \delta_n) & \longrightarrow & H_1(\Delta_{n-1}) \oplus H_1(\delta_n) & \longrightarrow & H_1(\Delta_n) & \xrightarrow{\partial} & H_0(\Delta_{n-1} \cap \delta_n) \rightarrow \dots \end{array}$$

où les lignes horizontales sont les suites exactes de Mayer-Vietoris et les flèches verticales sont les homomorphismes induits par f . Comme $f^{-1}(\alpha)$ est connexe pour chaque composante connexe α de $\Delta_{n-1} \cap \delta_n$, la flèche (1) est un isomorphisme; par suite, on a $\tilde{\partial}(c_n) = 0$; il existe donc un $c'_{n-1} \in H_1(\tilde{\Delta}_{n-1})$ et un $c'_n \in H_1(\tilde{\delta}_n)$ tels que $\varphi(c'_{n-1}) + \psi(c'_n) = c_n$. On désignera par θ (resp. θ') l'homomorphisme : $H_1(\tilde{\Delta}_{n-1} \cap \tilde{\delta}_n) \rightarrow H_1(\tilde{\Delta}_{n-1})$ [resp. $H_1(\tilde{\delta}_n)$] induit par l'inclusion. D'après ce qu'on a vu dans (i), il existe un $\beta \in H_1(\tilde{\Delta}_{n-1} \cap \tilde{\delta}_n)$ tel que $\theta'(\beta) = c'_n$; on a donc $\varphi(c'_{n-1} + \theta(\beta)) = c_n$. De plus, comme $H_1(\Delta_{n-1} \cap \delta_n)$ et $H_1(\delta_n)$ sont nuls, on a $(f|_{\tilde{\Delta}_{n-1}})_*(c'_{n-1} + \theta(\beta)) = 0$. Donc, $c_{n-1} = c'_{n-1} + \theta(\beta)$ est l'élément voulu.

On voit ainsi, par induction descendante sur n , que $c \in j_0(\text{Ker}(f|_{\tilde{\Delta}_0})_*) = j_*(H_1(F))$. On a donc $\text{Ker } f_* \subset \text{Im } j_*$.

C.Q.F.D.

LEMME 8. — Supposons que $H^2(M, \mathbb{Q})$ est de dimension finie sur \mathbb{Q} et que $f : M \rightarrow R$ est une application algébrique primitive. Soit $\Gamma = \Gamma(\Delta)$ une section algébrique régulière de f telle que $D = f^{-1}(\Delta)$ soit de Stein. Alors, la famille $\varepsilon = \varepsilon(\Gamma)$ des surfaces premières de f dans D ne passant pas par Γ est finie.

En effet, par l'absurde, supposons que ε contienne une suite infinie de surfaces premières $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ de f . En remplaçant cette suite $\{S_n\}$ par une de ses suites partielles (s'il est nécessaire), on peut supposer que l'image $\{f(S_n)\}_{n=1,2,\dots}$ a au plus un seul point d'accumulation dans Δ . Soit $L(D)$ [resp. $L(M)$] le groupe des diviseurs dans D (resp. M);

(3) Jusqu'à la fin de la démonstration, les groupes d'homologie seront à coefficients dans \mathbb{Q} .

G le sous-groupe de $L(D)$ engendré par les diviseurs $\{S_n\}_{n=1,2,\dots}$. Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} L(D) & \xrightarrow{\delta} & H^2(D, \mathbf{Z}) \\ \uparrow j & & \uparrow j' \\ L(M) & \xrightarrow{\delta'} & H^2(M, \mathbf{Z}) \end{array}$$

où δ (resp. δ') est l'homomorphisme qui fait correspondre à chaque diviseur $C \in L(D)$ [resp. $L(M)$] la classe de Chern du fibré en droites complexes sur D (resp. M) associé à C ; j et j' sont les homomorphismes induits par la restriction. Comme $H^2(M, \mathbf{Z})$ est de rang fini sur \mathbf{Z} et que $G \subset \text{Im } j$, $\delta(G)$ est de rang fini. Or, D étant une variété de Stein, δ est injective; donc, G est aussi de rang fini (sur \mathbf{Z}), i. e., $G \otimes \mathbf{Q}$ est de dimension fini (sur \mathbf{Q}). Soit $S_{n_1}, S_{n_2}, \dots, S_{n_r}$ une suite partielle fini de $\{S_n\}$ telle que $\{S_{n_i} \otimes 1\}_{i=1,2,\dots,r}$ engendre $G \times \mathbf{Q}$ sur \mathbf{Q} . Comme D est une variété de Stein, il existe pour chaque n ($\neq n_1, n_2, \dots, n_r$) une fonction méromorphe h_n sur D telle que le diviseur (h_n) défini par h_n soit de la forme

$$(h_n) = m_n S_n - \sum_{i=1}^r m_n^{(i)} S_{n_i},$$

où $m_n \in \mathbf{N} - \{0\}$ et $m_n^{(i)} \in \mathbf{Z}$. Chaque h_n est holomorphe sur $D - \bigcup_{i=1}^r S_{n_i}$ et s'annule seulement sur S_n (d'ordre m_n). Prenons sur chaque S_n un point régulier x_n ; on peut tracer au voisinage de x_n un 1-cycle c_n dans $D_1 = D - \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ de façon que

$$h_n^*(c_n) = m_n; \quad h_i^*(c_n) = 0 \quad \text{pour } i \neq n,$$

où h_n^* est l'homomorphisme : $H_1(D_1; \mathbf{Z}) \rightarrow H_1(\mathbf{C}^*; \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$ induit par

$$h_n : D_1 \rightarrow \mathbf{C}^* = \mathbf{C} - \{0\}.$$

Ces cycles $\{c_n; n \neq n_1, n_2, \dots, n_r\}$ sont linéairement indépendants dans $H_1(D_1; \mathbf{Z})$ sur \mathbf{Z} . On a donc

$$\dim H_1(D; \mathbf{Q}) = \text{rang}_{\mathbf{Z}} H_1(D; \mathbf{Z}) = \infty,$$

ce qui est absurde, car, d'après le lemme 7, $H_1(F; \mathbf{Q}) \rightarrow H_1(D_1; \mathbf{Q})$ est surjective pour une fibre générique F de $f|_{D_1}$, $H_1(\Delta)$ étant nul. Donc, $\varepsilon = \varepsilon(\Gamma)$ ne contient qu'un nombre fini de surfaces premières de f .

LEMME 9. — Soit $f : M \rightarrow \Delta$ une application algébrique d'une variété de Stein connexe M de dimension complexe 2 sur un disque $\Delta : |z| < 1$ dans le plan z telle que les fibres $F_z = f^{-1}(z)$, $z \in \Delta$, soient irréductibles. On suppose que $F_0 = f^{-1}(0)$ est une fibre générique de f . Si l'homomorphisme $j_* : H_1(F_0; \mathbf{Q}) \rightarrow H_1(M; \mathbf{Q})$ induit par l'inclusion $j : F_0 \rightarrow M$ est injectif, alors l'ensemble k des valeurs critiques de f est discret.

Démonstration. — 1° Considérons d'abord le cas où il existe une section holomorphe $s : \Delta \rightarrow M$ de f et une fonction holomorphe t sur un voisinage U de $s(\Delta)$ s'annulant sur $s(\Delta)$ et telle que l'application

$$\xi = (f, t) : U \rightarrow \Delta \times [|t| < 2]$$

soit un isomorphisme analytique. Soient S une surface de Riemann compacte, s une coordonnée locale sur S et δ (resp. δ') le disque sur S défini par $|s| < 1$ (resp. $|s| < 1/2$). Considérons la réunion

$$M' = (M - \xi^{-1}(\Delta \times [|t| < 1])) \cup (\Delta \times (S - \delta'))$$

en identifiant la partie $\xi^{-1}(\Delta \times [1 < |t| < 2])$ avec $\Delta \times (\delta - \delta')$ par

$$z = f(x), \quad s = \frac{1}{t(x)},$$

où $x \in \xi^{-1}(\Delta \times [1 < |t| < 2])$. Alors, M' est une variété analytique complexe munie d'une projection holomorphe algébrique $f' : M' \rightarrow \Delta$ telle que $f'|_{M-U} = f|_{M-U}$. On vérifie aisément que : 1° M' est une variété de Stein; 2° l'homomorphisme $j'_* : H_1(F'_0; \mathbb{Q}) \rightarrow H_1(M'; \mathbb{Q})$ est injectif, où $F'_0 = f'^{-1}(0)$; 3° l'ensemble k' des valeurs critiques de f' coïncide avec k . De plus, on peut prendre S et s de façon : (★) que F'_0 soit de genre ≥ 2 et que le groupe des automorphismes analytiques de \bar{F}'_0 soit trivial (i. e. = $\{\text{id}\}$), où \bar{F}'_0 est la surface de Riemann compacte contenant F'_0 ⁽⁴⁾. On supposera donc dans ce qui suit que cette condition (★) est satisfaite pour F_0 .

On utilisera les notations introduites dans le théorème (N IV) : $k, M_0, \tilde{M}_0, \tilde{f}$ et Φ ; k est de capacité logarithmique nulle. On posera $\bar{F}_z = \tilde{f}^{-1}(z)$ pour $z \in \Delta - k$.

Comme M_0 (resp. \tilde{M}_0) est topologiquement un espace fibré localement trivial de $\Delta - k$ par la projection f (resp. \tilde{f}), on peut faire correspondre à chaque chemin c sur $\Delta - k$ d'origine 0 et d'extrémité z un isomorphisme

$$\theta_c : H_1(F_0) \rightarrow H_1(F_z) \quad (\text{resp. } \bar{\theta}_c : H_1(\bar{F}_0) \rightarrow H_1(\bar{F}_z))$$

dépendant continûment de c et de z par rapport à la topologie compacte-ouverte de l'espace des chemins dans $\Delta - k$. Alors, j_* étant injective (d'après l'hypothèse), on a

$$\theta_c = \text{id}$$

pour tout chemin fermé c dans $\Delta - k$ à point de base 0; par conséquent, il en est de même pour $\bar{\theta}_c$.

Soit $g (\geq 2)$ le genre de F_0 ou de \bar{F}_0 ; $(A_1, A_2, \dots, A_g; B_1, B_2, \dots, B_g)$ un système de 1-cycles de base, sur \bar{F}_0 (i. e., $A_i \cdot B_j = \delta_{ij}$, $A_i \cdot A_j = 0$); $\omega_1(z), \omega_2(z), \dots, \omega_g(z)$

(4) L'auteur doit à M. H. Yamaguchi l'idée de ce type de modification pour augmenter le genre de fibre.

la base de l'espace des 1-formes holomorphes sur \bar{F}_z , $z \in \Delta - k$, vérifiant

$$\int_{\bar{\theta}_c(A_j)} \omega_i(z) = \delta_{ij},$$

où c est un chemin dans $\Delta - k$ d'origine 0 et d'extrémité z . Alors, la (g, g) -matrice $\pi(z) = (\pi_{ij}(z))$ définie par

$$\pi_{ij}(z) = \int_{\bar{\theta}_c(B_j)} \omega_i(z)$$

est holomorphe sur $\Delta - k$; uniforme puisque $\bar{\theta}_c = \text{id}$, pour tout chemin fermé c dans $\Delta - k$. Comme k est de capacité logarithmique nulle, cette application holomorphe $\pi : \Delta - k \rightarrow H_g$, à valeurs dans le demi-plan supérieur de Siegel H_g de genre g , se prolonge par continuité en une application holomorphe $\bar{\pi} : \Delta \rightarrow H_g$.

Soit Γ_g le groupe modulaire de Siegel; $\mathfrak{S}_g = H_g/\Gamma_g$. Alors, d'après W. L. Baily [1], on a une variété analytique complexe projective \mathcal{S} munie d'une projection holomorphe propre $\lambda : \mathcal{S} \rightarrow \varepsilon$ sur l'espace ε ($\subset \mathfrak{S}_g$) des modules des surfaces de Riemann de genre g , de façon que, pour tout $u \in \varepsilon$, $\lambda^{-1}(u)$ soit l'espace quotient d'une surface de Riemann R_μ de genre g et de module μ par le groupe des automorphismes analytiques de R_μ . Considérons l'application composée

$$\psi : \Delta \xrightarrow{\pi} H_g \xrightarrow{\text{projection}} \mathfrak{S}_g.$$

Soit $\psi^* \mathcal{S}$ l'image réciproque de \mathcal{S} par ψ , c'est-à-dire

$$\psi^* \mathcal{S} = \{(z, w) \in \Delta \times \mathcal{S} \mid \psi(z) = \lambda(w)\}.$$

On désignera par λ_* la projection canonique $\psi^* \mathcal{S} \rightarrow \Delta$, par $h : \bar{M}_0 \rightarrow \mathcal{S}$ l'application holomorphe qui fait correspondre à chaque $x \in \bar{F}_z$, $z \in \Delta - k$, la classe

$$h(x) \in \lambda^{-1}(\psi(x)) \approx \bar{F}_z/\sim$$

à laquelle appartient le point x et par $\Psi : M_0 \rightarrow \psi^* \mathcal{S}$ l'application holomorphe définie par

$$\Psi(x) = (f(x), h(\Phi(x))) \in \psi^* \mathcal{S}, \quad \text{où } x \in M_0.$$

On a

$$f = \lambda_* \circ \Psi.$$

Or, d'après l'hypothèse (★), $h|_{F_0} : F_0 \rightarrow \lambda^{-1}(\psi(0)) \approx \lambda_*^{-1}(0)$ est un isomorphisme, de sorte que $\lambda_*^{-1}(0)$ est de genre g (≥ 2). Par conséquent, si l'on désigne par s_α pour chaque $|\alpha| < 2$ la section holomorphe $\Delta \rightarrow U$ ($\subset M$) de $f|_U$ définie par l'équation $t = \alpha$ (i. e., $s_\alpha(\Delta) = \{x \in U \mid t(x) = \alpha\}$), alors la section holomorphe

$$\tau_\alpha = \Psi \circ s_\alpha|_{\Delta - k}$$

de λ_* sur $\Delta - k$ se prolonge, d'après le théorème de T. Nishino [6] cité plus haut, en une section holomorphe $\bar{\tau}_\alpha : \Delta \rightarrow \psi^* \mathcal{S}$ de λ_* sur Δ , k étant de capacité logarithmique nulle.

Ψ est donc holomorphe sur U . D'après le théorème d'Hartogs, on a donc une application holomorphe $\tilde{\Psi}$ de M dans $\Psi^* \mathcal{J}$ telle que $\tilde{\Psi}|_{M_0} = \Psi$. (M et $\Psi^* \mathcal{J}$ sont pseudoconvexes). On désignera par $\Psi_z : F_z \rightarrow \Psi^* \mathcal{J}$ l'application restreinte $\tilde{\Psi}|_{F_z}$.

L'ensemble e des points $z \in \Delta$ tels que $\lambda_*^{-1}(z)$ soit de genre $< g$ est discret; pour chaque $z \in \Delta - (k \cup e)$, $h|_{F_z} : F_z \rightarrow \lambda_*^{-1}(\Psi(z))$ est un isomorphisme analytique, de sorte que $\Psi_z : F_z \rightarrow \Psi^* \mathcal{J}$ est injective pour $z \in \Delta - (k \cup e)$. Soit e' l'ensemble des $z \in \Delta$ tels que Ψ_z soit constante, qui est évidemment discret. Comme les fibres de f et de λ_* sont d'ordre 1 et que $\Delta - (k \cup e)$ est dense sur Δ , Ψ_z est injective, d'après le théorème d'Hurwitz, pour tout $z \in \Delta - e'$. L'application $\Psi' = \tilde{\Psi}|_{M'}$ de $M' = M - f^{-1}(e')$ dans $\Psi^* \mathcal{J}$ est donc injective.

$\tilde{\Psi}(M')$ est un domaine pseudoconvexe de $\Psi^* \mathcal{J}$; si l'on pose

$$A = \lambda_*^{-1}(\Delta - e') - \tilde{\Psi}(M'), \quad A \cap \lambda_*^{-1}(z)$$

consiste en un nombre fini de points pour tout $z \in \Delta - e'$; par suite, d'après le théorème d'Hartogs, A est un sous-ensemble analytique de $\Psi^* \mathcal{J}$ de (co-) dimension pure 1. Comme $j_* : H_1(F_0) \rightarrow H_1(M)$ est injective (d'après l'hypothèse), A se décompose en un nombre fini de sections holomorphes de λ_* sur $\Delta - e'$ (disjointes les unes des autres); ces sections se prolongent d'après le théorème I de T. Nishino [5 V], en des sections holomorphes sur Δ (car $g \geq 2$), de sorte que l'adhérence \bar{A} de A est un sous-ensemble analytique de $\Psi^* \mathcal{J}$. L'ensemble k des valeurs critiques de f est donc inclus dans $e \cup e'$, qui est discret.

2° Lorsqu'il existe une fibre $F_a = f^{-1}(a)$ ($a \in \Delta$) d'ordre > 1 , prenons une section algébrique régulière $\Gamma = \Gamma(\delta)$ de f sur un voisinage δ de a . Le problème étant local, il suffit de montrer que k est discret dans δ . Soit \mathcal{D}_Γ le normalisé du sous-ensemble analytique $\{(x, y) \in f^{-1}(\delta) \times \Gamma \mid f(x) = f(y)\}$, $\pi : \mathcal{D}_\Gamma \rightarrow f^{-1}(\delta)$ et $f' : \mathcal{D}_\Gamma \rightarrow \Gamma$ ses projections canoniques. \mathcal{D}_Γ est une variété de Stein.

On désignera par $\tilde{\Gamma}$ la diagonale $\{(x, x) \in \mathcal{D}_\Gamma \mid x \in \Gamma\}$. Soit E la réunion dans \mathcal{D}_Γ des surfaces premières de f' ne passant pas par $\tilde{\Gamma}$; $D(\Gamma) = \mathcal{D}_\Gamma - E$ est un domaine pseudoconvexe sur \mathcal{D}_Γ . Comme \mathcal{D}_Γ est une variété de Stein, $D(\Gamma)$ est aussi de Stein (d'après le théorème d'Oka). Posons $\tilde{f} = f'|_{D(\Gamma)}$. Chaque fibre $\tilde{F}_x = \tilde{f}^{-1}(x)$ ($x \in \Gamma$) est un revêtement fini de $F_{f(x)}$; \tilde{F}_{x_0} (où $f(x_0) = 0$) est isomorphe à F_0 par la projection π . L'homomorphisme

$$\tilde{j}_* : H_1(\tilde{F}_{x_0}) \rightarrow H_1(D(\Gamma))$$

induit par l'inclusion est injectif, puisque $j_* = \pi_* \circ \tilde{j}_* \circ (\pi|_{F_{x_0}})_*^{-1}$ est injectif (par l'hypothèse). Donc, comme on l'a vu dans la partie 1°, l'ensemble \tilde{k} des valeurs critiques de \tilde{f} est discret. On vérifie aisément que $k \cap \delta \subset \tilde{k} \cup m$, où m est l'ensemble des $z \in \delta$ tels que F_z soit d'ordre > 1 ; $k \cap \delta$ est donc discret.

C.Q.F.D.

LEMME 10. — Soit $f : M \rightarrow \Delta$ une application algébrique primitive d'une variété de Stein (connexe) M de type homologique fini sur \mathbb{Q} , sur le disque $\Delta : |z| < 1$ dans le plan z , n'ayant

aucune valeur critique dans la couronne $r < |z| < 1$. On suppose de plus qu'il existe une section algébrique régulière $\Gamma = \Gamma(\Delta)$ de f sur Δ et que $\chi(M) = \chi(F)$, où $\chi(\star)$ est la caractéristique d'Euler de \star et F une fibre générique de f . Alors, toute fibre $F_z = f^{-1}(z)$, $z \in \Delta$, est irréductible, non-singulière et isomorphe à F . De plus, si F n'est isomorphe ni à \mathbb{C} , ni à \mathbb{C}^* , f n'a pas de valeur critique dans Δ .

En effet, M étant de Stein, on a $H_n(M) = 0$ pour $n \geq 3$ et $H_n(F) = 0$ pour $n \geq 2$; il résulte donc, de l'hypothèse $\chi(M) = \chi(F)$, compte tenu de la suite exacte du lemme 7, que l'homomorphisme

$$j_* : H_1(F; \mathbb{Q}) \rightarrow H_1(M; \mathbb{Q})$$

est un isomorphisme, et $H_2(M, \mathbb{Q}) = 0$. Il en résulte que, d'après le lemme 9, l'ensemble k des valeurs critiques de f est discret, donc fini. D'après le lemme 8, chaque fibre $f^{-1}(z)$, ($z \in k$), n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles (car $H^2(M; \mathbb{Q}) \cong H^2(M; \mathbb{Q})$). L'application $f : M \rightarrow \Delta$ est donc de type fini.

Supposons maintenant que k ne soit pas vide : $k = \{z_1, z_2, \dots, z_p\}$. On a alors, d'après la proposition 2,

$$\sum_{i=1}^p \chi_i(f) = \chi(M) - \chi(F) \cdot \chi(\Delta) = 0.$$

Par suite, d'après la proposition 1, on a $\chi_i(f) = 0$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ et chaque fibre $F_i = f^{-1}(z_i)$ est non-singulière et homéomorphe à F . F_i est donc, d'après le théorème (N IV), d'ordre > 1 . On définit $\mathcal{D}_i, \pi : \mathcal{D}_i \rightarrow M$ et $\tilde{f} : \mathcal{D}_i \rightarrow \Gamma$ de la même façon que dans la partie 2° de la démonstration du lemme 9. Alors, pour chaque $y \in \Gamma$ tel que $f(y) \in \Delta - k$, la fibre $\tilde{f}^{-1}(y)$ est isomorphe à $F_{f(y)}$; pour un $y_i \in \Gamma$ tel que $f(y_i) = z_i$, $\tilde{F}_i = \tilde{f}^{-1}(y_i)$ est un revêtement de F_i , à m_i feuillets, par la projection $\pi|_{\tilde{F}_i}$, où $m_i = 1$ l'ordre de zéros de $f - z_i$ sur $F_i > 1$. On a donc

$$\chi(\tilde{F}_i) = m_i \cdot \chi(F_i) = m_i \cdot \chi(F).$$

Or, d'après la proposition 1, on a

$$\chi(\tilde{F}_i) \geq \chi(\tilde{f}(y)) = \chi(F),$$

où $f(y) \in \Delta - k$. On a donc, $\chi(F) \geq 0$, de sorte que $F \approx \mathbb{C}$ ou bien \mathbb{C}^* .

C.Q.F.D.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer la proposition 3 :

- (1) D'après le lemme 7 et l'hypothèse sur $H_1(M; \mathbb{Z})$, on a $\dim H_1(R; \mathbb{Q}) < \infty$.
- (2) Comme $\dim H^2(M; \mathbb{Q}) = \dim H_2(M; \mathbb{Q}) < \infty$, l'ensemble K des valeurs critiques de $f : M \rightarrow R$ est, d'après le lemme 8 et le théorème (N IV), de capacité logarithmique nulle.
- (3) Voyons ensuite que, pour tout ouvert non-compact U de R , on a $H_3(f^{-1}(U)) = 0$ ⁽⁵⁾. En effet, on prend une suite d'ouverts $\{\delta_i\}_{i=1,2,\dots}$ de U vérifiant les conditions

(5) Pour les groupes d'homologie à coefficients dans \mathbb{Z} , on n'écrit pas le coefficient.

suivantes : 1° $f^{-1}(\delta_i)$ est de Stein; 2° $(\partial\delta_i) \cap K = \emptyset$; 3° $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} \delta_i$; 4° si l'on pose $\Delta_n = \bigcup_{i=1}^n \delta_i$, chaque composante connexe de $\Delta_n \cap \delta_{n+1}$ est contractile et ne contient aucun point de K . Alors, d'après la condition 1°, on a $H_3(f^{-1}(\Delta_1)) = H_3(f^{-1}(\delta_1)) = 0$. Supposons que $H_3(f^{-1}(\Delta_n)) = 0$ pour un entier $n > 0$. Considérons la suite exacte de Mayer-Vietoris :

$$\dots \rightarrow H_3(f^{-1}(\Delta_n)) \oplus H_3(f^{-1}(\delta_{n+1})) \rightarrow H_3(f^{-1}(\Delta_{n+1})) \rightarrow H_2(f^{-1}(\Delta_n \cup \delta_{n+1})) \rightarrow \dots$$

D'après l'hypothèse et la condition 1°, le premier terme écrit est nul; d'après la condition 4°, $f^{-1}(\Delta_n \cap \delta_{n+1})$ est topologiquement un espace fibré trivial sur $\Delta_n \cap \delta_{n+1}$ à fibres $\approx F$, par suite $H_2(f^{-1}(\Delta_n \cap \delta_{n+1})) = [H_2(F)]_k = 0$, où k est le nombre des composantes connexes de $\Delta_n \cap \delta_{n+1}$. On a donc $H_3(f^{-1}(\Delta_{n+1})) = 0$. Par induction sur n , on obtient $H_3(f^{-1}(\Delta_n)) = 0$ pour tout n , donc, $H_3(f^{-1}(U)) = 0$.

En particulier, si R n'est pas compacte, on a $H_3(M) = 0$. Si R est compacte, on prend un recouvrement fini $\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m\}$ de R vérifiant les conditions 1°, 2° ci-dessus pour tout $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, la condition 4° pour $n \leq m-2$ et la condition : 5° $\Delta_{m-1} \cap \delta_m$ est homéomorphe à la couronne $1/2 < |z| < 1$ dans le plan z et ne contient aucun point de K . D'après le même raisonnement que ci-dessus, on a $H_3(f^{-1}(\Delta_{m-1})) = 0$ et

$$\text{rang } H_3(M) \leq \text{rang } H_2(f^{-1}(\Delta_{m-1} \cap \delta_m)) \leq b_1(F) < \infty,$$

où $b_1(F)$ est le premier nombre de Betti d'une fibre régulière F de f . M est donc de type homologique fini sur \mathbb{Q} .

(4) Supposons maintenant que K contienne m points : z_1, z_2, \dots, z_m ($0 < m < \infty$). Comme R est homéomorphe à $\bar{R} - \{n \text{ points}\}$, \bar{R} étant une surface orientable compacte (réelle) et que K est un fermé de capacité logarithmique nulle, on peut trouver $m+n$ ouverts $\{U_i\}_{1 \leq i \leq m+n}$ de R , disjoints les uns des autres et vérifiant les conditions suivantes :

1° pour chaque $i \leq m$, U_i est un voisinage de z_i tel qu'il existe une section algébroidé régulière $\Gamma_i = \Gamma(U_i)$ de f sur U_i et que $f^{-1}(U_i)$ soit de Stein;

2° $R - \bigcup_{i=m+1}^{m+n} U_i$ est compact;

3° $U = \bigcup_{i=1}^{m+n} U_i$ contient K ;

4° le bord ∂U_i de U_i consiste en une seule courbe simple et fermée de Jordan (pour tout i).

Soit $\Sigma = f^{-1}(U)$. Alors, $M - \Sigma$ est topologiquement un espace fibré localement trivial sur $R - U$ à fibres $\approx F$; on peut donc munir $M - \Sigma$ d'une structure de CW-complexe de façon que $\partial\Sigma = f^{-1}(\partial U)$ en soit un sous-complexe. Puisque $R - U$ et F sont de type topologique fini, on a

$$\text{rang } H_k(M, \bar{\Sigma}) \underset{(\text{excision})}{\cong} \text{rang } H_k(M - \Sigma, \partial\Sigma) < \infty,$$

pour tout $k \geq 0$. D'après la suite exacte

$$\dots \rightarrow H_k(M) \rightarrow H_k(M, \bar{\Sigma}) \xrightarrow{\partial} H_{k-1}(\bar{\Sigma}) \rightarrow H_{k-1}(M) \rightarrow \dots$$

on a $\text{rang } H_k(\bar{\Sigma}) < \infty$ pour tout $k \geq 0$. On peut donc calculer la caractéristique d'Euler de $\bar{\Sigma}$ comme suit :

$$\begin{aligned}\chi(M) - \chi(\bar{\Sigma}) &= \chi(M, \bar{\Sigma}) \underset{\text{(excision)}}{=} \chi(M - \Sigma, \partial\Sigma) \\ &= \chi(M - \Sigma) - \chi(\partial\Sigma) \\ &= \chi(F) \cdot \chi(R - U) - \chi(F) \cdot \chi(\partial U) \\ &= \chi(F) \cdot [\chi(\bar{R}) - (m + n)],\end{aligned}$$

où $\chi(\star)$ est la caractéristique d'Euler de \star . Les $\bar{\Sigma}_i = f^{-1}(\bar{U}_i)$ étant disjoints les uns les autres, on a

$$\sum_{i=1}^{m+n} [\chi(\bar{\Sigma}_i) - \chi(F)] = \chi(M) - \chi(F) \cdot \chi(\bar{R}).$$

D'après la condition 3°, $(\partial U_i) \cap K = \emptyset$; donc $H_k(\Sigma_i) \cong H_k(\Sigma_i)$ pour tout $k \geq 0$. Comme on l'a vu à l'étape (3) ci-dessus, $H_k(\Sigma_i) = 0$ pour $k \geq 3$ et tout i . On a donc

$$\begin{aligned}\chi'_i &\equiv \chi(\bar{\Sigma}_i) - \chi(F) \\ &= [\text{rang } H_1(F) - \text{rang } H_1(\Sigma_i)] + \text{rang } H_2(\Sigma_i).\end{aligned}$$

Or, de la suite exacte du lemme 7, on tire

$$\begin{aligned}\chi'_i &\geq 0 && \text{pour } 1 \leq i \leq m, \\ \chi'_i &\geq -1 && \text{pour } m+1 \leq i \leq m+n.\end{aligned}$$

Par suite,

$$\sum_{i=1}^m \chi'_i \leq \chi(M) - \chi(F) \cdot \chi(\bar{R}) + n.$$

On désignera par m_0 le terme à droite de cette inégalité ($m_0 < \infty$).

(a) Le cas où F n'est isomorphe ni à \mathbf{C} , ni à \mathbf{C}^* : d'après le lemme 10, on a $\chi'_i > 0$ pour $i \leq m$, de sorte que $m \leq m_0$. Donc, K contient au plus m_0 points.

(b) Le cas où $F \approx \mathbf{C}$ ou \mathbf{C}^* : soit K_0 l'ensemble des points $z \in R$ tels que $f^{-1}(z)$ ne soit pas analytiquement isomorphe à F . D'après le lemme 10 et l'inégalité ci-dessus, on voit que K_0 contient au plus m_0 points. Soit $K_0 = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$.

Pour $z \in K' = K - K_0$, la fibre $f^{-1}(z)$ est irréductible, analytiquement isomorphe à F et d'ordre > 1 . K' , ainsi que K , est donc discret.

Supposons par l'absurde, que K' consiste en une infinité de points : $a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_{m+n}, \dots$. K' étant discret, R n'est pas compacte. Prenons pour chaque a_n ($n = 1, 2, \dots$) une section algébroïde régulière $\Gamma_n = \Gamma(\delta_n)$ ($\subset \subset M$) de f sur un voisinage δ_n de a_n de façon que : 1° l'adhérence $\bar{\Gamma}_n$ soit homéomorphe au disque fermé $|t| \leq 1$ dans le plan \mathbf{C} (à coordonnée t); 2° $\delta_n \cap K = \{a_n\}$; 3° $\delta_n \cap \delta_m = \emptyset$ pour $n \neq m$. On écrit : $\Sigma_n = f^{-1}(\delta_n)$. On a alors

$$H_2(\bar{\Sigma}_n, \partial\Sigma_n) = \mathbf{Z}[\bar{\Gamma}_n, \partial\Gamma_n] \quad \text{pour } n \geq m+1,$$

où $[\bar{\Gamma}_n, \partial\Gamma_n]$ est l'élément de $H_2(\bar{\Sigma}_n, \partial\Sigma_n)$ défini par le couple $(\bar{\Gamma}_n, \partial\Gamma_n)$. En effet, tout 2-cycle du couple $(\bar{\Sigma}_n, \partial\Sigma_n)$ est homologue à un cycle de la forme : $k \cdot (\bar{\Gamma}_n, \partial\Gamma_n) + c$, où $k \in \mathbb{Z}$ et c est un 2-cycle de $(\bar{\Sigma}_n, \partial\Sigma_n)$ dont le support est dans $\bar{\Sigma}_n - f^{-1}(a_n)$. Or, $\partial\Sigma_n$ est un rétracte par déformation continue de $\bar{\Sigma}_n - f^{-1}(a_n)$; par suite, $c \sim 0$. $[\bar{\Gamma}_n, \partial\Gamma_n]$ est donc un générateur de $H_2(\bar{\Sigma}_n, \partial\Sigma_n)$.

En plus, on vérifie aisément : $H_1(\bar{\Sigma}_n, \partial\Sigma_n) = 0$, pour tout n .

On posera $\delta = \bigcup_{n=1}^{\infty} \delta_n$, $\Sigma = f^{-1}(\delta)$. Comme toute \mathbb{C} (resp. \mathbb{C}^*)-fibration topologique localement triviale sur $\mathbb{R} - \delta$ est triviale, compte tenu de $H^2(\mathbb{R} - \delta, \mathbb{Z}) = 0$ pour le cas de \mathbb{C}^* -fibration, on a $M - \Sigma \approx (\mathbb{R} - \delta) \times F$. (Rappeler $F \approx \mathbb{C}$ ou \mathbb{C}^*). Posons

$$\delta_0 = \bigcup_{n=1}^m \delta_n, \quad \delta' = \delta - \delta_0, \quad \Sigma_0 = \bigcup_{n=1}^m \Sigma_n \quad \text{et} \quad \Sigma' = \Sigma - \Sigma_0.$$

Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H_2(M, M - \Sigma') & \xrightarrow{\partial} & H_1(M - \Sigma', \bar{\Sigma}_0) & \xrightarrow{j_*} & H_1(M, \bar{\Sigma}_0) \longrightarrow \dots \\ & & \uparrow \wr (\text{excision}) & & \uparrow \wr (\text{excision}) & & \\ & & H_2(\bar{\Sigma}', \partial\Sigma') & & H_1(M - \Sigma, \partial\Sigma_0) & & \\ & & \uparrow \wr & & \uparrow \wr & & \\ & & H_1((\mathbb{R} - \delta) \times F, (\partial\delta_0) \times F) & & & & \\ & & \uparrow \lambda_* & & & & \\ \bigoplus_{n=m+1}^{\infty} \mathbb{Z}[\bar{\Gamma}_n, \partial\Gamma_n] & \xrightarrow{\oplus \partial_n} & \bigoplus_{n=m+1}^{\infty} \mathbb{Z}[(\partial\delta_n) \times b] & \rightarrow & \bigoplus_{n=m+1}^{\infty} \text{Coker}(\partial_n) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

où $b \in F$ et $[(\partial\delta_n) \times b]$ est l'élément de $H_1((\mathbb{R} - \delta) \times F, (\partial\delta_0) \times F)$ défini par le 1-cycle $(\partial\delta_n) \times b$; les deux suites horizontales sont exactes. Comme \mathbb{R} n'est pas compacte, λ_* est injective. On déduit donc, de ce diagramme, qu'il existe un homomorphisme injectif

$$\bigoplus_{n=m+1}^{\infty} \text{Coker}(\partial_n) \rightarrow H_1(M, \bar{\Sigma}_0).$$

Or, $\partial_n[\bar{\Gamma}_n, \partial\Gamma_n] = m_n \cdot [(\partial\delta_n) \times b]$, où m_n est l'ordre de f sur la fibre $f^{-1}(a_n)$ est > 1 ; donc, $\bigoplus_{n=m+1}^{\infty} \text{Coker}(\partial_n) \cong \bigoplus_{n=m+1}^{\infty} \mathbb{Z}/m_n \mathbb{Z}$, ainsi que $H_1(M, \bar{\Sigma}_0)$, contient une infinité d'éléments d'ordre fini. D'autre part, par hypothèse, $H_1(M)$ est de type fini en tant que \mathbb{Z} -module; le nombre des composantes connexes de $\bar{\Sigma}_0$ est égal à m ($< \infty$); par suite, $H_1(M, \bar{\Sigma}_0)$ est aussi de type fini, ce qui est absurde. $K = K_0 \cup K'$ est donc fini, ce qui achève la démonstration de la proposition 3.

En combinant ce résultat avec le théorème (NV) cité plus haut, on obtient le :

THÉOREME N. — Soit M une variété analytique complexe connexe de dimension complexe 2 telle que $H_1(M; \mathbb{Z})$ soit de type fini en tant que \mathbb{Z} -module et $H_2(M; \mathbb{Z})$ de rang fini sur \mathbb{Z} ; $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ une application algébrique primitive de M sur une surface de Riemann \mathbb{R} .

Il existe alors, une variété analytique complexe \tilde{M} de dimension complexe 2 munie d'une projection holomorphe propre $\tilde{f}: \tilde{M} \rightarrow R$ et un isomorphisme analytique Φ de M sur un ouvert $\Phi(M)$ de \tilde{M} tels que $f = \tilde{f} \circ \Phi$. Si en outre R est de type algébrique i. e. un ouvert de Zariski d'une surface de Riemann compacte \bar{R} , on peut alors trouver une variété analytique compacte \bar{M} de dimension complexe 2 munie d'une projection holomorphe $\bar{f}: \bar{M} \rightarrow \bar{R}$ et un isomorphisme analytique Ψ de M sur un ouvert $\Psi(M)$ de \bar{M} tels que $f = \bar{f} \circ \Psi$. Dans les deux cas, $\tilde{M} - \Phi(M)$ [resp. $\bar{M} - \Psi(M)$] est un sous-ensemble analytique de \tilde{M} (resp. de \bar{M}) de (co-) dimension pure 1.

11. FONCTIONS DE TYPE ALGÈBRE SUR C^2 . — Soit f une fonction méromorphe non-constante de type algébrique sur l'espace C^2 des deux variables complexes x, y ; c'est-à-dire, τ étant l'ensemble des points d'indétermination de f , l'application $f: C^2 - \tau \rightarrow CP^1$ est algébrique au sens du n° 8. Soit (R, f_0) l'espace de base de f . Comme $C^2 - \tau$ est simplement connexe, R est, d'après la Remarque du n° 8, analytiquement isomorphe à C ou à CP^1 , compte tenu du fait qu'il n'existe aucune fonction holomorphe bornée et non-constante sur $C^2 - \tau$. On peut donc considérer f_0 comme une fonction holomorphe ou méromorphe de type algébrique sur C^2 ; on l'appellera *fonction primitive associée à f* . On a une fonction méromorphe ξ sur R ($= C$ ou CP^1) telle que $f = \xi(f_0)$. Si f est rationnelle, f_0 et ξ sont aussi rationnelles.

Supposons maintenant que f est primitive (i. e. $f_0 = f$). Comme une fibre générique de f est irréductible, de type algébrique et passe par tous les points de τ , τ consiste en un nombre fini de points. Donc, d'après le théorème N ci-dessus, il existe une surface analytique complexe compacte V munie d'une projection holomorphe $\bar{f}: V \rightarrow CP^1$ et une application holomorphe injective Ψ de $C^2 - \tau$ dans V telles que $f = \bar{f} \circ \Psi$. Soit Q une boule $|x|^2 + |y|^2 < r$ dans C^2 contenant τ . On peut alors contracter les courbes analytiques compactes dans l'adhérence $\bar{\Psi}(Q - \tau)$. Désignons par V_* l'espace analytique (normal) obtenu par cette modification. Alors, l'application composée

$$C^2 - \tau \xrightarrow{\Psi} V \xrightarrow{\text{projection}} V_*$$

se prolonge par continuité en une application holomorphe injective $\Psi_*: C^2 \rightarrow V_*$. Par suite, V_* (normal) est non-singulier. Comme $V_* - \Psi_*(C^2)$ est un sous-ensemble analytique de codimension 1, le premier nombre de Betti de V_* est nul. Par suite, d'après K. Kodaira [4], V_* est une surface complexe rationnelle. Évidemment $f \circ \Psi_*^{-1}$ est méromorphe sur V_* . Donc, de façon tout à fait analogue au cas traité par T. Nishino [5 V], on a, d'après J. A. Morrow, une application birationnelle ϕ de V_* à CP^2 qui envoie $\Psi_*(C^2)$ sur C^2 ($\subset CP^2$) binnivoquement. On obtient ainsi un automorphisme analytique $\alpha = \phi \circ \Psi_*: C^2 \rightarrow C^2$ tel que $f \circ \alpha^{-1}$ soit méromorphe sur CP^2 , c'est-à-dire rationnelle. On a donc :

THÉORÈME N'. — Si f est une fonction méromorphe primitive de type algébrique sur l'espace C^2 de deux variables complexes x, y , il existe alors une fonction rationnelle primitive ϕ de x, y et un automorphisme analytique α de C^2 tels que $f = \phi \circ \alpha$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] W. J. BAILY, *On the Theory of θ -Fonctions, the Moduli of Abelian Varieties and the Moduli of Curves* (*Ann. Math.*, vol. 75, 1962, p. 342-381).
- [2] H. CARTAN-J.-P. SERRE, *Un théorème de finitude concernant les variétés analytiques complexes* (*C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 237, 1953, p. 128-130).
- [3] K. KODAIRA, *On Cohomology Groups of Compact Analytic Varieties with Coefficients in Some Analytic Faisceaux* (*Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A.*, vol. 39, 1953, p. 865-868).
- [4] K. KODAIRA, *Holomorphic Mappings of Polydiscs into Compact Complex Manifolds* (*J. Diff. Geom.*, vol. 6, 1971, p. 33-46).
- [5] T. NISHINO, *Nouvelles recherches sur les fonctions entières de plusieurs variables complexes*, III, IV, V (*J. Math. Kyoto Univ.*, vol. 10, 1970, p. 245-271; vol. 13, 1973, p. 217-272 et vol. 15, 1975, p. 527-553).
- [6] T. NISHINO, *Continuations analytiques au sens de Riemann* (à paraître).
- [7] R. RENTSCHLER, *Opérations du groupe additif sur le plan affine* (*C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 267, 1968, p. 384-387).
- [8] R. W. RICHARDSON, *Principal Orbit Type for Reductive Groups Acting on Stein Manifolds* (*Math. Ann.*, vol. 208, 1974, p. 323-331).
- [9] H. SAITO, *Fonctions entières qui se réduisent à certains polynômes (1)* (*Osaka J. Math.*, vol. 9, 1972, p. 293-332).
- [10] K. STEIN, *Analytische Projection komplexer Mannigfaltigkeiten* (*Colloque Bruxell*, 1953, p. 87-107).
- [11] K. STEIN, *Die Existenz komplexer Basen zu holomorphen Abbildungen* (*Math. Ann.*, vol. 136, 1958, p. 1-8).
- [12] M. SUZUKI, *Propriétés topologiques des polynômes de deux variables complexes, et automorphismes algébriques de l'espace \mathbb{C}^2* (*J. Math. Soc. Japan*, vol. 26, 1974, p. 241-257).
- [13] M. SUZUKI, *Sur les intégrales premières de certains feuilletages analytiques complexes* (*Séminaire F. Norguet*, 1975-1976, Springer, p. 31-57).
- [14] M. SUZUKI, *Sur les opérations holomorphes de \mathbb{C} et de \mathbb{C}^* sur un espace de Stein* (*Séminaire F. Norguet*, 1975-1976, Springer, p. 58-66).
- [15] M. SUZUKI, *Note sur les opérations holomorphes de \mathbb{C} sur \mathbb{C}^2* [*Séminaire de R. Gérard et J.-P. Ramis*, Springer (à paraître)].

(Manuscrit reçu le 21 juin 1977)

Masakazu SUZUKI,
 Faculté de Technologie,
 Université de Kyushu,
 Hakozaki, Higashi-ku,
 Fukuoka 812,
 Japon.