

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

GEIR ELLINGSRUD

Sur le schéma de Hilbert des variétés de codimension 2 dans P^e à cône de Cohen-Macaulay

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 8, n° 4 (1975), p. 423-431

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1975_4_8_4_423_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LE SCHÉMA DE HILBERT DES VARIÉTÉS DE CODIMENSION 2 DANS \mathbf{P}^e À CÔNE DE COHEN-MACAULAY

PAR GEIR ELLINGSRUD (*)

Les sous-schémas fermés de codimension 2 de \mathbf{P}_k^e ayant un cône projetant de Cohen-Macaulay correspondent à des points lisses du schéma de Hilbert. Ce résultat est démontré par Fogarty [F] pour $e = 2$. On démontre ici ce résultat pour $e \geq 3$ et on calcule la dimension des anneaux locaux de ces points.

La méthode utilisée ici est différente de celle de Fogarty et ne s'applique pas dans le cas $e = 2$. Elle repose essentiellement sur les deux faits suivants :

1. Soit X une famille de sous-schémas fermés, plate sur un anneau local, noethérien A , à corps résiduel k et soit X_0 sa fibre spéciale. Si le cône projetant C_0 de X_0 est de profondeur supérieure ou égale à 2 alors le cône projetant C de X est plat sur A et $C \otimes_A k = C_0$.

2. Si $Y \subseteq \mathbf{P}_k^e$ est de codimension 2 à cône projetant de Cohen-Macaulay alors ce cône admet une résolution déterminentielle de longueur 2.

Cette dernière remarque permet de calculer la dimension de la composante irréductible du schéma de Hilbert contenant Y comme fonction de certains entiers associés à la résolution.

On donne enfin quelques exemples qui permettent de mieux comprendre la situation. Certains de ces exemples sont déjà étudiés par M. Noether dans son article fondamental sur les courbes de l'espace [N].

Soit A un anneau noethérien et e un entier positif. On notera R_A l'anneau $A[X_0, \dots, X_e]$ et R_A^+ l'idéal (X_0, \dots, X_e) . Si $X \subseteq \mathbf{P}_A^e$ est un sous-schéma fermé et \mathfrak{A} un idéal homogène, maximal parmi ceux qui définissent X , on appellera R_A/\mathfrak{A} le cône minimal de X et on le notera $C_A(X)$. Il est caractérisé par le fait que R_A^+ n'est contenu dans aucun de ses idéaux premiers associés.

(*) Université d'Oslo, I.R.M.A., Strasbourg, 1973-1974.

Soient maintenant k un corps et $X \subseteq \mathbf{P}_k^e$ un sous-schéma fermé. Il existe une résolution libre, graduée de $C_k(X)$ en tant que R_k -module :

$$(1) \quad 0 \rightarrow \bigoplus_{j=1}^{m_s} R_k[-n_{s,j}] \xrightarrow{\varphi_s} \bigoplus_{j=1}^{m_{s-1}} R_k[-n_{s-1,j}] \xrightarrow{\varphi_{s-1}} \dots \rightarrow \bigoplus_{j=1}^{m_1} R_k[-n_{1,j}] \xrightarrow{\varphi_1} R_k \rightarrow C_k(X) \rightarrow 0,$$

où les n_{ij} sont des entiers positifs et chaque φ_i est homogène de degré 0. Notons par (n_{ij}) la suite d'ensembles $(\{n_{1,1}, \dots, n_{1,m_1}\}, \dots, \{n_{s,1}, \dots, n_{s,m_s}\})$; nous dirons que X est de type (n_{ij}) . On appellera s la longueur de la suite (n_{ij}) . Si (1) est une résolution minimale par rapport à l'idéal maximal R_k^+ , (n_{ij}) est uniquement déterminée par X , et on dira que X est de type minimal (n_{ij}) . Sinon il existe pour certains i une sous-matrice carrée, inversible, maximale Ψ_i de φ_i qui définit un isomorphisme

$$\bigoplus_{j \in I_i} R_k[-n_{i,j}] \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{j \in J_{i-1}} R_k[-n_{i-1,j}]$$

pour certains sous-ensembles $I_i \subseteq \{1, \dots, m_i\}$ et $J_{i-1} \subseteq \{1, \dots, m_{i-1}\}$. Il existe alors une bijection $\sigma_i : I_i \rightarrow J_{i-1}$ telle que $n_{ij} = n_{i-1, \sigma(j)}$. Soit (n'_{ij}) la suite obtenue à partir de (n_{ij}) en supprimant $\{n_{ij}\}_{j \in I_i}$ et $\{n_{i-1,j}\}_{j \in J_{i-1}}$ pour les i en question. Nous dirons que (n_{ij}) prolonge (n'_{ij}) .

Le polynôme de Hilbert P de X est bien déterminé par (n_{ij}) . Soit \tilde{X} le sous-schéma fermé, universel de $\mathbf{P}_k^e \times \text{Hilb}^P$. Définissons le sous-ensemble $U_{(n_{ij})}$ de Hilb^P par

$$U_{(n_{ij})} = \{x \in \text{Hilb}^P \mid \tilde{X} \otimes k(x) \text{ est de type } (n_{ij})\}.$$

THÉORÈME 1. — *Si la longueur de (n_{ij}) est inférieure ou égale à $e-1$, alors $U_{(n_{ij})}$ est un ouvert dans Hilb^P .*

Remarque 1. — Si X est de type (n_{ij}) alors $s \leq e-1$ implique que le cône minimal de X est de profondeur supérieure ou égale à 2.

De plus, si pour tout point de $U_{(n_{ij})}$ le schéma correspondant a un cône minimal de profondeur supérieure ou égale à 2, alors il existe (n'_{ij}) de longueur inférieure ou égale à $e-1$ telle que $U_{(n_{ij})} = U_{(n'_{ij})}$.

Remarque 2. — L'hypothèse $s \leq e-1$ est nécessaire comme le montre l'exemple suivant. Dans le schéma de Hilbert des sous-schémas finis de \mathbf{P}_k^2 de degré 3, les sous-schémas qui sont contenus dans une droite, forment un fermé de codimension 1. Ils forment aussi l'ensemble $U_{(\{1,3\}, \{4\})}$.

La proposition-clé de la démonstration du théorème est la suivante :

PROPOSITION 1. — *Soit A un anneau local, noethérien, de corps résiduel k . Soit $X \subseteq \mathbf{P}_A^e$ un sous-schéma fermé, plat sur A , et soit $X_0 = X \otimes k$. Soit*

$$\begin{aligned} L_k : \quad 0 \rightarrow \bigoplus_{j=1}^{m_s} R_k[-n_{s,j}] &\xrightarrow{\varphi_s} \bigoplus_{j=1}^{m_{s-1}} R_k[-n_{s-1,j}] \xrightarrow{\varphi_{s-1}} \dots \\ &\rightarrow \bigoplus_{j=1}^{m_1} R_k[-n_{1,j}] \xrightarrow{\varphi_1} R_k \rightarrow C_k(X_0) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

une résolution libre, graduée de $C_k(X_0)$ à homomorphismes de degré 0. Supposons que $\text{prof } C_k(X_0) \geq 2$. Alors :

- (i) $C_A(X)$ est A-plat et $C_A(X) \otimes k = C_k(X_0)$;
- (ii) $C_A(X) \simeq \bigoplus_v H^0(X, \mathcal{O}_X(v))$;
- (iii) il existe une résolution libre, graduée à homomorphismes de degré 0 :

$$\begin{aligned} L_A : \quad 0 \rightarrow \bigoplus_{j=1}^{m_s} R_A[-n_{s,j}] \xrightarrow{\varphi'_s} \bigoplus_{j=1}^{m_{s-1}} R_A[-n_{s-1,j}] \xrightarrow{\varphi'_{s-1}} \dots \\ \rightarrow \bigoplus_{j=1}^{m_1} R_A[-n_{1,j}] \xrightarrow{\varphi'_1} R_A \rightarrow C_A(X) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

telle que

$$L_A \otimes k \simeq L_k.$$

Démonstration. — Comme R_A^+ n'est contenu dans aucun des idéaux associés à $C_A(X)$, on a une suite exacte

$$0 \rightarrow C_A(X) \xrightarrow{d} \bigoplus_v H^0(X, \mathcal{O}_X(v)) \rightarrow H \rightarrow 0.$$

En tensorisant par k on obtient un diagramme

$$\begin{array}{ccc} C_A(X) \otimes k & \xrightarrow{d \otimes k} & \bigoplus_v H^0(X, \mathcal{O}_X(v)) \otimes k \rightarrow H \otimes k \rightarrow 0 \\ \gamma \downarrow & & \downarrow \bigoplus_v \beta_v \\ C_k(X_0) & \xrightarrow{\rho} & \bigoplus_v H^0(X_0, \mathcal{O}_{X_0}(v)) \end{array}$$

dans lequel tous les homomorphismes sont canoniques et le carré est commutatif. Comme γ est surjectif et comme ρ est un isomorphisme car $\text{prof } C_k(X_0) \geq 2$ alors $\bigoplus_v \beta_v$ est surjectif. D'après le théorème de changement de base ([EGA], Chap. 3, § 7.7 et 7.8), chaque β_v est un isomorphisme et chaque $H^0(X, \mathcal{O}_X(v))$ est A-plat. Donc $\bigoplus_v \beta_v$ est un isomorphisme et $\bigoplus_v H^0(X, \mathcal{O}_X(v))$ est A-plat. Alors $d \otimes k$ est surjectif et $H \otimes k = 0$. Comme H est une somme directe de A-modules de type fini, $H = 0$ d'après le lemme de Nakayama. Donc d est un isomorphisme, ce qui démontre (i) et (ii).

En relevant les φ_i successivement on voit qu'il existe un complexe gradué à homomorphismes de degré 0 :

$$\begin{aligned} L_A : \quad 0 \rightarrow \bigoplus_{j=1}^{m_s} R_A[-n_{s,j}] \xrightarrow{\varphi'_s} \bigoplus_{j=1}^{m_{s-1}} R_A[-n_{s-1,j}] \xrightarrow{\varphi'_{s-1}} \dots \\ \rightarrow \bigoplus_{j=1}^{m_1} R_A[-n_{1,j}] \xrightarrow{\varphi'_1} R_A \rightarrow C_A(X) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Comme $C_A(X)$ est plat sur A, l'exactitude de L_A se déduit du lemme de Nakayama.

Démontrons maintenant le théorème 1. Soit $x \in U_{(n_{ij})}$ et soit A l'anneau local de Hilb^P au point x . Soient $k = k(x)$, $X = \tilde{X} \otimes A$ et $X_0 = X \otimes k$. Soit $\text{Spec } B'$ un voisinage affine de x . Comme A est B' -plat, on a $C_A(X) = C_{B'}(\tilde{X} \otimes B') \otimes A$.

Regardons le complexe L_A de la proposition. Chaque ϕ'_i est donné par un système de générateurs homogènes de $\ker \phi'_{i-1}$. Un tel système ne contenant qu'un nombre fini d'éléments on trouve en effectuant une récurrence sur i , un voisinage affine $\text{Spec } B$ de x sur lequel il existe un complexe

$$\begin{aligned} L_B : 0 \rightarrow \bigoplus_{j=1}^{m_s} R_B[-n_{s,j}] \rightarrow \bigoplus_{j=1}^{m_{s-1}} R_B[-n_{s-1,j}] \rightarrow \dots \\ \rightarrow \bigoplus_{j=1}^{m_1} R_B[-n_{1,j}] \rightarrow R_B \rightarrow C_B(\tilde{X} \otimes B) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

prolongeant L_A , et dont les homomorphismes sont de degré 0. D'après le lemme 6.3 de [PS 1] l'ensemble des points $y \in \text{Spec } B$ tels que $L_B \otimes k(y)$ est exact, forme un ouvert qui est bien contenu dans $U_{(n_{ij})}$.

THÉORÈME 2. — *Supposons que les points de Hilb^P correspondent à des sous-schémas fermés de codimension 2 de \mathbb{P}_k^e .*

(i) *Les sous-schémas fermés ayant un cône minimal de Cohen-Macaulay forment un ouvert lisse U de Hilb^P .*

Pour $e \geq 3$ on a :

(ii) *Si la longueur de (n_{ij}) est 2, alors l'ouvert $U_{(n_{ij})}$ de Hilb^P est lisse et connexe de dimension*

$$\begin{aligned} \sum_{n_{2i} \geq n_{1j}} \binom{n_{2i} - n_{1j} + e}{e} + \sum_{n_{1j} \geq n_{2i}} \binom{n_{1j} - n_{2i} + e}{e} \\ - \sum_{n_{2i} \geq n_{2j}} \binom{n_{2i} - n_{2j} + e}{e} - \sum_{n_{1j} \geq n_{1i}} \binom{n_{1j} - n_{1i} + e}{e} + 1. \end{aligned}$$

(iii) *Les $U_{(n_{ij})}$ forment un recouvrement de U . De plus $U_{(n_{ij})} \cap U_{(n'_{ij})} \neq \emptyset$ si et seulement si il existe (n''_{ij}) telle que (n_{ij}) et (n'_{ij}) prolongent (n''_{ij}) , et telle qu'il existe un sous-schéma de type (n''_{ij}) .*

Remarque. — Pour $e = 2$, il s'agit d'un théorème de Fogarty ([F], Th. 2.4). Nous n'étudierons donc que le cas $e \geq 3$. Dans ce cas (i) se déduit immédiatement de (ii) et (iii). En effet dire que le cône minimal de X est de Cohen-Macaulay, lorsque X est de codimension 2 dans \mathbb{P}_k^e , est équivalent à dire que X est de type (n_{ij}) avec longueur $(n_{ij}) = 2$.

Démonstration. — Soit $x \in U_{(n_{ij})}$ et soit A l'anneau local de $\text{Hilb}_{\mathbb{P}_k^e}^P$ au point x .

Il suffit pour démontrer la lissitude de prouver qu'on peut compléter chaque diagramme

$$\begin{array}{ccc} & C' & \\ & \downarrow & \swarrow \\ & C & \longleftarrow A \end{array}$$

où $C' \twoheadrightarrow C$ est une surjection d'algèbres artiniennes, locales. D'après la définition du schéma de Hilbert il est équivalent de trouver un sous-schéma fermé $X' \subseteq \mathbf{P}_{C'}^e$, plat sur C' , vérifiant $\tilde{X}' \otimes C = \tilde{X} \otimes C$.

Soit $I = \ker(C' \twoheadrightarrow C)$. On peut supposer que $I^2 = 0$.

Comme $\text{prof } C_k(X_0) \geq 2$, on déduit de la proposition 1 et de [PS 2] (Chap. 1, Th. 3.3), la suite exacte

$$L_C : 0 \rightarrow \bigoplus_{j=1}^{m-1} R_C[-n_{2j}] \xrightarrow{\Phi} \bigoplus_{j=1}^m R_C[-n_{1j}] \xrightarrow[\wedge \Phi^v]{m-1} R_C \rightarrow C_C(\tilde{X} \otimes C) \rightarrow 0,$$

où Φ est une matrice $m \times (m-1)$ à coefficients homogènes de degré $n_{2j} - n_{1i}$ dans R_C . En relevant Φ à une matrice Φ_1 à coefficients homogènes de degré $n_{2j} - n_{1i}$ dans $R_{C'}$ on obtient un complexe

$$L_{C'} : 0 \rightarrow \bigoplus_{j=1}^{m-1} R_{C'}[-n_{2j}] \xrightarrow{\Phi_1} \bigoplus_{j=1}^m R_{C'}[-n_{1j}] \xrightarrow[\wedge \Phi_1^v]{m-1} R_{C'}.$$

Comme $I^2 = 0$, on a que $IL_{C'} = I \otimes L_C$ qui est exacte parce que $C_C(\tilde{X} \otimes C)$ est plat. La suite d'homologie associée à la suite exacte

$$0 \rightarrow I \otimes L_C \rightarrow L_{C'} \rightarrow L_C \rightarrow 0,$$

montre que $L_{C'}$ est exact. Donc $\text{Tor}_1^{C'}(H_0(L_{C'}), C) = 0$ et comme

$$H_0(L_{C'}) \otimes C = C_C(\tilde{X} \otimes C)$$

est plat, $H_0(L_{C'})$ est plat d'après le critère local de platitude.

$$\text{Proj } H_0(L_{C'}) \subseteq \text{Proj } R_{C'} = \mathbf{P}_{C'}^e$$

est le sous-schéma cherché.

Montrons maintenant l'irréductibilité de $U_{(n_{ij})}$. Dans [PS 1] (Th. 6.2) il est démontré qu'il existe un ouvert $Z_{(n_{ij})} \subseteq \mathbf{P}^{N-1}$ où

$$N = \sum_{n_{2j} \geq n_{1i}} \binom{n_{2j} - n_{1i} + e}{e},$$

et une matrice $\Phi_{(n_{ij})}$ à coefficients homogènes de degré $n_{2j} - n_{1i}$ dans $\Gamma(\mathcal{O}_{Z_{(n_{ij})}})[X_0, \dots, X_e]$ ayant la propriété suivante. (On y suppose $n_{2j} > n_{1i}$ pour tous i et j , mais la démon-

tration de ce point ne nécessite pas cette hypothèse.) Soient B une k -algèbre et Φ une matrice à coefficients homogènes de degré $n_{2j} - n_{1j}$ dans R_B . Soit $L(\Phi)$ le complexe

$$0 \rightarrow \bigoplus_{j=1}^{m-1} R_B[-n_{2j}] \rightarrow \bigoplus_{\Phi, j=1}^m R_B[-n_{1j}] \xrightarrow[\wedge \Phi^v]{m-1} R_B.$$

Alors si $L(\Phi) \otimes k(y)$ est exact pour tout $y \in \text{Spec } B$ il existe un morphisme unique $f : \text{Spec } B \rightarrow Z_{(n_{ij})}$ avec $f^* \Phi_{(n_{ij})} = \alpha \Phi$ pour un élément $\alpha \in k^* = k - \{0\}$.

$L(\Phi_{(n_{ij})})$ est exacte et $H_0(L(\Phi_{(n_{ij})}))$ est plat sur $\mathcal{O}_{Z_{(n_{ij})}}$. Le faisceau d'algèbres graduées $H_0(L(\Phi_{(n_{ij})}))$ définit donc un sous-schéma fermé $X_{(n_{ij})} \subseteq \mathbf{P}^e \times Z_{(n_{ij})}$, plat sur $Z_{(n_{ij})}$ dont les fibres ont P comme polynôme de Hilbert. Il existe alors un morphisme unique $h : Z_{(n_{ij})} \rightarrow \text{Hilb}_{\mathbf{P}_k^e}$ avec $h^* \tilde{X} = X_{(n_{ij})}$. On voit facilement que l'image de h est $U_{(n_{ij})}$. Comme $Z_{(n_{ij})}$ est un ouvert dans \mathbf{P}^{N-1} , il est irréductible. Alors $U_{(n_{ij})}$ est irréductible.

Pour calculer la dimension de $U_{(n_{ij})}$ nous aurons besoin du lemme qui suit sur les relèvements d'un module gradué (nous n'en donnerons pas la démonstration).

Soit C un anneau. Si M et N sont des R_C -modules gradués de type fini, alors les modules $\text{Ext}_{R_C}^i(M, N)$ ont une graduation induite par celles de M et N . Nous désignerons par M_v la composante de degré v d'un module gradué M .

LEMME. — Soit $C' \twoheadrightarrow C$ une surjection d'anneaux de noyau I . Supposons que $I^2 = 0$. Soit M un R_C -module gradué de type fini, plat sur C . Alors l'ensemble

$$\left\{ M' \mid \begin{array}{l} M' \text{ } R_{C'}\text{-module gradué plat sur } C' \\ \text{avec } M' \otimes C \simeq M \end{array} \right\} / \text{isomorphismes relevant l'identité}$$

est un espace homogène principal sous $\text{Ext}_{R_C}^1(M, M \otimes I)_0$.

Soient maintenant $x \in U_{(n_{ij})}$ et t_x l'espace tangent de Hilb^P au point x . Soit

$$X_0 = \tilde{X} \otimes k(x).$$

Notons $k[\varepsilon]$ l'algèbre $k[T]/T^2$. D'après la proposition 1 et le lemme, il y a des isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned} t_X &\simeq \{ X \subset \mathbf{P}_{k[\varepsilon]}^e \mid X \text{ plat, } X \otimes k(x) = X_0 \} \\ &\simeq \{ M \mid M \text{ } R_{k[\varepsilon]}\text{-module gradué, avec } M \otimes k \simeq C_k(X_0) \} \simeq \text{Ext}_{R_k}^1(C_k(X_0), C_k(X_0))_0. \end{aligned}$$

Soient $R = R_k$ et $C_k(X_0) \simeq R/\mathfrak{A}$. Il existe une résolution graduée à homomorphismes de degré 0 :

$$(1) \quad 0 \rightarrow \bigoplus_{j=1}^{m-1} R[-n_{2j}] \rightarrow \bigoplus_{j=1}^m R[-n_{1j}] \rightarrow R \rightarrow R/\mathfrak{A} \rightarrow 0.$$

En appliquant le foncteur $\text{Hom}_R(-, R/\mathfrak{A})$ on obtient la suite exacte à homomorphismes de degré 0 :

$$(2) \quad 0 \rightarrow \text{Ext}_R^1(R/\mathfrak{A}, R/\mathfrak{A}) \rightarrow \bigoplus_{j=1}^m R/\mathfrak{A}[n_{1j}] \rightarrow \bigoplus_{j=1}^{m-1} R/\mathfrak{A}[n_{2j}] \rightarrow \text{Ext}_R^2(R/\mathfrak{A}, R/\mathfrak{A}) \rightarrow 0.$$

D'où

$$\dim \text{Ext}_{\mathbf{R}}^1(\mathbf{R}/\mathfrak{A}, \mathbf{R}/\mathfrak{A})_0 = \sum_{j=1}^m \dim(\mathbf{R}/\mathfrak{A})_{n_{1j}} - \sum_{j=1}^{m-1} \dim(\mathbf{R}/\mathfrak{A})_{n_{2j}} \\ + \dim \text{Ext}_{\mathbf{R}}^2(\mathbf{R}/\mathfrak{A}, \mathbf{R}/\mathfrak{A})_0.$$

Comme d. p. $\mathbf{R}/\mathfrak{A} = 2$ il y a un isomorphisme $\text{Ext}_{\mathbf{R}}^2(\mathbf{R}/\mathfrak{A}, \mathbf{R}/\mathfrak{A}) \simeq \text{Ext}^2(\mathbf{R}/\mathfrak{A}, \mathbf{R})$.

Comme $\text{Ext}^i(\mathbf{R}/\mathfrak{A}, \mathbf{R}) = 0$ pour $i < 2$, on obtient à partir de (1) une suite exacte

$$(3) \quad 0 \rightarrow \mathbf{R} \rightarrow \bigoplus_{j=1}^m \mathbf{R}[n_{1j}] \rightarrow \bigoplus_{j=1}^{m-1} \mathbf{R}[n_{2j}] \rightarrow \text{Ext}_{\mathbf{R}}^2(\mathbf{R}/\mathfrak{A}, \mathbf{R}) \rightarrow 0.$$

Alors, d'après (1) :

$$\sum_{j=1}^m \dim(\mathbf{R}/\mathfrak{A})_{n_{1j}} = \sum_{j=1}^m \left[\binom{n_{1j}+e}{e} - \sum_{n_{1j} \geq n_{2i}} \binom{n_{1j}-n_{2i}+e}{e} + \sum_{n_{1j} \geq n_{1i}} \binom{n_{1j}-n_{1i}+e}{e} \right], \\ \sum_{j=1}^{m-1} \dim(\mathbf{R}/\mathfrak{A})_{n_{2j}} = \sum_{j=1}^{m-1} \left[\binom{n_{2j}+e}{e} - \sum_{n_{2j} \geq n_{1i}} \binom{n_{2j}-n_{1i}+e}{e} + \sum_{n_{2j} \geq n_{2i}} \binom{n_{2j}-n_{2i}+e}{e} \right],$$

et d'après (3) :

$$\dim \text{Ext}_{\mathbf{R}}^2(\mathbf{R}/\mathfrak{A}, \mathbf{R}/\mathfrak{A})_0 = \sum_{j=1}^{m-1} \binom{n_{2j}+e}{e} - \sum_{j=1}^m \binom{n_{1j}+e}{e} + 1.$$

On en déduit la formule annoncée.

Remarque. — On peut aussi déterminer la dimension de $U_{(n_{ij})}$ en calculant les fibres du morphisme $h : Z_{(n_{ij})} \rightarrow \text{Hilb}^P$. Soit G le groupe algébrique des couples des matrices (A, B) où A (resp. B) induit un \mathbf{R}_k -automorphisme gradué de degré 0 de

$$\bigoplus_{j=1}^m \mathbf{R}_k[-n_{1j}] \left(\text{resp. } \bigoplus_{j=1}^{m-1} \mathbf{R}_k[-n_{2j}] \right).$$

G est de dimension

$$\sum_{n_{1j} \geq n_{1i}} \binom{n_{1j}-n_{1i}+e}{e} + \sum_{n_{2j} \geq n_{2i}} \binom{n_{2j}-n_{2i}+e}{e}.$$

G opère sur $Z_{(n_{ij})}$ par $\Phi \rightarrow A \Phi B^{-1}$. Il est clair que G opère transitivement sur la fibre d'un k -point de $U_{(n_{ij})}$. Le stabilisateur de Φ est constitué par les isomorphismes entre $L(\Phi)$ et $L(\alpha \Phi)$ pour $\alpha \in k^*$; un tel isomorphisme se compose d'une homotopie de $L(\Phi)$, d'une homothétie de $L(\Phi)$ et d'un isomorphisme de type

$$\begin{array}{ccc} 0 \rightarrow \bigoplus \mathbf{R}[-n_{2j}] \xrightarrow{\Phi} \bigoplus \mathbf{R}[-n_{1j}] \xrightarrow{\bigwedge^{m-1} \Phi^v} \mathbf{R} \\ \alpha(m-1)^2 - 1 \downarrow \qquad \qquad \downarrow \alpha(m-1)^2 \qquad \qquad \parallel \\ 0 \rightarrow \bigoplus \mathbf{R}[-n_{2j}] \xrightarrow{\alpha \Phi} \bigoplus \mathbf{R}[-n_{1j}] \xrightarrow{\bigwedge^{m-1} (\alpha \Phi)^v} \mathbf{R} \end{array}$$

Le stabilisateur est donc isomorphe à

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{R}} \left(\bigoplus_{j=1}^m \mathbf{R}[-n_{1j}], \bigoplus_{j=1}^{m-1} \mathbf{R}[-n_{2j}] \right)_0 \times k^{*2},$$

et sa dimension est

$$\sum_{n_{1j} \geq n_{2i}} \binom{n_{1j} - n_{2i} + e}{e}.$$

On en déduit la dimension de $U_{(n_{ij})}$.

Exemples. — Comme M. Noether [N], nous noterons R_d^g l'ouvert du schéma de Hilbert formé des courbes équidimensionnelles, sans composantes immergées, dans $\mathbf{P}_k^3 = \mathbf{P}$, de genre g et de degré d . Étudions quelques cas particuliers.

1. $g = 0, d = 3$. Dans ce cas, toutes courbes de R_3^0 est projectivement Cohen-Macaulay de type $t = (\{2, 2, 2\}, \{3, 3\})$, donc R_3^0 est lisse, connexe de dimension 12, d'après le théorème 2. En effet, soit X une telle courbe et soit \mathcal{J} le faisceau d'idéaux la définissant dans \mathbf{P} . On montre, que $\dim H^0(\mathbf{P}, \mathcal{J}(2)) \geq 3$. Il existe alors S_1, S_2 deux surfaces de degré 2, s'intersectant proprement et contenant X . Sinon il existe des formes linéaires l_0, l_1, l_2, l_3 telles que l_1, l_2, l_3 soient linéairement indépendantes et que $l_0 l_1, l_0 l_2, l_0 l_3 \in H^0(\mathbf{P}, \mathcal{J}(2))$ ce qui est impossible parce que X est équidimensionnelle et sans composantes immergées. Alors $S_1 \cap S_2$ est la réunion de X et d'une droite. On en déduit le résultat annoncé d'après [PS 1] (prop. 1.2 et § 3).

2. $g = 3, d = 6$. Dans l'ouvert des courbes réduites et irréductibles de R_6^3 les courbes projectivement Cohen-Macaulay sont toutes de type $t = (\{3, 3, 3, 3\}, \{4, 4, 4\})$ et forment un ouvert lisse connexe de dimension 24, alors que les courbes dont le cône minimal n'est pas Cohen-Macaulay forment un fermé de dimension 23. De plus, on peut montrer que l'ouvert et le fermé contiennent des courbes lisses connexes.

En effet, soit X une courbe réduite et irréductible de R_6^3 et soit \mathcal{J} le faisceau d'idéaux la définissant. Comme le degré de $\mathcal{O}_X(3)$ est supérieur à $2g - 2$ on a

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_X(3)) = 16 \quad ([M], \S 11).$$

On en déduit $\dim H^0(\mathbf{P}, \mathcal{J}(3)) \geq 4$. Deux cas se présentent :

(i) $H^0(\mathbf{P}, \mathcal{J}(2)) = 0$. Il existe alors S_1, S_2 deux surfaces de degré 3 contenant X et s'intersectant proprement. L'intersection des surfaces S_1 et S_2 est la réunion de X et d'une courbe de genre 0 et de degré 3. On en déduit que X est projectivement Cohen-Macaulay et de type t , en utilisant l'exemple précédent et [PS 1] (§ 3).

(ii) $H^0(\mathbf{P}, \mathcal{J}(2)) \neq 0$. On vérifie que $\dim H^0(\mathbf{P}, \mathcal{J}(4)) \geq 13$. Donc il existe des surfaces S_1 de degré 2 et S_2 de degré 4 contenant X et s'intersectant proprement. La courbe $S_1 \cap S_2$ est la réunion de X et d'une courbe C de degré 2, et de genre -1 . Alors C est nécessairement la réunion disjointe de deux droites, donc son cône minimal n'est pas Cohen-Macaulay et celui de X non plus d'après [PS 1] (prop. 1.2). On peut démontrer que la condition $H^0(\mathbf{P}, \mathcal{J}(2)) \neq 0$ définit un fermé de dimension 23.

3. $g = 12, d = 9$. Dans ce cas, les courbes à cône minimal de Cohen-Macaulay dans R_9^{12} forment un ouvert, lisse non-équidimensionnel, donc non-connexe. En effet, soit L une droite dans P et soient S_1 et S_2 deux surfaces de degrés respectifs 2 et 5 contenant L s'intersectant proprement. Alors $S_1 \cap S_2$ est la réunion de L et d'une courbe X de genre 12 et de degré 9. D'après ([PS 1], § 3) cette courbe est à cône minimal de Cohen-Macaulay de type $t_1 = (\{2, 5, 5\}, \{6, 6\})$. Soient S'_1 et S'_2 deux surfaces de degrés respectifs 3 et 6 contenant X et s'intersectant proprement. Alors $S'_1 \cap S'_2$ est la réunion de X et d'une courbe X' de degré 9 et de genre 12 et de type $t_2 = (\{3, 3, 3, 6\}, \{4, 4, 7\})$.

On vérifie facilement que $U_{t_1} \cap U_{t_2} = \emptyset$. D'après le théorème 2, $\dim U_{t_1} = 38$ et $\dim U_{t_2} = 39$ ce qui démontre le résultat. On peut démontrer que toute courbe réduite et irréductible de R_9^{12} est contenue dans U_{t_1} . De plus U_{t_1} contient des courbes lisses connexes ([PS 1], § 6.2).

BIBLIOGRAPHIE

- [B] L. BURCH, *On Ideals of Finite Homological Dimension in Local Rings* (Proc. Camb. Phil. Soc. Vol. 64, 1968, p. 941-948).
- [F] J. FOGARTY, *Algebraic Families on an Algebraic Surface* (Amer. J. Math., vol. 90, 1968, p. 511-521).
- [EGA] A. GROTHENDIECK, *Éléments de Géométrie Algébrique* (Publ. Math. I.H.E.S., n° 11).
- [N] M. NOETHER, *Zur Grundlegung der Theorie der Raumcurven* (Crelle Journal, 1882).
- [PS 1] C. PESKINE et L. SZPIRO, *Liaison des variétés algébriques* (Invent. Math. vol. 26, 1974, p. 271-302).
- [PS 2] C. PESKINE et L. SZPIRO, *Cohomologie locale et dimension projective finie* (Publ. Math. I.H.E.S., n° 42, p. 47-119).
- [M] D. MUMFORD, *Lectures on Curves on an Algebraic Surface* (Ann. of Math. Studies, n° 59).

(Manuscrit reçu le 14 octobre 1974.)

G. ELLINGSRUD
 Université d'Oslo,
 Institut de Mathématiques,
 Blindern, Oslo 3,
 Norvège.