LAWRENCE BREEN

Un théorème d'annulation pour certains $\mathcal{E}xt^i$ de faisceaux abéliens

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 8, nº 3 (1975), p. 339-352

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1975_4_8_3_339_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4^e série, t. 5, 1975, p. 339 à 352.

UN THÉORÈME D'ANNULATION POUR CERTAINS Ext^i DE FAISCEAUX ABÉLIENS

PAR LAWRENCE BREEN

Soient G un schéma en groupes commutatif fini et plat, H un schéma en groupes commutatif lisse, quasi-projectif, définis sur un schéma de base quelconque S. Choisissons un nombre premier p tel que toute caractéristique résiduelle non nulle p' de S satisfasse à $p' \geqq p$. On identifie les groupes G et H aux objets qu'ils représentent dans la catégorie $\mathscr{F}$ (S) des faisceaux abéliens sur S pour la topologie fidèlement plate de présentation finie (f. p. p. f.). Ceci permet de définir des groupes $\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{F}(\mathrm{S})}$ (G, H) pour $i \geqq 0$ [qu'on notera Ext^i (G, H) lorsque aucune confusion n'est possible] comme foncteurs dérivées de Hom (G, $-$) dans la catégorie abélienne $\mathscr{F}$ (S).

Contrairement à la convention habituelle, on appelle $\mathscr{E}xt^i$ (G, H) le faisceau associé pour la topologie *étale* au préfaisceau F : (Sch/S) $\to$ (Ab) défini, pour tout schéma T au-dessus de S, par

$$\mathrm{F}(\mathrm{T}) = \mathrm{Ext}^i_{\mathscr{F}(\mathrm{T})}(\mathrm{G} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{T},\ \mathrm{H} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{T}).$$

On se propose de démontrer le :

THÉORÈME. — *Supposons que* G *et* H *satisfont aux hypothèses énoncées ci-dessus et qu'en outre, pour tout nombre premier* $q < p$, *la multiplication par* q *induise un automorphisme* $q.1_{\mathrm{G}}$: $\mathrm{G} \overset{\approx}{\to} \mathrm{G}$. *Alors*, $\mathscr{E}xt^i$ (G, H) $= 0$ *pour* $1 < i < 2p-2$.

Remarques. — 1° Le théorème implique évidemment le même énoncé avec $\mathscr{E}xt^i$ le faisceau associé à Ext^i pour la topologie f. p. p. f. Dans ce dernier cas, le théorème est bien connu pour $i = 1$, H le groupe multiplicatif ([14] exp. VIII, prop. 3.3.1); il est par contre faux pour H unipotent ou H une variété abélienne non ordinaire ([18], II, 10.5, 14.4).

2° On laisse au lecteur le soin d'expliciter les applications du théorème au calcul des groupes Ext^i (G, H), *via* la suite spectrale de passage du local au global ([1] exp. V, prop. 6.9) :

$$\mathrm{E}_2^{p,q} = \mathrm{H}^p(\mathrm{S}, \mathscr{E}xt^q(\mathrm{G}, \mathrm{H})) \ \Rightarrow\ \mathrm{Ext}^{p+q}(\mathrm{G}, \mathrm{H}).$$

3° L'hypothèse sur les caractéristiques résiduelles de S est indispensable : si S est un schéma de caractéristique $p > 0$ on sait que

$$\mathscr{E}xt^{2p-2}(\alpha_p, \mathrm{H}) \neq 0$$

lorsque $\mathrm{H} = \mathbf{G}_a$ ou $\mathbf{G}_m$ [3]. Par contre, l'hypothèse que $q.1_{\mathrm{G}}$ est un isomorphisme pour $q < p$ est sans doute inutile. Lorsque l'on dispose d'une résolution partielle de G par un complexe $\mathrm{L}.(\mathrm{G})$ de longueur $i+1$ dont les composantes sont isomorphes, fonctoriellement en G, à des sommes de **Z**-modules libres engendrés par des puissances cartésiennes de G, on peut démontrer par les méthodes employées ici que $\mathscr{E}xt^i(\mathrm{G}, \mathrm{H}) = 0$ sans cette hypothèse sur G. C'est le cas, pour l'instant pour $1 < i < 5$. Une résolution partielle de longueur 3 est décrite dans [14] (VII. 3.5).

4° De toute façon cette seconde hypothèse est évidemment satisfaite pour les groupes G d'ordre n avec $(n, q) = 1$ pour tout q premier $< p$. Quant aux groupes d'ordre m, avec m inversible sur la base S, ils sont étales sur S ([8], IV_4 17.8.2 et [7], XV, lemme 1.3) et donc localement constants pour la topologie étale. La nullité des groupes $\mathscr{E}xt^i(\mathrm{G}, \mathrm{H})$ est alors élémentaire puisqu'elle résulte de la nullité des groupes Ext^i pour $i \geqq 2$ dans la catégorie des groupes abéliens abstraits.

5° Lorsque la base est un anneau artinien, on peut dévisser G en une suite exacte :

$$1 \to \mathrm{G}_0 \to \mathrm{G} \to \mathrm{G}^{\mathrm{et}} \to 1$$

avec G^{et} étale et G_0 connexe. En vertu de la remarque 4, on peut supposer $\mathrm{G} = \mathrm{G}_0$ connexe et $p > 0$. Le rang de G est alors une puissance de p, comme on le voit sur la fibre fermée ([7], $\mathrm{VII}_{\mathrm{B}}$, cor. 5.4). On sait alors que l'ordre de G est une puissance de p (*voir* [19]) et G satisfait automatiquement aux hypothèses du théorème.

6° On a vu dans [2] (§ 7) que, pour tout schéma abélien A sur une base régulière S, les groupes $\mathrm{Ext}^i(\mathrm{A}, \mathbf{G}_m)$ sont de torsion pour $i > 1$; il en est donc de même des faisceaux associés $\mathscr{E}xt^i(\mathrm{A}, \mathbf{G}_m)$. On voit maintenant que ces faisceaux sont nuls pour $2 < i < 2p-1$: en effet, à l'aide de la suite exacte de faisceaux f. p. p. f.,

$$0 \to {}_n\mathrm{A} \to \mathrm{A} \xrightarrow{n} \mathrm{A} \to 0$$

on se ramène à montrer que les faisceaux $\mathscr{E}xt^i({}_n\mathrm{A}, \mathbf{G}_m)$ sont nuls pour $1 < i < 2p-2$, et l'on peut même supposer n premier. L'assertion résulte de la remarque 4 lorsque n est inversible dans S, et du théorème lorsque n est l'une des caractéristiques résiduelles.

7° Signalons enfin l'élégante observation suivante due à P. Deligne [6] : Sur une base quelconque, $\mathscr{E}xt^i(\boldsymbol{\mu}_p, \mathrm{G}_a) = 0$ pour tout i. On considère en effet une suite exacte :

$$0 \to \boldsymbol{\mu}_p \to \mathrm{A} \xrightarrow{m} \mathrm{B} \to 0, \tag{0.1}$$

avec A et B des schémas abéliens sur S. Il suffit de vérifier que les suites spectrales d'hypercohomologie étudiées en (1.7) pour $\mathrm{G} = \mathrm{A}$ (resp. B) et $\mathrm{H} = \mathbf{G}_a$ sont isomorphes. Ceci résulte du fait que la cohomologie d'un schéma abélien est l'algèbre extérieure sur la partie de degré 1 ([20], chap. VIII, th. 10) et de ce que l'application :

$$m^* = \mathrm{H}^1(\mathrm{B}, \mathrm{O_B}) \tilde{\to} \mathrm{H}^1(\mathrm{A}, \mathrm{O_A})$$

induite par m est un isomorphisme. Ce dernier point provient de ce que

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{A}, \mathrm{O_A}) = \mathrm{Lie}(\mathrm{A}^*) \qquad [\text{resp. } \mathrm{H}^1(\mathrm{B}, \mathrm{O_B}) = \mathrm{Lie}(\mathrm{B}^*)],$$

où A* (resp. B*) désigne le schéma abélien dual de A (resp. B). Or la suite exacte duale de (0.1) est :

$$0 \to \mathbf{Z}/p \to \mathrm{A}^* \to \mathrm{B}^* \to 0$$

(*voir* [18], III, th. 19.1) ce qui entraîne l'isomorphisme souhaité :

$$m^* = \mathrm{Lie}(\mathrm{B}^*) \tilde{\to} \mathrm{Lie}(\mathrm{A}^*).$$

On remarquera que, par dévissage et en employant les techniques exposées ici, ceci admet diverses généralisations standard qu'on pourra comparer aux énoncés de [7] (XVII, § 5 et 6).

Le théorème énoncé plus haut est élémentaire dans la mesure où il n'étudie les Ext^i qu'en basses dimensions (au sens de l'énoncé du théorème). C'est pourquoi les techniques développées dans [2] se révèlent suffisantes pour le démontrer. L'étude des Ext^i pour $i \geqq 2p-2$ semble beaucoup plus ardue, et n'a été entreprise à ce jour, à l'exception du cas cité au 7°, que pour les groupes $\mathrm{Ext}^i(\mathbf{G}_a, \mathbf{G}_a)$, dans la catégorie des faisceaux de $\mathbf{F}_p$-modules (*voir* [4] et [2]).

Ce texte a été rédigé dans le cadre de l'Equipe de Recherche associée au C.N.R.S. n° 451 à l'Université de Rennes. Les commentaires qu'A. Grothendieck a bien voulu formuler à propos d'une version préliminaire de cet article m'ont été très profitables. Ils m'ont notamment permis de simplifier la démonstration du théorème et de l'énoncer sous une forme plus générale. Je tiens à l'en remercier ici.

1. Généralités et réduction du corps de base

Soit G un groupe abélien. On désigne pour $n \geqq 0$ par $\mathrm{K}(\mathrm{G}, n)$ le groupe abélien simplicial obtenu à partir du complexe $\mathrm{G}[n]$ réduit à G concentré en degré n par la construction de Dold-Puppe ([9], [15], I, chap. I, § 1.3). On rappelle que l'ensemble simplicial $\mathrm{K}(\mathrm{G}, n)$ a pour groupes d'homotopie :

$$\begin{aligned} &\pi_i(\mathrm{K}(\mathrm{G}, n)) = 0, \qquad i \neq n, \\ &\pi_n(\mathrm{K}(\mathrm{G}, n)) = \mathrm{G}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Par construction $\mathrm{K}(\mathrm{G}, n)_i$ est réduit à l'élément neutre pour $i < n$, et pour tout $i \geqq n$, $\mathrm{K}(\mathrm{G}, n)_i$ est une puissance cartésienne de G. Soit $\mathbf{Z}^+$ le foncteur de la catégorie des ensembles pointés dans la catégorie des groupes abéliens définie par

$$\mathbf{Z}^+(X, x) = \mathbf{Z}X/\mathbf{Z}x$$

pour tout ensemble pointé (X, x) (où $\mathbf{Z}X$ désigne le groupe abélien libre engendré par X). En appliquant $\mathbf{Z}^+$ composante par composante à l'ensemble simplicial $K(G, n)$, pointé par l'élément neutre, on obtient un groupe abélien simplicial $\mathbf{Z}^+ K(G, n)$. Considérons le complexe associé $[\mathbf{Z}^+ K(G, n)]^{\sim}$ dont les composantes sont celles de $\mathbf{Z}^+ K(G, n)$, et dont la différentielle est la somme alternée des opérateurs face de $\mathbf{Z}^+ K(G, n)$. $[\mathbf{Z}^+ K(G, n)]^{\sim}$ n'est rien d'autre, par définition, que le complexe de chaînes réduites sur l'ensemble simplicial $K(G, n)$. En particulier, son homologie est donc l'homologie réduite de l'espace d'Eilenberg - Mac Lane étudiée par ces auteurs en bas degrés, et dans les travaux classiques de J. P. Serre [20] et de H. Cartan [5] dans le cas général.

Il résulte des définitions que le complexe $[\mathbf{Z}^+ K(G, n)]^{\sim}$ est réduit à l'élément neutre en degrés $< n$. On appelle $A(G, n)$ le complexe obtenu par une translation de degré $-n$ à partir de celui-ci. En fait, il existe un homomorphisme de complexes

$$\sigma : A(G, n) \to A(G, n+1)$$

induit par l'application de suspension $S^1 \wedge K(G, n) \to K(G, n+1)$, et σ est un $n-1$ quasi-isomorphisme [c'est-à-dire que $H_i(\sigma)$ est un isomorphisme pour $0 \leqq i < n$] (*voir* [5]). Dorénavant, on appellera $A(G)$ un quelconque complexe $A(G, n)$, n étant choisi plus grand que le degré du groupe $\mathrm{Ext}^i(\ ,\ )$ qu'on cherche à étudier.

Remarque 1.1. — Cette notation diffère de celle d'Eilenberg - Mac Lane reprise dans [2], où l'on note $A(G)$ la limite des $A(G, n)$ suivant les homomorphismes de suspension. Par la remarque précédente, le complexe limite est $n-1$ quasi-isomorphe à $A(G, n)$ pour tout n. Pour d'autres versions du complexe limite (qui n'est autre que le complexe de chaînes réduites sur le spectre d'Eilenberg - Mac Lane) ayant un bon comportement par rapport aux morphismes induits par les accouplements de cup-produit des espaces d'Eilenberg - Mac Lane *voir* [17] et [15], II, chap. VI, 9.5.

Nous n'aurons besoin ici d'aucun de ces raffinements. Si l'on a adopté la même notation qu'en [2] pour désigner un autre complexe, c'est pour souligner que la théorie qui y est développée s'applique sans changement au complexe $A(G, n)$ tant qu'on se place en degré $\leqq n-1$.

Nous ne retiendrons du complexe $A(G)$ que les propriétés élémentaires suivantes :

A. 1° En tout degré i, on a

$$A(G)_i = \mathbf{Z}^+[X_i],$$

où $X_i = G^{s(i)}$ est une certaine puissance cartésienne de G.

A. 2° La différentielle $d_i : A(G)_i \to A(G)_{i-1}$ est la somme alternée d'opérateurs face $\mathbf{Z}^+(\partial_i^j)$ $(1 \leqq j)$ où chaque $\partial_i^j : G^{s(i)} \to G^{s(i-1)}$ est de la forme suivante :

$$\partial_i^j = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s(i-1)}),$$

chaque composante : $\alpha_r : G^{s(i)} \to G$ de ∂_i^j étant de la forme

$$\alpha_r(x_1, \ldots, x_{s(i)}) = \sum_{k \in K} x_k$$

où K est un certain sous-ensemble de l'ensemble $(1, \ldots, s(i))$.

A. 3° Soit p un nombre premier, G un groupe abélien sur lequel la multiplication par q est un isomorphisme, pour tout q premier satisfaisant $q < p$. Alors

$$\text{(1.2)} \qquad \begin{aligned} &H_i(A(G)) = 0, \qquad 0 < i < 2p-2. \\ &H_0(A(G)) = G. \end{aligned}$$

Seul le 3° ne résulte pas immédiatement des définitions. On renvoie, pour sa démonstration à [5]. En particulier A (G) fournit une résolution canonique libre partielle de G de longueur $2p-2$.

Remarque 1.2. — Par le théorème du coefficient universel, (1.4) implique que pour G un tel groupe abélien, H un groupe abélien quelconque, on a

$$\text{(1.3)} \qquad H^q(A(G), H) = 0, \qquad 1 < q < 2p-2.$$

Puisque la construction précédente est fonctorielle en G, elle se faisceautise sans difficulté. En particulier, soit G un S-schéma en groupes commutatifs qu'on identifie avec son image dans $\mathscr{F}$ (S). On sait donc lui associer un complexe de faisceaux abéliens A (G) sur S pour la topologie f. p. p. f. possédant les propriétés A.1°—A.3°, décrites plus haut, à ceci près que les énoncés sont maintenant dans la catégorie $\mathscr{F}$ (S). En particulier, on remarquera que les faisceaux X_i, puissances cartésiennes de G sur S sont représentés par les schémas en groupes $X_i = \prod G^{s(i)}$, puissances cartésiennes correspondantes dans la catégorie des S-schémas. On désigne par $f_i : X_i \to S$ le morphisme structural du S-schéma X_i. On prendra garde que, sur un objet de $\mathscr{F}$ (S) représenté par un S-schéma X (pointé par la section unité $x : S \to X$) le foncteur $\mathbf{Z}^+$ est défini de la manière suivante : $\mathbf{Z}^+(X, x)$ est le quotient dans $\mathscr{F}$ (S) de $\mathbf{Z}[X]$ par l'image de $\mathbf{Z}[S]$ *via* le morphisme $\mathbf{Z}(x)$ induit par x :

$$\mathbf{Z}^+(X, x) = \mathbf{Z}[X]/\mathbf{Z}[S].$$

Soit X_* un complexe dans une catégorie abélienne $\mathscr{A}$ possédant suffisamment d'injectifs et H un objet quelconque de $\mathscr{A}$. Rappellons qu'il existe deux suites spectrales aboutissant à l'hypercohomologie de X_* à valeurs dans H (pour plus de détails, on renvoie à [2] (§ 4 et 5).

$$\text{(1.4)} \qquad \begin{aligned} {}'E_1^{i,j} &= \mathrm{Ext}^j(X_i, H) &&\Rightarrow \mathrm{Ext}^{i+j}(X_*, H) \\ {}''E_2^{i,j} &= \mathrm{Ext}^i(H_j(X_*), H) &&\Rightarrow \mathrm{Ext}^{i+j}(X_*, H). \end{aligned}$$

La différentielle $d' : {}'E_1^{i-1,j} \to {}'E_1^{i,j}$ est la flèche induite par la différentielle $d : X_i \to X_{i-1}$ du complexe X_*. Lorsque $\mathscr{A} = \mathscr{F}$ (S), et qu'on prend pour X_* le complexe A (G) décrit plus haut [avec G un objet de $\mathscr{F}$ (S) représenté par un schéma en groupes commutatifs], le terme $'E_1^{i,j}$ s'écrit sous la forme

$$'E_1^{i,j} = \mathrm{Ext}^j(A(G)_i, H) \simeq \tilde{H}^j(X_i, H). \tag{1.5}$$

Le terme $\tilde{H}^j(X_i, H)$ désigne le groupe de cohomologie réduite de X_i à valeurs dans H, noyau de l'application

$$H^j(x): \quad H^j(X_i, H) \to H^j(S, H)$$

induite sur les groupes de cohomologie ordinaire par la section unité $x : S \to X_i$ de X_i.

L'isomorphisme (1.5) résulte de A. 1° et de l'isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^j(\mathbf{Z}^+[X], H) \simeq \tilde{H}^j(X, H)$$

valable pour un faisceau d'ensembles pointés représenté par un schéma X pointé par une section $x : S \to X$ (pour le cas non pointé, c'est la définition de la cohomologie de X, *voir* [1] II, exposé V, 2.1.2; le cas pointé en est un corollaire immédiat). Autrement dit, le terme $'E_2^{i,j}$ est le ième groupe de cohomologie du complexe

$$('E_1^{*,j}, d_1): \quad \tilde{H}^j_{\text{f.p.p.f.}}(X_0, H) \to \tilde{H}^j_{\text{f.p.p.f.}}(X_1, H) \to \ldots \tag{1.6}$$

Supposons maintenant que G satisfasse aux hypothèses du théorème. Alors, par (1.2), on a $''E_2^{i,j} = 0$ pour $0 < j < 2p-2$. Ainsi la suite spectrale $''E$ dégénère en degrés inférieurs à $2p-2$. Autrement dit, l'aboutissement commun des deux suites spectrales s'identifie aux termes $''E_2^{j,0}$ de la seconde :

$$\mathrm{Ext}^j(G, H) \simeq \mathbf{Ext}^j(A(G)_*, H)$$

pour $0 \leqq j < 2p-2$; ceci résulte d'ailleurs immédiatement de ce que $A(G)_*$ est une résolution partielle de G.

Par faisceautisation *étale*, on obtient à partir des suites spectrales $'E$ et $''E$ des suites spectrales analogues dans la catégorie des faisceaux abéliens pour la topologie étale

$$'\mathscr{E}_1^{i,j} = \mathscr{E}xt^j(A(G)_i, H) = \tilde{R}^j f_{i*} H$$

(où $R^j f_{i*} H$ désigne le faisceau associé, dans la topologie étale, au préfaisceau

$$T \to \tilde{H}^j_{\text{f.p.p.f.}}(X_i \underset{S}{\times} T, H)).$$

Le terme $'\mathscr{E}_2^{i,j}$ est le ième faisceau de cohomologie du complexe de faisceaux abéliens pour la topologie étale

$$('\mathscr{E}_1^{*,j}, d_1): \quad \tilde{R}^j f_{0*} H \to \tilde{R}^j f_{1*} H \to \ldots \tag{1.7}$$

Comme précédemment, l'aboutissement s'identifie à un groupe $\mathscr{E}xt$ ordinaire en bas degrés :

$$\mathscr{E}\mathrm{xt}^r(A(G)_*, H) \simeq \mathscr{E}\mathrm{xt}^r(G, H))$$

pour $0 \leqq r < 2p-2$.

Supposons dorénavant que G et H satisfont aux hypothèses du théorème. Alors, le faisceau associé à chaque terme $'E_1^{i,j}$ de (1.6) pour la topologie étale est nul $j > 0$: en effet, il résulte de [12] (appendice) que les groupes de cohomologie plate $\tilde{H}^j(X_i, H)$ peuvent se calculer dans la topologie étale, puisque H est lisse. D'autre part, l'hypothèse sur G entraîne que les morphismes f_i sont finis pour tout i. Or, il est bien connu qu'en topologie étale, $R^j f_* \, H = 0$ pour $j > 0$ lorsque f est fini.

Ainsi, la suite spectrale $'\mathscr{E}^{i,j}$ dégénère et son aboutissement $\mathscr{E}xt^i(G, H)$ ($i < 2p-2$) se calcule comme ième faisceau de complexe de cohomologie du complexe

$$'\mathscr{E}_1^{*,0}: \quad f_{0*}H \to f_{1*}H \to \dots$$

Bien sûr, ce complexe se récrit

$$\mathscr{H}om_S^{\bullet}(X_0, H) \to \mathscr{H}om_S^{\bullet}(X_1, H) \to \dots,$$

avec $\mathscr{H}om_S^{\bullet}(Y, Z)$ le faisceau des S-morphismes pointés (non des homomorphismes) d'un schéma Y dans un schéma Z. Pour éviter toute confusion, on désignera par $\mathscr{C}^*(G, H)$ ce complexe, et par $C^*(G, H)$ le complexe de groupes analogues obtenu en remplaçant $\mathscr{H}om^{\bullet}$ par $\mathrm{Hom}^{\bullet}$. On sait que, pour tout i, le faisceau $\mathscr{H}om_S^{\bullet}(X_i, H)$ est représentable par un schéma ([13], 4 c, [7] exp. XI, prop. 3.12) et la lissité de H entraîne la lissité de celui-ci ([8], IV_4, 17.1.1, IV_3, 8.14.2, IV_3, 8.8.2). Pour i quelconque, le faisceau $\mathscr{C}^i(G, H) = \mathscr{H}om_S^{\bullet}(X_i, H)$ est un facteur direct de $\mathscr{H}om_S(X_i, H)$. Il est donc également représenté par un schéma en groupes lisse sur S.

Dans le reste de ce paragraphe, on va montrer que l'exactitude du complexe $\mathscr{C}^*(G, H)$ en degré $1 < i < 2p-2$, et donc la nullité des $\mathscr{E}xt^i$ correspondants, résulte de l'exactitude du complexe $C^*(G, H)$ pour tout G et H satisfaisant aux hypothèses du théorème, dans le cas spécial où la base est un corps k algébriquement clos. Cet argument est proche de celui de [12] (appendice).

Soit $\mathscr{Z}^i = \mathscr{Z}^i(G, H)$ le schéma fibre de $\partial^i : \mathscr{C}^i(G, H) \to \mathscr{C}^{i+1}(G, H)$ au-dessus de la section nulle de $\mathscr{C}^{i+1}(G, H)$.

Il suffit évidemment de vérifier que l'application induite

$$\bar{\partial}^{i-1}: \quad \mathscr{C}^{i-1}(G, H) \to \mathscr{Z}^i(G, H)$$

est un épimorphisme de faisceaux pour la topologie étale. En fait, on cherchera à démontrer que $\bar{\partial}^{i-1}$ est lisse et surjectif pour tout i satisfaisant $1 < i < 2p-2$. Vérifions tout d'abord que le théorème en résulte : $\bar{\partial}^{i-1}$ est alors en particulier un morphisme f. p. p. f. et la suite de faisceaux f. p. p. f.

$$0 \to \mathscr{Z}^{i-1} \to \mathscr{C}^{i-1}(G, H) \xrightarrow{\bar{\partial}^{i-1}} \mathscr{Z}^i \to 0 \tag{1.8}$$

est donc exacte, $\mathscr{Z}^{i-1}$ étant de plus représenté par un schéma lisse sur la base S. Pour tout S-schéma T, l'obstruction au relèvement d'une T-section de $\mathscr{Z}^i$ est un élément de $H^1_{\text{f.p.p.f.}}(T, \mathscr{Z}^{i-1}) = H^1_{\text{et}}(T, \mathscr{Z}^{i-1})$ ([12], appendice). Elle peut donc être annulée après une extension étale de T, ce qui montre que l'application $\bar{\partial}^{i-1}$ est un épimorphisme de faisceaux pour la topologie étale.

Le reste de ce travail sera consacré à vérifier que $\bar{\partial}^{i-1}$ est lisse et surjectif pour $1 < i < 2p-2$. Puisque $\mathscr{C}^{i-1}(\mathrm{G}, \mathrm{H})$ est plat de présentation finie (resp. $\mathscr{Z}^i$ est de présentation finie), il suffit de le vérifier sur les fibres géométriques ([8], IV_4, 17.8.2, IV_2 2.7.1). On pourra donc dorénavant supposer que $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(k)$, où k est un corps algébriquement clos. La surjectivité de $\bar{\partial}^{i-1}$ équivaut alors à celle de l'homomorphisme induit sur les points à valeurs dans k :

$$\bar{\partial}^{i-1}(k) : \mathscr{C}^{i-1}(\mathrm{G}, \mathrm{H})(k) \to \mathscr{Z}^i(\mathrm{G}, \mathrm{H})(k)$$

ce qui revient à affirmer que le complexe $\mathrm{C}^*(\mathrm{G}, \mathrm{H})$ est exact en dimension i. On a donc réduit l'assertion que $\bar{\partial}^{i-1}$ est surjective à un énoncé ensembliste sur $\mathrm{Spec}(k)$. Notons à ce propos que $\mathrm{C}^*(\mathrm{G}, \mathrm{H})$ n'est rien d'autre que le complexe $('\mathrm{E}_1^{*,0}, d_1)$ de (1.6) et, par un raisonnement similaire à celui donné plus haut, la suite spectrale dégénère et l'exactitude de $\mathrm{C}^*(\mathrm{G}, \mathrm{H})$ en degré i équivaut à $\mathrm{Ext}^i(\mathrm{G}, \mathrm{H}) = 0$ tant que $i < 2p-2$.

On va maintenant montrer que la lissité de $\bar{\partial}^{i-1}$ est elle aussi une conséquence de l'exactitude de $\mathrm{C}^*(\mathrm{G}, \mathrm{H})$. Par [8], IV_4, 17.14.2, pour que $\bar{\partial}^{i-1}$ soit lisse, il suffit de vérifier que pour tout diagramme commutatif de k-schémas,

(1.9)
$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(\mathrm{A}/\mathrm{I}) \arrow[r, "x"] \arrow[d, "i"'] & \mathscr{C}^{i-1}(\mathrm{G}, \mathrm{H}) \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}(\mathrm{A}) \arrow[r, "y"'] \arrow[ur, dashed, "h"] & \mathscr{Z}^i(\mathrm{G}, \mathrm{H}) \end{tikzcd}$$

il existe un morphisme $h : \mathrm{Spec}(\mathrm{A}) \to \mathscr{C}^{i-1}(\mathrm{G}, \mathrm{H})$ qui rende les deux triangles correspondants commutatifs (ici A est un anneau artinien d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et de corps résiduel k algébriquement clos et I est un idéal de A de carré nul satisfaisant $\mathrm{I}.\,\mathfrak{m} = 0$).

Les immersions fermées $i = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}/\mathrm{I}) \to \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ et $i = \mathrm{Spec}\ \mathrm{A}/\mathfrak{m} \to \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ induisent une suite exacte de faisceaux zariskiens sur le site plat sur $\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ ([7], exp. III) :

(1.10)
$$0 \to j_* \mathrm{W} \to \mathrm{H}_\mathrm{A} \to i_* \mathrm{H}_i \to 0,$$

où $\mathrm{W} = \mathrm{W}(\mathscr{H}om(\omega_{\mathrm{H/K}}, \mathrm{I}))$ est un module libre sur $\mathrm{Spec}(k)$ et X_A (resp. X_I) désigne le A-schéma (resp. le A/I schéma) obtenu à partir d'un k-schéma X par changement de base. La suite (1.10) induit une suite exacte de complexes

(1.11)
$$0 \to \mathrm{C}^*(\mathrm{G}, \mathrm{W}) \xrightarrow{\alpha_*} \mathrm{C}^*(\mathrm{G}_\mathrm{A}, \mathrm{H}_\mathrm{A}) \xrightarrow{\beta_*} \mathrm{C}^*(\mathrm{G}_\mathrm{I}, \mathrm{H}_\mathrm{I}) \to 0,$$

où seule la surjectivité de β n'est pas formelle. Le conoyau de

$$\beta_i : \quad \mathrm{C}^i(\mathrm{G}_\mathrm{A}, \mathrm{H}_\mathrm{A}) \to \mathrm{C}^i(\mathrm{G}_\mathrm{I}, \mathrm{H}_\mathrm{I})$$

est en effet un élément du groupe $H^1_{\mathrm{Zar}}(X_i, W)$, et celui-ci est nul puisque G, et donc X_i est un schéma affine.

La suite exacte (1.11) induit une longue suite exacte en cohomologie

$$(1.12)\qquad \ldots \to H^i(C^*(G, W)) \xrightarrow{H^i(\alpha)} H^i(C^*(G_A, H_A)) \xrightarrow{H^i(\beta)} H^i(C^*(G_I, H_I)) \to \ldots$$

A un carré commutatif du type (1.9) correspond un représentant d'une classe de cohomologie $x \in \ker H^i(\beta)$. Affirmer qu'il existe un morphisme h revient à dire que cette classe est nulle. Puisque (1.12) est exacte, il suffit de prouver que $H^i(C^*(G, W)) = 0$.

Or, W est une somme de $\mathbf{G}_a$, donc un schéma en groupes lisse sur la base; ainsi, la lissité de $\bar{\partial}^{i-1}$ résulte donc également de l'exactitude du complexe $C^*(G, H)$ en degré i $(1 < i < 2p-2)$ pour H lisse quelconque.

2. Cas d'un corps de base algébriquement clos

Soient G et H des schémas en groupes sur une base $S = \mathrm{Spec}(k)$ (k un corps algébriquement clos) satisfaisant aux hypothèses du théorème. On a vu qu'il suffisait de vérifier l'exactitude du complexe $C^*(G, H)$ en degré i, ou [ce qui revenait au même par la dégénérescence de la suite spectrale (1.4)], la nullité des groupes $\mathrm{Ext}^i(G, H)$ correspondants. Il est plus agréable d'énoncer ceci sous la forme un peu plus générale suivante, qui est l'analogue global du théorème, dans le cas où la base est un corps algébriquement clos (on remarquera que l'hypothèse $q.1_G : G \xrightarrow{\approx} G$ n'intervient plus).

PROPOSITION 1. — *Soit* G (*resp.* H) *un schéma en groupe fini* (*resp. lisse*) *sur un corps algébriquement clos k de caractéristique p. Alors,* $\mathrm{Ext}^i(G, H) = 0$ *pour* $1 < i < 2p-2$ *si* $p > 0$ *et pour tout* $i > 1$ *si* $p = 0$.

On peut en effet dévisser G en

$$(2.1)\qquad 0 \to G^0 \to G \to G^{et} \to 0,$$

avec G^0 connexe et G^{et} étale. G^{et} est un faisceau constant sur k et possède donc une résolution projective constante, induite par une résolution libre à deux crans quelconque du groupe abstrait correspondant. Ainsi, $\mathrm{Ext}^i(G^{et}, H) = 0$ pour tout $i \geqq 2$.

En particulier, lorsque k est un corps de caractéristique zéro, on a $G = G^{et}$ et la démonstration est terminée dans ce cas.

Il reste le cas $G = G^0$ et k un corps de caractéristique $p > 0$. G est alors un groupe d'ordre une puissance de p comme on l'a fait observer dans la remarque 5 de l'introduction, et il satisfait donc à l'hypothèse $q.1_G : G \xrightarrow{\approx} G$ pour q premier, $q < p$. L'énoncé est donc équivalent à l'exactitude du complexe $C^*(G, H)$ dans les dimensions données. De plus, par dévissage, on peut supposer $G = \boldsymbol{\alpha}_p$ ou $\boldsymbol{\mu}_p$, $H = \mathbf{G}_a$ ou $\mathbf{G}_m$; le cas où H est une variété abélienne A est éliminé par dévissage de H, $\mathrm{Ext}^i(G, H)$ étant nécessairement de p torsion, puisque G l'est [un argument particulier est d'ailleurs nécessaire pour $\mathrm{Ext}^2(\boldsymbol{\alpha}_p, A)$].

On va maintenant montrer que l'exactitude du complexe $C^*(G, H)$ en degré i est conséquence de celle de $C^*(\mathbf{G}_a, \mathbf{G}_a)$ en même degré, suivant une méthode déjà utilisée dans [11] pour le calcul de groupes de cohomologie de Hoschild. Explicitons le cas $G = \boldsymbol{\mu}_p$ (resp. $\boldsymbol{\alpha}_p$), $H = \mathbf{G}_m$, les autres cas étant analogues (et en fait plus simples). On se rappellera que la bigèbre correspondant à $\boldsymbol{\mu}_p$ est $k[X]/X^p$ munie de la comultiplication

$$\boldsymbol{\mu}^*(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X + X \otimes X.$$

Quant à la bigèbre correspondant à $\boldsymbol{\alpha}_p$, c'est également $k[X]/X^p$ muni cette fois de la comultiplication $\boldsymbol{\mu}^*(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X$. Dans la suite du paragraphe 2, G désigne indifféremment, sauf mention spéciale, les groupes $\boldsymbol{\alpha}_p$ ou $\boldsymbol{\mu}_p$.

Un élément de $C^i(G, \mathbf{G}_m)$ est donc un polynôme tronqué en s (i) variables $X_1, \ldots, X_{s(i)}$ à coefficients constants non nul [la fonction $s(i)$ étant celle introduite au paragraphe 1 dans la description de $A(G)$ donnée en A. 1°]. Vu la description des différentielles dans le complexe $A(G)$ donnée en A. 2°, l'application $\partial^{i+1} : C^i(G, \mathbf{G}_m) \to C^{i+1}(G, \mathbf{G}_m)$ induite par la différentielle $d_{i+1} : A(G)_{i+1} \to A(G)_i$ envoie un élément $f \in C^i(G, \mathbf{G}_m)$ sur un polynôme $\partial^{i+1} f$ de la forme suivante :

$$(2.2) \qquad \partial^{i+1} f(X_1, \ldots, X_{s(i+1)}) = \prod_j f_j(X_1, \ldots, X_{s(i+1)})^{\varepsilon(j)},$$

où $\varepsilon(j) = \pm 1$ et chaque f_j s'obtient à partir de f par des changements de variables de la forme :

$$(2.3) \qquad X_r \to X_{r'} + X_{r''} + X_{r'} X_{r''} \qquad \text{lorsque} \quad G = \boldsymbol{\mu}_p$$

(resp. :

$$(2.4) \qquad X_r \to X_{r'} + X_{r''} \qquad \text{lorsque} \quad G = \boldsymbol{\alpha}_p),$$

par la permutation de certaines variables, ou en rajoutant des variables indépendantes.

On filtre $C^i(G, \mathbf{G}_m) = (k[X_1, \ldots, X_{s(i)}]/(X_1^p, \ldots, X_{s(i)}^p))^*$ en notant $C^i(G, \mathbf{G}_m)_r$ l'ensemble des éléments de $C^i(G, \mathbf{G}_m)$ qui ont pour représentant un polynôme $H \in k[X_1, \ldots, X_{s(i)}]$ de la forme :

$$H(X_1, \ldots, X_{s(i)}) = a + P(X_1, \ldots, X_{s(i)}) + Q(X_1, \ldots, X_{s(i)}),$$

où a est une constante non nulle, et P la partie homogène de H de plus petit degré positif $r > 0$. On va démontrer que tout cycle de $C^i(G, \mathbf{G}_m)_r$ est un cobord par récurrence décroissante sur r.

Lorsque $r \geqq ps(i)$, tout élément $f \in C^i(G, \mathbf{G}_m)_r$ est constant et l'assertion est triviale. Supposons-là démontrée pour tout $f \in C^i(G, \mathbf{G}_m)_s$ lorsque $s > r$ et choisissons $f \in C^i(G, \mathbf{G}_m)_r$. Le polynôme $\partial^{i+1} f$ est d'ordre $\geqq r$. Dire que f est un cycle revient en particulier à annuler la composante homogène de degré r de $\partial^{i+1} f$. Or, celle-ci s'écrit :

$$(2.5) \qquad 0 = (\partial^{i+1} f)_r = \sum_j \varepsilon(j) \overline{P}_j(X_1, \ldots, X_{s(i+1)}),$$

où les $\bar{P}_j$ s'obtiennent à partir de la partie homogène P de f par le même procédé que celui qui permettait d'obtenir les f_j de (2.2) à partir de f, à ceci près que, dans le cas $G = \boldsymbol{\mu}_p$, on a remplacé le changement de variables (2.3) par la règle (2.4).

Si l'on identifie le polynôme tronqué P au polynôme correspondant non tronqué de degré $< p$ en chaque variable, on peut considérer P comme un élément de $C^i(\mathbf{G}_a, \mathbf{G}_a)_r$, où l'on a gradué $C^i(\mathbf{G}_a, \mathbf{G}_a)$ par le degré homogène r. On observe que la différentielle dans $C^*(\mathbf{G}_a, \mathbf{G}_a)$ est compatible avec cette graduation et induit donc un complexe $C^*(\mathbf{G}_a, \mathbf{G}_a)_r$:

$$\to C^{i-1}(\mathbf{G}_a, \mathbf{G}_a)_r \xrightarrow{\bar{\partial}} C^i(\mathbf{G}_a, \mathbf{G}_a)_r \xrightarrow{\bar{\partial}} C^{i+1}(\mathbf{G}_a, \mathbf{G}_a)_r \to \dots \tag{2.6}$$

facteur direct de $C^*(\mathbf{G}_a, \mathbf{G}_a)$.

La condition (2.5) se récrit $\bar{\partial}P = 0$. Or la suite (2.6) est exacte en i, comme on le verra au paragraphe 3. Ainsi

$$P = \bar{\partial}P' \tag{2.7}$$

et, si l'on identifie P' avec le polynôme tronqué correspondant, on définit un élément

$$1+P' \in C^{i-1}(G, \mathbf{G}_m)_r$$

et (2.7) entraîne que

$$f.\partial(1+P')^{-1} \in C^i(G, \mathbf{G}_m)_{r+1}.$$

L'élément $f.\partial(1+P')^{-1}$ est donc un cobord, d'après l'hypothèse de récurrence, ce qui permet de conclure que f en est également un.

3. $\mathrm{Ext}^i(\mathbf{G}_a, \mathbf{G}_a)$

Il reste à démontrer l'exactitude de (2.6) en degré i. En utilisant la suite spectrale (1.6), on remarque d'ailleurs que sur toute base affine :

$$\mathrm{Ext}^i(\mathbf{G}_a, \mathbf{G}_a) = H^i(C^*(\mathbf{G}_a, \mathbf{G}_a)) = \bigoplus_s H^i(C^*(\mathbf{G}_a, \mathbf{G}_a)_s) \tag{3.1}$$

pour $0 \leqq i < 2p-2$. On trouvera dans [4] une étude détaillée des groupes $\mathrm{Ext}^i(\mathbf{G}_a, \mathbf{G}_a)$ pour tout i. Pour la commodité du lecteur, donnons ici un calcul rapide, inspiré par [16], de la nullité de ces groupes pour $1 < i < 2p-2$ [et donc de l'exactitude de (2.6) dans ces degrés] lorsque la base est un anneau quelconque de caractéristique $p > 0$, ce qu'on énonce comme suit :

PROPOSITION 2. — *Soit* S *un schéma affine de caractéristique* $p > 0$, $\mathbf{G}_a$ *le groupe additif sur* S. *Alors,* $\mathrm{Ext}^i(\mathbf{G}_a, \mathbf{G}_a) = 0$ *pour* $1 < i < 2p-2$. *En particulier* $\mathscr{E}xt^i(\mathbf{G}_a, \mathbf{G}_a) = 0$, *où* $\mathscr{E}xt^i$ *est le faisceau associé à* Ext^i *pour n'importe quelle topologie.*

Tout d'abord, on note que le complexe $C^*(\mathbf{G}_a, \mathbf{G}_a)$ commute au changement de base et donc que sa cohomologie commute au changement de base plat. On peut donc supposer que la base est le corps $\mathbf{F}_p$. Soit f un cycle de $\mathrm{C}^i(\mathbf{G}_a, \mathbf{G}_a)$. Choisissons $h > 0$ tel que le polynôme f soit de degré $< p^h$ en chacune de ses variables. Il correspond un morphisme $f : \mathbf{G}_a^{s(i)} \to \mathbf{G}_a$ qui induit une application ensembliste sur les points à valeurs dans $\mathbf{F}_{p^h}$:

$$f(\mathbf{F}_{p^h}) : \mathbf{F}_{p^h}^{s(i)} \to \mathbf{F}_{p^h},$$

c'est-à-dire un élément de $\mathrm{H}^i(\mathrm{A}(\mathbf{F}_{p^h}), \mathbf{F}_{p^h})$. On a vu en (1.3) que ce groupe est nul pour $1 < i < 2p-2$. Ainsi, $f(\mathbf{F}_{p^h}) = \partial\bar{g}$ avec $\bar{g} \in \mathrm{C}^{i-1}(\mathrm{A}(\mathbf{F}_{p^h}), \mathbf{F}_{p^h})$. On prendra bien soin qu'*a priori* $\bar{g}$ est une application ensembliste quelconque : $\mathrm{A}(\mathbf{F}_{p^h})_{i-1} \xrightarrow{\bar{g}} \mathbf{F}_{p^h}$. En fait, toute application de ce type est polynomiale, puisqu'elle a pour but (resp. pour source) un corps fini (resp. un produit de corps finis).

Plus précisément, $\bar{g}$ se relève en un polynôme g de degré $< p^h$ en chaque variable, à coefficients dans $\mathbf{F}_{p^h}$. On a ainsi construit un élément g dans $\mathrm{C}^{i-1}(\mathrm{A}(\mathbf{G}_a), \mathbf{G}_a) \underset{\mathbf{F}_p}{\otimes} \mathbf{F}_{p^h}$ et les polynômes ∂g et $f \otimes 1 \in \mathrm{C}^i(\mathrm{A}(\mathbf{G}_a), \mathbf{G}_a) \underset{\mathbf{F}_p}{\otimes} \mathbf{F}_{p^h}$ prennent les mêmes valeurs en tout élément de $\mathbf{F}_{p^h}$. Ils coïncident donc, ce qui montre que l'image de f dans

$$\mathrm{H}^i(\mathrm{C}^*(\mathbf{G}_a, \mathbf{G}_a) \underset{\mathbf{F}_p}{\otimes} \mathbf{F}_{p^h}) = \mathrm{H}^i(\mathrm{A}(\mathbf{G}_a), \mathbf{G}_a) \underset{\mathbf{F}_p}{\otimes} \mathbf{F}_{p^h}$$

est nulle, et termine la démonstration.

Remarque. — En fait, on a également $\mathrm{Ext}^{2p-2}(\mathbf{G}_a, \mathbf{G}_a) = 0$, mais comme $\mathrm{Ext}^{2p-2}(\mathbf{G}_a, \mathbf{G}_a)$ n'est pas isomorphe à $\mathrm{H}^{2p-2}(\mathrm{C}^*(\mathbf{G}_a, \mathbf{G}_a))$, ceci n'est d'aucune utilité ici. On peut d'ailleurs vérifier explicitement que ce dernier groupe est non nul [4].

4. Variantes

Si l'on remplace la catégorie $\mathscr{F}(\mathrm{S})$ par la catégorie $\mathscr{E}(\mathrm{S})$ des faisceaux abéliens sur S pour la topologie étale sur le grand site de tous les schémas sur S, on obtient pratiquement le même résultat :

THÉORÈME 2. — *Soient* G *un schéma en groupes commutatif fini et plat* (*resp.* H *un schéma en groupes commutatif, lisse et* affine) *sur un schéma de base quelconque* S, *que l'on identifie avec leurs images dans* $\mathscr{E}(\mathrm{S})$. *Supposons que la multiplication par* q *induise un automorphisme* $q.1_{\mathrm{G}} : \mathrm{G} \xrightarrow{\sim} \mathrm{G}$ *dans la catégorie* $\mathscr{E}(\mathrm{S})$ (*pour tout* q *premier satisfaisant* $q < p$). Alors, $\mathscr{E}xt^i(\mathrm{G}, \mathrm{H}) = 0$ *pour* $1 < i < 2p-2$.

Ici, p est le même nombre premier que dans l'énoncé du théorème 1 et $\mathscr{E}xt^i$ désigne le faisceau associé pour la topologie étale au préfaisceau $\mathrm{T} \to \mathrm{Ext}^i_{\mathscr{E}(\mathrm{T})}(\mathrm{G} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{T}, \mathrm{H} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{T})$.

On remarquera que la condition sur q est plus forte que dans le théorème 1, puisqu'on requiert que $q.1_{\mathrm{G}} : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ soit un épimorphisme dans $\mathscr{E}(\mathrm{S})$ plutôt que dans $\mathscr{F}(\mathrm{S})$; elle est néanmoins encore satisfaite lorsque G est d'ordre n avec $(n, q) = 1$ pour tout q premier, $q < p$.

La démonstration est la même que pour le théorème 1, A (G) étant le complexe dans $\mathscr{E}$ (S) obtenu à partir du complexe de groupes abéliens, en faisceautisant pour la topologie étale. Notons que, dans la réduction au cas du groupe additif, on ne peut plus dévisser le terme H aussi facilement, ce qui oblige à prendre pour hypothèse que H est affine pour éliminer le cas d'une variété abélienne. Remarquons d'autre part qu'il n'est plus possible de dévisser G dans $\mathscr{E}$ (S) pour se ramener au cas où G est l'un des schémas en groupes finis élémentaires, comme on l'a fait par commodité au paragraphe 2. En fait, on peut raisonner directement sur G et se réduire, par le même raisonnement qu'au paragraphe 2, à montrer l'exactitude du complexe $C^* (\mathbf{G}_a^n, \mathbf{G}_a)$ pour n fixé, dans les mêmes degrés i $(1 < i < 2p-2)$. Or il est bien connu (*voir* [17] et [15]) que A (G) est additif en G, à quasi isomorphisme près, ce qui nous ramène au cas de $C^* (\mathbf{G}_a, \mathbf{G}_a)$ déjà étudié.

Enfin, il existe un énoncé similaire dans la catégorie $\mathscr{P}$ (S) des préfaisceaux sur S.

THÉORÈME 3. — *Soient* G *un schéma en groupes commutatif fini et plat* (*resp.* $H = \mathbf{G}_a$ *ou* $\mathbf{G}_m$), *que l'on identifie avec leurs images dans* $\mathscr{P}$ (S). *Supposons que la multiplication par q induise un automorphisme* $q.1_G : G \xrightarrow{\sim} G$ *dans* $\mathscr{P}$ (S) (*pour tout q premier satisfaisant* $q < p$). *Alors,* $\mathrm{Ext}^i (G, H) = 0$ *pour* $1 < i < 2p-2$.

Les remarques faites ci-dessus pour la catégorie $\mathscr{E}$ (S) s'appliquent également ici. Notons que dans $\mathscr{P}$ (S) la suite spectrale $'E_*^{i,j}$ dégénère pour des raisons triviales puisque, pour $j > 0$:

$$\mathrm{Ext}^j(\mathbf{Z}^+ [X], H) = \tilde{H}^j(X, H) = 0$$

lorsque X est un schéma quelconque, le foncteur sections globales $\tilde{H}^0$ (X, H) étant exact en H dans $\mathscr{P}$ (S).

On s'est d'autre part restreint dans l'énoncé au cas où $H = \mathbf{G}_a$ ou $\mathbf{G}_m$ pour ne pas avoir à dévisser, ce qui est très désagréable à faire dans $\mathscr{P}$ (S). En pratique, pour un schéma en groupes affine donné quelconque, il sera sans doute possible de se ramener par les mêmes techniques qu'au paragraphe 2 au cas où $G = H = \mathbf{G}_a$, ce qui permettra d'utiliser les résultats du paragraphe 3 pour conclure.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. ARTIN, A. GROTHENDIECK et J.-L. VERDIER, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas* (SGA 4) (*Lecture Notes in Math.*, vol. 269, 270, 305, Springer Verlag, 1972-1973).

[2] L. BREEN, *Extensions of Abelian Sheaves and Eilenberg-Mac Lane Algebras* (*Invent. Math.*, vol. 9, 1969, p. 15-44).

[3] L. BREEN, *On a Non Trivial Highier Extension of Representable Abelian Sheaves* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 75, 1969, p. 1249-1253).

[4] L. BREEN, *Extensions du groupe additif* (à paraître).

[5] H. CARTAN, *Algèbres d'Eilenberg-Mac Lane* et *homotopie* (*Séminaire Cartan* 1954-1955; École Normale supérieure, Paris, 1956).

[6] P. DELIGNE, Communication personnelle.

[7] M. DEMAZURE, A. GROTHENDIECK et coll., *Schémas en groupes* I-III (SGA 3) (*Lecture notes in Math.*, vol. 151-153, Springer Verlag, 1970).

[8] J. DIEUDONNÉ et A. GROTHENDIECK, *Éléments de géométrie algébrique* (EGA) (*Publications Mathématiques de l'I. H. E. S.*, n° 4, 8, 11...).

[9] A. DOLD und D. PUPPE, *Homologie nicht-additiver Functoren. Anwendungen* (*Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, vol. 11, 1961, p. 201-312).

[10] S. EILENBERG and S. MAC LANE, *On the Groups* H (π, n), I, II (*Ann. of Math.* ,vol. 58, 1953, p. 53-106 et vol. 60, 1954, p. 49-139).

[11] R. GERGONDEY, *Calculs de quelques groupes de cohomologie* (Exposé 10 du *Séminaire Heidelberg-Strasbourg*, 1965-1966, multigraphié par l'Institut de Mathématiques de Strasbourg).

[12] A. GROTHENDIECK, *Le groupe de Brauer III : Exemples et compléments* (dans *Dix exposés sur la cohomologie des schémas, Advanced Studies in Pure Mathematics*, vol. 3, North. Holland Publishing Co, 1968).

[13] A. GROTHENDIECK, *Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique*. IV : *Les schémas de Hilbert* (*Séminaire Bourbaki* n° 221, 1961).

[14] A. GROTHENDIECK et coll., *Groupes de Monodromie en géométrie algébrique* (SGA 7) (*Lecture Notes in Math.*, vol. 288, Springer Verlag, 1972).

[15] L. ILLUSIE, *Complexe cotangent et Déformations I, II* (*Lecture Notes in Math.*, vol. 239, 1971 et vol. 283, 1972, Springer Verlag).

[16] M. LAZARD, *Lois de groupes formels et analyseurs* (*Ann. scient. Éc. norm. Sup.*, vol. 72, 1955, p. 299-400).

[17] S. MAC LANE, *Homologie des anneaux et des modules* (*Colloque de topologie algébrique;* Centre belge de Recherche mathématique, Louvain, 1956).

[18] F. OORT, *Commutative Group Schemes* (*Lecture Notes in Math.*, vol. 15, Springer Verlag, 1966).

[19] F. OORT and J. TATE, *Group Schemes of Finite Order* (*Ann. scient. Éc. norm. sup.*, vol. 3, 1970, p. 1-21).

[20] J.-P. SERRE, *Groupes algébriques et corps de classe* (*Actualités scientifiques et industrielles* 1264, Paris, Hermann, 1959).

[21] J.-P. SERRE, *Cohomologie modulo* 2 *des complexes d'Eilenberg-Mac Lane* (*Commentarii Math. Helv.*, vol. 27, 1953, p. 198-232).

(Manuscrit reçu le 27 février 1975.)

Lawrence BREEN,
Université de Rennes,
Département de Mathématiques
et d'Informatique,
avenue du Général-Leclerc,
B. P. n° 25 A,
35031 Rennes Cedex.