ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

L. SIEBENMANN
L. GUILLOU
H. HÄHL

Les voisinages ouverts réguliers : critères homotopiques d'existence

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 7, nº 3 (1974), p. 431-461
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1974_4_7_3_431_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4ᵉ série, t. 7, 1974, p. 431-462.

LES VOISINAGES OUVERTS RÉGULIERS : CRITÈRES HOMOTOPIQUES D'EXISTENCE

PAR L. SIEBENMANN, L. GUILLOU ET H. HÄHL

Introduction

La première partie de ce mémoire [SGH] (1) a dégagé la notion de voisinage régulier d'un sous-espace X d'un espace topologique Y et l'a développée d'un point de vue axiomatique strictement élémentaire. Cette deuxième partie présente des critères *homotopiques* qui assurent l'existence des voisinages réguliers.

On aborde en premier lieu le cas où X est compact, Y métrique et localement compact et où $Y-X$ est une variété topologique de dimension $\neq 4$, car les outils classiques que l'on va utiliser — l'engouffrement et la théorie des anses — ont de telles limites. Néanmoins on s'efforcera de donner des critères nécessaires aussi bien que suffisants dans ce domaine.

De ce cas central découle aussi des critères pour le cas où $Y-X$ est une variété de modèle le cube de Hilbert $Q \approx [-1, 1]^\infty$ et ensuite pour le cas où Y est une variété métrisable modelée sur l'espace de Hilbert $l_2 \approx]-1, 1[^\infty$ (toujours avec X compact).

La notion de voisinage régulier qui s'adapte à l'étude homotopique est celle de voisinage I-régulier (= isotopie régulier, *cf.* [SGH, § 1]) bien qu'il reste possible que sous les hypothèses précédentes tout voisinage régulier soit I-régulier.

Le théorème d'existence central est :

THÉORÈME (annoncé en partie dans [S_3], [S_4]) : *Supposons* Y *métrisable, localement compact,* X *compact et* $Y-X$ *variété de dimension finie* > 4. *Alors* X *admet des voisinages* I-*réguliers dans* Y *si et seulement si*

(i) X *admet des voisinages* I-*réguliers dans* $X \cup \partial(Y-X)$, *et*

(ii) *Il existe une base* $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \ldots$ *de voisinages de* X, *un* CW-*complexe* K *finiment dominé et un diagramme*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
U_1 - X & & U_2 - X \arrow[ll, hook'] \arrow[dl] & & U_3 - X \arrow[ll, hook'] \arrow[dl] & & \cdots \arrow[ll, hook'] \arrow[dl] \\
& K \arrow[ul] & & K \arrow[ll, "\simeq"'] \arrow[ul] & & K \arrow[ll, "\simeq"'] \arrow[ul] & \cdots \arrow[l, "\simeq"']
\end{tikzcd}$$

commutatif à homotopie près.

(1) Pour un résumé, *voir* [S_{10}].

Bien que la condition que K soit finiment dominé soit nécessaire (*cf.* 1.1), on peut se demander si elle n'est pas redondante.

Remarquons que la propriété (ii) ne dépend de $Y-X$ qu'à son type d'homotopie près. On a donc bien un critère « homotopique » d'existence [du moins si dim $\partial(Y-X) \neq 4$].

La condition (ii) équivaut à dire que les bouts de $Y-X$ à X sont en nombre fini et dociles (« tame ») dans le sens de la thèse [S_1]; Siebenmann a montré en [S_1] (2) que (ii) ne suffit point pour assurer que X a des voisinages E de la forme radiale $E-X \cong K \times R$, avec K une variété compacte; il y a pour cela une obstruction supplémentaire, invariante plutôt du type simple d'homotopie (infini) [S_8] de $Y-X$. Le lecteur trouvera dans [S_7, § 4 et 7] quelques exemples de ce phénomène provenant même de *h*-cobordismes compacts, aussi bien que la vérification de notre théorème pour ces exemples (on y discute essentiellement le cas où $Y-X$ est un revêtement ∞-cyclique muni d'une structure PL).

A l'aide d'une dualité du type Poincaré-Alexander et des résultats de Wall sur la finitude des complexes, on va déduire quelques critères plus correctement homotopiques, dont :

THÉORÈME. — *Soient* Y *une variété topologique de dimension* $n \geqq 5$ *et* $X \subset \operatorname{int} Y$ *un compact de dimension* $\leqq n-3$ *tel que* $Y-X$ *soit* $1-\mathrm{LC}$ *à* X. *Alors* X *a des voisinages* I-*réguliers dans* Y *si et seulement si* X *a la silhouette* (= « *shape* » *de Borsuk*) *d'un A.N.R.* (= *rétract absolu de voisinage*) [*c'est-à-dire, s'il existe une base* $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \ldots$ *de voisinages de* X, *un ANR* K (peut-être non-compact) *et un diagramme*

$$\begin{tikzcd}
U_1 & & U_2 \arrow[ll, hook'] \arrow[dl] & & U_3 \arrow[ll, hook'] \arrow[dl] & \cdots \arrow[l, hook'] \\
& K \arrow[ul] & & K \arrow[ul] \arrow[ll, "\equiv"'] & & \cdots \arrow[ul] \arrow[ll, "\equiv"']
\end{tikzcd}$$

commutatif à homotopie près].

Rappelons que la silhouette est un invariant homotopique [Bo_2].

Remarquons que ces deux théorèmes restent valables en dimension 3 si l'on suppose que $Y-X$ satisfait près de X à la conjecture de Poincaré (3) et que K n'a pas le type d'homotopie d'un plan projectif. Ceci se déduit de [HP]. En dimension 2, ces théorèmes sont valables tels qu'ils sont énoncés; la démonstration imite en la simplifiant celle de dimension 3. La dimension 1 est triviale.

Il y a deux méthodes d'attaque qui devraient permettre de montrer l'existence des voisinages réguliers : la première veut élaborer un raisonnement d'*engouffrement* pour vérifier l'I-axiome [SGH, § 1] lequel équivaut à l'existence des voisinages I-réguliers; la seconde veut s'appuyer sur un théorème de [S_1] démontré grâce à la théorie des *anses* qui sous sa forme topologique (*voir* [KS_2]) affirme que $X \times S^1$ admet des voisinages I-réguliers de forme radiale dans $Y \times S^1$ pourvu que dim $\partial(Y-X) \neq 4$ (ceci, bien sûr, sous les hypothèses de nos théorèmes). On n'a pas encore trouvé de solution satisfaisante qui utilise

(2) La thèse [S_1] opère dans la catégorie DIFF mais [KS_2] effectue la conversion à la catégorie TOP, *cf.* [S_2].

(3) C'est-à-dire il y a un voisinage Y_0 de X tel que dans Y_0-X toute sous-variété compacte et contractile est un disque. C'est le cas dès que Y est une variété, *voir* Mc Millan [Mc_1, p. 7], [Mc_2].

seulement la théorie des anses. C'est donc la première méthode — celle d'engouffrement — que nous adopterons; il sera néanmoins très commode d'exploiter le fait que $X \times S^1$ admet ces voisinages I-réguliers dans $Y \times S^1$ pour vérifier les conditions homotopiques nécessaires pour l'engouffrement, (la construction en § 5.5 pourrait le remplacer).

Puisque nous voulons à tout prix garder la simplicité de l'engouffrement PL, nous utiliserons quelques résultats difficiles pour traiter les variétés *sans* structure PL :

(*a*) Un théorème de Miller-Bryant-Seebeck affirmant que tout plongement « locally tame » d'un polyèdre en codimension $\geqq 3$ devient PL une fois composé avec un petit automorphisme convenable du but [B-S] [Mil].

(*b*) Un théorème de R. D. Edwards [E] offrant certains squelettes duaux pour les variétés TOP, même en dimension 5 où on ne connaît pas de décomposition en anses.

La démonstration du premier théorème et les préliminaires nécessaires occupent les trois premiers paragraphes. Le second théorème est prouvé dans le quatrième. Le cinquième traîte des variétés à modèle $Q \approx [0, 1]^\infty$ ou $l_2 \approx]0, 1[^\infty$ *et donne même une classification assez satisfaisante des voisinages réguliers dans le cas de modèle* Q. Enfin un appendice collecte quelques lemmes sur les cônes d'applications de complexes de chaînes utiles dans les deux derniers paragraphes.

Il sera essentiel de bien retenir les notions suivantes relatives à un sous-espace X d'un espace Y, *cf.* [SGH], [S_{10}]. On dit qu'un ensemble $U \subset Y$ est I-*compressible* (isotopiquement compressible) vers X dans un ensemble $V \subset Y$ et on écrit $U \searrow X\,(V)$ si pour tout voisinage W de X dans Y il existe une isotopie (4) $h_t : Y \to Y$, $0 \leqq t \leqq 1$, de $\mathrm{id} \mid Y = h_0$ à un homéomorphisme h_1 tel que $h_1(U) \subset W$, et un voisinage N de X tel que $h_t \mid N \cup (Y-V)$ soit l'identité pour tout *t*.

Un voisinage ouvert E de X dans Y est I-*régulier* si $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_i$ où $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ sont des voisinages de X tels que $E_i \searrow X\,(E_{i+1})$ pour tout $i \geqq 1$.

Il est un théorème cardinal qui dit que deux tels voisinages sont homéomorphes par un homéomorphisme qui fixe un voisinage de X.

On vérifie facilement que X admet des voisinages I-réguliers dans Y si et seulement si le couple (Y, X) vérifie :

I-Axiome. — *Pour tout voisinage* V *de* X *dans* Y *il y a un voisinage* U *tel que* $U \searrow X\,(V)$.

Avant de commencer, une *notation* : $A \subset\subset B$ ou $B \supset\supset A$ signifiera : adhérence (A) $\subset$ intérieur (B) (l'espace ambiant étant précisé par le contexte.)

1. La docilité homotopique nécessaire pour l'existence des voisinages réguliers

1.0. Définition. — Soient Y un espace métrisable, localement compact et X un compact de Y. On dit que $Y - X$ *est homotopiquement docile vers* X si et seulement si la condition suivante est vérifiée.

(4) L'application $(y, t) \mapsto (h_t(y), t)$ est supposé être un homéomorphisme de $Y \times I$.

(D) *Il existe une base* $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \ldots$ *de voisinages de* X *dans* Y *et un diagramme*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] (V_1-X) & & (V_2-X) \arrow[ll, hook'] \arrow[dl] & & (V_3-X) \arrow[ll, hook'] \arrow[dl] & \ldots \arrow[l, hook'] \\ & K \arrow[ul] & & K \arrow[ll, "\equiv"'] \arrow[ul] & \ldots \arrow[l, "\equiv"'] \end{tikzcd}$$

commutatif à homotopie près, où K *est un* CW *complexe finiment dominé* [comparer avec la définition 1.3 (B)].

Notre but principal sera d'obtenir sous de bonnes hypothèses une réciproque au fait élémentaire suivant (*cf.* 2.1, 4.1, 5.1 infra) :

1.1. PROPOSITION. — *Soient* Y *un espace métrisable, localement compact et* X *un compact de* Y *tels que* $Y-X$ *soit un* ANR. *Supposons que* (Y, X) *vérifie l'*I-*axiome de* [SGH]. *Alors* $Y-X$ *est homotopiquement docile vers* X.

1.2. LEMME. — *Soit* C *une partie relativement compacte d'un* ANR Z. *Alors il existe un diagramme commutatif à homotopie près* $\begin{tikzcd}[column sep=small] C \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "i"'] & & Z \\ & L \arrow[ur, "p"'] & \end{tikzcd}$ *où* L *est un* CW *complexe fini.*

Preuve du lemme. — *Voir* Mc Millan [Mc, p. 21], ou bien l'argument donné par Weber en [Wb, § 3, p. 217]. Voici une démonstration facile valable si Z est un ENR. Soit n un entier tel que $W \subset R^n$ et tel qu'il existe une rétraction $r : W' \to W$ d'un voisinage W' de W dans R^n. Choisissons une triangulation de W' et soit L la réunion de tous les simplexes de W' qui rencontrent C. Alors $i : C \hookrightarrow L$ et $p = r \mid C$ conviennent.

Preuve de 1.1. — Grâce à [SGH, 1.6] on peut choisir une base de voisinages ouverts de X dans Y, $U_0 \supset\supset U_1 \supset\supset U_2 \supset\supset \ldots$ tels que pour tout i, $U_{i+1} \searrow X\,(U_i)$, et U_i est voisinage I-régulier de X dans Y. D'après [SGH, 2.4] chaque inclusion $U_i - X \hookleftarrow U_{i+1} - X$ est une équivalence d'homotopie, d'où le diagramme commutatif à homotopie près :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] (U_0-X) & & (U_1-X) \arrow[ll, hook'] \arrow[dl] & & (U_2-X) \arrow[ll, hook'] \arrow[dl] & \ldots \arrow[l, hook'] \\ & (U_0-X) \arrow[ul, "\equiv"] & & (U_0-X) \arrow[ll, "\equiv"'] \arrow[ul] & \ldots \arrow[l, "\equiv"'] \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

On va montrer que $U_i - X$ est finiment dominé. Pour cela choisissons une I-frange V de U_1 [SGH, 3.9], d'adhérence incluse dans $U_0 - U_2$. On sait par [SGH, 3.9] que l'inclusion $V \hookrightarrow U_0 - X$, est une équivalence d'homotopie. De plus $\overline{V}$ est compact et inclus dans $U_0 - X$, un ANR. Selon le lemme, $V \hookrightarrow U_0 - X$ se factorise à travers un CW-complexe fini L. Donc $U_0 - X$ est finiment dominé par L, et par suite, a le type d'homotopie d'un CW-complexe K finiment dominé [Sp, p. 410], lequel convient.

Dans la suite de ce paragraphe nous considérons en ENR W et un bout isolé de W. Ce bout sera considéré comme un point ε d'un espace $W \cup \varepsilon$ muni d'une topologie hausdorff, localement compacte, localement connexe dont W soit un ouvert et telle que, pour tout voisinage connexe N de ε dans $W \cup \varepsilon$, $N - \varepsilon$ soit encore connexe. On appellera voisinage de ε dans W un ensemble $U \subset W$ tel que $U \cup \varepsilon$ soit un voisinage de ε dans $W \cup \varepsilon$. On évitera ainsi pour l'essentiel la théorie des bouts.

Puisque le bout ε est isolé, on pourra souvent considérer qu'il est le seul bout de W, en remplaçant $W \cup \varepsilon$ par un voisinage compact de ε. Alors ε n'est rien que l'infini d'Alexandroff pour W.

1.3. Définition. — Soit maintenant W une variété topologique et supposons d'abord que $\partial W = \varnothing$. Alors on dit qu'un bout isolé ε de W est *docile* (« tame ») si une des trois conditions homotopiques équivalentes (A), (B), (C) est vérifiée.

(A) (i) *Il existe une suite décroissante* $\{ U_i \}$ *de voisinages connexes de* ε *dans* W *tels que* $\mathring{U}_i \supset \overline{U}_{i+1}$, $\bigcap \overline{U}_i = \varnothing$ *et que le système* $\mathscr{S}$: $\pi_1(U_1) \xleftarrow{f_0} \pi_1(U_2) \xleftarrow{f_1} \ldots$ (*où les* f_i *sont induits par inclusions*) *induise des isomorphismes* $\operatorname{Im}(f_0) \xleftarrow{\cong} \operatorname{Im}(f_1) \xleftarrow{\cong} \ldots.$

(ii) *Pour tout i, il existe* L_i, CW-*complexe fini, et un diagramme*

$$\begin{tikzcd} U_i & & U_{i+1} \arrow[ll, hook'] \arrow[dl] \\ & L_i \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

qui commute à homotopie près.

(La condition (i) est indépendante du choix des points bases et des chemins les reliants, cf [S_1, chap. III]).

Dans le cas où (i) est vérifié, on dit que le système $\{ \pi_1(U) \mid U \text{ voisinage connexe de } \varepsilon \}$ est essentiellement constant et converge à $\pi_1(\varepsilon) = \varprojlim \mathscr{S} = \varprojlim \pi_1(U_i) = \operatorname{Im}(f_i)$.

(B) *Il existe une suite décroissante* $\{ U_i \}$ *de voisinages de* ε *dans* W *tels que* $\mathring{U}_i \supset \overline{U}_{i+1}$, $\bigcap \overline{U}_i = \varnothing$ *et un diagramme*

$$\begin{tikzcd} U_1 & & U_2 \arrow[ll, hook'] \arrow[dl] & & U_3 \arrow[ll, hook'] \arrow[dl] & & \cdots \arrow[ll, hook'] \\ & K \arrow[ul] & & K \arrow[ll, "\equiv"'] \arrow[ul] & & \cdots \arrow[ll, "\equiv"'] \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

qui commute à homotopie près où K *est un* CW-*complexe finiment dominé* [i. e. W vérifie (D) vers ε].

Dans cette situation on écrira que $U_i \gg U_{i+1}$.

(C) *Si* $\dim W + n \geqq 6$ *et* $n \geqq 1$, $\varepsilon \times T^n$ *admet un collier dans* $W \times T^n$ (i. e. *un voisinage fermé* V *du bout isolé* $\varepsilon \times T^n$ *de* $W \times T^n$ *qui est une sous-variété de* $W \times T^n$ *homéomorphe à* $\delta V \times [0, 1)$, *où* δV *indique la frontière de* V *dans* $W \times T^n$).

Définition. — *Si* $\partial W \neq \varnothing$, *la notion de docilité d'un bout isolé* ε *de* W *est la suivante.*

D'abord on suppose que les bouts de ∂W à ε sont tous dociles, ensuite qu'une des conditions (A), (B), ou (C) avec $\dim W + n \geqq 7$, est vérifiée.

1.4. Remarques. — 1° Dans (A), les L_i étant finis, $\pi_1(\varepsilon)$ est finiment présenté, puisque tout rétract d'un groupe finiment présenté est finiment présenté, [Wa_1, lemma 1.3].

2° Le CW-complexe K de (B) est uniquement déterminé à homotopie près (vérification facile).

3° L'équivalence des énoncés précédents lorsque $\partial W = \varnothing$ est prouvée dans [S_2]. En voici une rapide esquisse : (B) $\Rightarrow$ (A) est facile; on démontre (C) $\Rightarrow$ (B) en considérant le revêtement $p = (\mathrm{id} \mid \mathbf{R}^n) \times \exp$: $W \times \mathbf{R}^n \to W \times T^n$ de $W \times T^n$, le K cherché sera p^{-1} (collier de $\varepsilon \times T^n$ dans $W \times T^n$). Enfin, si ε satisfait (A) dans W, il en est de même de $\varepsilon \times T^n$ dans $W \times T^n$; on choisit n tel que $n + \dim W \geqq 6$ et on déduit, en utilisant soigneusement la théorie des anses, que ε vérifie (C) [S_1, theorem 7.5]. Il y intervient une formule de produit pour une obstruction à la finitude pour les CW complexes et le fait que la caractéristique d'Euler de T^n est 0. Le passage par des dimensions $\geqq 6$ est dû au fait que l'on n'a pas de théorie d'anses pour les variétés de dimension 4 ou 5 [S_9].

La démonstration de cette équivalence lorsque $\partial W \neq \varnothing$ procède, sous l'hypothèse de docilité des bouts de ∂W à ε, à peu près comme lorsque $\partial W = \varnothing$.

4° L'équivalence des conditions (A), (B) et (C) n'a pas lieu en général (i. e. si W n'est pas une variété). En effet considérons la suite $S^n \xleftarrow{f_1} S^n \xleftarrow{f_2} S^n \xleftarrow{f_3} \ldots$, $n > 1$, où chaque f_i est une application de degré 2. Soit $M(f_i)$ le cylindre d'application de f_i. On forme $W = \bigcup_i M(f_i)$ en identifiant la source de f_i avec le but de f_{i+1}. Alors $U_k = \bigcup_{i \geqq k} M(f_i)$ est une base de voisinages du bout de W et chaque U_k est homotopiquement équivalent à S^n. Donc on a trivialement la condition (A). Cependant la suite $H_n(U_1) \leftarrow H_n(U_2) \leftarrow \ldots$ qui est $\mathbf{Z} \xleftarrow{\times 2} \mathbf{Z} \xleftarrow{\times 2} \mathbf{Z} \ldots$ n'est pas essentiellement constante et, par suite, (B) n'est pas vérifiée.

5° Il est facile et important de remarquer que ces conditions de docilité sont des invariants du type d'homotopie propre de W, *cf.* [S_2].

2. La docilité entraîne l'existence de voisinages réguliers : préparatifs

Le but des paragraphes 2 et 3 est de montrer qu'en grandes dimensions, si ε est docile (notion homotopique) alors $(W \cup \varepsilon, \varepsilon)$ satisfait à l'I-axiome (notion géométrique); i. e. ε admet des voisinages I-réguliers dans $W \cup \varepsilon$.

2.1. THÉORÈME. — *Soit* W *une variété* CAT (= DIFF, PL *ou* TOP) *de dimension* $\geqq 5$ *et* ε *un bout isolé de* W. *Supposons que* $(\partial W \cup \varepsilon, \varepsilon)$ *vérifie l'*I-*axiome dans* CAT. *Alors si* ε *est docile*, $(W \cup \varepsilon, \varepsilon)$ *satisfait à l'*I-*axiome* CAT.

2.2. REMARQUES. — 1° S'il existe un voisinage U de ε tel que $\partial W \cap U = \varnothing$, en particulier si $\partial W = \varnothing$, alors $(\partial W \cup \varepsilon, \varepsilon)$ vérifie trivialement l'I-axiome.

2° Sous les hypothèses du théorème 2.1, ∂W et $\partial W \cup \varepsilon$ vérifient les hypothèses de la proposition 1.1, donc aussi la conclusion et on en déduit que ∂W n'a qu'un nombre fini de bouts à ε.

3° Si W est une variété CAT (= DIFF ou PL), l'I-axiome TOP pour $(W \cup \varepsilon, \varepsilon)$ entraîne l'I-axiome CAT pour $(W \cup \varepsilon, \varepsilon)$. En effet on peut approximer les isotopies topologiques de l'identité d'une variété CAT ouverte de dimension $\geqq 5$ par des isotopies CAT de l'identité, et ceci, d'une façon relative (d'après le théorème « Sliced concordance implies sliced isotopy », *voir* [KS_1, § 6]).

Pour prouver 2.1 il faut et il suffit de montrer que pour tout V_1 voisinage de ε il existe $V_2 \subset V_1$ tel que $V_2 \cup \varepsilon$ soit I-compressible vers ε dans $V_1 \cup \varepsilon$. Ces I-compressions seront obtenues par des engouffrements à la Stallings, d'où les propositions suivantes.

Rappelons d'abord que si P est un polyèdre, M une variété topologique et $f : \mathrm{P} \to \mathrm{M}$ un plongement, on dit que f est un plongement *localement polyédral* si pour tout $x \in \mathrm{P}$ il existe un voisinage ouvert U dans M de $f(x)$ et une triangulation de U comme variété combinatoire (PL) pour laquelle f soit PL (= linéaire par morceaux) sur un voisinage de x. Si l'inclusion $\mathrm{P} \subsetneq \mathrm{M}$ est localement polyèdral on dit simplement que P est localement polyèdral dans M.

2.3. PROPOSITION. — *Soit* M^n *une variété topologique connexe et sans bord. Soient*, p *un entier* $\geqq 0$ *et*

(1) P *un polyèdre fermé et localement polyèdral dans* M, *peut-être non-compact, avec* $\dim \mathrm{P} \leqq n-3$.

(2) P_0 *un sous-polyèdre de* P *avec* $\mathrm{Q} = \overline{\mathrm{P}-\mathrm{P}_0}$ *compact et* $\dim \mathrm{Q} \leqq p$.

(3) $\mathrm{U}_0 \subset \mathrm{U}_1 \subset \ldots \subset \mathrm{U}_p$ *et* $\mathrm{M}_0 \subset \ldots \subset \mathrm{M}_p = \mathrm{M}$ *des ouverts non vides de* M *avec* $\mathrm{P} \subset \mathrm{M}_0$, $\mathrm{P}_0 \subset \mathrm{U}_0$, $\mathrm{U}_i \subset \mathrm{M}_i$ *et tels que, pour* $0 \leqq i \leqq p-1$, *toute application* $(\mathrm{K}, \mathrm{L}) \to (\mathrm{M}_i, \mathrm{U}_i)$ *partant d'une paire simpliciale finie de dimension* $\leqq p-i$ *soit homotope dans* $(\mathrm{M}_{i+1}, \mathrm{U}_i)$ *à une application* $(\mathrm{K}, \mathrm{L}) \to (\mathrm{U}_{i+1}, \mathrm{U}_i)$.

Alors il existe une isotopie, à support compact dans M, *de* $\mathrm{id} \mid \mathrm{M}$ *à un homéomorphisme* h *de* M *tel que* $\mathrm{P} \subset h(\mathrm{U}_p)$.

Preuve de 2.3. — Supposons d'abord M une variété PL et P un sous-polyèdre. Alors la preuve est standard (*cf.* [Hd, 7.4]) : On procède par induction sur la « longueur » p. Si $p = 0$, c'est clair; supposons donc la proposition vérifiée pour toute longueur $< p$. Posons $\delta\mathrm{Q} = \mathrm{Q} \cap \mathrm{P}_0$. Par l'hypothèse (3) appliquée à $(\mathrm{Q}, \delta\mathrm{Q}) \subsetneq (\mathrm{M}_0, \mathrm{U}_0)$ il existe une application $f : \mathrm{P}\times 0 \cup \mathrm{Q}\times\mathrm{I} \to \mathrm{M}_1$, $\mathrm{I} = [0, 1]$, telle que $f \mid \mathrm{P}\times 0$ soit l'inclusion $\mathrm{P} \subsetneq \mathrm{M}_1$ et que $f(\mathrm{Q}\times 1) \cup f(\delta\mathrm{Q}\times\mathrm{I}) \subset \mathrm{U}_1$. De plus, on peut supposer que f est en position générale. Notons $\mathrm{S}(f)$ l'adhérence de l'ensemble des points doubles de f et soit

$$\hat{\mathrm{S}}(f) = \{x \times \mathrm{I} \mid x \in \mathrm{S}(f) \cap \mathrm{Q}\times\mathrm{I}\}.$$

Alors si $p < n-3$, $\dim \hat{\mathrm{S}}(f) < p$.

Si $p = n-3$, $\dim \hat{\mathrm{S}}(f) \leqq p$. Mais en appliquant la méthode de « piping » [Z_2], [Z_1, lemma 48] aux singularités qui proviennent de l'intersection de $f(\mathrm{Q}\times\mathrm{I})$ avec lui-même [les seules qui donnent naissance à des simplexes de dimension p dans $\hat{\mathrm{S}}(f)$], on peut supposer que f est telle que $\hat{\mathrm{S}}(f)$ s'effondre sur un sous-complexe de dimension $< p$ contenant $\mathrm{S}(f) \cap \mathrm{Q}\times\mathrm{I}$; cet effondrement se transmet par f. (Mise en garde : le « piping » se simplifie en suivant un peu les idées de Stallings, *cf.* [St_1].)

Dans les deux cas, l'hypothèse de récurrence donne une isotopie de $\mathrm{id} \mid \mathrm{M}$ à un homéomorphisme h_0 tel que $h_0(\mathrm{U}_p) \supset \mathrm{P}_0 \cup f(\delta\mathrm{Q}\times\mathrm{I} \cup \mathrm{Q}\times 1 \cup \hat{\mathrm{S}}(f))$ puisque U_1 contient $\mathrm{P}_0 \cup f(\delta\mathrm{Q}\times\mathrm{I} \cup \mathrm{Q}\times 1)$ et que le reste a (ou s'effondre sur un sous-complexe de) dimension $< p$.

Enfin, puisque $\mathrm{P}_0 \cup \mathrm{Q}\times\mathrm{I}$ s'effondre sur $\mathrm{P}_0 \cup \delta\mathrm{Q}\times\mathrm{I} \cup \mathrm{Q}\times 1 \cup \hat{\mathrm{S}}(f)$, il s'ensuit que $\mathrm{P}_0 \cup f(\mathrm{Q}\times\mathrm{I})$ s'effondre sur $\mathrm{P}_0 \cup f(\delta\mathrm{Q}\times\mathrm{I} \cup \mathrm{Q}\times 1 \cup \hat{\mathrm{S}}(f))$, donc il existe un h

comme dans l'énoncé tel que $h(U_p) \supset P_0 \cup f(Q \times I) \supset P$. Ce qui complète 2.3 lorsque M est une variété PL.

Il est clair que l'on pourra transcrire l'argument précédent au cas où M est seulement une variété topologique si l'on sait construire une application $f : P \times 0 \cup Q \times I \to M_1$, telle que $f \mid P \times 0$ soit l'inclusion $P \subsetneq M_1$, que $f(Q \times 1) \cup f(\delta Q \times I) \subset U_1$ et qui soit en position générale au-dessus de M_1 au sens suivant :

2.4. Définition. — Soient R un polyèdre, M une variété topologique et $f : R \to M$ une application continue. On dit que f est en *position générale topologique au-dessus d'un ouvert* $M_0 \subset M$ si pour tout $x \in M_0$, il existe un voisinage ouvert V de x dans M_0 et une triangulation de V comme variété PL (combinatoire) telle que $f \mid : f^{-1}(V) \to V$ soit PL et en position générale. (*Voir* [Hd, chap. IV] pour la notion convenable de position générale PL). Le lemme suivant assure alors pour $f(R) \subset M$ une structure PL unique telle que $f \mid : R \to f(R)$ soit PL.

2.5. Lemme. — *Soient* P *et* Q *deux compacts triangulables et* $f : P \to Q$ *une application* PL *surjective pour des structures* PL Σ *et* Σ' *de* P *et* Q. *Alors* Σ' *est uniquement déterminée par* Σ *et* f.

Preuve de 2.5. — Rappelons tout d'abord qu'une structure PL sur un espace compact est uniquement déterminée par un recouvrement fini par compacts munis chacun d'une structure PL, tel que ce recouvrement soit stable par intersection et que chaque inclusion soit PL. (On peut former une triangulation dont chacun de ces compacts PL soit sous-polyèdre et sous-complexe, *cf.* [Hd, chap. III] !)

Choisissons maintenant des triangulations de P et Q qui rendent f simplicial. Alors f est linéaire sur chaque simplexe σ de P et il existe une face τ de σ telle que $f \mid \tau$ réalise un isomorphisme PL entre τ et $f(\sigma) = f(\tau)$. Mais alors la famille des $f(\tau)$ détermine uniquement Σ'.

C. Q. F. D.

Tout ce qui nous est nécessaire pour conclure la preuve de 2.3 résultera immédiatement de la proposition suivante :

2.6. Proposition. — *Soient donnés : une variété topologique* M^m *sans bord; un polyèdre* R *de dimension* $\leqq m-3$; *une application propre* $f : R \to M$ *en position générale au-dessus de tout* M_0; V *une carte de* M; $\eta : R \to (0, \infty)$ *une application continue;* S *un sous-polyèdre* (*fermé*) *de* R *sur lequel* f *est déjà en position générale.*

Alors il existe une η-*approximation* $f' : R \to M$ *de* f *qui est en position générale au-dessus de* $M_0 \cup V$ *et qui est égale à* f *sur* S.

Preuve de 2.6. — Par hypothèse, il existe un voisinage polyédral $R_0 \subset f^{-1}(M_0)$ de $f^{-1}(M_0 - V)$ fermé dans le polyèdre $f^{-1}(M_0 \cup V)$ tel que $T = (R_0 \cup S) \cap f^{-1}(V)$ soit un sous-polyèdre fermé du polyèdre $f^{-1}(V)$ et que $f \mid T$ soit en position générale au-dessus de V. Il résulte alors du lemme 2.5 que $f(T)$ est naturellement un sous-polyèdre, localement polyédral dans V. Alors les résultats de Miller, Bryant,

Bryant et Seebeck ([Mil], [Br], [B-S, th. 3] ([5]) donnent un petit homéomorphisme h de V tel que $f(\mathrm{T}) \subsetneq \mathrm{V}$ soit une application PL pour la nouvelle structure PL de V qui est la structure standard transportée par h. Donc, pour cette structure, $f| : \mathrm{T} \cap f^{-1}(\mathrm{V}) \to \mathrm{V}$ est PL et toujours en position générale; on conclut alors par une mise en position générale de $f| : f^{-1}(\mathrm{V}) \to \mathrm{V}$ relativement à T par une petite homotopie qui s'atténue à l'identité vers la frontière de $f^{-1}(\mathrm{V})$ dans R [Hd, lemma 4.8].

Ceci met fin à la démonstration de 2.3.

Il sera commode d'utiliser aussi le résultat suivant dû à R. D. Edwards [E] qui permet de faire en TOP les mêmes arguments de « squelettes duaux » globaux qu'en PL, *cf.* Stallings [St_2; § 8].

2.7. Proposition. — *Soient* M^n *une variété topologique sans bord de dimension* $n \geqq 5$ *et* $2 \leqq k \leqq n-3$ *un entier. Alors pour toute application continue* $\varepsilon : \mathrm{M} \to (0, \infty)$, *il existe deux polyèdres* S^k *et* T^{n-k-1} *de dimensions respectives* k *et* $n-k-1$, *fermés, disjoints, localement polyédraux dans* M, *tels que : pour tout fermé* $\mathrm{X} \subset \mathrm{M}-\mathrm{T}$ *et tout voisinage* E *de* S *il existe une* ε-*isotopie* $\{\theta_t\}$ *de* $\mathrm{id} \mid \mathrm{M}$ *telle que* $\mathrm{X} \subset \theta_1(\mathrm{E})$. *De plus on peut exiger que* θ_t *soit l'identité hors du* ε-*voisinage de* X.

3. Preuve du théorème d'existence 2.1

3.1. Comme annoncé, nous allons maintenant construire par engouffrement les I-compressions souhaitées.

Soit V_1 un voisinage quelconque de ε, on cherche un voisinage V_2 de ε qui soit I-compressible à support compact dans V_1 jusque dans tout voisinage V_3 de ε.

L'équivalence des conditions (A), (B), (C) de docilité d'un bout (*voir* 1.3) montre que, par hypothèse, pour n grand, $\varepsilon \times \mathrm{T}^n$ admet dans $\mathrm{W} \times \mathrm{T}^n$ un voisinage collier $\mathrm{U} \approx \delta\mathrm{U} \times [0, 1)$ où U est une sous-variété localement plate de $\mathrm{W} \times \mathrm{T}^n$ de frontière compacte $\delta\mathrm{U}$ dans $\mathrm{W} \times \mathrm{T}^n$. Il est facile de voir que si les V_i sont une base de voisinages de ε dans W, les $\mathrm{W}_i \times \mathrm{T}^n$ et les $\delta\mathrm{U} \times [a, 1)$, $a \in [0, 1)$, sont deux bases de voisinages du même bout $\varepsilon \times \mathrm{T}^n$ de $\mathrm{W} \times \mathrm{T}^n$; donc, pour tout V_i, il existe V_j et a tels que $\mathrm{V}_i \times \mathrm{T}^n \supset\supset \delta\mathrm{U} \times [a, 1) \supset\supset \mathrm{V}_j \times \mathrm{T}^n$. On dira alors que V_i et V_j sont séparés par un collier, ce qu'on notera $\mathrm{V}_i] \mathrm{V}_j$.

Choisissons des voisinages ouverts de ε tels que (rétrécir V_3 ne nuit pas à la généralité) :

$$(1) \qquad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{V}_1 \equiv \mathrm{V}_{1,n-3}] \mathrm{V}_{1,n-4}] \ldots] \mathrm{V}_{1,0}; \\ \mathrm{V}_{1,0} \supset\supset (\mathrm{V}_{2,3} \cup \mathrm{V}_3); \\ \mathrm{V}_{2,3}] \mathrm{V}_{2,2}] \mathrm{V}_{2,1}] \mathrm{V}_{2,0} \equiv \mathrm{V}_2 \\ \text{et} \\ \mathrm{V}_3 \equiv \mathrm{V}_{4,n-2}] \mathrm{V}_{4,n-3}] \ldots] \mathrm{V}^+_{4,0} \supset\supset \mathrm{V}_{4,0} \equiv \mathrm{V}_4. \end{array}\right.$$

où tous les signes] d'une même chaîne sont relatifs à un même collier.

([5]) L'énoncé utilisé est [B-S, th. 3], les outils pour le démontrer sont dus à Miller [Mil] (théorème d'approximation) et à Bryant [Br] (théorème de Cobb).

(2) $V_{2,3}$ soit si petit que $(\overline{V}_{2,3} \cap \partial W) \cup \varepsilon \searrow \varepsilon$ à support dans $V_{1,0} \cap \partial W$. *Voir* figure 1.

On cherche une isotopie de $\mathrm{id} \mid W$ à support compact dans V_1 qui transporte V_2 dans V_3. On se ramène d'abord au cas où $Z \equiv (\overline{V}_{2,3} - V_{4,0}) \subset \mathrm{int}W$. Ce qui est trivial si $\partial W = \emptyset$ et dans le cas contraire se fait en utilisant la condition 2° ci-dessus et en remarquant que toute isotopie à support compact dans $V_{1,0} \cap \partial W$ se prolonge au moyen d'un collier de ∂W à une isotopie de $\mathrm{id} \mid W$ à support compact dans $V_{1,0}$. Notons que les relations (1) entre nos ouverts ne sont pas modifiées : si deux ouverts sont séparés par un collier, leurs images par un homéomorphisme de W sont séparés par le collier image.

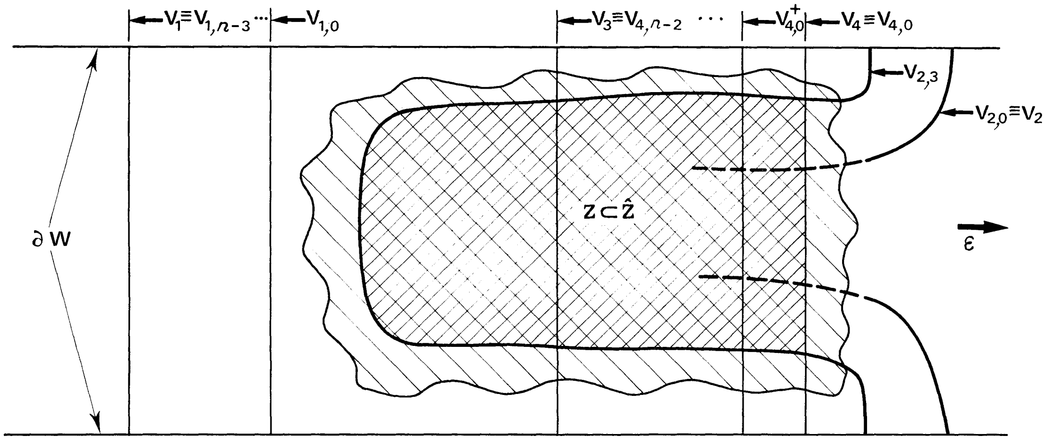


Fig. 1

Maintenant que $Z \subset \mathrm{int}W$, on utilise la proposition 2.6 avec les données suivantes : $M = \mathrm{int}W$, $k = n-3$, et ε est une fonction qui tend vers zéro lorsqu'on s'approche de ∂W et assez petite pour que $V_{4,0}^+$ contienne l'ε-voisinage de $V_4 \equiv V_{4,0}$ et que l'ε-voisinage de Z, noté $\hat{Z}$, soit contenu dans intW. On obtient alors S^{n-3} et T^2, polyèdres disjoints, fermés, localement polyédraux dans $M = \mathrm{int}W$. On va alors construire :

(i) une isotopie $\{h_t\}$ de W, à support compact dans $(\mathrm{int}V_{1,n-2}) - \overline{V}_{4,0}^+$ telle que $h_1(V_3) \supset S \cap \hat{Z}$;

(ii) une isotopie $\{g_t\}$ de W, à support compact dans $\mathrm{int}V_{2,3}$ telle que $g_1(W - \overline{V}_2) \supset T \cap \hat{Z}$.

Pour obtenir $\{h_t\}$ on utilise la proposition 2.3 avec $p = n-3$, P = un sous-polyèdre compact de S contenant $S \cap \hat{Z}$ et $U_i = (\mathrm{int}V_{4,i+1}) - \overline{V}_{4,0}^+$, $M_i = (\mathrm{int}V_{1,i}) - V_{4,0}^+$, pour $0 \leqq i \leqq n-3$.

Les hypothèses homotopiques sont facilement vérifiées : en injectant naturellement W dans $W \times T^n$, en tirant sur le voisinage collier de $\varepsilon \times T^n$ [sans envoyer dans le bord $\partial W \times T^n = \partial(W \times T^n)$ des points de l'intérieur de $W \times T^n$] puis en projetant $W \times T^n$ sur W, on obtient toutes les homotopies désirées.

Quant à $\{g_t\}$, elle est obtenue de même, avec les substitutions suivantes : $p=2$, P = un sous-polyèdre compact de T contenant $T \cap \hat{Z}$,

$$U_{2-i} = \operatorname{int} V_{2,3} - \overline{V}_{2,i} \qquad \text{et} \qquad M_i = \operatorname{int} V_{2,3}, \qquad 0 \leqq i \leqq 2.$$

Les hypothèses homotopiques sont vérifiées comme pour $\{h_t\}$.

Nous faisons maintenant appel à la proposition 2.6 de la manière suivante : On pose

$$U = h_1(V_3)$$

et

$$X = g_1(\overline{V}_2) \cap \hat{Z} = \hat{Z} - g_1(W - \overline{V}_2),$$

qui vérifie $X \cap T = \varnothing$ selon (ii). D'autre part $E = h_1(V_3) \cup (M - \hat{Z})$ est un voisinage de S selon (i). Donc il existe un ε-isotopie θ_t, $0 \leqq t \leqq 1$, de $M = \operatorname{int} W$ qui est l'identité hors du ε-voisinage de X, s'étend à tout W et telle que $X \subset \theta_1(E)$.

On veut montrer que

$$g_1(W - \overline{V}_2) \cup \theta_1 h_1(V_3) \supset W$$

car alors on a

$$(\theta_1 h_1)^{-1} \circ g_1(\overline{V}_2) \subset V_3,$$

c'est-à-dire $\{(\theta_t h_t)^{-1} \circ g_t\}$ est la I-compression cherchée.

Mais premièrement $g_1(W - \overline{V}_2) \supset W - V_{2,3}$ selon (ii).

Deuxièmement $h_1(V_3) \supset V_{4,0}^+$ selon (i), et $V_{4,0}^+$ contient l'ε-voisinage de $V_{4,0}$; donc $\theta_1 h_1(V_3) \supset V_{4,0}$ puisque $\{\theta_t\}$ est une ε-isotopie.

Troisièmement on a

$$\theta_1(E) = \theta_1 h_1(V_3) \cup \theta_1(W - \hat{Z}) \supset X = \hat{Z} - g_1(W - \overline{V}_2),$$

d'où

$$\theta_1 h_1(V_3) \supset \hat{Z} - \theta_1(W - \hat{Z}) - g_1(W - \overline{V}_2).$$

Puisque $\hat{Z}$ est l'ε-voisinage de Z, on déduit

$$\theta_1 h_1(V_3) \supset Z - g_1(W - \overline{V}_2),$$

d'où

$$g_1(W - \overline{V}_2) \cup \theta_1 h_1(V_3) \supset Z.$$

En définitive

$$g_1(W - \overline{V}_2) \cup \theta_1 h_1(V_3) \supset (W - V_{2,3}) \cup Z \cup V_{4,0} = W,$$

comme souhaité. Ceci termine la preuve du théorème 2.1.

3.2. Remarques. — (*a*) Dans le cas où CAT = PL la preuve du théorème 2.1 n'utilise que des outils classiques d'engouffrement dans une variété PL.

(*b*) Il n'est pas nécessaire de faire appel à la proposition 2.4 d'Edwards pour traiter le cas TOP. On peut tout aussi bien recouvrir de la manière classique $Z = \overline{V}_{2,3} - V_{4,0}$ par un carrelage de $n+1$ polyèdres compacts, chacun inclus dans une carte et les engouffrer successivement, à condition d'utiliser un nombre $n+1$ fois plus grand d'ouverts $V_{1,i}$, $V_{2,i}$ et $V_{1,i}$.

(*c*) Il est aussi possible d'éviter la version topologique de la proposition 2.3 et les difficiles (bien qu' « élémentaires ») résultats sur lesquels elle s'appuie. Mais alors il semble nécessaire d'utiliser la théorie des anses sur les variétés topologiques (éventuellement à bord) et des arguments particuliers quand on touche à la dimension 5 où cette théorie n'existe pas. Pour une idée (dans un cas simple) de ce genre de méthode, *cf.* [S_7, § 7].

4. Voisinages réguliers et silhouettes

4.1. THÉORÈME. — *Soient* M *un* ANR (*métrisable*) *localement compact et* $X \subset M$ *un compact tels que* $M-X$ *soit une variété topologique sans bord. On suppose qu'il existe une base de voisinages* $U_1 \supset\supset U_2 \supset\supset U_3 \supset\supset \ldots$ *de* X *dans* M *tels que :*

(*a*) *L'inclusion* $U_i - X \hookrightarrow U_i$ *soit une* 1-*équivalence pour tout i.*

(*b*) *Il existe un* CW *complexe* (*finiment dominé*) K *et un diagramme*

$$\begin{tikzcd}
U_1 & & U_2 \arrow[ll, hook'] \arrow[dl] & & U_3 \arrow[ll, hook'] \arrow[dl] & \cdots \arrow[l, hook'] \\
& K \arrow[ul] & & K \arrow[ll, "="'] \arrow[ul] & & \cdots \arrow[ll, "="']
\end{tikzcd}$$

commutatif à homotopie près.

Alors, pourvu que $\dim(M-X) \geqq 5$, X *a des voisinages* I-*réguliers dans* M.

4.2. REMARQUES. — 1° Ce théorème reste vrai lorsque $M-X$ est une variété à bord si l'on suppose que les bouts de $\partial(M-X)$ à X sont dociles. (Même démonstration.)

2° Vu que M est un ANR, l'hypothèse (*b*) signifie que X a la *silhouette* (= « shape » de Borsuk, *voir* [Bo_2], [F]) d'un CW-complexe. Rappelons que tout ANR séparable a le type d'homotopie d'un CW-complexe, *cf.* [Mi_1], et *a fortiori* la même silhouette. Inversement un CW-complexe dénombrable a le type d'homotopie d'un ANR séparable [Mi_1]. D'ailleurs notre K a nécessairement le type d'homotopie d'un CW-complexe dénombrable [Wb].

3° Vu que M est un ANR il n'est pas nécessaire de supposer K finiment dominé. *Cf.* le lemme 1.2.

4° On montre que l'hypothèse (*b*) est nécessaire exactement comme en 1.1. L'exemple suivant prouve l'utilité de l'hypothèse (*a*) : $M = R^3 \times S^n$, $X = A \times S^n$ où A est un arc sauvage non-cellulaire dans R^3 [FA]. (En effet (*b*) est vérifiée selon la remarque 4.2.2 et $K \simeq A \simeq pt$. Ensuite (*a*) et (*b*) et $K \simeq pt$ entraîneraient la cellularité de A selon un critère de Mc Millan [Mc_2]).

Preuve de 4.1. — Puisque K est finiment dominé, K n'a qu'un nombre fini, disons N, de composantes connexes; donc M−X a N bouts à X, nécessairement isolés. On peut supposer que, pour tout $i \geqq 2$, $\pi_0(U_i - X) \cong \pi_0(U_i) \cong \pi_0(K)$; il suffit de soustraire de U_i les composantes connexes superflues. On peut donc supposer que K et, pour tout i, U_i et $U_i - X$ sont connexes, et que M−X a un seul bout (noté ε) à X. (On peut identifier ε à l'image de X dans M/X). Si on montre que ce bout est docile, on conclura par 2.1. Pour cela on va vérifier l'hypothèse (A) de docilité (*cf.* 1.3).

On déduit immédiatement des hypothèses (*a*) et (*b*) que le système $\{\pi_1(U_i - X);\ i \geqq 1\}$ est essentiellement constant. Notons que, K étant finiment dominé, $\pi_1(\varepsilon) \cong \pi_1(K)$ est finiment présenté [Wa_1, lemma 3.1].

Il ne change rien de multiplier M−X par T^n (*cf.* 1.3), donc on peut supposer que dim (M−X) est telle qu'il existe des voisinages U de X, compacts et connexes, arbitrairement petits, avec $\pi_1(U-X) \cong \pi_1(K) \cong \pi_1(\varepsilon)$ et tels que U−X soit un 1-voisinage de ε [vu que $\pi_1(\varepsilon)$ est finiment présenté], *cf.* [S_1, th. 3.10]. Il suffit alors de vérifier qu'un tel 1-voisinage est finiment dominé, ce que l'on va faire en utilisant la dualité de Poincaré.

Pour cela rappelons d'abord quelques résultats de Wall ([Wa_1], [Wa_2]).

4.3. Proposition. — 1° Soit Y un CW-complexe connexe et $\tilde{Y}$ son revêtement universel. Le complexe de chaînes singulières de $\tilde{Y}$ à coefficients entiers **Z**, $C_*(\tilde{Y}, \mathbf{Z})$, peut-être considéré comme un complexe de chaînes à gauche sur l'anneau de groupe $\mathbf{Z}[\pi_1(Y)]$ qu'on note $C_*(Y)$.

2° Si Λ est un anneau unitaire, $\mathscr{D}(\Lambda)$ désigne la classe des complexes de chaînes à gauche sur Λ qui sont dominés par des complexes de chaînes à gauche sur Λ finiment engendrés et projectifs. *Ceux-là sont alors homotopiquement équivalents à des complexes de chaînes à gauche sur* Λ, *finiments engendrés et projectifs sur* Λ.

3° *Un* CW-*complexe connexe* Y *est finiment dominé si et seulement si* $\pi_1(Y)$ *est finiment présenté et* $C_*(Y) \in \mathscr{D}(\mathbf{Z}[\pi_1(Y)])$.

4° *Si* $0 \to A_* \to B_* \to C_* \to 0$ *est une suite exacte de complexes de chaînes à gauche sur* Λ *dont deux sont dans* $\mathscr{D}(\Lambda)$, *il en est de même du troisième.*

Revenons à la situation précédente : on considère un voisinage U de X tel que U−X soit un 1-voisinage du bout ε. On a donc $\pi_1(\varepsilon) \cong \pi_1(\partial U) \cong \pi_1(U-X) \cong \pi_1(U)$ [le dernier isomorphisme se déduit de (*a*) par le théorème de Van-Kampen]. Puisque ∂U est un ANR compact, il est finiment dominé [Bo_1, p. 106] et par suite

$$C_*(\partial U) \in \mathscr{D}(\mathbf{Z}[\pi_1(\varepsilon)]).$$

Etant donnée la suite exacte $0 \to C_*(\partial U) \to C_*(U-X) \to C_*(U-X, \partial U) \to 0$, si on montre que $C_*(U-X, \partial U) \in \mathscr{D}(\mathbf{Z}[\pi_1(\varepsilon)])$ on en déduira par 4.3.4 que

$$C_*(U-X) \in \mathscr{D}(\mathbf{Z}[\pi_1(\varepsilon)])$$

ce qui conclura par 4.3.3.

Pour montrer que $C_*(U-X, \partial U) \in \mathscr{D}(\mathbf{Z}[\pi_1(\varepsilon)])$ on va vérifier une dualité du genre de celle d'Alexander.

Notons

$$\Lambda = \mathbf{Z}[\pi_1(\varepsilon)] \cong \mathbf{Z}[\pi_1(\partial \mathrm{U})] \cong \mathbf{Z}[\pi_1(\mathrm{U}-\mathrm{X})] \cong \mathbf{Z}[\pi_1(\mathrm{U})].$$

Soit $i : \mathrm{K} \to \mathrm{U}$ une flèche (bien définie à homotopie près) issue de l'hypothèse (*b*). On dénote par $\mathrm{C}_*(\mathrm{U} \leftarrow \mathrm{K})$ le cylindre de l'application de chaînes $i_* : \mathrm{C}_*(\mathrm{K}) \to \mathrm{C}_*(\mathrm{U})$, voir l'appendice. $\mathrm{C}_*(\mathrm{U} \leftarrow \mathrm{K})$ est bien défini à homotopie de chaîne près.

4.4. PROPOSITION [6]. — *Il existe une dualité d'Alexander* $\mathrm{H}^*(\mathrm{U}, \mathrm{K}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{H}_{n-*}(\mathrm{U}-\mathrm{X}, \partial \mathrm{U})$ *qui provient d'une équivalence homotopique de complexes de chaînes sur* Λ :

$$\mathrm{C}^*(\mathrm{U} \leftarrow \mathrm{K}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{C}_{n-*}(\mathrm{U}-\mathrm{X}, \partial \mathrm{U}).$$

Ici

$$\mathrm{C}_{n-*}(\mathrm{U}-\mathrm{X}, \partial \mathrm{U}) = \mathrm{C}_{n-*}(\widetilde{\mathrm{U}-\mathrm{X}}, \widetilde{\partial \mathrm{U}}; \mathbf{Z}) \qquad (cf. 4.3.1)$$

et

$$\mathrm{C}^*(\mathrm{U} \leftarrow \mathrm{K}) = \overline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{C}_*(\mathrm{U} \leftarrow \mathrm{K}), \Lambda)$$

avec $\overline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{C}_*, \Lambda)$ désignant le Λ-module à gauche gradué de tous les homomorphismes additifs

$f : \mathrm{C}_* \to \Lambda$ tels que $f(ga) = f(a)\theta(g)g^{-1}$, $a \in \mathrm{A}$, $g \in \pi_1(\varepsilon) \subset \mathrm{A}$ où $\theta : \pi_1(\varepsilon) \cong \pi_1(\mathrm{U}) \to \{\pm 1\}$

est la flèche d'orientation à laquelle correspond le fibré de groupe $\mathbf{Z}^t$, de fibre $\mathbf{Z}$, des coefficients tordus au-dessus de U. Enfin $\mathrm{H}^*(\mathrm{U}, \mathrm{K})$ désigne l'homologie de $\mathrm{C}^*(\mathrm{U} \leftarrow \mathrm{K})$.

Fin de la preuve de 4.1 (donné 4.4). — Par hypothèse K est finiment dominé et il en est de même pour U qui est un ANR compact [Bo_1, p. 106], et donc, par 4.3, $\mathrm{C}_*(\mathrm{X})$ et $\mathrm{C}_*(\mathrm{U})$ sont dans $\mathscr{D}(\Lambda)$ et donc aussi $\mathrm{C}_*(\mathrm{U} \leftarrow \mathrm{K})$ et enfin $\mathrm{C}^*(\mathrm{U} \leftarrow \mathrm{K})$. La proposition 4.4 montre alors que $\mathrm{C}_{n-*}(\mathrm{U}-\mathrm{X}, \partial \mathrm{U}) \simeq \mathrm{C}^*(\mathrm{U} \leftarrow \mathrm{K})$ et dans $\mathscr{D}(\Lambda)$.

C. Q. F. D.

Preuve de 4.4. — Soit $\mathrm{V}_1 \supset\supset \mathrm{V}_2 \supset\supset \mathrm{V}_3 \supset\supset \ldots$ une base de 1-voisinages de X. On déduit de l'hypothèse (*b*) (par insertion) un diagramme commutatif à homotopie près :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{U} & & \mathrm{V}_1 \arrow[ll, hook'] \arrow[dl, "\pi_1"'] & & \mathrm{V}_2 \arrow[ll, hook'] \arrow[dl, "\pi_2"'] & & \mathrm{V}_3 \arrow[ll, hook'] \arrow[dl, "\pi_3"'] & \cdots \arrow[l, hook'] \\
& \mathrm{K} \arrow[ul, "i"] & & \mathrm{K} \arrow[ul, "i_1"] \arrow[ll, "\equiv"'] & & \mathrm{K} \arrow[ul, "i_2"] \arrow[ll, "\equiv"'] & & \cdots \arrow[ul, "i_3"] \arrow[ll, "\equiv"']
\end{tikzcd}$$

On note θ_k l'inclusion $\mathrm{V}_k \subsetneq \mathrm{U}$ et on pose $j_k = \theta_k \, i_k : \mathrm{K} \to \mathrm{U}$.

Enfin si $f : \mathrm{A}_* \to \mathrm{B}_*$ est un morphisme de chaînes, on désigne par $\mathrm{C}_*(f)$ le cylindre de l'application f.

---

[6] Lorsque X est lui-même un ANR, une telle dualité, avec $\mathrm{K} = \mathrm{X}$, a été prouvée par Johnson [J].

Nous allons d'abord obtenir un diagramme commutatif à homotopie près de complexes de chaînes à gauche sur $\Lambda = Z[\pi_1(\varepsilon)]$:

$$(\dagger)\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
\cdots & C_*(\theta_{k,*}) \arrow[l, "(\mathrm{inclusion})_*"'] & & C_*(\theta_{k+1,*}) \arrow[ll, "(\mathrm{inclusion})_*"'] \arrow[dl] & & C_*(\theta_{k+2,*}) \arrow[ll, "(\mathrm{inclusion})_*"'] \arrow[dl] & & \cdots \arrow[ll, "(\mathrm{inclusion})_*"'] \\
\cdots & & C_*(j_{k,*}) \arrow[ll, "\simeq"'] \arrow[ul] \arrow[u, phantom, "(2)"] & \arrow[u, phantom, "(1)"] & C_*(j_{k+1,*}) \arrow[ll, "\simeq"'] \arrow[ul] & & \cdots \arrow[ll, "\simeq"'] \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

Diagramme que l'on se permet d'écrire :

$$(\dagger)\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
\cdots & C_*(U\leftarrow V_k) \arrow[l, "(\mathrm{inclusion})_*"'] & & C_*(U\leftarrow V_{k+1}) \arrow[ll, "(\mathrm{inclusion})_*"'] \arrow[dl] & & C_*(U\leftarrow V_{k+2}) \arrow[ll, "(\mathrm{inclusion})_*"'] \arrow[dl] & & \cdots \arrow[ll] \\
\cdots & & C_*(U\leftarrow K_k) \arrow[ll, "\simeq"'] \arrow[ul] \arrow[u, phantom, "(2)"] & \arrow[u, phantom, "(1)"] & C_*(U\leftarrow K_{k+1}) \arrow[ll, "\simeq"'] \arrow[ul] & & \cdots \arrow[ll, "\simeq"'] &
\end{tikzcd}$$

Remarquons d'abord que lorsque X est un ANR, auquel cas on peut supposer que $K = X$, *cf.* 4.2.2, on obtient immédiatement le diagramme $(\dagger)$, grâce à [Bo_1, p. 104] par exemple. On peut alors s'attaquer de suite à la construction du diagramme $(\ddagger)$ ci-dessous. Revenons à la construction du diagramme $(\dagger)$ dans le cas général.

Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
C_*(K) \arrow[r, "j_{k,*}"] \arrow[d, "i_{k,*}"'] & C_*(U) \arrow[d, equal] \\
C_*(V_k) \arrow[r, "\theta_{k,*}"] & C_*(U)
\end{tikzcd}$$

est exactement commutatif et donc on a un morphisme naturel

$$\gamma(0): C_*(U\leftarrow K_k) \to C_*(U\leftarrow V_k)$$

ainsi noté car il est évidemment associé à l'homotopie nulle entre $\theta_{k,*}\, i_{k,*}$ et $j_{k,*}$ selon la règle de l'appendice.

Si H est une homotopie de chaîne entre $i_{k,*}\, r_{k+1,*} : C_*(V_{k+1}) \to C_*(K) \to C_*(V_k)$ et $(\mathrm{inclusion})_* : C_*(V_{k+1}) \to C_*(V_k)$ alors $\theta_{k,*}$ H est une homotopie de chaînes entre

$$j_{k,*}\, r_{k+1,*}: \quad C_*(V_{k+1}) \to C_*(K) \to C_*(U)$$

et

$$\mathrm{id}_*\, \theta_{k+1,*}: \quad C_*(V_{k+1}) \to C_*(U) \to C_*(U).$$

D'où un morphisme $\gamma(\theta_{k,*} H) : C_*(U \leftarrow V_{k+1}) \to C_*(U \leftarrow K_k)$ (selon l'appendice).

On définit alors la flèche horizontale φ du triangle (1) dans le diagramme $(\dagger)$ par commutativité. Il s'agit de montrer que cette flèche est une équivalence homotopique de complexes. Mais le lemme de transitivité de l'appendice affirme que cette flèche est associée à une homotopie entre $j_{k,*}\ r_{k+1,*}\ i_{k+1,*}$ et $j_{k+1,*}$:

$$\begin{array}{ccc} C_*(K_{k+1}) & \xrightarrow{j_{k+1,*}} & C_*(U) \\ {\scriptstyle r_{k+1,*}\, i_{k+1,*}} \downarrow & & \| \\ C_*(K_k) & \xrightarrow{j_{k,*}} & C_*(U) \end{array}$$

ce qui donne le diagramme commutatif suivant (où Σ indique la suspension) :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & C_*(U) & \to & C_*(U \leftarrow K_{k+1}) & \to & \Sigma C_*(K_{k+1}) & \to 0 \\ & \| & & \downarrow \varphi & & \downarrow \Sigma(r_{k+1,*}\, i_{k+1,*}) & \\ 0 \to & C_*(U) & \to & C_*(U \leftarrow K_k) & \to & \Sigma C_*(K_k) & \to 0 \end{array}$$

On se souvient alors que $r_{k+1,*}\ i_{k+1,*}$ est homotope à l'identité et on conclut par le lemme des cinq.

On vérifie maintenant que le triangle (2) dans (-|-) est commutatif à homotopie près. D'après le lemme de transitivité (appendice) la composition φ_1 des deux flèches non-horizontales est associée selon la règle de l'appendice à une homotopie $\tilde{H}$ entre $\theta_{k+1,*}$ et $\theta_{k,*} \circ i_{k,*} \circ r_{k+1,*}$:

$$\begin{tikzcd} C_*(V_{k+1}) \arrow[r, "\theta_{k+1,*}"] \arrow[d, "r_{k+1,*}"'] \arrow[dd, bend right=60, "(\mathrm{inclusion})_*"'] \arrow[dr, phantom, "\boxed{\theta_{k,*} H}"] & C_*(U) \arrow[d, equal] \\ C_*(K) \arrow[r, "j_{k,*}"] \arrow[d, "i_{k,*}"'] \arrow[dr, phantom, "\boxed{0}"] \arrow[l, phantom, "\boxed{H}"] & C_*(U) \arrow[d, equal] \\ C_*(V_k) \arrow[r, "\theta_{k,*}"] & C_*(U) \end{tikzcd}$$

Cette homotopie est, d'après la formule de l'appendice, $\theta_{k,*}$ H. Par définition H est une homotopie entre $i_{k,*}\ r_{k+1,*}$ et $(\mathrm{inclusion})_*$. Le lemme 2 de l'appendice fournit alors à partir de H et $\tilde{H}$ une homotopie $\bar{H} = \tilde{H} - \theta_{k,*}\, H = 0$ entre $\theta_{k,*} \circ (\mathrm{inclusion})_*$ et $\mathrm{id}_*\ \theta_{k+1,*}$ à laquelle est associée, selon l'appendice, une flèche $\varphi_2 : C_* (U \leftarrow V_{k+1}) \to C_* (U \leftarrow V_k)$ qui est l'inclusion naturelle et qui est homotope à φ_1 (selon le lemme 2).

Notons enfin que la projection naturelle

$$(\S) \qquad C_*(U \leftarrow V_k) \to C_*(U)/C_*(V_k) \equiv C_*(U, V_k)$$

est une équivalence homotopique de chaînes, *cf.* [Do, p. 25].

Posons maintenant $N_k = U - \mathring{V}_k$, $k \geqq 1$. On a la forme suivante de la dualité de Poincaré qui peut se démontrer en imitant les notes de Milnor [Mi_2] :

$$\cap\, \mu_k : \quad H^*(N_k, \partial V_k) \xrightarrow{\cong} H_{n-*}(N_k, \partial U),$$

où $\mu_k \in H_n (N_k, \partial U \cup \partial V_k;\ \mathbf{Z}^t)$ est la classe fondamentale d'orientation.

On choisit par récurrence sur $k \geqq 1$ des cycles fondamentaux pour N_k (représentants μ_k), $m_k \in \mathrm{C}_*(\mathrm{N}_k, \partial \mathrm{N}_k;\ \mathbf{Z}^t) \subset \mathrm{C}_*(\mathrm{U}, \partial \mathrm{U} \cup \partial \mathrm{V}_k;\ \mathbf{Z}^t)$ tels que l'inclusion $\mathrm{N}_k \subsetneq \mathrm{N}_{k+1}$ envoie m_k sur m_{k+1}. Notons alors l_k le morphisme composé :

$$\mathrm{C}^*(\mathrm{U}, \mathrm{V}_k) \xrightarrow[\simeq]{\text{excision}} \mathrm{C}^*(\mathrm{N}_k, \partial \mathrm{V}_k) \xrightarrow[\simeq]{\cap \varepsilon m_k} \mathrm{C}_{n-*}(\mathrm{N}_k, \partial \mathrm{U}),$$

où $\varepsilon = (-1)^{*+1}$.

On remarque que l_k induit un isomorphisme $\mathrm{H}(l_k) : \mathrm{H}^*(\mathrm{U}, \mathrm{V}_k) \xrightarrow{\cong} \mathrm{H}_{n-*}(\mathrm{N}_k, \partial \mathrm{U})$. On applique le foncteur $\overline{\mathrm{Hom}}$ au diagramme $(\dagger)$ et on utilise (§) pour construire l'échelle

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[dl] \arrow[d, "i^*"] \arrow[r, "l_{k-1}", "\simeq"'] & \vdots \arrow[d, "i_*"] \arrow[dddr, "i_*"] & \\
 & \mathrm{C}^*(\mathrm{U} \leftarrow \mathrm{K}_{k-1}) \arrow[dr, "\rho_k"] \arrow[dd, "\simeq"'] & & & \\
 & & \mathrm{C}(\mathrm{U}, \mathrm{V}_k) \arrow[dl] \arrow[d, "i^*"] \arrow[r, "l_k", "\simeq"'] & \mathrm{C}_{n-*}(\mathrm{N}_k, \partial \mathrm{U}) \arrow[d, "i_*"] \arrow[dr, "i_*"] & \\
 (\dagger) & \mathrm{C}^*(\mathrm{U} \leftarrow \mathrm{K}_k) \arrow[dr, "\rho_{k+1}"] \arrow[dd, "\simeq"'] & \mathrm{C}(\mathrm{U}, \mathrm{V}_{k+1}) \arrow[dl] \arrow[dd, "i^*"] \arrow[r, "l_{k+1}", "\simeq"'] & \mathrm{C}_{n-*}(\mathrm{N}_{k+1}, \partial \mathrm{U}) \arrow[dd, "i_*"] \arrow[r, "i_*"] & \mathrm{C}_{n-*}(\mathrm{U}-\mathrm{X}, \partial \mathrm{U}) \\
 & & & & \\
 & \mathrm{C}^*(\mathrm{U} \leftarrow \mathrm{K}_{k+1}) \arrow[dr, "\rho_{k+2}"] \arrow[d] & & & \\
 & \vdots & \vdots \arrow[r, "l_{k+2}", "\simeq"'] & \vdots \arrow[uuur, "i_*"] &
\end{tikzcd}$$

où toutes les flèches i^* et i_* sont induites par inclusions, ce diagramme est commutatif à homotopie près [d'ailleurs exactement commutatif excepté dans ses triangles de gauche qui proviennent de $(\dagger)$]. Le morphisme composé de complexes de chaînes

$$f_k = i_* \, l_k \, \rho_k : \mathrm{C}^*(\mathrm{U} \leftarrow \mathrm{K}) \rightarrow \mathrm{C}_{n-*}(\mathrm{U}-\mathrm{X}, \partial \mathrm{U})$$

est donc indépendant de k à homotopie près et définit

$$\mathrm{H}(f_k) \equiv f_* : \mathrm{H}^*(\mathrm{U}, \mathrm{K}) \rightarrow \mathrm{H}_{n-*}(\mathrm{U}-\mathrm{X}, \partial \mathrm{U}).$$

Ensuite on remarque que $\mathrm{H}_{n-*}(\mathrm{U}-\mathrm{X}, \partial \mathrm{U}) = \varinjlim_k \mathrm{H}_{n-*}(\mathrm{N}_k, \partial \mathrm{U})$ classiquement, et que les triangles de gauche de l'échelle $(\dagger)$ donnent $\mathrm{H}^*(\mathrm{U}, \mathrm{K}) = \varinjlim_k \mathrm{H}^*(\mathrm{U}, \mathrm{V}_k)$. Par suite f_* est la limite injective des isomorphismes $\mathrm{H}(l_k) : \mathrm{H}^*(\mathrm{U}, \mathrm{V}_k) \rightarrow \mathrm{H}_{n-*}(\mathrm{N}_k, \partial \mathrm{U})$ donc f_* est un isomorphisme : $\mathrm{H}^*(\mathrm{U}, \mathrm{K}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{H}_{n-*}(\mathrm{U}-\mathrm{X}, \partial \mathrm{U})$ qui provient d'un morphisme de chaînes $f_k : \mathrm{C}^*(\mathrm{U} \leftarrow \mathrm{K}) \rightarrow \mathrm{C}_{n-*}(\mathrm{U}-\mathrm{X}, \partial \mathrm{U})$.

Par conséquent si l'on montre que $\mathrm{C}^*(\mathrm{U} \leftarrow \mathrm{K})$ et $\mathrm{C}_{n-*}(\mathrm{U}-\mathrm{X}, \partial \mathrm{U})$ sont homotopiquement équivalents à des complexes de chaînes de modules projectifs, f_k sera une équivalence de chaînes [Sp, p. 167], indépendante de k à homotopie près, ce qui conclura. Or il est facile de voir que $\mathrm{C}_{n-*}(\mathrm{U}-\mathrm{X}, \partial \mathrm{U})$ est un Λ-module libre et d'autre part on a déjà vu (fin de la preuve de 4.1) que $\mathrm{C}^*(\mathrm{U} \leftarrow \mathrm{K}) \in \mathscr{D}(\Lambda)$.

Ceci termine la preuve de la proposition 4.4.

Voici pour conclure un corollaire du théorème 4.1.

4.5. THÉORÈME. — *Soit* M *une variété* CAT *de dimension* $n \geqq 5$ *et* $\mathrm{X} \subset \operatorname{int} \mathrm{M}$ *un compact de dimension* $\leqq n-3$ *tel que* $\mathrm{M}-\mathrm{X}$ *soit* $1-\mathrm{LC}$ *à* X. *Alors* X *admet des voisinages* I-*réguliers* *si, et seulement si, il existe une base de voisinages de* X *dans* M, $U_1 \supset\supset U_2 \supset\supset U_3 \supset\supset \ldots$ *et un* CW-*complexe* K *avec un diagramme*

$$\begin{tikzcd}
U_1 & & U_2 \arrow[ll, hook'] \arrow[dl] & & U_3 \arrow[ll, hook'] \arrow[dl] & & \cdots \arrow[ll, hook'] \\
& K \arrow[ul] & & K \arrow[ll, "\equiv"'] \arrow[ul] & & \cdots \arrow[ll, "\equiv"'] \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

commutatif à homotopie près (i. e. *si et seulement si* X *a la silhouette d'un* CW-*complexe*).

Preuve. — La nécessité se prouve exactement comme 1.1. Pour la suffisance on remarque que le lemme 4.4 de [S_6] assure l'existence de voisinages U de X, arbitrairements petits, tels que $U - X \hookrightarrow U$ soit une 1-équivalence. On conclut donc grâce au théorème 4.1.

5. Théorèmes d'existence dans les variétés de modèle $Q = I^\infty$

Notre résultat central est :

5.1. THÉORÈME. — *Soit* Y *localement compact métrisable et* $X \subset Y$ *un compact tel que* $Y - X$ *soit une variété modelée sur le cube de Hilbert* $Q = I^\infty = [0, 1]^\infty$. *Alors* X *admet des voisinages ouverts* I-*réguliers dans* Y *si et seulement si* $Y - X$ *est docile vers* X.

Notre preuve repose en grande partie sur le paragraphe 3 et deux théorèmes de base :

5.2. THÉORÈME DE WEST ([Ws], [Ch_2]). — (i) *Pour tout complexe localement fini* (7) L, *le produit* $L \times Q$ *est une variété modelée sur* Q.

(ii) *Si* $L \hookrightarrow L'$ *est une expansion élémentaire, cf.* ([Co], [S_8]), *l'inclusion* $L \times Q \hookrightarrow L' \times Q$ *est proprement homotope à un homéomorphisme* $L \times Q \approx L' \times Q$. *D'ailleurs, pour un voisinage prescrit* U *de l'adhérence de* $(L' - L)$ *dans* L', *l'homotopie peut fixer tout point hors de* $U \times Q$.

5.3. THÉORÈME DE CHAPMAN ([Ch_1], [Ch_2], [S_{11}]). — (i) Triangulation : *Toute variété métrisable modelée sur* Q *est homéomorphe à* $L \times Q$ *où* L *est un complexe simplicial localement fini convenable.*

(ii) Hauptvermutung : *Pour tout homéomorphisme* $h : L \times Q \to L' \times Q$ *où* L *et* L' *sont deux complexes localement finis l'équivalence d'homotopie propre* $L \xrightarrow{\times 0} L \times Q \xrightarrow{h} L' \times Q \xrightarrow{\text{proj}} L$ *est simple.*

Preuve du théorème 5.1. — Pour la suffisance on commence par constater comme dans 4.1 que l'on peut supposer que X est un point ε et que ε est un bout isolé de $Y - X$. On pose alors $W = Y - X$, $\varepsilon = X$ d'où $Y = W \cup \varepsilon$. Il reste à montrer que la docilité du bout ε entraîne l'existence de voisinages I-réguliers de ε dans $W \cup \varepsilon$.

Selon le théorème de triangulation de T. Chapman, on a $W = L \times Q$ pour un complexe simplicial localement fini L. Puisque L est un rétract par déformation propre de W, ε est également un bout isolé et docile de L, *cf.* 1.4.5.

---

(7) Par complexe nous pourrons toujours entendre complexe simplicial; mais on est libre d'utiliser plutôt les CW-complexes, pourvu que la finitude locale soit combinatoire [S_8, p. 12] c'est-à-dire qu'en écrasant les cellules ouvertes on obtienne un espace localement fini.

Soit L_1 un voisinage de ε dans L qui est un sous-complexe fermé connexe de L tel que $L_1 \cup \varepsilon$ soit compact. Alors $W_1 = L_1 \times Q$ est une Q-variété selon West.

5.2. Il suffit de trouver un voisinage I-régulier de ε dans le compact $Y_1 = W_1 \cup \varepsilon$. Donc sans perte de généralité on peut dorénavant supposer que Y *lui-même est compact* et connexe (ε n'est alors rien que l'infini d'Alexandroff).

AFFIRMATION 1. — L *peut être choisi de dimension finie.*

Preuve. — Selon la proposition 5.5 ci-dessous, L a le type propre simple [S_8] d'un complexe L′ de dimension finie. Donc selon le théorème de West, on a

$$W = L \times Q \approx L' \times Q.$$

AFFIRMATION 2. — *On peut supposer que* L *est une variété* PL *de dimension* $\geqq 6$ *ayant un seul bout* ε *docile, telle que l'inclusion* $\partial L \subsetneq L$ *du bord soit une* 1-*équivalence vers l'infini.*

AFFIRMATION 3. — ∂L *a un seul bout lequel est docile.*

Alors on conclut ainsi : selon 2.1 (cas facile) ε admet des voisinages I-réguliers dans $L \cup \varepsilon$ donc aussi dans $(L \times Q) \cup \varepsilon = W \cup \varepsilon$, ce qui établit 5.1.

Preuve de l'affirmation 2. — On plonge L dans $\mathbf{R}^n$ de manière PL et propre, avec n assez grand et $n \geqq \dim L+3$. Alors l'inclusion $L \subsetneq L'$ de L dans un voisinage régulier fermé L′ de L au sens combinatoire [Co] est une équivalence propre simple. Donc

$$W = L \times Q \approx L' \times Q$$

comme dans l'affirmation 1. Aussi $\partial L' \subsetneq L'$ est une 1-*équivalence vers l'infini* puisque $n \geqq \dim L+3$, *cf.* [S_6, proof of 2.1]. Ceci veut dire (*cf.* [S_8, p. 490]) que :

(0) ∂L a un seul bout qui correspond à ε sous l'inclusion $\partial L \subsetneq L$ et

(1) il existe une base de voisinages *ouverts* $V_1, V_2, V_3, \ldots$ de $\varepsilon = \infty$ dans W et des homomorphismes de groupes $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots$ qui rendent commutatif le diagramme suivant :

$$(\dagger)\quad \begin{tikzcd}
\pi_1(V_1) & \pi_1(V_2) \arrow[l] \arrow[dl, "\rho_1"'] & \pi_1(V_3) \arrow[l] \arrow[dl, "\rho_2"'] & \cdots \arrow[l] \arrow[dl, "\rho_3"'] \\
\pi_1(\partial V_1) \arrow[u] & \pi_1(\partial V_2) \arrow[l] \arrow[u] & \pi_1(\partial V_3) \arrow[l] \arrow[u] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Ici les autres flèches sont induites par inclusion, et on sous-entend pour chaque V_i un point base b_i dans la composante connexe non relativement compacte de ∂V_i et dans ∂V_i un chemin de b_i à b_{i+1} qui sert à définir $\pi_1(\partial V_i) \leftarrow \pi_1(\partial V_{i+1})$ et $\pi_1(V_i) \leftarrow \pi_i(V_{i+1})$.

Preuve de l'affirmation 3. — C'est une conséquence du :

5.4. THÉORÈME. — *Soit* L *une variété topologique de dimension finie ayant un seul bout telle que* $\partial L \subsetneq L$ *soit une* 1-*équivalence à l'infini. Si le bout de* L *est docile, alors le bout de* ∂L *est également docile.*

Preuve. — Puisque la docilité de ∂L vers l'infini est une propriété invariante par l'opération $\partial L \rightsquigarrow \partial L \times S^1$, on peut supposer dim $\partial L \geqq 6$. Alors selon 2.6 et [S_1, III] il y a des 1-voisinages de l'infini dans ∂L arbitrairement petits, car d'après le diagramme ($\dashv\vdash$), le groupe π_1 est essentiellement constant et finiment présenté à l'infini dans ∂L tout comme dans L elle-même.

Ensuite on trouve (en poursuivant la même technique) des petits 1-voisinagesV′ de l'infini dans L tels que $dV \equiv V \cap \partial L$ soit un 1-voisinage de l'infini dans ∂L. Selon ($\dashv\vdash$) on a $\pi_1(dV) \cong \pi_1(V) \cong \pi_1(\varepsilon)$ (par inclusions).

AFFIRMATION 4. — *Le* $\mathbf{Z}[\pi_1(\varepsilon)] = \Lambda$-*complexe de chaînes* $C_*(dV) = C_*(\widetilde{dV}; \mathbf{Z})$ *est finiment dominé* [i. e. $C_*(dV) \in \mathscr{D}(\Lambda)$, *cf.* 4.3]. *Ici* $\tilde{}$ *désigne le revêtement universel.*

Ceci conclura la démonstration de 5.2 car on a maintenant la condition de docilité (A) de 1.3 dans la variété sans bord ∂L.

Preuve de l'affirmation 4. — Soit $n = \dim V$. On va exploiter au niveau des chaînes la dualité $H_c^*(V) \cong H_{n-*}(V, \partial V)$ (coefficients universels) pour établir $C_*(\partial V) \in \mathscr{D}(\Lambda)$ d'où $C_*(dV) \in \mathscr{D}(\Lambda)$ à cause de la suite exacte $0 \to C_*(dV) \to C_*(\partial V) \to C_*(\partial V, dV) \to 0$ et de l'excision $C_*(\partial V, dV) \simeq C_*(\partial V - \operatorname{int}(dV), \partial(dV)) \in \mathscr{D}(\Lambda)$ (*cf.* 4.3).

Soit $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$ une suite de compacts de V tels que $\bigcup_k \mathring{A}_k = V$.

Soit $v \in C_*^{\text{l.f.}}(V, \partial V; \mathbf{Z}^t)$ une chaîne représentant la classe fondamentale

$$[V] \in H_*^{\text{l.f.}}(V, \partial V; \mathbf{Z}^t).$$

Alors on a un diagramme commutatif à homotopie près de morphismes de Λ-complexes de chaînes :

$$(\#) \quad \begin{tikzcd}
 & C^*(V, V-A_k) \arrow[dl] \arrow[dd] \arrow[ddr, "\cap v"] & \\
C^*(V \leftarrow K) \arrow[dr, "j_{k+1}"] \arrow[dd, equal] & & \\
 & C^*(V, V-A_{k+1}) \arrow[r, "\cap v"] \arrow[dl] \arrow[dd, dotted] & C_{n-*}(V, \partial V) \\
C^*(V \leftarrow K) \arrow[dr, "j_{k+2}"] & & \\
 & C_0^*(V) = \bigcup_k C^*(V, V-A_k) \arrow[uur, "\cap v"'] &
\end{tikzcd}$$

La partie gauche du diagramme (#) se déduit d'un diagramme commutatif à homotopie près de docilité pour le bout de L :

$$\begin{tikzcd}
V-A_1 & & V-A_2 \arrow[ll, hook'] \arrow[dl] & & V-A_3 \arrow[ll, hook'] \arrow[dl] & & \cdots \arrow[ll, hook'] \\
 & K \arrow[ul] & & K \arrow[ll, "="'] \arrow[ul] & & \cdots \arrow[ll, "="'] &
\end{tikzcd}$$

en utilisant l'appendice et les raisonnements de la preuve de 4.4. La partie à droite est strictement commutative.

Remarquons que $C^*(V \leftarrow K) \in \mathscr{D}(\Lambda)$; en effet K est finiment dominé par hypothèse et V l'est aussi étant un 1-voisinage d'un bout docile. (Si $A \subset V$ est ANR compact et grand, alors $A \subsetneq V$ est une domination, [Ω, § 6].) On conclut par 4.3.4. Comme corollaire on a que $C^*(V \leftarrow K)$ a le type d'homotopie d'un complexe de chaînes projectif (*cf.* 4.3.2) et donc d'un complexe de chaînes libre.

On passe ensuite à l'homologie dans (#). La dualité de Poincaré est

$$\varinjlim H^*(V, V - A_k) = H_c^*(V) \underset{\cong}{\xrightarrow{\cap[V]}} H_{n-*}(V, \partial V).$$

Mais d'après l'échelle de gauche dans (#) on a un isomorphisme,

$$H^*(V \leftarrow K) \cong \varprojlim H^*(V, V - A_k).$$

Donc le morphisme de chaînes $C^*(V \leftarrow K) \xrightarrow{(\cap v) \circ j_k} C_{n-*}(V, \partial V)$ qui l'induit est une équivalence d'homotopique de chaînes vu que $C^*(V \leftarrow K)$ et $C_{n-*}(V, \partial V)$ ont le type d'homotopie de complexes de chaînes libres [Sp, p. 167]. Donc $C_*(V, \partial V) \in \mathscr{D}(\Lambda)$, et aussi $C_*(\partial V)$ par 4.3, ce qui conclut la preuve de l'affirmation 4. Il ne reste plus qu'à vérifier l'affirmation 1. En fait on a la

5.5. PROPOSITION. — *Soit* L *un complexe simplicial localement fini ayant un seul bout* ε *lequel est docile. Alors* L *a le type simple d'un complexe localement fini de dimension finie.*

Preuve de 5.5. — Que ε soit docile veut dire qu'il existe une base $V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset \ldots$ de voisinages de ε et un diagramme commutatif à homotopie près :

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} V_0 & & V_1 \arrow[ll] \arrow[dl, "p_1"'] & & V_2 \arrow[ll] \arrow[dl, "p_2"'] & & \cdots \arrow[ll] \\ & K \arrow[ul, "j_0"] & & K \arrow[ul, "j_1"] \arrow[ll, "\cong"] & & \cdots \arrow[ul, "j_2"] \arrow[ll, "\cong"] & \end{tikzcd}$$

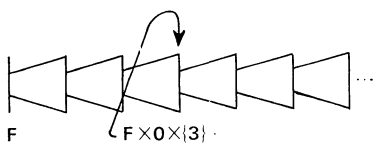
où K est un complexe finiment dominé, i. e. il existe $F \underset{i}{\overset{r}{\rightleftarrows}} K$, où F est un complexe fini et $r \circ i \simeq \mathrm{id} \mid K$. On peut supposer i et r simpliciales.

Pour le système $F \overset{\rho}{\leftarrow} F \overset{\rho}{\leftarrow} F \overset{\rho}{\leftarrow} \ldots$, avec $\rho = i \circ r$, on forme le cylindre infini

$$\overline{M}(\rho) = \{ \coprod_{k \geq 1} (F \times [0,1] \times \{k\}) \coprod F \} / \sim$$

où $\sim$ identifie pour tout $x \in F$, le point $(x, 1, k+1)$ à $(\rho(x), 0, k)$, $k = 1, 2, \ldots$ et $(x, 1, 1)$ à $\rho(x) \in F$.

On le munit d'une triangulation standard.



On forme l'application propre $\mu : \overline{\mathrm{M}}(\rho) \to \mathrm{L}$ comme suit :

(i) Pour $x \in \mathrm{F}$, $\mu(x) = j_0(r(x))$, et $\mu(x, 0, k) = j_k(r(x))$ pour $k \geqq 1$.

(ii) Pour $k \geqq 1$, $\mu \mid \text{Image}(\mathrm{F} \times [0, 1] \times \{k\})$ est une application dans V_{k-1} qui exprime la commutativité à homotopie près du diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{V}_{k-1} & \mathrm{V}_k \arrow[l, hook'] \\ \mathrm{F} \arrow[u, "j_{k-1} r"] & \mathrm{F} \arrow[l, "\rho"'] \arrow[u, "j_k r"'] \end{tikzcd}$$

selon le lemme suivant :

5.6. LEMME. — *Soit*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{V}' & \mathrm{V} \arrow[l, "g"'] \\ \mathrm{F}' \arrow[u, "\alpha'"] & \mathrm{F} \arrow[l, "f"'] \arrow[u, "\alpha"'] \end{tikzcd}$$

un carré d'applications continues. Il est commutatif à homotopie près si et seulement si il existe une application continue du « mapping cylinder de f » dans V' *qui prolonge les applications α' et $g\,\alpha$.*

Preuve de 5.6. — Si H est une homotopie de $g\,\alpha$ à αf, un prolongement requis est donné par $\varphi(x, t) = \mathrm{H}(x, t)$ pour $(x, t) \in \mathrm{F} \times \mathrm{I}$ et $\varphi(y) = \alpha'(y)$ pour $y \in \mathrm{F}'$. Inversement la composition $\mathrm{F} \times \mathrm{I} \to \mathrm{M}(f) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{V}'$ est une homotopie convenable.

C. Q. F. D.

Par approximations simpliciales on peut dorénavant supposer μ simpliciale et propre.

AFFIRMATION 5. — $\mu : \overline{\mathrm{M}}(\rho) \to \mathrm{L}$ *est une équivalence d'homotopie propre vers l'infini.*

Ceci veut dire que l'inclusion de $\overline{\mathrm{M}}(\rho)$ dans le « mapping cylinder » $\overline{\mathrm{M}}(\mu)$ de μ admet une déformation propre h_t, $0 \leqq t \leqq 1$, de $\mathrm{id} \mid \mathrm{M}(\mu)$ fixant $\overline{\mathrm{M}}(\rho)$ telle que

$$h_1(\mathrm{M}(\mu)) \subset \overline{\mathrm{M}}(\rho) \cup (\text{un compact}).$$

Preuve. — Soit $\overline{\mathrm{M}}(\rho, k)$ l'image de $\coprod_{l>k} (\mathrm{F} \times [0, 1] \times \{l\}) \cup \mathrm{F} \times 0 \times \{k\}$ dans $\overline{\mathrm{M}}(\rho)$. Notons que pour tout k, l'inclusion $\mathrm{F} \times 0 \times \{k\} \hookrightarrow \overline{\mathrm{M}}(\rho, k)$ est une équivalence d'homotopie (non-propre!). Alors le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{V}_1 & \mathrm{V}_2 \arrow[l, hook'] \arrow[dl, "ip_2"'] & \mathrm{V}_3 \arrow[l, hook'] \arrow[dl, "ip_3"'] & \cdots \arrow[l, hook'] \arrow[dl] \\ \mathrm{F} \arrow[u, "j_1 r"] & \mathrm{F} \arrow[l, "\rho"] \arrow[u, "j_2 r"] & \mathrm{F} \arrow[l, "\rho"] \arrow[u, "j_3 r"] & \cdots \arrow[l] \end{tikzcd}$$

permet de vérifier la condition $(\pi_*)_\infty$ [S_8, prop. IV, p. 490] nécessaire et suffisante pour avoir une équivalence d'homotopie propre vers l'infini. (Comparer [Ω].)

C. Q. F. D.

Il n'est malheureusement pas vrai que μ soit une équivalence simple vers l'infini, c'est-à-dire qu'après une expansion (infinie) $M(\mu) \subsetneq Z$, de $M(\mu)$, on puisse trouver un complexe fini $A \subset Z$ tel que $\overline{M}(\rho) \cup A \subsetneq Z$ soit une expansion. A cela, il y a ici une unique obstruction $\sigma_\infty(\mu) = \sigma_\infty(M(\mu), \overline{M}(\rho))$ dans $\tilde{K}_0(Z[\pi_1(\varepsilon)])$, voir [$S_8$, th. I] (*unique* parce que le π_1 est essentiellement constant à l'infini).

AFFIRMATION 6. — *Pour tout* $x \in \tilde{K}_0(Z[\pi_1(\varepsilon)])$ *il y a un complexe* X *de dimension fini et une équivalence propre vers l'infini* $\nu : M(\rho) \to X$ *tels que* $\sigma_\infty(\nu) = x$.

Preuve. — C'est [S_8, th. I]. La construction la plus directe part d'une équivalence $\nu_0 : T(\rho) \subsetneq X_0$ du tore compact $T(\rho) = F \times [0, 1]/\{(x, 1) = (\rho(x), 0) \mid x \in F\}$ de torsion $\tau(\nu_0)$ qui se projette sur x par

$$\mathrm{Wh}(\pi_1(T(\rho))) = \mathrm{Wh}(\pi_1(K) \times Z) \to \tilde{K}_0(Z\pi_1(K)) = \tilde{K}_0(Z[\pi_1(\varepsilon)])$$

la projection de Bass-Heller-Swan [S_7, § 4]. Alors $\sigma_\infty(\overline{X}_0, \overline{T}(\rho)) = x$ où la barre indique le revêtement ∞-cyclique standard. Or $\overline{M}(\rho)$ est la partie positive de $\overline{T}(\rho)$. Donc X peut être $\overline{M}(\rho)$ réunion un assez petit voisinage du bout positif de $\overline{X}_0$, et $\nu : \overline{M}(\rho) \subsetneq X$ vérifie

$$\sigma_\infty(\nu) = \sigma_\infty(X, \overline{M}(\rho)) = \sigma_\infty(\overline{X}_0, \overline{M}(\rho)) = x,$$

C. Q. F. D.

On est prêt à achever la preuve de l'affirmation 1. On fixe $x = \sigma_\infty(\mu)$. Soit $\nu' : X' \to M(\rho)$ un inverse homotopique propre *vers l'infini* pour ν défini sur un sous-complexe cofini X' de X [par exemple une restriction convenable d'un inverse homotopique propre pour $\overline{T}(\rho) \subsetneq \overline{X}_0$]. On utilise la composition $f : X' \xrightarrow{\nu'} \overline{M}(\rho) \xrightarrow{\mu} L$ où $\sigma_\infty(\nu') = -x$, de sorte que $\sigma_\infty(f) = -x + x = 0 \in K_0(Z[\pi_1(\varepsilon)])$. Alors f est simple vers l'infini, c'est-à-dire, pour une triangulation standard de $M(f)$, il existe une expansion $M(f) \subsetneq Z$ et un complexe fini $A \subset Z$ tel que $X \cup A \subsetneq Z$ soit une expansion. On pose $L' = X \cup A$, qui est de dimension finie. Trivialement $L \subsetneq M(f) \subsetneq Z$ est une expansion donc L a le type simple de $L' = X \cup A$.

Ceci conclut la démonstration du résultat fondamental 5.1, et des propositions intermédiaires.

Nous allons examiner quelques corollaires de 5.1 et de sa démonstration.

5.7. THÉORÈME. — *Soient* Y *un* ANR *localement compact métrisable et* $X \subset Y$ *un compact tels que* $Y - X$ *soit une* Q-*variété et tels que tout voisinage* U *de* X, *l'inclusion* $U - X \subsetneq U$ *soit une équivalence d'homotopie. Alors* X *admet des voisinages* I-*réguliers dans* Y *si et seulement si* X *a la silhouette* (« *shape* » *de Borsuk*) *d'un complexe finiment dominé.*

C'est une conséquence directe de 5.1 et de la définition de silhouette en [Bo_2] et [F].

Remarque. — Dans la pratique, l'hypothèse de 5.7 est souvent assurée par l'hypothèse que X est un Z-sous-ensemble de Y, i. e. $Y - X$ est dense et LC^∞ dans Y. On utilise [EW. th. A].

Ce cas important d'un Z-sous-ensemble implique un théorème d'existence des voisinages réguliers de compacts dans une variété topologique modelée sur l'espace de Hilbert l_2.

5.8. THÉORÈME. — *Soit* M *une* l_2*-variété métrisable et* $X \subset M$ *un compact. Alors* X *admet des voisinages* I*-réguliers si et seulement si* X *à la silhouette d'un* CW*-complexe finiment dominé.*

Preuve de 5.8. — La nécessité provient de 1.1. On veut expliquer la suffisance. D'après [He], on sait que $M \approx K \times l_2$ pour un complexe simplicial K localement fini. D'autre part, $l_2 \approx Q \times l_2$ selon [A], [AB]. Donc on peut identifier M à $K \times Q \times l_2$. Puisque l_2 est contractile, l'inclusion $X \subsetneq M$ se déforme en une application $j : X \to K \times Q \times 0$ dont le but est une Q-variété, *cf.* 5.2. D'après [Ch_3] on peut supposer que j est un Z-plongement, i. e. que $j(X)$ est un Z-sous-ensemble de la Q-variété $K \times Q$. Ensuite, le théorème de dénouement pour les l_2-variétés [AC] assure $(M, X) \approx (M, j(X))$. Or, on vient de vérifier l'existence des voisinages réguliers de $j(X)$ dans $K \times Q$ et l_2 est le cône ouvert sur la sphère $\{ x \in l_2 \mid |x| = 1 \}$. Donc l'I-axiome pour $(K \times Q \times 0, j(X))$ entraîne facilement l'I-axiome pour $(K \times Q \times l_2, j(X)) \approx (M, X)$.

C. Q. F. D.

Un résultat important du paragraphe 4 ci-dessus affirme qu'un ANR compact X plongé dans une variété Y modelée sur $\mathbf{R}^m$ ($m \neq 4$) de façon 1-LC (i. e. $Y - X$ est 1-LC à tout point de X) admet toujours des voisinages I-réguliers. C'est probablement faux si Y est plutôt modelée sur Q.

Exemple. — On forme le « mapping cylinder » C associé au diagramme

$$S^n \xrightarrow{f} S^n \xrightarrow{f} S^n \xrightarrow{f} \dots,$$

$$C = \{ \coprod_{k \geqq 1} (S^n \times [0,1] \times \{k\}) \} / \{ (x, 1, k) = (f(x), 0, k+1) \mid x \in S^n, k = 1, 2, \dots \},$$

où f est une application de degré $N \geqq 2$, et $n \geqq 1$. Le compactifié d'Alexandroff $C \cup \infty$ est contractile et localement contractile au point ∞. Puisque $C \cup \{ \infty \}$ est plongeable dans un espace euclidean, et localement contractile c'est un ENR [Bo_1]. On pose

$$(Y, X) = (C \cup \infty, \infty) \times Q.$$

Alors $Y - X$ n'est pas docile vers X, car $\varprojlim \{ H_n(U - X) \mid U \text{ voisinage de } X \}$ est $H_n(C) = \mathbf{Z}[1/N] \subset \mathbf{Q}$. Finalement on est devant une fameuse

CONJECTURE. — Pour un ENR comme $C \cup \infty$, (ou un ANR localement compact métrisable) le produit avec $Q = [0, 1]^\infty$ est-il une Q-variété?

La preuve de 5.1 contient une jolie classification stable des bouts dociles.

DÉFINITION. — Deux bouts isolés ε, ε' ont des germes isomorphes si et seulement si il existe un voisinage ouvert U de ε, un voisinage ouvert U' de ε' et un homéomorphisme $h : U \cup \varepsilon \to U' \cup \varepsilon'$ tel que $h(\varepsilon) = \varepsilon'$.

THÉORÈME 5.9. — *Soit* ε *un bout isolé et docile d'une variété* W *de modèle* $Q = I^{\infty}$. *Alors à un isomorphisme de germes près* ε *est entièrement classifié par deux invariants :*

(i) *Sa limite homotopique i. e. le type d'homotopie du complexe* K *finiment dominé qui apparaît dans un diagramme homotopie commutatif*

$$\begin{tikzcd}
U_1 & & U_2 \arrow[ll, hook'] \arrow[dl] & & U_3 \arrow[ll, hook'] \arrow[dl] & & \cdots \arrow[ll, hook'] \arrow[dl] \\
& K \arrow[ul] & & K \arrow[ul] \arrow[ll, "="] & & \cdots \arrow[ul] \arrow[ll, "="] &
\end{tikzcd}$$

assurant que ε *est docile, où* $\{ U_i \}$ *est une base de voisinages de* ε *dans* W.

(ii) *Son invariant algébrique de type simple*

$$\sigma(\varepsilon) \in \widetilde{K}_0(\Lambda), \qquad \text{où} \quad \Lambda = Z[\pi_1(\varepsilon)] = Z[\pi_1(K)].$$

$\sigma(\varepsilon)$ *est défini ainsi :* Selon Chapman 5.2, $W = L \times Q$ pour un complexe L. On choisit un sous-complexe L_1 de L tel que $L_1 \cup \varepsilon$ soit compact et que L_1 soit un voisinage de ε dans L assez petit pour que $\pi_1(\varepsilon)$ soit un rétract de $\pi_1(L_1)$ (par exemple tel que $L_1 \times Q$ soit inclus dans U_1 ci-dessus) : $\pi_1(L_1) \underset{i'}{\overset{r'}{\rightleftarrows}} \pi_1(\varepsilon)$, avec $r' i' = \mathrm{id}$. Alors par définition, $\sigma(\varepsilon) = r'_*(\sigma(L_1))$ où $\sigma(L_1) \in \widetilde{K}_0 \mathbf{Z}[\pi_1(L_1)]$ est l'obstruction de Wall à ce que L_1 soit homotopiquement équivalent à un complexe fini, *cf.* 4.3, $[S_1]$.

Il est amusant que ces invariants soient *indépendants* ([8]) et *réalisés.* En effet soit K un complexe dominé par un complexe F fini, et $x \in \widetilde{K}_0(Z[\pi_1(K)])$. Alors suivant la preuve de l'affirmation 1 on a un cylindre infini $\overline{M}(\rho)$ pour $F \overset{\rho}{\leftarrow} F \overset{\rho}{\leftarrow} \ldots$ et selon l'affirmation 6 une équivalence propre vers l'infini $\xi : \overline{M}(\rho) \to X$ telle que $\sigma_{\infty}(\xi) = \sigma_{\infty}(M(\xi), \overline{M}(\rho)) = x$ (*voir* $[S_8$, p. 483] et $[S_7$, p. 13-16]). Mais $F \times 0 \times \{ k \} \simeq \overline{M}(\rho, k)$ montre que l'invariant $\sigma_{\infty}(\overline{M}(\rho))$ du bout de $\overline{M}(\rho)$ est zéro. Donc $\sigma_{\infty}(M(\xi)) = \sigma_{\infty}(M(\xi), \overline{M}(\rho)) = x$. Selon West (5.2) $W = X \times Q \approx M(\xi) \times Q$ est une Q-variété; ce W a un bout ε dont les invariants sont visiblement K et x.

Supposons maintenant qu'on ait deux bouts isolés et dociles de Q-variétés, soient ε de W et ε' de W'. Soit donné une équivalence homotopique (non-nécessairement propre) $g : K \to K'$ entre les limites homotopiques pour ε et ε' avec $\sigma(\varepsilon') = g_* \sigma(\varepsilon)$. *On va trouver des voisinages* U *de* ε *et* U' *de* ε' *et un homéomorphisme* $h : U \cup \varepsilon \to U' \cup \varepsilon'$ *avec* $h(\varepsilon) = \varepsilon'$ *tel que* $h : U \to U'$ *détermine* g *à homotopie près.*

Comme en 4.1 on peut supposer $W \cup \varepsilon$ et $W' \cup \varepsilon'$ compacts. Selon Chapman 5.3, $W = L \times Q$, $W' = L' \times Q$ où L, L' sont des complexes simpliciaux. Alors selon West 5.2, il suffit de trouver une équivalence (propre) simple *vers l'infini* $f_1 : L_1 \to L'$ où L_1 est un sous-complexe de L voisinage de l'infini, *cf.* preuve de 5.5.

([8]) L'erreur standard est de croire que l'obstruction de Wall à la finitude de K coïncide avec l'invariant du bout $x \in \widetilde{K}_0(\mathbf{Z}[\pi_1 K])$.

Le fait essentiel qui permet de trouver f_1 est l'

OBSERVATION. — *L'invariant* $\sigma(\varepsilon)$ *coïncide toujours avec l'obstruction* $\sigma_\infty(\mu)$ *à ce que* $\mu : \overline{\mathrm{M}}(\rho) \to \mathrm{L}$ *soit vers l'infini une équivalence propre simple.* En effet on a

$$\sigma_\infty(\mu) \equiv \rho_\infty(\mathrm{M}(\mu), \mathrm{M}(\rho)) = \sigma_\infty(\mathrm{M}(\mu)) - \sigma_\infty(\overline{\mathrm{M}}(\rho));$$

mais puisque $\mathrm{F} \times 0 \times \{k\} \subsetneq \overline{\mathrm{M}}(\rho, k)$ est une équivalence d'homotopie (non-propre) pour $k = 1, 2, \ldots$, on a $\sigma_\infty(\overline{\mathrm{M}}(\rho)) = 0$.

Maintenant on utilise g et son inverse (à homotopie près) pour remplacer K' par K dans un diagramme commutatif à homotopie près qui exprime la docilité de ε' :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{U}'_1 & \mathrm{U}'_2 \arrow[l, hook'] \arrow[dl] & \mathrm{U}'_3 \arrow[l, hook'] \arrow[dl] & \cdots \arrow[l, hook'] \arrow[dl] \\
\mathrm{K}' \arrow[u] \arrow[d, shift left] & \mathrm{K}' \arrow[l, "id"'] \arrow[u] \arrow[d, shift left] & \mathrm{K}' \arrow[l, "id"'] \arrow[u] \arrow[d, shift left] & \cdots \arrow[l, "id"'] \\
\mathrm{K} \arrow[u, shift left, "g"] & \mathrm{K} \arrow[l, "id"'] \arrow[u, shift left, "g"] & \mathrm{K} \arrow[l, "id"'] \arrow[u, shift left, "g"] & \cdots \arrow[l, "id"']
\end{tikzcd}$$

D'où l'on déduit une application propre $\mu' : \mathrm{M}(\rho) \to \mathrm{L}'$ qui est, *vers l'infini* une équivalence d'homotopie propre. D'ailleurs $\sigma_\infty(\mu') = \sigma(\varepsilon')$.

Pour $\mu : \overline{\mathrm{M}}(\rho) \to \mathrm{L}$ on trouve un sous-complexe $\mathrm{L}_1 \subset \mathrm{L}$ voisinage de l'infini et une application propre $\nu : \mathrm{L}_1 \to \overline{\mathrm{M}}(\rho)$ qui est *vers l'infini* une équivalence propre, *inverse* à μ, (c'est-à-dire $\nu\mu$ et $\mu\nu$ sont proprement homotope à l'identité *vers l'infini*). Ensuite la composition $f_1 : \mathrm{L}_1 \xrightarrow{\nu} \overline{\mathrm{M}}(\rho) \xrightarrow{\mu'} \mathrm{L}'$ est *vers l'infini* une équivalence propre qui est *simple.* En effet

$$\sigma_\infty(f_1) = \sigma_\infty(\mu'\nu) = \sigma_\infty(\mu') + \sigma_\infty(\nu) = \sigma_\infty(\mu') - \sigma_\infty(\mu) = \sigma(\varepsilon) - \sigma(\varepsilon') = 0.$$

Ceci termine la démonstration de 5.9.

Remarque. — On voit par cette démonstration que les deux invariants (i) et (ii) sont des invariants complets du type simple d'homotopie (propre) de complexes *vers un bout docile.* D'ailleurs notre contribution à la démonstration réside entièrement dans cette analyse des types simples.

5.10. CLASSIFICATION DES RUBANS. — Puisque les bouts isolés et dociles des Q-variétés ont des voisinages réguliers ouverts uniques à un glissement près, le théorème précédent donne également la classification de ces voisinages W réguliers à isomorphisme près qui préserve le bout distingué ε_+. Une variété W modelée sur Q appartient à cette classe si et seulement si W a deux bouts ε_- et ε_+, et $\mathrm{W} \cup \varepsilon_\pm$ est un voisinage I-régulier de $\varepsilon_\pm$. On appelle une telle variété un *ruban.*

5.11. RENVERSEMENT D'UN RUBAN. — Soit W un tel ruban modelé sur Q. Le théorème de somme pour l'invariant de Wall (*voir* [S_1] ou exploiter 4.3) donne

$$\sigma(\mathrm{W}) = \sigma(\varepsilon_+) + \sigma(\varepsilon_-),$$

et W est lui-même la limite homotopique pour les deux bouts dociles ε_-, ε_+. Donc on voit bien que $(W \cup \varepsilon_+, \varepsilon_+) \approx (W \cup \varepsilon_-, \varepsilon_-)$ si et seulement si $\sigma(\varepsilon_+) = \sigma(\varepsilon_-)$, c'est-à-dire $\sigma(W) = 2\,\sigma(\varepsilon_+)$.

5.12. Corollaire de 5.9. (Voisinages radiaux d'un bout). — *Soit* ε *un bout isolé et docile d'une variété* W *à modèle* Q. *Il y a deux obstructions à ce que* ε *ait un voisinage ouvert* U *qui soit homéomorphe à* $C \times \mathbf{R}$ *où* C *est un compact quelconque :*

(i) *L'obstruction* $\sigma(K)$ *à la finitude de la limite homotopique* K *de* ε.

(ii) *L'invariant de type simple* $\sigma(\varepsilon)$.

Preuve. — Si $\sigma(K) = 0 = \sigma(\varepsilon)$ on a vérifié que C peut même être $K_1 \times Q$ où K_1 est un complexe simplicial du type d'homotopie de K.

Si $U \approx C \times \mathbf{R}$, on remarque que $B^2 \times C \approx I^2 \times C$ est une Q-variété, d'où $I^2 \times C \approx K_1 \times Q$. Mais $U \approx I^2 \times U$ car $U \approx I^\infty \times L$. Donc $U \approx (B^2 \times C) \times \mathbf{R} \approx (K_1 \times Q) \times \mathbf{R}$.

C. Q. F. D.

5.13. Classification des bagues. — En lisant l'article bref de Farrel [F] le lecteur trouvera les moyens de classifier les couples (M, f) où M est une Q-variété compacte et connexe et $f : M \to S^1$ une application telle que $f_* : \pi_1 M \to \pi_1 S^1$ soit surjective, et que le revêtement $\overline{M} \to M$ induit de $\exp : R \to S^1$ soit dominé par un complexe fini. (Alors $\overline{M}$ est un « ruban »!). On admet une équivalence $(M, f) \sim (M', f')$ dès qu'on a un homéomorphisme $h : M \to M'$ avec $f \simeq f'\,h$. Alors on constate que la classification, à cette relation d'équivalence près, est selon deux invariants :

(i) le type d'homotopie ordinaire de (M, f);

(ii) l'invariant $\tau(M, f) \in \mathrm{Wh}(\pi_1 M)$ qu'on construit ainsi. Soit $F \underset{i}{\overset{r}{\rightleftarrows}} \overline{M}$, $ir \simeq \mathrm{id} \mid F$, une domination de $\overline{M}$ par un complexe fini. Soit ρ la composition $F \xrightarrow{i} \overline{M} \xrightarrow{T} \overline{M} \xrightarrow{r} F$ où T est la translation de $\overline{M}$ qui correspond à $\underline{1} \in \pi_1 S^1$; et soit F_ρ le tore de l'application ρ. On forme une application $\theta : F_\rho \to \overline{M}_T$ où $\overline{M}_T$ est le tore de T à partir du carré commutatif à homotopie près

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\rho"'] & {} \arrow[d, "T"] \\ {} \arrow[r, "r"] & {} \end{tikzcd}$$

Alors $\tau(M, f)$ est la torsion de Whitehead de $F_\rho \xrightarrow{\theta} \overline{M}_T \xrightarrow{q} M$ où q est l'équivalence d'homotopie naturelle. Il est immédiat que $f : M \to S^1$ est homotope à une fibration localement triviale si et seulement si M est de type fini et $\tau(M, f) = 7$, car alors on peut, choisir pour $\rho : F \to F$ un automorphisme simplicial et $F \simeq \overline{M}$, d'où $M \approx F_\rho \times Q$ est fibré sur S^1, de fibre $F \times Q$.

APPENDICE

Rappelons que si $f : A \to B$ est une application de chaînes, on définit un nouveau complexe, Cf, appelé le cône de f, comme suit :

$$(C f)_n = A_{n-1} \oplus B_n, \qquad \partial(a, b) = (-\partial a, \partial b + f(a)).$$

La suspension de A, Σ A, est le cône de l'application nulle $A \to 0$. On a une flèche naturelle $\Sigma f : \Sigma A \to \Sigma B$ qui n'est autre que f soi-même. On a des flèches naturelles qui rendent exacte la suite $0 \to B \to Cf \to \Sigma A \to 0$.

Dans ce qui suit, tout se passe dans la catégorie des complexes de chaînes sur un anneau fixe, et des applications de chaînes [Do, II.1]. La preuve des lemmes suivants se fait par simple vérification. Les notations sont conservées d'un lemme à l'autre.

A.0. LEMME. — *Soit*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ A' \arrow[r, "f'"] & B' \end{tikzcd}$$

un carré commutatif à homotopie près et $H : A \to B'$ *une homotopie de* βf *à* $f' \alpha$ (i. e. $\partial H + H \partial = \beta f - f' \alpha$). *Alors la flèche* $\gamma(H) : Cf \to Cf'$ *donnée par*

$$\gamma(H)(a, b) = (\alpha(a), H(a) + \beta(b))$$

rend le diagramme suivant exactement commutatif :

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & Cf \arrow[r] \arrow[d, "\gamma(H)"] & \Sigma A \arrow[d, "\Sigma\alpha"] \\ B' \arrow[r] & Cf' \arrow[r] & \Sigma A' \end{tikzcd}$$

A.1. LEMME (DE TRANSITIVITÉ). — *Soit*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ A' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\alpha'"'] & B' \arrow[d, "\beta'"] \\ A'' \arrow[r, "f''"] & B'' \end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif à homotopie près et H *et* H' *des homotopies de* βf *et* $f' \alpha$ *et de* $\beta' f'$ *à* $f'' \alpha'$ *respectivement. Alors* $\tilde{H} = \beta' H + H' \alpha$ *est une homotopie de* $\beta' \beta f$ *à* $f'' \alpha' \alpha$ *et* $\gamma(\tilde{H}) = \gamma(H') \gamma(H)$.

Remarquons maintenant que $\gamma(H)$ dépend, même à homotopie près, de l'homotopie H, comme le montre l'exemple suivant : $A_m = 0$ si $m \neq n-1$ et $A_{n-1} = \mathbf{Z}$, $B_m = 0$ si $m \neq n$ et $B_n = \mathbf{Z}$, et enfin $\alpha = \mathrm{id}$, $\beta = \mathrm{id}$. H peut être n'importe quel homomorphisme de Z. Alors $(Cf)_m = 0$ si $m \neq n$, $(Cf)_n = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$, et $\gamma(H)(a, b) = (0, H(a))$.

Cependant on a le résultat suivant :

A.2. LEMME. — *Soit*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\beta} \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' \end{array}$$

un carré commutatif à homotopie près et H *une homotopie de* βf *à* $f' \alpha$. *Soient* $\bar{\alpha} : A \to A'$ *et* $\bar{\beta} : B \to B'$, H_1 *une homotopie de* $\bar{\alpha}$ *à* α *et* H_2 *une homotopie de* $\bar{\beta}$ *à* β. *Alors*

$$\bar{H} = H + H_2 f - f' H_1$$

est une homotopie de $\bar{\beta} f$ *à* $f' \bar{\alpha}$ *et* $K : Cf \to Cf'$ *défini par* $K(a, b) = (-H_1(a), H_2(b))$ *est une homotopie de* $\gamma(\bar{H})$ *à* $\gamma(H)$.

BIBLIOGRAPHIE

[A] R. D. ANDERSON, *Topological properties of the Hilbert cube and the infinite product of open intervals* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 126, 1967, p. 200-216).

[AB] R. D. ANDERSON et R. H. BING, *A complete elementary proof that Hilbert space is homeomorphic to the countable infinite product of lines* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 74, 1968, p. 771-792).

[AC] R. D. ANDERSON et J. D. MC CHAREN, *On extending homeomorphisms to Frechet manifolds* (*Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 25, 1970, p. 283-289).

[Bo_1] K. BORSUK, *Theory of Retracts*, PWN, Warszawa, 1967.

[Bo_2] K. BORSUK, *Theory of shape*, Aarhus Univ. (*Lecture notes Séries*, n° 28, 1971).

[Br] J. L. BRYANT, *Approximating embedding of polyhedra in codimension three* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 170, 1972, p. 85-95).

[B-S] J. L. BRYANT et C. L. SEEBECK III, *Locally nice embeddings in codimension three* (*Quart. J. Math.*, Oxford, vol. 21, 1970, p. 265-272).

[Ch_1] T. CHAPMAN, *Compact Hilbert cube manifolds and the invariance of Whitehead torsion* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 79, 1973, p. 52-56).

[Ch_2] T. A. CHAPMAN, *Notices Amer. Math. Soc.*, vol. 19, 1972, p. A-810.

[Ch_3] T. CHAPMAN, *Notes on Hilbert cube manifolds* (miméo.) Univ. of Kentucky at Lexington, 1973.

[Co] M. M. COHEN, *A general theory of relative regular neighborhoods* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 136, 1969, p. 189-229).

[Do] A. DOLD, *Lectures on algebraic topology*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York, 1972.

[E] R. D. EDWARDS, *Topological general position*, preprint UCLA 1974.

[EW] S. EILENBERG et R. L. WILDER, *Uniform local connectedness and contractibility* (*Amer. J. Math.*, vol. 64, 1942, p. 613-622).

[F] F. T. FARRELL, *The obstruction to fibering a manifold over a circle* [*Actes. Cong. Ind. Math.*, 1970 (Nice), tome 2, p. 69-72, Gauthier-Villars, 1971].

[FA] R. H. FOX et E. ARTIN, *Some wild cells and spheres in three dimensional space* (*Ann. of Math.*, (2), vol. 49, 1948, p. 979-990).

[F] R. H. FOX, *On shape* (*Fund. Math.*, vol. 74, 1972, p. 47-71).

[GH] L. GUILLOU et H. HÄHL, *Les voisinages réguliers ouverts : critères homotopiques d'identification* (à paraître).

[He] D. W. HENDERSON, *Infinite-dimentional manifolds are open subsets of Hilbert space* (*Topology*, vol. 9, 1970, p. 25-33).

[Hd] J. F. P. HUDSON, *Piecewise-linear, Topology*, W. A. Benjamin Inc., New-York et Amsterdam, 1969.

[HP] L. S. HUSH et T. M. PRICE, *Finding a boundary for a* 3-*manifold* (*Ann. of Math.*, (2), vol. 91, 1970, p. 223-235 et (2), vol. 93, 1971, p. 486-488).

[J] F. E. A. JOHNSON, *Lefschetz duality and topological neighbourhoods* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 172, 1972, p. 95-110).

[KS_1] R. C. KIRBY et L. C. SIEBENMANN, *Deformation of smooth and piecewise linear manifold structures* II, *Sliced families* (preprint).

[KS_2] R. C. KIRBY et L. C. SIEBENMANN, *Some basic theorems about topological manifolds* (preprint).

[Mc_1] D. R. MC MILLAN Jr., UV-*properties and related topics*, Notes of B. J. SMITH (mimeographed) Florida State Univ., 1970.

[Mc_2] D. R. MC MILLAN Jr., *A criterion for cellularity in a manifold* II (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 126, 1967, p. 217-224).

[Mil] R. T. MILLER, *Approximating codimension* 3 *embeddings* (*Ann. of Math.*, vol. 95, 1972, p. 406-416).

[Mi_1] J. W. MILNOR, *On spaces having the homotopy type of* CW-*complex* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 90, 1959, p. 272-280).

[Mi_2] J. W. MILNOR, *Characteristic classes Notes*, Appendix A, Princeton, Mars 1964.

[Sp] E. H. SPANIER, *Algebraic Topology*, Mc Graw-Hill, 1966.

[S_1] L. C. SIEBENMANN, *The obstruction to finding a boundary for an open manifold of dimension* > 5 (*Thesis*, Princeton 1965, Univ. Microfilms, Order n° 66-5012, Box 1346 Ann. Arbor, Michigan).

[S_2] L. C. SIEBENMANN, Version de [S_1] (à paraître).

[S_3] L. C. SIEBENMANN, *Open regular neighborhoods of compacta* (*Notices Amer. Math. Soc.*, vol. 14, 1967, n° 67 T-26, p. 135).

[S_4] L. C. SIEBENMANN, *The structure of tame ends* (*Notices Amer. Math. Soc.*, vol. 13, 1966, n° 66 T-531, p. 862).

[S_5] L. C. SIEBENMANN, *On detecting euclidean space homotopically among topological manifolds* (*Inventiones Math.*, vol. 6, 1968, p. 245-261).

[S_6] L. C. SIEBENMANN, *On detecting open collars* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 142, 1969, p. 201-227).

[S_7] L. C. SIEBENMANN, *A total Whitehead torsion obstruction to fibering over the circle* (*Comment. Math. Helv.*, vol. 45, 1970, p. 1-48).

[S_8] L. C. SIEBENMANN, *Infinite simple homotopy type* (*Indag. Math.*, 32, n° 5, 1970, p. 479-495).

[S_9] L. C. SIEBENMANN, *Disruption of low-dimensional handlebody theory by Rohlin's theorem*, p. 57-76 in *Topology of Manifolds* édité par J. C. CANTRELL et C. H. EDWARDS MARKHAM, Chicago, 1970.

[S_{10}] L. C. SIEBENMANN, *Regular Open Neighborhoods, General Topology and its Application*, vol. 3, 1973.

[S_{11}] L. C. SIEBENMANN, *L'invariance topologique du type simple d'homotopie* [d'après T. CHAPMAN et R. D. EDWARDS] (*Séminaire Bourbaki*, 1972-1973, exp. 428, *Lecture Notes in Maths*, 383, Springer Verlag, p. 195-210).

[SGH] L. C. SIEBENMANN, L. GUILLOU et H. HÄHL, *Les voisinages ouverts réguliers* (*Ann. sci. Éc. Norm. Sup.*, 4e série, t. 6, 1973, p. 253-294).

[St_1] J. STALLINGS, *The piecewise linear structure of euclidean space* (*Proc. Cambridge Phil. Soc.*, vol. 58, 1962, p. 481-488).

[St_2] J. STALLINGS, *On topologically unknotted spheres* (*Ann. of Math.*), vol. 77, 1963, p. 490-503).

[Wa_1] C. T. C. WALL, *Finiteness conditions for* CW-*complexes* (*Ann. of Math.*, (2), vol. 81, 1965, p. 56-69).

[Wa_2] C. T. C. WALL, *Finiteness conditions for* CW-*complexes* II (*Proc. Roy. Soc.* (Great Britain), ser. A, vol. 295, 1966, p. 129-139).

[Wb] C. WEBER, *Quelques théorèmes bien connus sur les* ANR *et les* CW-*complexes* (*Enseignement Mathématique*, (2), vol. 13, 1967, p. 211-222).

[Ws] J. E. WEST, *Mapping cylinders of Hilbert cube factors* (*Gen. Topology Appl.*, vol. 1, 1971, p. 111-125).

[Z_1] E. C. ZEEMAN, *Seminar on combinatorial topology* (mimeographed) Bures-sur-Yvette and U. of Warwick, 1963.

[Z_2] E. C. ZEEMAN, *The Poincaré conjecture for* $n \geqq 5$, p. 198-204 in *Topology of* 3-*manifolds*, M. K. FORT Jr. Editor, Prentice-Hall, 1962.

[Z_3] E. C. ZEEMAN, *Unknotting combinatorial balls* (*Ann. of Math.*, vol. 78, 1963, p. 501-526).

[Ω] T. CHAPMAN et L. SIEBENMANN, *Finding a boundary for a Hilbert cube manifold*, preprint, U. of Kentucky at Lexington, 1975.

(Manuscrit reçu le 14 novembre 1973.)

L. SIEBENMANN,
Mathématiques,
Université Paris-XI,
91405 Orsay;

L. GUILLOU,
Centre de Mathématiques,
École Polytechnique,
14, rue Descartes,
75005 Paris;

H. HÄHL,
Mathematisch Institut,
Universität Tubingen,
D 74 Tübingen,
Hölderlinstrasse 19, R. F. A.