

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ANDRÉ GRAMAIN

## **Sur les étalements ramifiés de surfaces**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 4<sup>e</sup> série*, tome 7, n° 2 (1974), p. 311-315

[<http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1974\\_4\\_7\\_2\\_311\\_0>](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1974_4_7_2_311_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## SUR LES ÉTALEMENTS RAMIFIÉS DE SURFACES

PAR ANDRÉ GRAMAIN

---

*A Henri Cartan  
en hommage respectueux.*

Soient  $M$  une variété différentielle orientée de dimension 2 et  $W$  une variété orientée, compacte à bord, de même dimension. On appelle *étalement ramifié* une application  $g : W \rightarrow M$  qui, en tout point  $x \in W$ , s'écrit  $z \mapsto z^{i+1}$  pour des coordonnées locales complexes, centrées en  $x$  et  $g(x)$  respectivement, compatibles avec l'orientation.

**THÉORÈME 1.** — *Soit  $f : S_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  une immersion générique telle que, pour tout point  $x \in \mathbb{R}^2 - f(S_1)$ , l'indice  $I(f, x)$  du lacet  $f$  par rapport à  $x$  soit  $\geq 0$ . Il existe une surface  $W$  de bord  $S_1$  et un étalement ramifié  $g : W \rightarrow \mathbb{R}^2$  tel que  $g|_{S_1} = f$ . <sup>(1)</sup>*

**THÉORÈME 2.** — *Soit  $W$  une surface compacte orientée de bord  $bW$ . Pour toute immersion  $f : bW \rightarrow S_2$ , il existe un étalement ramifié  $g : W \rightarrow S_2$  tel que  $g|_{bW} = f$ .*

Le théorème 1 résout la conjecture 2 de J. Titus [1], qui est une forme affaiblie d'une conjecture trop optimiste de Loewner et Hopf. Le théorème 2 donne une solution, pour la dimension 2, à la conjecture 3 du même article. D'après [1], dans le théorème 1 (resp. 2), on peut, quitte à modifier  $f$  par un automorphisme de la source, remplacer l'étalement ramifié  $g$  par une fonction holomorphe (resp. méromorphe) pour une structure complexe donnée sur  $W$ .

### 1. Étalements ramifiés

Soient  $M$  et  $W$  comme ci-dessus, et  $g : W \rightarrow M$  un étalement ramifié. Si, au point  $x \in W$ , l'application  $g$  s'écrit  $z \mapsto z^{i+1}$ , l'entier  $i$  s'appelle l'indice de ramification de  $g$  en  $x$  et se note  $i_x(g)$ . Les points  $x$  tels que  $i_x(g) \neq 0$  sont les points de ramification de  $g$ ; ils sont isolés, donc en nombre fini. Ce sont les points où  $g$  n'est pas une immersion. On ne considérera dans la suite que des étalements ramifiés dont les points de ramification sont intérieurs à  $W$ .

---

<sup>(1)</sup> Pendant la rédaction de cette note, G. Francis m'a communiqué le texte de deux articles à paraître : *On Loewner's conjecture concerning curves of nonnegative circulation* et *A short proof of the Loewner-Hopf-Titus conjecture*. Chacun contient une démonstration du théorème 1; la deuxième est très voisine de la nôtre.

Supposons que  $M$  soit la sphère  $S_2$ , considérée comme compactifié du plan  $\mathbf{R}^2$  par adjonction d'un point noté  $\infty$ . Soit  $f = g|_b W$ ; si l'image de  $f$  est contenue dans  $\mathbf{R}^2$ , alors, considérée comme immersion dans le plan, l'immersion  $f$  a un degré tel que

$$(1) \quad \deg(f) = \chi(W) + \sum_{x \in R} i_x(g) - 2 \text{Card}(\bar{g}^{-1}(\infty)),$$

où  $R$  est l'ensemble des points de ramification de  $g$ , sous l'hypothèse que  $\infty \notin g(R)$ . Pour obtenir cette formule, on transforme  $g$  en une immersion dans le plan en perçant dans  $W$  des petits trous centrés aux points de  $R \cup \bar{g}^{-1}(\infty)$  et on applique la formule donnant le degré d'une immersion bordant un étalement.

## 2. Prolongement des immersions du cercle dans la sphère

Décrivons d'abord une construction. Soit  $g' : W' \rightarrow M$  une immersion ramifiée; posons  $f' = g'|_b W'$ . Soient  $a_1$  et  $a_2 \in b W'$  les images réciproques d'un point double  $A$  de  $f'$  où les deux branches sont tangentes, sans traversée et de même orientation. Soit  $\gamma_1$  (resp.  $\gamma_2$ ) un petit arc d'origine  $b_1$  (resp.  $b_2$ ) dans  $W'$ , rencontrant transversalement  $b W'$  en son extrémité  $a_1$  (resp.  $a_2$ ). On suppose que ces arcs ne contiennent pas de point de ramification et que  $g'|_{\gamma_1}$  et  $g'|_{\gamma_2}$  sont des plongements de même image. Entaillons  $W'$  selon les

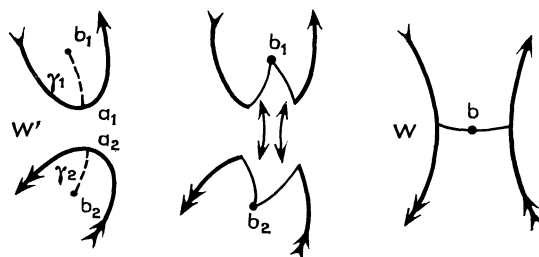


Fig. 1

arcs  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  et recollons entre elles les deux entailles, de façon compatible avec l'orientation, à l'aide de l'identification de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  à leur image par  $g'$ . Soit  $W$  l'espace obtenu; si l'on introduit une carte convenable au point  $b$  recollé de  $b_1$  et  $b_2$ ,  $W$  est une surface (à bord) et  $g'$  définit, par passage au quotient, une immersion ramifiée  $g : W \rightarrow M$ . Les points de ramification de  $g$  sont ceux de  $g'$ , avec même indice, plus le point  $b$  d'indice 1. L'immersion  $f = g|_b W$  a même image que  $f'$ , mais le point  $A$  est un point double avec traversée (qu'on peut rendre transversale en modifiant un peu  $g$ ).

Soit  $W'$  la somme d'une famille finie  $(\Delta_i)_{i \in I}$  de disques,  $g' : W' \rightarrow M$  une immersion ramifiée et  $J$  un ensemble de points doubles de  $g'$  qui sont des contacts comme ci-dessus. Soit  $G$  le graphe dont l'ensemble des sommets est  $I$  et l'ensemble des arêtes  $J$ . Si l'on effectue la construction de recollement précédente successivement pour tous les points de  $J$ , on obtient une surface homotopiquement équivalente à  $G$ .

PROPOSITION 1. — Soit  $f : S_1 \rightarrow S_2$  une immersion. Il existe une surface compacte  $W$  de bord  $S_1$  et un étalement ramifié  $g : W \rightarrow S_2$  tels que  $f = g|_{S_1}$ .

Il suffit de démontrer la proposition pour une immersion voisine de  $f$  obtenue en déplaçant  $f$  le long d'un champ transversal rentrant. On peut donc supposer  $f$  générique.

Décomposons  $f$  en cercles de Seifert en remplaçant, au voisinage de chaque point double, l'image de  $f$  par deux arcs tangents de même orientation. La décomposition de  $f$  est une famille finie  $f_i : \Sigma_i \rightarrow S_2$  ( $i \in I$ ), où  $f_i$  est un plongement d'un cercle  $\Sigma_i$ ; les images  $f_i(\Sigma_i)$  n'ont d'autres points communs que des contacts sans traversée en chaque point double de  $f(S_1)$ . Pour tout  $i \in I$ , soit  $\Delta_i$  un disque de bord  $\Sigma_i$  et soit  $g_i : \Delta_i \rightarrow S_2$  un plongement prolongeant  $f_i$ . Soit  $W'$  (resp.  $g'$ ) la somme des  $\Delta_i$  (resp. des  $g_i$ ). Appliquant la construction de recollement à tous les points doubles de  $f$ , on démontre la proposition 1. Par ce procédé, la surface  $W$  n'est pas toujours un disque.



Fig. 2

Exemple. — Voici un exemple d'une immersion de degré 0 qui se prolonge en une immersion ramifiée d'une surface connexe de caractéristique  $-1$ , avec trois ramifications d'indice 1 et un point à l'infini.

PROPOSITION 2. — Soit  $f : S_1 \rightarrow S_2$  une immersion. Il existe un étalement ramifié  $g : D_2 \rightarrow S_2$  qui prolonge  $f$ .

On peut supposer générique l'immersion  $f$ . On procède comme ci-dessus, mais avec une décomposition incomplète de  $f$  en plongements de cercles. On voit, par récurrence sur le nombre de points doubles de  $f$ , qu'il existe une décomposition de  $f$  en une famille de plongements de cercles telle que le graphe des recollements soit un arbre. La proposition en résulte.

PROPOSITION 3. — Soit  $f : S_1 \rightarrow S_2$  une immersion. Il existe un étalement ramifié  $g : S_2 \rightarrow S_2$  tel que  $f$  soit la restriction de  $g$  à l'équateur  $S_1$  de  $S_2$ .

Cela résulte de la proposition 2.

### 3. Démonstration du théorème 2

La surface  $W$  s'obtient, à partir d'une famille de disques dont le bord soit  $V$ , en ajoutant des anses. Pour démontrer le théorème 2, il suffit donc, compte tenu de la proposition 2, de savoir ajouter une anse à une immersion ramifiée  $g' : W' \rightarrow S_2$ . Pour cela, on découpe

deux petits disques plongés disjoints dans l'image de  $g'$ , et on doit les remplacer par un étalement ramifié de la couronne ayant même bord. C'est possible pour la raison suivante :

LEMME. — *Il existe un étalement ramifié  $h : S_1 \times S_1 \rightarrow S_2$  tel que  $h|_{S_1 \times \{0\}}$  soit un plongement.*

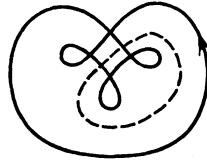


Fig. 3

On construit  $h$  à l'aide d'une immersion bien choisie du tore percé d'un trou dans  $S_2$  (voir fig. 3) et en complétant (prop. 2) par un étalement ramifié du disque.

#### 4. Démonstration du théorème 1

*Remarques.* — 1° Soit  $f : S_1 \rightarrow \mathbf{R}^2$  une immersion. Si  $f$  se prolonge en une application orientée  $g : W \rightarrow \mathbf{R}^2$ , le degré de  $g$  en un point  $x \in \mathbf{R}^2 - f(S_1)$  est égal à l'indice  $I(f, x)$ . L'hypothèse du théorème 1 sur l'indice est donc bien nécessaire.

2° Il n'y a pas d'espoir que  $W$  soit, en général, le disque (conjecture de Loewner et Hopf). Pour le voir, il suffit d'examiner la formule (1) avec  $\deg(f) = 1$  ou 0.

3° La démonstration qu'on va donner s'applique aussi à l'immersion  $f$  d'une famille de plusieurs cercles. Mais alors la variété  $W$  n'est pas nécessairement connexe. Ceci laisse penser qu'il n'y a pas de procédé brutal pour éliminer les points à l'infini de l'étalement  $g$  de la proposition 2 en ajoutant des anses à  $W$ .

Soit  $f_i : \Sigma_i \rightarrow \mathbf{R}^2$  ( $i \in I$ ) la décomposition de Seifert de  $f$ . Soit  $I^+$  (resp.  $I^-$ ) l'ensemble des  $i \in I$  tels que  $f_i$  soit de degré  $+1$  (resp.  $-1$ ).

LEMME. — *Il existe une application  $\phi : I^- \rightarrow I^+$ , une famille  $(W_j)_{j \in I^+}$  où  $W_j$  est un disque de bord  $\Sigma_j$  percé de trous de bord  $\Sigma_k$  ( $k \in \phi^{-1}(j)$ ) et, pour tout  $j \in I^+$ , un plongement  $h_j : W_j \rightarrow \mathbf{R}^2$  tel que  $h_j|_{\Sigma_j} = f_j$ ,  $h_j|_{\Sigma_k} = f_k$  pour  $k \in \phi^{-1}(j)$ .*

Ce lemme étant admis, le théorème 1 se déduit de la construction de recollement du n° 2. Démontrons le lemme.

Remarquons d'abord que deux cercles de même signe qui se touchent sont en position emboîtée et deux cercles de signes contraires en position extérieure. Identifions  $I^-$  au segment  $[1, n]$  de  $\mathbf{N}$  de telle sorte que l'on ait  $i < j$  si  $f_j(\Sigma_j)$  est à l'intérieur de  $f_i(\Sigma_i)$ . Pour  $i \in [0, n]$ , construisons, par récurrence sur  $i$ , une application  $\phi_i : [1, i] \rightarrow I^+$ , une famille  $(W_j^i)_{j \in I^+}$ , où  $W_j^i$  est un disque de bord  $\Sigma_i$  percé de trous de bord  $\Sigma_k$  ( $k \in \phi_i^{-1}(j)$ ) et un plongement  $h_j^i : W_j^i \rightarrow \mathbf{R}^2$  tel que  $h_j^i|_{\Sigma_j} = f_j$ ,  $h_j^i|_{\Sigma_k} = f_k$  pour  $k \in \phi_i^{-1}(j)$ . Pour  $i = 0$ , on prend des plongements de disques prolongeant les  $f_j, j \in I^+$ . Supposons la construction

faite pour l'indice  $i-1$ . Soit  $x$  un point situé à l'intérieur de  $f_i(\Sigma_i)$ . L'indice par rapport à  $x$  de la réunion des  $f_j$ ,  $j \in I^+$ , et des  $f_k$ ,  $1 \leq k < i$ , est supérieur à  $1 + I(f, x)$ , donc  $\geq 1$ . Ceci prouve que l'intérieur de  $f_i(\Sigma_i)$  est contenu dans  $h_j^{i-1}(W_j^{i-1})$  pour un certain  $j \in I^+$ . De plus,  $f_i(\Sigma_i)$ , ne touchant pas  $f_j(\Sigma_j)$  ni  $f_k(\Sigma_k)$  pour  $k \in \varphi_{i-1}(j)$ , est aussi contenu à l'intérieur de  $h_j^{i-1}(W_j^{i-1})$ . On prend pour  $\varphi_i$  le prolongement de  $\varphi_{i-1}$  tel que  $\varphi_i(i) = j$ ; pour  $W_j^i$ , on prend  $W_j^{i-1}$  privé de l'image réciproque par  $h_j^{i-1}$  de l'intérieur de  $f_i(\Sigma_i)$ ; pour  $s \in I^+ - \{j\}$ , on pose

$$W_s^i = W_s^{i-1} \quad \text{et} \quad h_s^i = h_s^{i-1}.$$

Le lemme est démontré.

*Remarque.* — Le procédé employé n'est pas le plus économique en points de ramification. Soient  $a$  et  $b \in W$  deux points de ramification d'indice 1; s'il existe un arc plongé  $K$  joignant  $g(a)$  à  $g(b)$  et tel que  $g^{-1}(K)$  contienne un cercle passant par  $a$  et  $b$ , on peut supprimer les deux ramifications  $a$  et  $b$  et une anse de  $W$ . Une fois ces simplifications effectuées, je ne sais pas si l'on obtient le résultat le plus économique.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] CH. TITUS, *Extensions through codimension one to sense preserving mappings* (Ann. Inst. Fourier, vol. 23, 1973, p. 215-227).

(Manuscrit reçu le 15 janvier 1974.)

André GRAMAIN,  
Faculté des Sciences,  
Parc de Grandmont,  
37200 Tours.