ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ANDRÉ CEREZO
FRANÇOIS ROUVIÈRE

Solution élémentaire d'un opérateur différentiel linéaire invariant à gauche sur un groupe de Lie réel compact et sur un espace homogène réductif compact

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 2, nº 4 (1969), p. 561-581
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1969_4_2_4_561_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4^e série, t. 2, 1969, p. 561 à 581.

SOLUTION ÉLÉMENTAIRE D'UN OPÉRATEUR DIFFÉRENTIEL LINÉAIRE INVARIANT A GAUCHE SUR UN GROUPE DE LIE RÉEL COMPACT ET SUR UN ESPACE HOMOGÈNE RÉDUCTIF COMPACT

PAR ANDRÉ CEREZO ET FRANÇOIS ROUVIÈRE,
Purdue University, Lafayette (Indiana).

0. INTRODUCTION. — On sait que tout opérateur différentiel linéaire P à coefficients constants sur $\mathbf{R}^n$ possède une solution élémentaire : il existe une distribution E telle que $\mathrm{PE} = \delta$, δ désignant la mesure de Dirac à l'origine. La convolution du second membre par E fournit des résultats d'existence de solutions pour l'équation aux dérivées partielles $\mathrm{P}u = v$.

On peut chercher à résoudre de manière analogue l'équation $\mathrm{P}u = v$, où P est cette fois un opérateur différentiel linéaire sur un groupe de Lie G. L'hypothèse « P à coefficients constants », qui signifie que P commute aux translations de $\mathbf{R}^n$, sera remplacée par « P invariant à gauche », qui signifie que P commute aux translations à gauche du groupe G. (Le paragraphe 6 donne quelques résultats sur certains opérateurs « bi-invariants », i. e. commutant aux translations à gauche et à droite.) Nous nous limitons ici essentiellement au cas d'un groupe de Lie réel compact, seuls les paragraphes 7 et 8 donnent des généralisations, à un groupe $\mathrm{G} \times \mathbf{R}^p$ (G compact) et à un espace homogène d'un groupe compact, G/K.

Sur un groupe de Lie compact G, nous étudions l'existence d'une solution élémentaire au moyen de la transformation de Fourier sur G. La situation est très différente de celle de $\mathbf{R}^n$.

D'abord il existe en général (sauf sur le tore) des opérateurs invariants à gauche d'ordre 1 (à coefficients complexes) qui ne sont même pas localement résolubles : pour tout ouvert Ω de G, il existe une fonction C^∞ à support compact v dans Ω telle que l'équation $\mathrm{P}u = v$ n'ait pas de solution distribution dans Ω. (Nous ne donnons pas ici la démonstration de ce résultat.) Ensuite (et cette difficulté apparaît déjà sur le tore), un opérateur P ne peut avoir de solution élémentaire s'il n'est pas injectif. Enfin les coefficients de Fourier de l'opérateur doivent vérifier certaines conditions de croissance. Le théorème I (§ 4) donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur invariant à gauche sur un groupe de Lie compact ait une solution élémentaire. Cette propriété équivaut aussi à l'existence (et l'unicité) d'une solution de l'équation $Pu = \varphi$ dans l'espace des fonctions indéfiniment différentiables : $PC^\infty(G) = C^\infty(G)$, et dans l'espace des distributions : $P\mathcal{D}'(G) = \mathcal{D}'(G)$, et à la résolubilité globale : $P\mathcal{D}'(G) \supset C^\infty(G)$. Elle équivaut encore (théorème II, § 5) à l'injectivité jointe à une propriété d'« hypoellipticité globale ».

Le théorème III (§ 7) caractérise les opérateurs invariants à gauche sur $G \times \mathbf{R}^p$ (G compact) qui possèdent une solution élémentaire; la démonstration se fait par transformation de Fourier partielle sur G.

Le théorème IV (§ 8) caractérise les opérateurs différentiels sur un espace homogène G/K, invariants par l'action de G, qui ont une solution élémentaire; on se ramène à l'étude d'une équation aux dérivées partielles sur G, invariante à droite par K. Ici encore, ce résultat équivaut à l'existence de solutions dans $C^\infty(G/K)$ ou dans $\mathcal{D}'(G/K)$.

Nous tenons à exprimer ici notre reconnaissance au Professeur François Trèves, qui nous a suggéré ce problème. Ses conseils et ses encouragements au cours de conversations fréquentes nous ont aidé constamment dans ce travail.

1. Rappels et notations. — Soit G un groupe de Lie réel compact connexe [1], dg sa mesure de Haar de masse 1, $\hat{G}$ l'ensemble des classes d'équivalence de ses représentations irréductibles (de dimension finie) sur des espaces hilbertiens; on se fixe un représentant unitaire M de chaque classe, et l'on note encore $\hat{G} = \{M\}$ l'ensemble obtenu, H_M l'espace de la représentation $M \in \hat{G}$, et $d(M) = \dim H_M$.

$\mathbf{L}^2(G, dg)$ est la somme directe hilbertienne des sous-espaces vectoriels des coefficients des représentations de $\hat{G}$ ([1]) : si $f \in \mathbf{L}^2(G)$, soit

$$\hat{f}(M) = \int_G M^*(g) f(g)\, dg \qquad (M \in \hat{G}) \tag{1}$$

sa transformée de Fourier [M^* est l'adjoint de M dans $\mathcal{L}(H_M)$, $M^* M = M M^* = \mathrm{Id}$]. On a une formule de Plancherel :

$$\| f \|_2^2 = \sum_{M \in \hat{G}} d(M)\, \| \hat{f}(M) \|^2 \qquad (\| A \|^2 = \operatorname{tr} AA^*) \tag{2}$$

---

[1] L'hypothèse de connexité ne restreint pas en fait la généralité.

et, si f est continue, une formule d'inversion

$$f(g) = \sum_{M \in \hat{G}} d(M) \operatorname{tr}[\hat{f}(M)\, M(g)]. \tag{3}$$

Soit $\mathfrak{G}$ l'algèbre de Lie de G. On considérera un élément X de $\mathfrak{G}$ comme un opérateur invariant à gauche d'ordre 1, et l'on a, par invariance :

$$(XM)\,(ag) = X(M(ag)) = X(M(a)\,M(g)) = M(a)\,XM(g)$$

et pour $g = 1$:

$$XM(a) = M(a)\,XM(1) \qquad \text{et} \qquad XM^*(a) = XM^*(1)\,M^*(a). \tag{4}$$

Si $u \in C^\infty(G)$, l'invariance de X et de dg entraîne

$$\int_G (Xu)\,(g)\,dg = \int_G dh \int_G X_g u(hg)\,dg = \int_G X_g\left(\int_G u(hg)\,dh\right)dg = 0,$$

ce qui permet d'intégrer par parties sur G.

Par suite, pour $f \in C^\infty(G)$:

$$\begin{aligned} \widehat{Xf}(M) &= \int_G M^*(g)\,Xf(g)\,dg = -\int_G XM^*(g)\,f(g)\,dg \\ &= -XM^*(1)\int_G M^*(g)\,f(g)\,dg = -XM^*(1)\,\hat{f}(M). \end{aligned}$$

On a supposé M unitaire :

$$X(M^*M) = XM^*M + M^*XM = 0.$$

Donc $-XM^*(1) = XM(1)$, et finalement

$$\widehat{Xf}(M) = XM(1)\,\hat{f}(M). \tag{5}$$

Un opérateur différentiel P invariant à gauche sur G est un élément de l'algèbre enveloppante complexifiée D(G) de $\mathfrak{G}$, donc une combinaison linéaire à coefficients complexes de monômes non commutatifs $X^\alpha = X_{\alpha_1} \ldots X_{\alpha_p}$, où $(X_1, \ldots, X_n)$ est une base donnée de $\mathfrak{G}$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ et $1 \leq \alpha_j \leq n$. Nous noterons

$$p = |\alpha|, \qquad \mathcal{M}_i = X_i M(1), \qquad \mathcal{M}^\alpha = \mathcal{M}_{\alpha_1} \ldots \mathcal{M}_{\alpha_p} = X^\alpha M(1) \qquad \text{et} \qquad P(\mathcal{M}) = PM(1)$$

la combinaison linéaire correspondante des $\mathcal{M}^\alpha$. Itérant alors (5), il vient immédiatement

$$\widehat{Pf}(M) = P(\mathcal{M})\,\hat{f}(M). \tag{6}$$

Remarquons que si P est dans le centre de D(G), c'est-à-dire s'il est invariant à gauche et à droite sur G, ses « coefficients de Fourier » $P(\mathcal{M})$ sont des homothéties : ils commutent en effet à tous les $X_i(M)(1)$, et par suite à tous les opérateurs $M(g)$ d'une représentation irréductible.

2. Une famille fondamentale d'opérateurs. — Dans la suite, nous considérons la famille $\mathscr{F}$ ([2]) des opérateurs invariants à gauche :

$$D_k = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} (X^\alpha)^\star X^\alpha \qquad (k \in \mathbf{N}),$$

la somme incluant le cas $\alpha = 0$ ($D_0 = 1$), pour une certaine base $X_1, \ldots, X_n$ de $\mathfrak{G}$. On a noté $X^\alpha = X_{\alpha_1} \ldots X_{\alpha_p}$, et $(X^\alpha)^\star = (-1)^p X_{\alpha_p} \ldots X_{\alpha_1}$ est l'adjoint de X^α pour le produit scalaire de $\mathbf{L}^2(G, dg)$.

Lemme 1. — *Pour une base convenable de $\mathfrak{G}$, les opérateurs D_k de $\mathscr{F}$ sont bi-invariants et l'on a*

$$D_k = \sum_{0 \leq q \leq k} \left(-\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \right)^q. \tag{7}$$

Toute algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ compacte est en effet la somme directe $\mathfrak{G} = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{G}'$ d'une algèbre de Lie commutative $\mathfrak{H}$ (son centre) et d'une algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{G}' = [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$. Si $(X_1, \ldots, X_p)$ est une base orthonormale pour la forme de Killing de $\mathfrak{G}'$, l'opérateur de Casimir de $\mathfrak{G}'$ s'écrit $C = -\sum_{i=1}^{p} X_i^2$ et est bi-invariant. Par suite, si $(X_{p+1}, \ldots, X_n)$ est une base de $\mathfrak{H}$, l'opérateur $\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ est dans le centre de $D(G)$:

$$\forall j, \quad 1 \leq j \leq n, \quad \left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2, X_j \right] = \sum_{i=1}^{p} [X_i^2, X_j] + 2 \sum_{i=p+1}^{n} X_i [X_i, X_j] = 0.$$

On montre alors (7) par récurrence sur k :

$$\begin{aligned} D_k - D_{k-1} &= \sum_{i=1}^{n} (X_i)^\star (D_{k-1} - D_{k-2}) X_i \\ &= (D_{k-1} - D_{k-2}) \left(\sum_{i=1}^{n} (X_i)^\star X_i \right) = (D_{k-1} - D_{k-2}) \left(-\sum X_i^2 \right) \\ &= \ldots = \left(-\sum X_i^2 \right)^k. \end{aligned}$$

En particulier D_k est bi-invariant.

Nous supposerons dans toute la suite avoir choisi une telle base.

Les coefficients de Fourier de D_k sont donc des homothéties, que nous noterons $d_k(M) \, \mathrm{Id}_{\mathrm{H}_M}$, de rapport $d_k(M)$ positif, puisque pour tout M :

$$1 \leq \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} (X^\alpha \operatorname{tr} M(x), X^\alpha \operatorname{tr} M(x)) = (D_k \operatorname{tr} M(x), \operatorname{tr} M(x)) = d_k(M).$$

([2]) Elle jouera le rôle des $(1 - \Delta)^k$ sur $\mathbf{R}^n$.

LEMME 2. — $\forall k \in \mathbf{N}$, $\forall M \in \hat{G}$, $\forall \alpha$, $|\alpha| \leq k$, $\forall x \in H_M$:

$$\| \mathcal{M}^\alpha x \| \leq d_k(M) \| x \|. \tag{8}$$

En effet

$$\| d_k(M) x \|^2 = \left\| \left(1 + \sum_{0 < |\alpha| \leq k} (\mathcal{M}^\alpha)^* \mathcal{M}^\alpha \right) x \right\|^2$$
$$= \| x \|^2 + 2 \sum_{0 < |\alpha| \leq k} \| \mathcal{M}^\alpha x \|^2 + \left\| \sum_{0 < |\alpha| \leq k} (\mathcal{M}^\alpha)^* \mathcal{M}^\alpha x \right\|^2.$$

Avec les notations du lemme, on a donc, pour $f \in C^\infty(G)$;

$$\| X^\alpha f \|_2^2 = \sum_{M \in \hat{G}} d(M) \| \mathcal{M}^\alpha \hat{f}(M) \|^2 \leq \sum_{M \in \hat{G}} d(M) \| d_k(M) \hat{f}(M) \|^2 = \| D_k f \|_2^2.$$

Par suite la famille des normes $\| D_k f \|_2$ définit sur $C^\infty(G)$ la même topologie que les semi-normes $\| X^\alpha f \|_2$, c'est-à-dire sa topologie habituelle d'espace de Fréchet.

LEMME 3. — $\forall j_1, \ldots, j_n \in \mathbf{N}$, $\exists C > 0$, $\forall M \in \hat{G}$, $\forall k \geq 2(j_1 + \ldots + j_n)$:

$$d_{j_1}(M) \ldots d_{j_n}(M) \leq C\, d_k(M). \tag{9}$$

Soit $x \in H_M$:

$$\| d_{j_1}(M) \ldots d_{j_n}(M) x \| \leq C \sum_{0 \leq |\alpha| \leq 2(j_1 + \ldots + j_n)} \| \mathcal{M}^\alpha x \|.$$

Le second membre est inférieur à $C \| d_k(M) x \|$ en vertu du lemme 2.

Aux opérateurs D_k s'applique aussi la

PROPOSITION 4. — *Soit* P *invariant à gauche sur* G. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) $P : C^\infty(G) \to C^\infty(G)$ *est injectif;*

(*b*) $P : C^\infty(G) \to C^\infty(G)$ *est à image dense;*

(*c*) $P(\mathcal{M})$ *est inversible dans* $\mathcal{L}(H_M)$ *pour tout* M *de* $\hat{G}$.

L'équivalence de (*a*) et (*c*) est triviale, les H_M étant de dimension finie : $Pf = 0 \Leftrightarrow \forall M$, $P(\mathcal{M}) \hat{f}(M) = 0$.

(*c*) $\Rightarrow$ (*b*) : Soit $M \in \hat{G}$ et $f(g) = \operatorname{tr}[P(\mathcal{M})^{-1} A M(g)]$ où $A \in \mathcal{L}(H_M)$. Alors $\hat{f}(N) = 0$ pour $N \in \hat{G} - \{M\}$, et $P(\mathcal{M}) \hat{f}(M) = \frac{A}{d(M)}$ d'après (3). Par suite : $Pf(g) = \operatorname{tr} A M(g)$.

L'image de P contient donc tous les coefficients des représentations de G, et est donc dense.

(*b*) $\Rightarrow$ (*a*) : Si P est à image dense, son adjoint P^* est injectif, donc $P^*(\mathcal{M}) = P(\mathcal{M})^*$ est inversible pour tout M.

En particulier les opérateurs D_k sont à image dense dans $C^\infty(G)$.

3. CARACTÉRISATION DE $C^\infty(G)$ ET $\mathcal{D}'(G)$. — Une fonction $f \in \mathbf{L}^2(G)$ est indéfiniment différentiable si et seulement si tous les $X^\alpha f$ sont dans $\mathbf{L}^2(G)$, c'est-à-dire si, pour tout α,

$$\sum_{M \in \hat{G}} d(M) \| \mathfrak{M}^\alpha \hat{f}(M) \|^2 < \infty,$$

Cette condition équivaut, d'après le lemme 2, à

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad \sum_{M \in G} d(M)\, d_k(M)^2 \| \hat{f}(M) \|^2 < \infty. \tag{10}$$

L'espace des distributions sur G, $\mathcal{D}'(G)$, est le dual de $C^\infty(G)$; notons $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire. Pour $T \in \mathcal{D}'(G)$, posons

$$\hat{T}(M^*) = \langle T_g, M(g) \rangle \qquad \text{et} \qquad \hat{T}(M) = \langle T_g, M^*(g) \rangle.$$

Si l'on note $f_M = d(M)\,\mathrm{tr}[\hat{f}(M) M(\ \ )]$, pour $f \in C^\infty(G)$, f est la somme des f_M au sens de $\mathbf{L}^2(G)$ d'après (2), mais aussi au sens de $C^\infty(G)$ d'après (10), et l'on a donc

$$\langle T, f \rangle = \sum \langle T, f_M \rangle = \sum_{M \in \hat{G}} d(M)\,\mathrm{tr} \langle T_g, \hat{f}(M) M(g) \rangle$$

$$= \sum_{M \in \hat{G}} d(M)\,\mathrm{tr}[T(M^*) \hat{f}(M)].$$

T est une distribution : $\exists$ C, k, $\forall f \in C^\infty(G)$,

$$|\langle T, f \rangle| \leq C \| D_k f \|_2,$$

soit

$$\left| \sum_{M \in \hat{G}} d(M)\,\mathrm{tr}\left[\hat{T}(M^*)\, d_k(M)^{-1} \widehat{D_k f}(M)\right] \right| \leq C \| D_k f \|_2.$$

Donc $g \mapsto \sum_{M \in \hat{G}} \dfrac{d(M)}{d_k(M)} \mathrm{tr}(\hat{T}(M^*) \hat{g}(M))$ est une forme linéaire continue sur l'image de $C^\infty(G)$ par D_k, qui est dense dans C^∞, et donc dans $\mathbf{L}^2(G)$. Il existe donc une famille $(a(M))$ d'opérateurs de $\mathcal{L}(H_M)$ telle que cette forme soit $g \mapsto \sum d(M)\,\mathrm{tr}\, a(M)^* \hat{g}(M)$, où les $a(M)$ sont les coefficients de Fourier d'une fonction de $\mathbf{L}^2$ de norme $\leq$ C.

Sur les fonctions $D_k(\mathrm{tr}\, M(g))$, on vérifie que

$$a(M)^* = \frac{\hat{T}(M^*)}{d_k(M)}.$$

Par suite :

$$\sum \frac{d(\mathrm{M})}{d_k(\mathrm{M})^2} \| (\hat{\mathrm{T}}(\mathrm{M}^\star))^\star \|^2 = \sum \frac{d(\mathrm{M})}{d_k(\mathrm{M})^2} \| \hat{\mathrm{T}}(\mathrm{M}) \|^2 \leq \mathrm{C}^2.$$

Réciproquement, cette inégalité signifie que les $\dfrac{\hat{\mathrm{T}}(\mathrm{M}^\star)}{d_k(\mathrm{M})}$ sont les coefficients de Fourier d'une fonction de $\mathbf{L}^2(\mathrm{G})$ de norme $\leq \mathrm{C}$, et entraîne donc l'inégalité précédente. Donc $f \mapsto \sum d(\mathrm{M}) \operatorname{tr} \hat{\mathrm{T}}(\mathrm{M}^\star) \hat{f}(\mathrm{M})$ est une distribution sur G qui coïncide trivialement avec T.

Finalement, T et $\overline{\mathrm{T}}$ étant simultanément des distributions, pour qu'une famille $(\hat{\mathrm{T}}(\mathrm{M}))$ soit formée des coefficients de Fourier d'une distribution T, il faut et il suffit que

$$\exists\, k \in \mathbf{N}, \quad \sum_{\mathrm{M} \in \hat{\mathrm{G}}} \frac{d(\mathrm{M})}{d_k(\mathrm{M})^2} \| \hat{\mathrm{T}}(\mathrm{M}) \|^2 < \infty. \tag{11}$$

La mesure de Dirac δ est une distribution dont tous les coefficients de Fourier sont l'identité. Par suite :

$$\exists\, k_0 \in \mathbf{N}, \quad \sum_{\mathrm{M} \in \hat{\mathrm{G}}} \frac{d(\mathrm{M})^2}{d_{k_0}(\mathrm{M})^2} < \infty. \tag{12}$$

On peut alors remplacer la condition (11) de caractérisation des distributions par

$$\exists\, \mathrm{C} > 0, \quad k \in \mathbf{N}, \quad \forall\, \mathrm{M} \in \hat{\mathrm{G}}, \quad \| \hat{\mathrm{T}}(\mathrm{M}) \| \leq \mathrm{C}\, d_k(\mathrm{M}). \tag{11'}$$

En effet l'hypothèse (11′), compte tenu du lemme 3, donne

$$\frac{1}{d_{2(k+k_0)}(\mathrm{M})} \| \hat{\mathrm{T}}(\mathrm{M}) \| = \frac{1}{d_k(\mathrm{M})} \| \hat{\mathrm{T}}(\mathrm{M}) \| \frac{1}{d_{k_0}(\mathrm{M})} \frac{d_{k_0}(\mathrm{M})\, d_k(\mathrm{M})}{d_{2(k+k_0)}(\mathrm{M})} \leq \frac{\mathrm{C}}{d_{k_0}(\mathrm{M})},$$

d'où la conclusion grâce à (12).

Notons qu'on peut, de manière analogue, transformer au moyen de (12) la caractérisation (10) des fonctions C^∞. On a donc la

Proposition 5. — *Pour qu'une famille* $(a(\mathrm{M}))$, $\mathrm{M} \in \hat{\mathrm{G}}$, *d'opérateurs de* $\mathcal{L}(\mathrm{H}_\mathrm{M})$ *soit formée des coefficients de Fourier d'une fonction indéfiniment différentiable, respectivement d'une distribution, sur* G, *il faut et il suffit que l'on ait* (10′) [*ou* (10)], *respectivement* (11′) [*ou* (11)] :

$$\forall\, k \in \mathbf{N}, \quad \exists\, \mathrm{C} > 0, \quad \forall\, \mathrm{M} \in \hat{\mathrm{G}}, \quad \| a(\mathrm{M}) \| \leq \frac{\mathrm{C}}{d_k(\mathrm{M})}; \tag{10'}$$

$$\exists\, k \in \mathbf{N}, \quad \exists\, \mathrm{C} > 0, \quad \forall\, \mathrm{M} \in \hat{\mathrm{G}}, \quad \| a(\mathrm{M}) \| \leq \mathrm{C}\, d_k(\mathrm{M}). \tag{11'}$$

Pour une distribution T, on a alors au sens des distributions,

$$\mathrm{T} = \sum d(\mathrm{M}) \operatorname{tr} \hat{\mathrm{T}}(\mathrm{M}^\star)\, \mathrm{M}^\star(\quad) = \sum d(\mathrm{M}) \operatorname{tr} \hat{\mathrm{T}}(\mathrm{M})\, \mathrm{M}(\quad)$$

(les deux formules coïncidant trivialement, par passage à $\overline{\mathrm{T}}$).

4. Résolubilité d'un opérateur invariant a gauche. — Pour un tel opérateur P, l'équation $PE = \delta$ équivaut à

$$\forall\, M \in \hat{G}, \quad P(\mathcal{M})\,\hat{E}(M) = \mathrm{Id}_{H_M},$$

P a donc une solution élémentaire si et seulement si $P(\mathcal{M})$ est inversible pour tout M, et les $P(\mathcal{M})^{-1}$ sont les coefficients de Fourier d'une distribution E sur G, ce qui s'écrit

$$\exists\, C > 0, \quad k \in \mathbf{N}, \quad \forall\, M \in \hat{G}, \quad \|P(\mathcal{M})^{-1}\| \leq C\, d_k(M). \tag{13}$$

Mais si P a une solution élémentaire E, la convolution à droite par E est un inverse à droite de $P : C^\infty(G) \to C^\infty(G)$:

$$P(f \star E) = f \star PE = f.$$

D'après la proposition 4, P est donc injectif, et par suite bijectif. Comme $C^\infty(G)$ est un espace de Fréchet, P en est un isomorphisme. Son transposé ${}^tP$ est un isomorphisme de $\mathcal{D}'(G)$, pour la topologie faible par exemple, il possède donc aussi une solution élémentaire.

Théorème I. — *Soit* P *un opérateur différentiel linéaire invariant à gauche sur un groupe de Lie compact connexe* G. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) $P\mathcal{D}'(G) \supset C^\infty(G)$;
(*b*) P *a une solution élémentaire;*
(*c*) ${}^tP$ *a une solution élémentaire;*
(*d*) $PC^\infty(G) = C^\infty(G)$;
(*e*) P *est un automorphisme de* $C^\infty(G)$;
(*f*) P *est un automorphisme de* $\mathcal{D}'(G)$;
(*g*) *Les* $P(\mathcal{M})\,(M \in \hat{G})$ *sont inversibles et vérifient la condition*

$$\exists\, k \in \mathbf{N}, \quad C > 0, \quad \forall\, M \in \hat{G}, \quad \|P(\mathcal{M})^{-1}\| \leq C\, d_k(M). \tag{13}$$

Il reste seulement à montrer que (*a*) entraîne l'une des autres conditions pour l'opérateur ${}^tP$, ou encore pour $P^\star$, par exemple (*g*).

Si $P\mathcal{D}'(G) \supset C^\infty(G)$, pour tout $M \in \hat{G}$, il existe $T \in \mathcal{D}'(G)$ telle que $PT = d(M)\,\mathrm{tr}\,M(\quad)$. Donc $P(\mathcal{M})\,\hat{T}(M) = \mathrm{Id}_{H_M}$, et les $P(\mathcal{M})$ sont tous inversibles; les $P^\star(\mathcal{M}) = (P(\mathcal{M}))^\star$ le sont aussi.

Considérons d'autre part la forme bilinéaire $(f, \varphi) \mapsto \int_G f(g)\,\varphi(g)\,dg$ sur le produit de l'espace de Fréchet $C^\infty(G)$ par $C^\infty(G)$ muni de la topologie d'espace métrisable définie par les semi-normes $\|D_k{}^tP\varphi\|_2$. C'est une forme continue de f pour φ fixée. De plus pour f fixée, il existe sous l'hypothèse (a) une distribution T telle que $PT = f$ et par suite :

$$\int_G f\varphi\, dg = \langle PT, \varphi \rangle = \langle T, {}^tP\varphi \rangle,$$

il s'ensuit que cette forme bilinéaire est aussi séparément continue en φ pour f fixée, et c'est donc une forme bilinéaire continue :

$$\exists\, i, j \in \mathbf{N}, \quad C > 0, \quad \forall f, \varphi \in C^\infty(G), \quad \left| \int f\varphi\, dg \right| \leq C \| D_i f \|_2 . \| D_j {}^tP\varphi \|_2.$$

Prenons $f(g) = d(M)\, \mathrm{tr}\, AM(g)$, $\varphi \doteq \bar{f}$ $[A \in \mathcal{L}(H_M)]$; en utilisant la formule de Plancherel, on en déduit :

$$\exists\, i, j \in \mathbf{N}, \quad C > 0, \quad \forall M \in \hat{G}, \quad \forall A \in \mathcal{L}(H_M), \quad \| A \|^2 \leq C\, d_i(M)\, d_j(M) \| A \| . \| P^*(\mathfrak{M}) A \|.$$

Choisissant $A = P^*(\mathfrak{M})^{-1}$, il vient

$$\| P^*(\mathfrak{M})^{-1} \| \leq C\, d_i(M)\, d_j(M) \sqrt{d(M)}.$$

Or, d'après la formule (12), il existe une constante C′ telle que

$$\sqrt{d(M)} \leq d(M) \leq C'\, d_{k_0}(M),$$

et on conclut en utilisant le lemme 3 :

$$\| P^*(\mathfrak{M})^{-1} \| \leq CC'\, d_{2(i+j+k_0)}(M),$$

ce qui achève la démonstration.

EXEMPLES :

Cas de SU(2). — Soit P un opérateur invariant à gauche d'ordre 1 sur un groupe de Lie. On peut montrer qu'il est localement résoluble [i. e. tout point a un voisinage ouvert ω tel que $P\mathcal{D}'(\omega) \supset C_c^\infty(\omega)$] si et seulement si sa partie principale P_1 vérifie la condition de Hörmander (*cf.* [2], th. 6.1.1), et que ceci implique que $X = [\mathrm{Re}\, P_1, \mathrm{Im}\, P_1]$ est un vecteur isotrope de la forme de Killing B du groupe : $B(X, X) = 0$.

Sur le groupe unitaire unimodulaire SU (2), un tel opérateur est donc localement résoluble si et seulement si sa partie principale est à coefficients essentiellement réels.

S'il en est ainsi, l'opérateur P est proportionnel à $\sum a_j X_j + a$ où les X_j ($j = 1, 2, 3$) sont une base de l'algèbre de Lie, orthonormale pour la forme $-2B$, et les a_j sont réels; alors une explicitation complète de la condition (13) permet de montrer que P a une solution élémentaire si et seulement s'il est injectif (de C^∞ dans C^∞ par exemple), c'est-à-dire si a n'appartient pas à $i\left(\sum a_j^2\right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{Z}$.

Cas du tore. — En contraste avec l'exemple précédent, sur le tore $\mathbf{T}^n = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$, un opérateur invariant à gauche est un polynôme $P\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$ ($\theta_1, \ldots, \theta_n$ sont les coordonnées canoniques); $\mathbf{T}^n$ étant abélien, ses représentations irréductibles sont ses caractères, et la condition (13) s'écrit donc

$$(13') \qquad \exists\, C > 0, \quad \exists\, a > 0, \quad \forall\, k \in \mathbf{Z}^n \quad \frac{1}{|P(2\pi k)|} \leq C(1 + |k|)^a,$$

où

$$k = (k_1, \ldots, k_n) \qquad \text{et} \qquad |k| = |k_1| + \ldots + |k_n|,$$

— Si $n = 1$, elle équivaut à l'injectivité de P, i. e. : $P(\xi)$ ne s'annule pas sur $2\pi\mathbf{Z}$.

— Si $n > 1$, la condition (13′) fait intervenir des propriétés arithmétiques des coefficients de $P\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$. Par exemple sur le tore $\mathbf{T}^2$, l'opérateur $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta_1} - \frac{\alpha}{i}\frac{\partial}{\partial\theta_2} + \pi$ ($\alpha \in \mathbf{R}$) est injectif si α est irrationnel; la condition (13′) porte alors sur les approximations rationnelles de α; elle est vérifiée lorsque α est algébrique (non rationnel). Mais elle ne l'est pas pour

$$\alpha = \sum_{j \in \mathbf{N}} \frac{(-1)^j}{\varphi(j)}, \qquad \text{avec} \quad \varphi(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad \varphi(j+1) = 2^{\varphi(j)}.$$

Il suffit en effet de montrer que

$$\forall\, C > 0, \quad \forall\, a, \quad \exists\, k \in \mathbf{Z}^2, \quad \frac{1}{\left|k_1 - \alpha k_2 + \frac{1}{2}\right|} > C\left(\frac{1}{2} + |k_1| + |k_2|\right)^a$$

ou que

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \forall\, n, \quad \exists\, p_n, q_n \in \mathbf{N} - \{0\} : \quad |(2p_n + 1) - \alpha(2q_n)| \leq \frac{\varepsilon}{((2p_n+1) + (2q_n))^n}.$$

Posons

$$r_N = \varphi(N)\left(\sum_{j=0}^{N} \frac{(-1)^j}{\varphi(j)}\right);$$

r_N est impair et l'on a

$$|r_N - \alpha\varphi(N)| = \varphi(N)\left|\sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2^{\varphi(j-1)}}\right| \leq \frac{\varphi(N)}{2^{\varphi(N)}}.$$

Or $\forall\, \varepsilon > 0$, $\forall\, n$, $\exists\, N_0$, $\forall\, N \geq N_0$,

$$\frac{\varphi(N)}{2^{\varphi(N)}} \leq \frac{\varepsilon}{\left[\sum_{j=0}^{N} \frac{(-1)^j}{\varphi(j)} + 1\right]^n (\varphi(N))^n}$$

car le crochet est borné. Il suffit donc de choisir

$$N \geq N_0, \qquad 2q_n = \varphi(N) \qquad \text{et} \qquad 2p_n + 1 = r_N.$$

5. Hypoellipticité globale. — Nous appelons *hypoellipticité globale* de l'opérateur P la propriété suivante :

$$\forall f \in \mathcal{D}'(G), \quad Pf \in C^\infty(G) \quad \Rightarrow \quad f \in C^\infty(G).$$

Théorème II. — *Soit* P *un opérateur différentiel linéaire invariant à gauche sur un groupe de Lie compact connexe* G. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) *L'opérateur* P *est globalement hypoelliptique;*

(*b*) *Il existe un entier* k *et une constante* $C > 0$ *tels que, pour tout* M *dans* $\hat{G}$ *sauf un nombre fini,* $P(\mathcal{M})$ *est inversible et*

$$\| P(\mathcal{M})^{-1} \| \leq C d_k(M). \tag{13}$$

Remarquons qu'un opérateur P a donc une solution élémentaire si et seulement s'il est injectif et globalement hypoelliptique.

$(b) \Rightarrow (a)$ aisément : si $Pf \in C^\infty(G)$, on a, pour tout M sauf un nombre fini :

$$d_l(M) \| \hat{f}(M) \| \leq \frac{\| P(\mathcal{M})^{-1} \|}{d_k(M)} d_k(M) d_l(M) \| P(\mathcal{M}) \hat{f}(M) \|$$
$$\leq C d_k(M) d_l(M) \| \widehat{Pf}(M) \| \leq C'$$

puisque $Pf \in C^\infty(G)$. Par suite f est C^∞ d'après la proposition 5.

non $(b) \Rightarrow$ *non* (a) : Si $P(\mathcal{M})$ n'est pas inversible pour une infinité $M_1, \ldots, M_p, \ldots$ de représentations de G, P ne peut être globalement hypoelliptique : posons en effet

$$\hat{f}(M_p) = A_p, \qquad \text{avec } P(\mathcal{M}_p) A_p = 0, \qquad \| A_p \| = 1.$$
$$\hat{f}(M) = 0 \qquad \text{pour} \quad M \neq M_1, \ldots, M_p, \ldots.$$

Alors $f \in \mathcal{D}'(G)$ car ses coefficients de Fourier sont bornés :

$$\frac{1}{d_{k_0}(M)} \| \hat{f}(M) \| \leq \frac{1}{d_{k_0}(M)} \leq \text{Cte} \qquad [\text{pour l'entier } k_0 \text{ de } (12)],$$

et $Pf = 0 \in C^\infty(G)$. Mais $f \notin \mathbf{L}^2(G)$, car

$$\sum d(M) \| \hat{f}(M) \|_2^2 = \sum_p d(M_p) = \infty.$$

Supposons donc que $P(\mathcal{M})$ soit inversible sauf pour un nombre fini de représentations $M_{i_1}, \ldots, M_{i_r}$, mais ne vérifie pas la condition (*b*); il existe alors une suite infinie de représentations distinctes $M_1, \ldots, M_n, \ldots$, différentes des M_j, telles que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \| P(\mathcal{M}_n)^{-1} \| \geq d_n(M_n).$$

Les formules

$$\hat{f}(M_n) = \lambda_n P(\mathcal{M}_n)^{-1}, \qquad \text{avec} \quad \lambda_n \| P(\mathcal{M}_n)^{-1} \| = 1$$

et

$$\hat{f}(M) = 0 \qquad \text{si} \quad M \neq M_1, \ldots, M_n, \ldots$$

définissent une distribution f qui n'est pas une fonction C^∞. En effet $\|\hat{f}(M_n)\| = 1$, donc $f \in \mathcal{D}'(G)$, mais

$$\sum d(M) \|\hat{f}(M)\|^2 = \sum_n d(M_n) = \infty, \qquad \text{donc} \quad f \notin \mathbf{L}^2(G).$$

Enfin nous démontrons l'inégalité (10') qui entraîne que Pf est C^∞, d'où résultera non (a) :

$$\begin{aligned} d_k(M_n) \|\widehat{Pf}(M_n)\| &= \lambda_n d_k(M_n)\, d(M_n) \\ &\leqq \frac{d(M_n)\, d_k(M_n)}{d_n(M_n)} \qquad \text{(d'après l'hypothèse sur P)} \\ &\leqq C \frac{d(M_n)}{d_{k_0}(M_n)} \quad \text{par le lemme 3, dès que } n \geqq 2(k + k_0). \end{aligned}$$

Cette dernière expression est bornée d'après la formule (12),

C. Q. F. D.

Remarquons que notre dernier exemple du paragraphe 4 est celui d'un opérateur injectif mais non globalement hypoelliptique. Dans le cas du tore, l'hypoellipticité globale d'un opérateur $P = P\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$ est beaucoup plus faible que l'hypoellipticité classique du polynôme P, qui équivaut au fait que $d(\xi, N)$ tend vers l'infini avec $|\xi|$ ($\xi \in \mathbf{R}^n$, $N = \{\zeta \in \mathbf{C}^n \mid P(\zeta) = 0\}$). Cette dernière entraîne en effet que $N \cap \mathbf{R}^n$ est compact, donc que $N \cap 2\pi\mathbf{Z}^n$ est fini, et de plus :

$$\forall p \neq 0, \quad \frac{P^{(p)}(\xi)}{1 + |P(\xi)|} \to 0 \quad \text{quand } |\xi| \to \infty, \qquad \text{et par suite} \quad \frac{1}{|P(\xi)|} \to 0$$

(*cf.* [4], § 7.2).

L'opérateur $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta_1} + \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta_2} + \pi$ sur $\mathbf{T}^2$, par exemple, est globalement hypoelliptique (et même injectif), et n'est pourtant pas un polynôme hypoelliptique.

Notons enfin qu'un opérateur elliptique P est localement hypoelliptique : pour tout ouvert $\Omega \subset G$ et toute distribution f sur Ω :

$$Pf \in C^\infty(\Omega) \Rightarrow f \in C^\infty(\Omega).$$

En particulier, il est globalement hypoelliptique et l'on a le

Corollaire 6. — *Pour qu'un opérateur invariant à gauche elliptique ait une solution élémentaire, il faut et il suffit qu'il soit injectif.*

Cela résulte de la remarque suivant l'énoncé du théorème II.

Corollaire 7. — *Soit C l'opérateur de Casimir d'un groupe de Lie compact semi-simple. Si $\lambda \in \mathbf{C}$, l'opérateur $C - \lambda$ a une solution élémentaire si et seulement s'il est injectif. En particulier C n'en a pas.*

En effet il existe une base $X_1, \ldots, X_n$ de l'algèbre de Lie du groupe dans laquelle la forme de Killing est l'opposée de la forme canonique. L'opérateur de Casimir s'écrit alors $C = -\sum_{i=1}^{n} X_i^2$. Par suite il est elliptique.

6. Opérateurs du centre de l'algèbre enveloppante. — Ce sont les opérateurs P invariants à gauche et à droite sur G. Par suite leurs coefficients $P(\mathfrak{M})$ commutent à tous les $M(g)$, et sont donc des homothéties des H_M, puisque les représentations M sont irréductibles. Posons $P(\mathfrak{M}) = p(M)\,\mathrm{Id}_{H_M}$.

Les valeurs propres de P sont les scalaires $p(M)$ $(M \in \hat{G})$. Si o n'est pas dans le spectre (adhérence de l'ensemble des valeurs propres) de P, $p(M)|$ est minoré par un nombre $\varepsilon > 0$ indépendant de M. Pour toute représentation M de $\hat{G}$, on a donc

$$\| P(\mathfrak{M})^{-1} \| = \sqrt{(dM)}\, \frac{1}{|p(M)|} \leq \frac{d(M)}{\varepsilon} \leq \mathrm{Cte}\, d_{k_0}(M)$$

pour l'entier k_0 de la relation (12). C'est dire que P vérifie (13) et on a démontré :

Proposition 8. — *Si le spectre d'un opérateur* P *du centre de l'algèbre enveloppante ne contient pas l'origine*, P *possède une solution élémentaire.*

On retrouverait comme cas d'application l'opérateur $C - \lambda$ d'un groupe semi-simple, puisque les valeurs propres d'un opérateur elliptique forment un ensemble discret. On obtient ainsi un énoncé analogue pour tous les opérateurs bi-invariants sur les groupes compacts semi-simples de rang 1 : un tel opérateur a une solution élémentaire si et seulement s'il est injectif. (Ces opérateurs sont en effet des polynômes de l'opérateur de Casimir.)

7. Extension au produit direct $G \times \mathbf{R}^p$ (G compact). — La méthode utilisée sur les groupes compacts se généralise et permet d'obtenir une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une solution élémentaire, en utilisant la transformation de Fourier partielle sur le groupe compact et les résultats connus sur $\mathbf{R}^p$.

Soit $\Gamma = G \times \mathbf{R}^p$, produit direct d'un groupe de Lie réel compact G (supposé connexe) par $\mathbf{R}^p$, $p \geq 0$. L'algèbre de Lie de Γ est la somme directe des algèbres de Lie de G et $\mathbf{R}^p$, et l'algèbre enveloppante est le produit tensoriel des algèbres enveloppantes. Un opérateur différentiel linéaire invariant à gauche sur Γ s'écrit donc

$$P = \sum_{|\alpha| \leq m} P_\alpha D^\alpha,$$

où $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)\in \mathbf{N}^p$, $|\alpha|=|\alpha_1|+\ldots+|\alpha_p|$, les P_α sont invariants à gauche sur G, et

$$D^\alpha=\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\ldots\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_p}\right)^{\alpha_p}.$$

Pour $M\in\hat{G}$, notons

$$P(\mathcal{M}, D)=\sum_{|\alpha|\leq m} P_\alpha(\mathcal{M})\, D^\alpha.$$

Nous aurons besoin de caractériser les distributions sur Γ. Si $T\in\mathcal{D}'(G\times\mathbf{R}^p)$, les transformées de Fourier partielles

$$\hat{T}(M, x)=\langle T(g, x), M^*(g)\rangle \qquad (M\in\hat{G},\ x\in\mathbf{R}^p)$$

sont des distributions sur $\mathbf{R}^p$, et

$$T(g, x)=\sum_{M\in\hat{G}} d(M)\,\mathrm{tr}[\hat{T}(M, x)\, M(g)],$$

la somme convergeant dans $\mathcal{D}'(G\times\mathbf{R}^p)$.

Inversement une famille de distributions $a(M, x)\in\mathcal{D}'(\mathbf{R}^p; \mathcal{L}(H_M))$ sont les coefficients de Fourier d'une distribution sur Γ si et seulement si

$$(14) \qquad \sum_{M\in\hat{G}} d(M)\,\mathrm{tr}[a(M, x)\, M(g)]$$

définit une distribution sur Γ, soit

$$(15) \qquad \left\{\begin{array}{l} \forall\,\Omega\Subset\mathbf{R}^p, \quad \exists\, C>0, \quad \exists\, a, b\in\mathbf{N}, \quad \forall\varphi\in C_c^\infty(\Omega), \quad \forall\,\psi\in C^\infty(G), \\ \left|\sum_{M\in\hat{G}} d(M)\,\mathrm{tr}[\langle a(M, x), \varphi(x)\rangle\langle M(g), \psi(g)\rangle]\right|\leq C\,\|\varphi\|_a\|\psi\|_b \end{array}\right.$$

(où l'on pose $\|\varphi\|_a=\sum_{|\alpha|\leq a}\sup|D^\alpha\varphi|$, $\|\psi\|_b=\|D_b\psi\|_2$, par exemple).

L'inégalité (15) entraîne, pour Ω et $\varphi\in C_c^\infty(\Omega)$ fixés ($\varphi\neq 0$), qu'il existe $C>0$ ne dépendant que de Ω, a, b tels que, pour $\psi\in C^\infty(G)$:

$$(16) \qquad \left|\sum_{M\in\hat{G}} d(M)\,\mathrm{tr}\left[\frac{\langle a(M, \ ), \varphi\rangle}{\|\varphi\|_a}\langle M, \psi\rangle\right]\right|\leq C\,\|\psi\|_b,$$

ce qui signifie que les $\dfrac{\langle a(M, \ ), \varphi\rangle}{\|\varphi\|_a}$ sont les coefficients de Fourier d'une distribution sur G. Par suite il existe d'après la proposition 5 un entier k tel que les $\dfrac{1}{d_k(M)}\dfrac{\langle a(M, \ ), \varphi\rangle}{\|\varphi\|_a}$ soient les coefficients de Fourier d'une fonction de $L^2(G)$. Comme D_k est son propre transposé, on a

$$\langle M(g), \psi(g)\rangle=\frac{1}{d_k(M)}\langle D_k M(g), \psi(g)\rangle=\frac{1}{d_k(M)}\langle M(g), D_k\psi(g)\rangle$$
$$=\frac{1}{d_k(M)}(\langle M^*, D_k\bar{\psi}\rangle)^*,$$

et l'inégalité (16) implique, en choisissant $k \geq b$ (ce qui est possible d'après le lemme 3) :

$$\left| \sum_{M \in \hat{G}} d(M) \operatorname{tr} \left[\left(\frac{1}{d_k(M)} \frac{\langle a(M,\ ), \varphi \rangle}{\| \varphi \|_a} \right) (\langle M^*, D_k \bar{\psi} \rangle)^* \right] \right| \leq C \| D_k \psi \|_2.$$

Les deux parenthèses sont les transformées de Fourier de deux fonctions de $L^2(G)$, dont la seconde est $D_k \bar{\psi}$. Les $D_k \bar{\psi}$, pour $\psi \in C^\infty(G)$, étant denses dans $C^\infty(G)$, donc dans $L^2(G)$, la norme dans L^2 de la première fonction est donc inférieure à C; soit

$$\text{(17)} \quad \begin{cases} \forall \Omega \Subset \mathbf{R}^p, \quad \exists C > 0, \quad a, k \in \mathbf{N}, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \\ \displaystyle\sum_{M \in \hat{G}} \frac{d(M)}{d_k(M)^2} \| \langle a(M,\ ), \varphi \rangle \|^2 \leq C^2 \| \varphi \|_a^2, \end{cases}$$

ce qui équivaut encore, d'après la caractérisation des distributions (§ 3) à :

$$\text{(17')} \quad \begin{cases} \forall \Omega \Subset \mathbf{R}^p, \quad \exists C > 0, \quad \exists a, k \in \mathbf{N}, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \forall M \in \hat{G}, \\ \| \langle a(M,\ ), \varphi \rangle \| \leq C d_k(M) \| \varphi \|_a. \end{cases}$$

Il est clair que réciproquement (17) implique (15), et (17') est donc une condition nécessaire et suffisante pour que les $a(M, x)$ soient les coefficients de Fourier partiels d'une distribution sur Γ, qui est donnée par (14).

Par transformation de Fourier partielle sur G, l'équation $PE = \delta$ équivaut à

$$\text{(18)} \qquad \forall M \in \hat{G}, \quad P(\mathcal{M}, D)\, \hat{E}(M, x) = \delta(x)\, \mathrm{Id}_{H_M} \qquad (x \in \mathbf{R}^p).$$

Pour que P ait une solution élémentaire, il est donc nécessaire et suffisant qu'il existe, pour tout $M \in \hat{G}$, une distribution $a(M, x) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^p; \mathcal{L}(H_M))$ telle que

$$\text{(18')} \qquad P(\mathcal{M}, D)\, a(M, x) = \delta(x)\, \mathrm{Id}_{H_M} \quad \text{et} \quad (17').$$

Pour $M \in \hat{G}$ fixé, (18') est un système de $d(M)^2$ équations aux dérivées partielles sur $\mathbf{R}^p$ à coefficients constants. Il admet une solution élémentaire $a(M,\ ) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^p; \mathcal{L}(H_M))$ si et seulement si l'opérateur différentiel sur $\mathbf{R}^p$ $\det P(\mathcal{M}, D)$, à coefficients constants, n'est pas nul (*cf.* [2], § 3.8). En effet si

$$\det P(\mathcal{M}, \xi) \equiv 0 \qquad (\xi \in \mathbf{R}^p),$$

il existe un polynôme $A(\xi)$ à coefficients matriciels tel que

$$A(\xi) \not\equiv 0 \qquad \text{et} \qquad A(\xi)\, P(\mathcal{M}, \xi) \equiv 0;$$

si (18') avait une solution a, on aurait alors

$$0 = A(D)\, P(\mathcal{M}, D)\, a(M, x) = A(D)\, \delta(x),$$

ce qui est absurde. Si enfin $\det P(\mathcal{M}, \xi) \not\equiv 0$, soit F une solution élémentaire de $\det P(\mathcal{M}, D)$. Introduisons ${}^{co}P(\mathcal{M}, \ )$, matrice transposée de la matrice des cofacteurs de $P(\mathcal{M}, \ )$; on a

$${}^{co}P . P = P . {}^{co}P = \det P . \mathrm{Id}$$

donc $a(M, x) = {}^{co}P(\mathcal{M}, D)\, F(x)$ vérifie (18′).

Supposons donc $\det P(\mathcal{M}, \ ) \not\equiv 0$ pour tout $M \in \hat{G}$. Soient $\Omega \Subset \mathbf{R}^p$, $f \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\varphi = \det P(\mathcal{M}, D) f.$$

Avec $\check{h}(x) = h(-x)$, on a, d'après (18′) :

$$\begin{aligned}\langle a(M, \ ), \check{\varphi} \rangle &= \langle a(M, \ ), (P(\mathcal{M}, D)\, \delta)^\vee \star ({}^{co}P(\mathcal{M}, D) f)^\vee \rangle \\ &= \langle a(M, \ ) \star P(\mathcal{M}, D)\, \delta, ({}^{co}P(\mathcal{M}, D) f)^\vee \rangle \\ &= \langle \delta\, \mathrm{Id}_{H_M}, ({}^{co}P(\mathcal{M}, D) f)^\vee \rangle \\ &= ({}^{co}P(\mathcal{M}, D) f)(0).\end{aligned}$$

Donc (18′) et (17′) entraînent

$$\forall\, \Omega \Subset \mathbf{R}^p, \quad \exists\, C, a, k, \quad \forall f \in C_c^\infty(\Omega), \quad \forall\, M \in \hat{G},$$
$$\| ({}^{co}P(\mathcal{M}, D) f)(0) \| \leq C d_k(M) \| \det P(\mathcal{M}, D) f \|_a.$$

Nous transformons cette inégalité en une inégalité « algébrique » de la manière habituelle; posons $f(x) = g(x)\, e^{i\langle \xi, x \rangle}$, où $\xi \in \mathbf{R}_p$, $g \in C_c^\infty(\Omega)$. Pour tout polynôme $Q(\xi)$, tout $\alpha \in \mathbf{N}^p$, on note

$$Q(\xi)^{(\alpha)} = \frac{\partial^\alpha Q}{(i\, \partial \xi)^\alpha}(\xi),$$

et la formule de Leibniz permet d'écrire

$$\left\| \sum_\alpha \frac{1}{\alpha !}\, {}^{co}P(\mathcal{M}, \xi)^{(\alpha)} D^\alpha g(0) \right\|^2 \leq C^2 d_k(M)^2 \left(\sum_\beta |\det P(\mathcal{M}, \xi)^{(\beta)}|^2 \right) \left(\sum_{|\gamma| \leq a} |\xi^\gamma|^2 \right).$$

Pour chaque $\alpha_0 \in \mathbf{N}^p$ fixé, choisissons g tel que $D^{\alpha_0} g(0) = 1$ et $D^\alpha g(0) = 0$ pour $\alpha \neq \alpha_0$. En ajoutant les inégalités obtenues, il vient

$$\exists\, C, a, k, \quad \forall\, M, \quad \forall\, \xi \in \mathbf{R}_p,$$
$$\sum_\alpha \| {}^{co}P(\mathcal{M}, \xi)^{(\alpha)} \|^2 \leq C^2 d_k(M)^2 \left(\sum_\beta |\det P(\mathcal{M}, \xi)^{(\beta)}|^2 \right) \left(\sum_{|\gamma| \leq a} |\xi^\gamma|^2 \right).$$

Soit $A(\xi) \in \mathcal{L}(H_M)$, dont les coefficients dans une base orthonormale de H_M sont des polynômes $a_{ij}(\xi)$. On note $\tilde{A}(\xi)$ la matrice de coefficients $\tilde{a}_{ij}(\xi)$ dans cette base, où

$$\tilde{a}_{ij}(\xi) = \left(\sum_\alpha | a_{ij}(\xi)^{(\alpha)} |^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Cette définition ne dépend pas de la base orthonormale choisie, et on a

$$\|\tilde{A}(\xi)\|^2 = \sum_\alpha \|A(\xi)^{(\alpha)}\|^2.$$

La dernière inégalité s'écrit avec ces notations :

$$\text{(19)}\quad \left\{\begin{array}{l} \exists\, C > 0, \quad \exists\, a,\ k \in \mathbf{N}, \quad \forall\, M \in \hat{G}, \quad \forall\, \xi \in \mathbf{R}_p, \\ \|{}^{co}P(\mathcal{M}, \xi)\|^2 \leq C^2 d_k(M)^2 (\text{dét}\, P(\mathcal{M}, \xi)^2)^{\sim} (1 + |\xi|)^{2a}. \end{array}\right.$$

Comme on a, par la formule de Taylor entre o et ξ,

$$\begin{aligned} \|({}^{co}P(\mathcal{M}, \xi))^{\sim}\|^2 &= \sum_{i,j} |(({}^{co}P)_{ij}(\mathcal{M}, \xi))^{\sim}|^2 \\ &\leq \text{Cte} \sum_{i,j} |(({}^{co}P)_{ij}(\mathcal{M}, 0))^{\sim}|^2 (1 + |\xi|)^{2m(p-1)} \end{aligned}$$

et

$$(\text{dét}\, P(\mathcal{M}, 0))^{\sim} \leq \text{Cte}\, (\text{dét}\, P(\mathcal{M}, \xi))^{\sim} (1 + |\xi|)^{mp},$$

les constantes ne dépendant pas de M, l'inégalité (19) s'écrit encore

$$\text{(20)}\quad \exists\, C > 0, \quad \exists\, a,\ k \in \mathbf{N}, \quad \forall\, M \in \hat{G}, \quad \|({}^{co}P(\mathcal{M}, 0))^{\sim}\| \leq C d_k(M)\, (\text{dét}\, P(\mathcal{M}, 0))^{\sim}.$$

Réciproquement, supposons que $\text{dét}\, P(\mathcal{M},\ ) \not\equiv 0$ pour tout $M \in \tilde{G}$, et qu'on ait (20). Pour démontrer l'existence d'une solution à (17′) et (18′), nous utilisons la solution élémentaire F de $\text{dét}\, P(\mathcal{M}, D)$ (pour M fixée) donnée par la construction explicite de [2], § 3.1.

Nous avons vu que $a(M, x) = {}^{co}P(\mathcal{M}, D)\, F(x)$ vérifie (18′). On a, pour $f \in C_c^\infty(\mathbf{R}^p)$,

$$\langle a, \check{f} \rangle = \langle F, ({}^{co}P(\mathcal{M}, D) f)^{\vee} \rangle$$

d'où, en suivant les notations de [2],

$$|\langle a_{ij}, \check{f} \rangle| \leq C \sum_{\eta \in \Lambda'} \int_{|z|=1} |dz| \int_{\mathbf{R}_p} \frac{|({}^{co}P(\mathcal{M}, D)_{ij} f)^{\wedge}(\xi + z\eta)|}{(\text{dét}\, P(\mathcal{M}, \xi))^{\sim}}\, d\xi,$$

où C ne dépend que de p et d'un majorant de l'ordre de l'opérateur différentiel. Or

$$\begin{aligned} |({}^{co}P(\mathcal{M}, D)_{ij} f)^{\wedge}(\xi + z\eta)| &= |{}^{co}P(\mathcal{M}, \xi + z\eta)_{ij}| \cdot |\hat{f}(\xi + z\eta)| \\ &\leq \text{Cte}\, ({}^{co}P(\mathcal{M}, \xi)_{ij})^{\sim}\, |\hat{f}(\xi + z\eta)| \end{aligned}$$

puisque $z\eta$ reste borné. A nouveau la constante ne dépend que d'un majorant de l'ordre du polynôme en ξ. On a donc

$$\forall\, a, \quad \forall\, \Omega, \quad \exists\, C, \forall\, f \in C_c^\infty(\Omega), |\langle a_{ij}, \check{f} \rangle| \leq C \|f\|_a \int_{\mathbf{R}^p} \frac{({}^{co}P(\mathcal{M}, \xi)_{ij})^{\sim}}{(\text{dét}\, P(\mathcal{M}, \xi))^{\sim}} \frac{d\xi}{(1 + |\xi|)^a}.$$

Or si Q et R sont deux polynômes de degrés q et r,

$$\frac{\tilde{Q}(\xi)}{\tilde{R}(\xi)} \leq \text{Cte}\, \frac{\tilde{Q}(0)}{\tilde{R}(0)} (1 + |\xi|)^{q+r}$$

où la constante ne dépend que d'un majorant de q et r. Par suite, en choisissant a assez grand, on obtient

$$(21)\qquad \exists\, a,\quad \forall\, \Omega,\ \exists\, \mathrm{C},\quad \forall f \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega),\ |\langle a_{ij}, \check{f}\rangle|^2 \leq \mathrm{Cte}\,\|f\|_a^2 \left[\frac{({}^{co}\mathrm{P}(\mathfrak{M}, 0)_{ij})^\sim}{(\det \mathrm{P}(\mathfrak{M}, 0))^\sim}\right]^2.$$

L'inégalité (21) est valable pour tout M dans $\hat{\mathrm{G}}$, et la constante qui y figure ne dépend que de a, Ω, et d'un majorant de l'ordre de dét $\mathrm{P}(\mathfrak{M}, \mathrm{D})$.

Utilisant alors l'hypothèse (20) et sommant en i et j de 1 à $d(\mathrm{M})$, il vient

$$\exists\, k,\ a,\quad \forall\, \Omega,\quad \exists\, \mathrm{C},\quad \forall f \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega),\quad \forall\, \mathrm{M},\ \|\langle a(\mathrm{M},\ \ ), \check{f}\rangle\|^2 \leq \mathrm{Cte}\, d_k(\mathrm{M})^2 \|f\|_a^2.$$

Donc les $a(\mathrm{M}, x)$ vérifient (17'), et l'on a montré le

THÉORÈME III. — *L'opérateur* $\mathrm{P} = \sum \mathrm{P}_\alpha \mathrm{D}^\alpha$ *sur* $\mathrm{G} \times \mathbf{R}^p$ *a une solution élémentaire si et seulement s'il existe une constante* $\mathrm{C} > 0$ *et un entier* k *tels que, pour tout* $\mathrm{M} \in \hat{\mathrm{G}}$, $\det \mathrm{P}(\mathfrak{M},\ \ ) \not\equiv 0$ *et*

$$(20)\qquad \left\| \frac{({}^{co}\mathrm{P}(\mathfrak{M}, 0))^\sim}{(\det \mathrm{P}(\mathfrak{M}, 0))^\sim} \right\| \leq \mathrm{C}\, d_k(\mathrm{M}).$$

En particulier tout groupe de Lie (réel) commutatif connexe étant un produit $\mathbf{T}^n \times \mathbf{R}^p$, un opérateur invariant à gauche est un polynôme $\mathrm{P}\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)$, et une condition nécessaire et suffisante pour qu'il ait une solution élémentaire s'écrit

$$(20')\qquad \exists\, \mathrm{C} > 0,\quad a > 0,\quad \forall\, k \in \mathbf{Z}^n,\quad \tilde{\mathrm{P}}(2\pi k, 0) \geq \frac{\mathrm{C}}{(1 + |k|)^a},$$

avec

$$\tilde{\mathrm{P}}(2\pi k, 0)^2 = \sum_\alpha \left| \frac{\partial^\alpha \mathrm{P}}{\partial \xi^\alpha}(2\pi k, 0) \right|^2.$$

8. ESPACES HOMOGÈNES RÉDUCTIFS. — Nous voulons résoudre l'équation $\mathrm{PE} = \delta$, où P est un opérateur différentiel sur une variété analytique compacte V, invariant par un groupe G de transformations, et δ la mesure de Dirac en un point φ de V. On suppose que G est un groupe de Lie compact, connexe, et qu'il agit transitivement : si K est le sous-groupe d'isotropie de φ, K est fermé et V est isomorphe à l'espace homogène G/K des classes à gauche gK. Enfin cet espace homogène est *réductif* : si $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{K}$ sont les algèbres de Lie de G et K, $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{G}$, il existe un sous-espace $\mathfrak{P}$ de $\mathfrak{G}$, tel que $\mathfrak{G} = \mathfrak{K} \oplus \mathfrak{P}$ et $\mathrm{Ad}_{\mathrm{G}}(\mathrm{K})\,\mathfrak{P} \subset \mathfrak{P}$.

Le point φ de V reste fixé dans la suite, et nous notons π l'application composée $\mathrm{G} \to \mathrm{G/K} \xrightarrow{\approx} \mathrm{V}$; $\pi(1) = \varphi$. Si $\mathcal{E}$ est un espace de distributions sur G, on note $\mathcal{E}_0$ (resp. ${}_0\mathcal{E}$) le sous-espace des éléments de $\mathcal{E}$ invariants à droite (resp. à gauche) par K, ${}_0\mathcal{E}_0$ le sous-espace des éléments bi-invariants. De même $\mathrm{D}_0(\mathrm{G})$ désigne l'algèbre des opérateurs différentiels linéaires invariants à gauche par G et à droite par K.

Soit D(V) l'algèbre des opérateurs différentiels linéaires sur V invariants par l'action de G, i. e.

$$(P\varphi)\circ g = P(\varphi\circ g), \qquad g\in G, \quad \varphi\in C^\infty(V).$$

Comme V est un espace réductif, D(V) est isomorphe à l'algèbre des restrictions à $C_0^\infty(G)$ des opérateurs de $D_0(G)$ ([3], chap. X, lemma 2.2). En particulier :

$$(22) \qquad \forall P\in D(V), \quad \exists Q\in D_0(G), \quad \forall \varphi\in C^\infty(V), \quad (P\varphi)\circ\pi = Q(\varphi\circ\pi).$$

Soit $\delta_K\in {}_0\mathcal{D}'_0(G)$ la distribution : $f\mapsto\int_K f(k)\,dk$, où dk est la mesure de Haar de K de masse 1. La convolution à droite (resp. à gauche) par δ_K est un projecteur de $\mathcal{D}'(G)$ sur $\mathcal{D}'_0(G)$ [resp. ${}_0\mathcal{D}'(G)$]. On peut relever de manière évidente une distribution T sur V en une distribution $T_0\in\mathcal{D}'_0(G)$: si $T\in\mathcal{D}'(V)$, $T_0\in\mathcal{D}'_0(G)$ est définie par

$$\forall f\in C^\infty(G), \quad T_0(f) = T(f_\pi), \qquad \text{où} \quad f_\pi\circ\pi = f\star\delta_K.$$

La mesure de Dirac au point $v=\pi(1)$ se relève en $\delta_0=\delta_K$.

L'existence d'une solution de $PE=\delta$ équivaut à l'existence d'une distribution $E_0\in\mathcal{D}'_0(G)$ telle que

$$(23) \qquad QE_0=\delta_K,$$

où Q satisfait (22).

Mais si E_0 est solution de (23), la distribution $\delta_K\star E_0\in{}_0\mathcal{D}'_0(G)$ l'est aussi : $Q(\delta_K\star E_0)=\delta_K\star QE_0=\delta_K\star\delta_K=\delta_K$. Par suite l'existence d'une solution de (23) équivaut à l'existence d'une solution bi-invariante ${}_0E_0$. L'équation (23) équivaut, par transformation de Fourier sur G, au système

$$(24) \qquad \forall M\in\hat{G}, \quad Q(\mathcal{M})_0\hat{E}_0(M)=\hat{\delta}_K(M).$$

Comme la convolution par δ_K est un projecteur, $\hat{\delta}_K(M)$ est, pour tout M, un projecteur de H_M sur $\operatorname{Im}\hat{\delta}_K(M)=I_M$, de noyau $\operatorname{Ker}\hat{\delta}_K(M)=K_M$; H_M est la somme directe orthogonale $I_M\oplus K_M$, puisque $\hat{\delta}_K(M)$ est auto-adjoint. La bi-invariance par K d'une distribution $T\in{}_0\mathcal{D}'_0(G)$ entraîne que $\hat{T}(M)$ commute à $\hat{\delta}_K(M)$:

$$\hat{\delta}_K(M)\,\hat{T}(M)=\hat{T}(M)=\hat{T}(M)\,\hat{\delta}_K(M).$$

De même le fait que Q soit bi-invariant par K entraîne la commutation des $Q(\mathcal{M})$ aux $\hat{\delta}_K(M)$. Par suite, pour tout M, $Q(\mathcal{M})$ et ${}_0\hat{E}_0(M)$ conservent les sous-espaces I_M et K_M de H_M.

Comme ${}_0\hat{E}_0(M)={}_0\hat{E}_0(M)\,\hat{\delta}_K(M)$, l'équation (24) restreinte aux vecteurs de K_M est triviale. (24) équivaut donc à l'équation portant sur les restrictions à I_M :

$$\forall M\in\hat{G} \quad Q(\mathcal{M})\big|_{I_M}{}_0\hat{E}_0(M)\big|_{I_M}=\mathrm{Id}_{I_M}.$$

Finalement l'équation (23) admet une solution si et seulement si, pour tout M, $Q(\mathcal{M})|_{I_M}$ est inversible et si les $(Q(\mathcal{M})|_{I_M})^{-1} \oplus O_{K_M}$ sont les coefficients de Fourier d'une distribution (bi-invariante) sur G, ce qui s'écrit

$$\exists\, k \in \mathbf{N}, \quad C > 0, \ \forall\, M \in \hat{G}, \quad \| [Q(\mathcal{M})\, |_{I_M}]^{-1} \| \leqq C\, d_k(M)$$

(comme d'habitude $\| A \|^2 = \operatorname{tr} AA^*$); soit, en revenant à V,

$$\| [(P\tilde{M})(v)\, |_{I_M}]^{-1} \| \leqq C\, d_k(M), \tag{25}$$

où $\tilde{M}$ est définie sur V par

$$\tilde{M}(\pi(g)) = \int_K M(gk)\, dk \qquad (g \in G).$$

La condition (25) ainsi obtenue est nécessaire et suffisante pour que P ait une solution élémentaire.

Lorsqu'il en est ainsi, la convolution sur V (définie par passage au quotient) à droite par E est un inverse à droite de P. On a donc $PC^\infty(V) = C^\infty(V)$ et $P\mathcal{D}'(V) = \mathcal{D}'(V)$. Mais cela n'implique plus cette fois que ce sont des isomorphismes; en fait P n'est pas en général injectif. Mais, $(P\tilde{M})(v)|_{I_M}$ étant inversible pour tout M, P est injectif dans ${}_0C^\infty(V)$ et ${}_0\mathcal{D}'(V)$. La convolution à droite par $\delta \star E$, solution élémentaire invariante à gauche par K, est un inverse à droite de P : ${}_0C^\infty(V) \to {}_0C^\infty(V)$ Par suite P est bijectif, donc un isomorphisme de ${}_0C^\infty(V)$ [${}_0C^\infty(V)$ est un espace de Fréchet]. Son transposé ${}^tP$ est un isomorphisme de ${}_0\mathcal{D}'(V)$, et a donc une solution élémentaire invariante à gauche par K. Si enfin on suppose que $PC^\infty(V) = C^\infty(V)$, il est clair que $P_0C^\infty(V) = {}_0C^\infty(V)$, et la transformation de Fourier, une fois restreints les coefficients à I_M, montre que cela implique que P est injectif, donc un isomorphisme de ${}_0C^\infty(V)$.

THÉORÈME IV. — *Soient* G/K *un espace homogène réductif compact,* $P \in D(G/K)$ *un opérateur différentiel linéaire sur* G/K *invariant à gauche par* G. *Soit* $\hat{G}$ *l'ensemble des classes de représentations irréductibles de* G, *et si* M *est un représentant unitaire d'une classe de* $\hat{G}$, *notons*

$$\tilde{M}(\dot{g}) = \int_K M(gk)\, dk, \quad I_M = \operatorname{Im} \tilde{M}(\dot{i}) \qquad [= \operatorname{Im} \hat{\delta}_K(M)].$$

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(*a*) $P\mathcal{D}'(G/K) \supset {}_0C^\infty(G/K)$;

(*b*) P *a une solution élémentaire;*

(*c*) ${}^tP$ *a une solution élémentaire;*

(*d*) $PC^\infty(G/K) = C^\infty(G/K)$;

(*e*) $P\mathcal{D}'(G/K) = \mathcal{D}'(G/K)$;

(*f*) P *est un automorphisme de* ${}_0\mathrm{C}^\infty(\mathrm{G}/\mathrm{K})$;

(*g*) P *est un automorphisme de* ${}_0\mathcal{D}'(\mathrm{G}/\mathrm{K})$;

(*h*) $\exists\, \mathrm{C} > 0,\ k \in \mathbf{N},\ \forall\, \mathrm{M} \in \hat{\mathrm{G}},\quad \mathrm{P}\tilde{\mathrm{M}}(\mathrm{i})|_{\mathrm{I}_\mathrm{M}}$ *est inversible et*

$$\left\| \left[\mathrm{P}\tilde{\mathrm{M}}(\mathrm{i})|_{\mathrm{I}_\mathrm{M}} \right]^{-1} \right\| \leqq \mathrm{C}\, d_k(\mathrm{M}). \tag{25}$$

Il reste à montrer que (*a*) entraîne l'une quelconque des autres conditions, pour l'opérateur ${}^t\mathrm{P}$, ou encore pour $\mathrm{P}^\star$, par exemple (*h*). Pour cela on choisit un relèvement $\mathrm{Q} \in \mathrm{D}_0(\mathrm{G})$ de P, pour lequel on a $\mathrm{Q}_0\mathcal{D}'_0(\mathrm{G}) \supset {}_0\mathrm{C}_0^\infty(\mathrm{G})$. Le raisonnement est en tous points analogue à celui qui suit l'énoncé du théorème I, appliqué cette fois à Q et à l'espace ${}_0\mathrm{C}_0^\infty(\mathrm{G})$; on prend

$$\mathrm{A} = \mathrm{Q}^\star(\mathfrak{M})|_{\mathrm{I}_\mathrm{M}}{}^{-1} \oplus \mathrm{O}_{\mathrm{K}_\mathrm{M}}.$$

Sur l'espace symétrique SU(2)/SO(2) par exemple, un opérateur P invariant par SU(2) est un polynôme de l'opérateur de Laplace-Beltrami. On peut le relever en le même polynôme de l'opérateur de Casimir C sur SU(2). Par suite, C étant bi-invariant, $\mathrm{P}\tilde{\mathrm{M}}(\mathrm{i})|_{\mathrm{I}_\mathrm{M}}$ est une homothétie; le rapport d'homothétie est une valeur propre de P qui, étant elliptique, n'en a qu'un ensemble discret. Si 0 n'est pas valeur propre, $\left\| \left[(\mathrm{P}\tilde{\mathrm{M}})(\mathrm{i})|_{\mathrm{I}_\mathrm{M}} \right]^{-1} \right\|$ est donc majoré par $\mathrm{Cte}(\dim \mathrm{I}_\mathrm{M})^{\frac{1}{2}} \leqq \mathrm{Cte}(d(\mathrm{M}))^{\frac{1}{2}}$, et l'inégalité du théorème résulte aisément de (12). On peut donc énoncer :

COROLLAIRE 9. — *Sur* SU(2)/SO(2), *un opérateur différentiel linéaire invariant par* SU(2) *admet une solution élémentaire si et seulement s'il est injectif.*

BIBLIOGRAPHIE.

[1] J. DIXMIER, *Les C**-*algèbres et leurs représentations*, Gauthier-Villars, Paris, 1964.
[2] L. HÖRMANDER, *Linear partial differential operators*, Springer-Verlag, Berlin, 1963.
[3] S. HELGASON, *Differential geometry and symmetric spaces*, Academic Press, New York, 1962.
[4] F. TRÈVES, *Linear partial differential equations with constant coefficients*, Gordon and Breach, New York, 1968.

(Manuscrit reçu le 25 mai 1969.)

F. ROUVIÈRE,
6, square du Croisic,
75-Paris, 15e