Annales scientifiques de l'É.N.S.

Michel Bonnard

Sur le calcul fonctionnel holomorphe multiforme dans les algèbres topologiques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 2, nº 3 (1969), p. 397-422

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1969_4_2_3_397_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 2, 1969, p. 397 à 422.

SUR LE CALCUL FONCTIONNEL HOLOMORPHE MULTIFORME DANS LES ALGÈBRES TOPOLOGIQUES

PAR MICHEL BONNARD.

Introduction.

Avant de définir l'objet de ce travail, précisons quelques conventions et notations.

Si $f: E \to F$ et $f': E' \to F'$ sont des applications, on notera $f \times f'$ l'application $(e, e') \to (f(e), f'(e'))$ de $E \times E'$ dans $F \times F'$. En particulier, si $e = (e_1, \ldots, e_n) \in E^n$, on écrira $f(e)$ au lieu de $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$, c'est-à-dire $(f \times \ldots \times f)(e)$.

Par contre, si f et f' ont même espace de départ, c'est-à-dire si $E = E'$, on définit une application (f, f') de E dans $F \times F'$ en posant

$$(f, f')(e) = f(e), f(e)).$$

Si S est un espace topologique et X un espace uniforme, $\mathcal{C}(S, X)$ désignera l'espace des applications continues de S dans X, muni de la topologie de la convergence compacte. Le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes sera toujours supposé muni de sa structure uniforme additive, et l'on écrira $\mathcal{C}(S)$ pour $\mathcal{C}(S, \mathbf{C})$.

Toutes les algèbres considérées dans cet article seront des algèbres sur $\mathbf{C}$, commutatives, unifères, munies d'une topologie localement multiplicativement convexe. Quand on parlera de morphismes, il s'agira d'applications linéaires, multiplicatives, unitaires et continues. On appellera caractère de l'algèbre A tout morphisme de A dans $\mathbf{C}$; on appellera spectre de A l'ensemble $\hat{A}$ des caractères de A, muni de la topologie de la convergence simple dans A; si $a \in A$, on notera $\hat{a}$ l'application (continue) de $\hat{A}$ dans $\mathbf{C}$ définie par $\chi \to \chi(a)$; l'application $F: A \to \mathcal{C}(\hat{A})$ définie par $a \to \hat{a}$ sera appelée transformation de Gelfand de A; si $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A^n$, on écrira $\hat{a}$ pour $(\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_n)$; enfin, si $a = (a_1, \ldots, a_n)$ et $b = (b_1, \ldots, b_p)$ sont deux familles finies d'éléments de A, on notera (a, b) la famille $(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_p)$.

Si $L : A \to B$ est un morphisme, on appellera transposée de L l'application ${}^tL : \hat{A} \to \hat{B}$ définie par ${}^tL(\chi) = \chi \circ L$. Inversement, si $f : X \to Y$ est une application continue, l'application ${}^tf : \mathcal{C}(Y) \to \mathcal{C}(X)$ sera définie par ${}^tf(\varphi) = \varphi \circ f$.

Arrivons-en à l'objet de ce travail. Le calcul fonctionnel holomorphe c'est (grossièrement) ceci :

Étant données la famille finie $a = (a_1, \ldots, a_n)$ d'éléments de l'algèbre A et la fonction f holomorphe multiforme sur un ouvert de $\mathbf{C}^n$, donner un sens à l'expression $\overline{f}(a)$ dès que l'on a donné un sens à la fonction composée $f \circ \hat{a}$, et ceci de sorte que l'on ait :

(i) $(\overline{f}(a))\hat{} = f \circ \hat{a}$;

(ii) si f est la $i^{\text{ième}}$ fonction coordonnée, on a $\overline{f}(a) = a_i$;

(iii) si f ne dépend pas des $n - m$ dernières variables, c'est-à-dire si $f(z_1, \ldots, z_n) = g(z_1, \ldots, z_m)$, alors on a $\overline{f}(a) = \overline{g}(a')$ où $a' = (a_1, \ldots, a_m)$;

(iv) l'application $f \to \overline{f}(a)$ est linéaire, multiplicative et unitaire;

(v) l'application $f \to \overline{f}(a)$ est continue;

(vi) si $L : A \to B$ est un morphisme, alors $\overline{f}(La) = L\overline{f}(a)$;

(vii) si g est holomorphe au voisinage de sp. $(\overline{f}(a))$, alors $\overline{g \circ f}(a) = \overline{g}(\overline{f}(a))$;

(viii) pour a' assez voisin de a on peut définir $\overline{f}(a')$ dépendant continûment de a'.

Récapitulons ce qui est connu à ce sujet.

Pour A de Banach et f uniforme, cela a été étudié par de nombreux auteurs (Chilov, Arens, Calderon, Waelbroeck, etc.) et est exposé dans le paragraphe 4 du chapitre I de [3] où sont établies les propriétés (i) à (vii) [la propriété (viii) n'y est pas explicitement mentionnée, mais elle peut s'y déduire de la proposition 11 généralisée au cas de plusieurs variables].

Pour f uniforme (et A non de Banach), les propriétés (i) à (v) sont établies dans [1] et [7] pour des algèbres localement multiplicativement convexes, séparées et complètes (en utilisant d'une part le fait que de telles algèbres sont limites projectives d'algèbres de Banach, et d'autre part la propriété (vi) du cas où A est de Banach — cette idée avait déjà été utilisée, dans le cas à une variable, par Michael ([6], th. 10.1)). Précisons que, dans [1] et [7], la propriété (v) est donnée en mettant sur les espaces de fonctions holomorphes une topologie plus fine que celle que nous y mettrons ici.

Toujours pour le cas où f est uniforme (et A pas nécessairement de Banach), signalons que des éléments $\overline{f}(a)$ sont également définis dans [9] et [10], mais moyennant des hypothèses sur a (sp. a borné) ou sur la croissance de f à l'infini.

Pour le cas où f est multiforme, seule semble connue la propriété (i), et ce dans le cas où A est de Banach ([2], th. 6.9).

Une question annexe est de savoir dans quelle mesure un tel calcul fonctionnel holomorphe est le seul possible; cette question reçoit une réponse dans [3].

Ici, nous montrons dans le paragraphe 1 des lemmes topologiques qui nous permettent, dans une première partie du paragraphe 2, de généraliser les propriétés (i) à (viii) du cas où A est de Banach et f uniforme au cas où A est de Banach et f multiforme. Dans une deuxième partie du paragraphe 2, passant à la limite projective, nous généralisons les propriétés (i) à (vii) au cas où f est multiforme et A séparée complète quelconque. Nous donnons de plus un résultat d'unicité dans le cas où A est de Banach, et un autre plus faible dans le cas général. Enfin, dans le paragraphe 3, nous généralisons et précisons des théorèmes de [2] sur les équations analytiques dans les algèbres.

I. — Préliminaires sur les espaces étalés.

LEMME 1. — *Soit $\mathcal{V}$ un espace étalé par π dans un espace séparé* X. *Soit* K *un compact de $\mathcal{V}$. Alors, l'ensemble des points de $\pi(K)$ qui sont images d'un seul élément de* K *est ouvert dans $\pi(K)$.*

Démonstration. — Soit z un tel élément de $\pi(K)$, soit (V_ι) une base de voisinages de z (ι décrivant un certain ensemble filtrant). Supposons que chaque V_ι contienne un certain z_ι image de deux points distincts v_ι et v'_ι de K. Comme K est compact, les familles (v_ι) et (v'_ι) ont des points adhérents; choisissons-en un pour chaque famille, soit v et v'.

Comme π est continue, de l'égalité

$$\pi(v_\iota)=\pi(v'_\iota)=z,$$

vérifiée pour tout ι, on déduit

$$\pi(v)=\pi(v')=\lim z_\iota=z;$$

et, de par le choix de z, on a alors $v=v'$.

Puisque $\mathcal{V}$ est étalé, v possède un voisinage sur lequel la restriction de π est injective; ceci contredit l'existence des deux familles (v_ι) et (v'_ι) dont v est valeur d'adhérence commune. ■

LEMME 2. — *Soit $\mathcal{V}$ un espace localement compact étalé par π dans un espace séparé* X. *Soit* K *un compact de $\mathcal{V}$. Alors, si $\pi\,|\,K$ est injective, il existe un voisinage* V *de* K *dans $\mathcal{V}$ tel que $\pi\,|\,V$ soit injective.*

Démonstration. — Soit K' un voisinage compact de K ne rencontrant pas le fermé $\overset{-1}{\pi}(K)\setminus K$. D'après le lemme 1, l'ensemble W des points du compact $\pi(K')$ qui sont image d'un seul élément de K' est ouvert dans $\pi(K')$. Alors l'ensemble $V = \overset{-1}{\pi}(W) \cap K'$ est un ouvert de K' qui répond à la question. ■

LEMME 3. — *Soit $\mathcal{V}$ un espace étalé par π dans un espace séparé* X. *Soit* K *un compact de $\mathcal{V}$. Alors, pour tout $z \in \pi(K)$, l'ensemble $\overset{-1}{\pi}(z) \cap K$ est fini.*

Démonstration : $\overset{-1}{\pi}(z)$ est discret car π est un étalement; il est fermé car π est continue; alors $\overset{-1}{\pi}(z) \cap K$ est un compact discret. ■

LEMME 4. — *Soit $\mathcal{V}$ un espace étalé par π dans un espace séparé* X. *Soit* K *un compact de $\mathcal{V}$, soit $z \in \pi(K)$ et soit $(v_1, \ldots, v_n)$ l'ensemble fini* $\overset{-1}{\pi}(z) \cap K$. *Alors, quels que soient les voisinages* $V_1, \ldots, V_n$ *des points* $v_1, \ldots, v_n$, *il existe un voisinage* W *de* z *tel que*

$$\overset{-1}{\pi}(W) \cap K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} V_j.$$

Démonstration. — Soit (W_ι) une base de voisinages de z (ι décrivant un certain ensemble filtrant). Si le lemme était faux il existerait pour tout ι un $v'_\iota \in K$ tel que $\pi(v'_\iota) \in W_\iota$ et $v'_\iota \notin \bigcup V_j$. Comme K est compact, les v'_ι auraient un point adhérent $v' \in K$, et comme π est continue, on aurait $\pi(v') = \lim \pi(v'_\iota) = z$. Mais alors $v' \in \overset{-1}{\pi}(z) \cap K$, donc v' est l'un des v_j soit v_{j_0}; de cela résulte qu'il y a des v'_ι dans tout voisinage de v_{j_0}, et en particulier dans V_{j_0}, ce qui est contraire au choix des v'_ι. ■

LEMME 5. — *Soit* X *un espace complètement régulier, soit* S *un espace compact, soit* A *une famille séparante de fonction continues de* S *dans* X. *Soient* $S_1, \ldots, S_n$ *des compacts deux à deux disjoints et contenus dans* S. *Alors, il existe une famille finie* $b_1, \ldots, b_p$ *d'éléments de* A *telle que les* $(b_1, \ldots, b_p)(S_j)$ *pour* $j = 1, \ldots, n$ *soient des sous-ensembles disjoints de* X^p.

Nous omettons la démonstration, qui est basée sur des arguments de compacité tout à fait classiques.

Nous pouvons maintenant formuler le résultat central de ce paragraphe.

PROPOSITION 1. — *Soit* S *un espace compact, soit* X *un espace localement compact, soit $\mathcal{V}$ un espace localement compact étalé par π dans* X^n; *soit* A *une famille séparante de fonctions continues de* S *dans* X, *soit*

$a = (a_1, \ldots, a_n) \in A^n$. *On suppose qu'il existe une application continue* $\rho : S \to \mathcal{V}$ *telle que*

$$a = \pi \circ \rho.$$

Alors, il existe une famille finie $b = (b_1, \ldots, b_p)$ *d'éléments de* A, *telle que, si i désigne l'identité de* X^p, *il existe un voisinage de* $(\rho, b)(S)$ *dans* $\mathcal{V} \times X^p$ *sur lequel la restriction de* $\pi \times i$ *soit injective.*

Démonstration. — En vertu du lemme 2, il suffit de trouver b telle que $\pi \times i \,|\, (\rho, b)(S)$ soit injective.

Posons $H = a(S)$ et $K = \rho(S)$.

Soit $z \in H$, soit $(v_1, \ldots, v_{k_z})$ le sous-ensemble fini $\overset{-1}{\pi}(z) \cap K$ (lemme 3). Soient $V_1, \ldots, V_{k_z}$ des voisinages ouverts de $v_1, \ldots, v_{k_z}$, deux à deux disjoints et tels que les restrictions $\pi \,|\, V_j$ soient injectives pour $j = 1, \ldots, k_z$. Soit W_z un voisinage compact de z tel que $\overset{-1}{\pi}(W_z) \cap K \subseteq \bigcup V_j$ (lemme 4). Comme les V_j sont deux à deux disjoints, il existe des compacts $K_1, \ldots, K_{k_z}$ dont la réunion est $\overset{-1}{\pi}(W_z) \cap K$ et qui sont tels que, pour chaque j, on ait $K_j \subseteq V_j$. Alors les $S_j = \overset{-1}{\rho}(K_j)$ sont des fermés (donc compacts) de S deux à deux disjoints. Le lemme 5 nous dit alors qu'il existe une famille finie d'éléments de A, soit $b_z = (b_{z,1}, \ldots, b_{z,k'_z})$, telle que les $b_z(S_j)$ (qui sont des sous-ensembles de $X^{k'_z}$) soient deux à deux disjoints. A plus forte raison, pour toute famille b' contenant b_z, les $b'(S_j)$ sont deux à deux disjoints.

Quand z décrit H, les intérieurs des W_z recouvrent H, on peut donc extraire un recouvrement fini correspondant à des points $z_1, \ldots, z_q$. Soit $b = (b_1, \ldots, b_p)$ la réunion des familles $b_{z_1}, \ldots, b_{z_q}$. Nous allons maintenant montrer que b répond aux conditions voulues.

Soient $v \neq v'$ deux éléments de K tels que $\pi(v) = \pi(v')$. Le point $\pi(v)$ est dans un certain W_{z_r}. Comme π est injective sur chacun des K... associés à ce W..., les points v et v' sont dans deux K... distincts, soient K_1 et K_2.

Soient alors $\chi \in \overset{-1}{\rho}(v)$ et $\chi' \in \overset{-1}{\rho}(v')$. On a $\chi \in \overset{-1}{\rho}(K_1) = S_1$ et $\chi' \in \overset{-1}{\rho}(K_2) = S_2$; et comme $b(S_1)$ et $b(S_2)$ sont disjoints par choix de b, on trouve $b(\chi) \neq b(\chi')$.

Ceci prouve que, si l'on se donne deux éléments de $(\rho, \hat{b})(S)$, soient $(v, z) = \rho((\chi), \hat{b}(\chi))$ et $(v', z') = (\rho(\chi'), \hat{b}(\chi'))$, et si l'on suppose $v \neq v'$ et $\pi(v) = \pi(v')$, alors on a nécessairement $z \neq z'$.

Mais alors, si $(v, z) \neq (v', z')$ sont deux éléments de $(\rho, \hat{b})(S)$, on a au moins une des deux relations $z \neq z'$ ou $\pi(v) \neq \pi(v')$; ce qui donne dans tous les cas $(\pi \times i)(v, z) \neq (\pi \times i)(v', z')$. ∎

Remarque 1. — Il est clair que le résultat reste vrai en remplaçant b par une famille plus grande. D'autre part, si $\pi | K$ est injective, il est naturel de dire que les conditions de la proposition 1 sont vérifiées en prenant pour b la famille vide.

Rappelons que, si S est un espace compact, X un espace uniforme et U un ouvert de X, alors l'ensemble des $a \in \mathcal{C}(S, X)$ tels que $a(S) \subseteq U$ est un ouvert de $\mathcal{C}(S, X)$.

Dans ce qui suit, les produits finis d'espaces uniformes seront munis de la structure uniforme produit.

Corollaire 1. — *Soit* S *un espace compact; soit* X *un espace uniforme localement compact; soit* $\mathcal{V}$ *un espace uniforme localement compact, étalé par* π *dans* X^n; *soit* $a = (a_1, \ldots, a_n)$ *une application continue de* S *dans* X^n; *soit enfin* ρ *une application continue de* S *dans* $\mathcal{V}$ *telle que* $a = \pi \circ \rho$.

Alors il existe un voisinage Ω *de* a *dans* $\mathcal{C}(S, X^n)$ *et une application continue* $r : \Omega \to \mathcal{C}(S, \mathcal{V})$ *telle que* $r(a) = \rho$ *et que, pour tout* $a' \in \Omega$, *on ait* $\pi \circ r(a') = a'$.

Démonstration. — Posant $A = \mathcal{C}(S, X)$, la proposition 1 nous donne une famille $b = (b_1, \ldots, b_p)$. Soit V un voisinage ouvert de $(\rho, b)(S)$ sur lequel $\pi \times i$ est injective; soit $U = (\pi \times i)(V)$ et soit $\sigma : U \to V$ l'application inverse de $(\pi \times i) | V$. Soit Υ la projection canonique de $\mathcal{V} \times X^p$ sur $\mathcal{V}$.

Posons $\Omega = \{ a' \in \mathcal{C}(S, X^n);\ (a', b)(S) \subseteq U \}$ et, pour $a' \in \Omega$,

$$r(a') = \Upsilon \circ \sigma \circ (a', b).$$

Il est facile de voir que $\sigma \circ (a, b) = (\rho, b)$ et que $\pi \circ \Upsilon \circ \sigma$ est la projection canonique de $X^n \times X^p$ sur X^n.

De ceci, on déduit que $r(a) = \rho$ et que, pour tout $a' \in \Omega$, on a $\pi \circ r(a') = a'$.

D'autre part, Ω est ouvert car c'est l'image réciproque de l'ensemble $\{ c \in \mathcal{C}(S, X^{n+p});\ c(S) \subseteq U \}$ par l'application continue $(., b)$ de $\mathcal{C}(S, X^n)$ dans $\mathcal{C}(S, X^{n+p})$, qui à a' fait correspondre (a', b).

Il reste à montrer que r est continue. Comme $(., b)$ est continue, il suffit de montrer que l'application $\varphi \to \Upsilon \circ \sigma \circ \varphi$ de $\mathcal{C}(S, U)$ dans $\mathcal{C}(S, \mathcal{V})$ est continue. Il est facile de voir que pour cela il suffit que $\Upsilon \circ \sigma$ soit uniformément continue. Il est évident que Υ est uniformément continue.

Montrons qu'on peut choisir V tel que σ soit uniformément continue. Soit V′ un voisinage de $(\rho, b)(S)$ tel que $(\pi \times i) | V'$ soit injective; prenons pour V un voisinage de $(\rho, b)(S)$ tel que $\overline{V}$ soit compact et contenu dans V′ [on peut trouver un tel V car $\mathcal{V} \times X^p$ est localement compact et $(\rho, b)(S)$ est compact]. Alors $\pi \times i$ réalise un isomorphisme de l'unique structure uniforme du compact $\overline{V}$ sur celle de $\overline{U}$, il en résulte évidemment que σ est uniformément continue. ■

Remarquons que les structures uniformes de X et $\mathcal{V}$ ne servent pas dans cette démonstration (ce qui sert c'est la compacité locale). Mais il est commode de parler des topologies de $\mathcal{C}(S, X)$ et $\mathcal{C}(S, \mathcal{V})$, et pour cela il faut choisir des structures uniformes sur X et $\mathcal{V}$.

Un espace séparé $\mathcal{V}$, étalé par π dans $\mathbf{C}^n$, sera appelé une variété étalée. Il est évident qu'un tel espace est, de façon canonique, une variété analytique complexe. On appellera alors $i^{\text{ième}}$ fonction coordonnée sur $\mathcal{V}$, la fonction (analytique) composée de π et de la $i^{\text{ième}}$ fonction coordonnée de $\mathbf{C}^n$.

Nous allons maintenant appliquer la proposition 1 et le corollaire 1 à des algèbres (vérifiant les conditions posées en introduction).

Corollaire 2. — *Soit* A *une algèbre à spectre compact. Soit* $a = (a_1, \ldots, a_n)$ *une famille finie d'éléments de* A. *Soit* $\mathcal{V}$ *une variété étalée par* π *dans* $\mathbf{C}^n$, *et soit* $\rho \in \mathcal{C}(\hat{A}, X)$ *telle que* $\pi \circ \rho = \hat{a}$.

Alors il existe une famille finie $b = (b_1, \ldots, b_p)$ *d'éléments de* A *et un voisinage* V *de* $(\rho, \hat{b})(\hat{A})$ *dans* $\mathcal{V} \times \mathbf{C}^p$ *tels que, si* i *désigne l'identité de* $\mathbf{C}^p$, *la restriction* $(\pi \times i) | \mathcal{V}$ *soit injective.*

Cela résulte immédiatement de la proposition 1 appliquée au compact $\hat{A}$ et à la famille séparante FA de fonctions de $\hat{A}$ dans $\mathbf{C}$.

Corollaire 3. — *On suppose de plus que la transformation de Gelfand* F *de* A *est continue. On munit* $\mathcal{V}$ *de la plus fine des structures uniformes compatibles avec sa topologie.*

Alors il existe un voisinage Ω *de* a *dans* A^n *et une application continue* $r : \Omega \to \mathcal{C}(\hat{A}, \mathcal{V})$ *telle que* $r(a) = \rho$ *et que, pour tout* $a' \in \Omega$, *on ait*

$$\pi \circ r(a') = \hat{a}'.$$

Démonstration. — Le corollaire 1 nous donne un voisinage Ω' de $\hat{a}$ dans $\mathcal{C}(\hat{A}, \mathbf{C}^n)$ et une application continue r' de Ω' dans $\mathcal{C}(\hat{A}, \mathcal{V})$ telle que $r'(\hat{a}) = \rho$ et que, pour toute $\varphi \in \Omega'$, on ait $\pi \circ r'(\varphi) = \varphi$. Il suffit alors de prendre pour Ω l'image réciproque de Ω' par F. ■

II. — Le calcul fonctionnel holomorphe multiforme.

Soit A une algèbre; on appelle *triplet de* A tout ensemble $(a, \mathcal{V}, \rho)$, formé par :

une famille finie $a = (a_1, \ldots, a_n)$ d'éléments de A;

une variété $\mathcal{V}$ étalée par π dans $\mathbf{C}^n$;

une application continue $\rho : \hat{A} \to \mathcal{V}$ vérifiant $\pi \circ \rho = \hat{a}$.

Appelant Δn l'ensemble des n premiers nombres entiers, on a $\mathbf{C}^n = \mathcal{C}(\Delta n)$, alors pour $m \leqq n$ les transpositions mettent en bijection les injections de Δm dans Δn avec les applications linéaires (donc continues), multiplicatives, unitaires et surjectives de $\mathbf{C}^n = \mathcal{C}(\Delta n)$ dans $\mathbf{C}^m = \mathcal{C}(\Delta m)$.

D'autre part, une famille $a = (a_1, \ldots, a_n)$ peut être considérée comme une application de Δn dans A; alors, si j est une application de Δm dans Δn, $a \circ j$ désigne une certaine famille $(a'_1, \ldots, a'_m)$.

Soient $(a, \mathcal{V}, \rho)$ et $(a', \mathcal{V}', \rho')$ deux triplets de A; soient π et π' les étalements de $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$, soient n et m les nombres d'éléments de a et a', et supposons $m \leqq n$. Alors nous appellerons *simplification*, et nous noterons (abusant du signe $\rightarrow$) :

$$(\tau, \tau') : \quad (a, \mathcal{V}, \rho) \rightarrow (a, \mathcal{V}', \rho')$$

tout couple formé d'une application analytique :

$$\tau : \quad \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$$

et d'une application linéaire, multiplicative, unitaire et surjective :

$$\tau' : \quad \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}^m,$$

telles que l'on ait les trois relations

(i) $$a' = a \circ {}^t\tau',$$

(ii) $$\rho' = \tau \circ \rho,$$

(iii) $$\tau' \circ \pi = \pi' \circ \tau.$$

La relation (i) signifie que le $p^{\text{ième}}$ élément de la famille a' est égal au ${}^t\tau'(p)^{\text{ième}}$ élément de la famille a; cela implique

(iv) $$\hat{a}' = \tau' \circ \hat{a}.$$

Précisons maintenant les *espaces de fonctions holomorphes* auxquels nous nous intéresserons.

Si U est un ouvert de $\mathbf{C}^n$ on appelle $H^\infty(U)$ l'algèbre de Banach des fonctions holomorphes bornées sur U (munie de la topologie de la convergence uniforme dans U). Si K est un compact de $\mathbf{C}^n$, on appelle $\mathcal{O}(K)$ la limite inductive des $H^\infty(U)$ pour U voisinage ouvert de K dans $\mathbf{C}^n$ [en d'autres termes, $\mathcal{O}(K)$ est l'algèbre des germes de fonctions holomorphes au voisinage de K].

Si $K \supseteq K'$ sont des compacts de $\mathbf{C}^n$, on a un morphisme canonique $\mathcal{O}(K) \rightarrow \mathcal{O}(K')$. Soit alors H une partie quelconque de $\mathbf{C}^n$, quand K décrit l'antifiltre des compacts de H, les $\mathcal{O}(K)$ forment un système projectif dont la limite est une algèbre que nous appellerons $\mathcal{O}(H)$.

Il n'est pas difficile de voir que, si U est un ouvert, l'algèbre $\mathcal{O}(U)$ obtenue de cette façon est l'algèbre des fonctions holomorphes dans U munie de la topologie de la convergence compacte.

Se donner un élément de $\mathcal{O}(\mathrm{H})$ c'est se donner pour tout compact K de H une fonction f_K holomorphe au voisinage de K, de sorte que, pour $\mathrm{K} \supseteq \mathrm{K}'$, les fonctions f_K et $f_{\mathrm{K}'}$, coïncident au voisinage de K'. Ceci se simplifie car, d'après un résultat de Martineau ([5], § 2 des préliminaires), il existe alors f holomorphe au voisinage de H et qui, pour tout compact K de H, coïncide avec f_K au voisinage de K. Une telle f sera appelée un représentant de l'élément de $\mathcal{O}(\mathrm{H})$ considéré.

Appelons $\mathcal{O}'(\mathrm{H})$ la limite inductive des $\mathcal{O}(\mathrm{U})$ pour U voisinage de H; alors (*cf.* [5]) il existe un morphisme canonique bijectif (mais non bicontinu) de $\mathcal{O}'(\mathrm{H})$ sur $\mathcal{O}(\mathrm{H})$. Ceci justifie que l'on appelle germes les éléments de $\mathcal{O}(\mathrm{H})$. Certains auteurs ([1], [7]) définissent les morphismes f. h. (*voir* ci-dessous) comme des morphismes d'un certain $\mathcal{O}'(\mathrm{H})$ dans A ; ici nous montrons plus, puisque nous montrons que ce sont des morphismes de $\mathcal{O}(\mathrm{H})$ dans A.

Remarquons enfin que, si f est une fonction analytique au voisinage de H et à valeurs dans $\mathbf{C}^p$, et si H' est une partie de $\mathbf{C}^p$ contenant $f(\mathrm{H})$, alors la composition avec f détermine un morphisme de $\mathcal{O}(\mathrm{H}')$ dans $\mathcal{O}(\mathrm{H})$.

Tout ceci s'étend de façon évidente au cas où H est une partie d'une variété analytique complexe.

Soit A une algèbre, soit $(a, \mathcal{V}, \rho)$ un triplet de A avec $a = (a_1, \ldots, a_n)$, on appelle *morphisme fonctionnel holomorphe* associé à $(a, \mathcal{V}, \rho)$, tout morphisme

$$\Xi(\mathrm{A})\,(a, \mathcal{V}, \rho) : \quad \mathcal{O}(\rho(\hat{\mathrm{A}})) \to \mathrm{A}$$

tel que, si p_i désigne le germe de la $i^{\text{ième}}$ fonction coordonnée au voisinage de $\rho(\hat{\mathrm{A}})$, on ait

$$(\Xi(\mathrm{A})\,(a, \mathcal{V}, \rho)\,(p_i)) = a_i$$

pour tout $i = 1, \ldots, n$.

Un tel morphisme sera dit *compatible avec des caractères* si, quel que soit $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\rho(\hat{\mathrm{A}}))$ et quel que soit f représentant de $\tilde{f}$, on a

$$(\Xi(\mathrm{A})\,(a, \mathcal{V}, \rho)\,(\tilde{f}))\hat{} = f \circ \rho.$$

Il revient au même de dire que pour tout $\chi \in \hat{\mathrm{A}}$ on a

$$\chi(\Xi(\mathrm{A})\,(a, \mathcal{V}, \rho)(\tilde{f})) = f \circ \rho(\chi).$$

On appelle *calcul fonctionnel holomorphe* associé à A toute application $\Xi(\mathrm{A})$ qui à tout triplet $(a, \mathcal{V}, \rho)$ fait correspondre un morphisme fonctionnel holomorphe $\Xi(\mathrm{A})\,(a, \mathcal{V}, \rho)$.

Un tel calcul sera dit *compatible avec la simplification*

$$(\tau, \tau') : \quad (a, \mathcal{V}, \rho) \to (a', \mathcal{V}', \rho')$$

si, quelle que soit f holomorphe au voisinage de $\rho'(\hat{A})$ dans $\mathcal{V}'$, on a

$$\Xi(A)(a, \mathcal{V}, \rho)(f \circ \tau) = \Xi(A)(a', \mathcal{V}', \rho')(f),$$

où l'on a fait l'*abus de notations* qui consiste à désigner un germe par un de ses représentants [cet abus est sans inconvénient quand on s'intéresse à un seul élément $\Xi(A)(a, \mathcal{V}, \rho)(f)$, mais il est dangereux quand on étudie l'application $\tilde{f} \to \Xi(A)(a, \mathcal{V}, \rho)(\tilde{f})$].

Un calcul fonctionnel holomorphe sera dit *simplifiable* s'il est compatible avec toutes les simplifications.

On appelle *foncteur fonctionnel holomorphe* Ξ sur une catégorie $\mathfrak{A}$ d'algèbres la donnée pour tout objet A de $\mathfrak{A}$ d'un calcul fonctionnel holomorphe simplifiable $\Xi(A)$, de sorte que pour tout $L : A \to B$, morphisme de $\mathfrak{A}$, on ait, quels que soient le triplet $(a, \mathcal{V}, \rho)$ de A et la fonction f holomorphe au voisinage de $\rho(\hat{A})$, la relation

$$L(\Xi(A)(a, \mathcal{V}, \rho)(f)) = \Xi(B)(La, \mathcal{V}, \rho \circ {}^t L)(f)$$

[on voit aisément que $(La, \mathcal{V}, \rho \circ {}^t L)$ est un triplet de B, et que

$$\rho \circ {}^t L(\hat{B}) \subseteq \rho(\hat{A}),$$

ce qui fait que le deuxième membre a bien un sens].

On pourrait présenter Ξ comme une « application » de $\mathfrak{A}$ dans une autre catégorie, la dernière égalité exprimant que cette application est un foncteur.

Un tel foncteur sera dit *compatible avec les caractères* si, pour chaque objet A, les morphismes qui composent $\Xi(A)$ sont compatibles avec les caractères.

On appelle *triplet uniforme* tout triplet de la forme $(a, U, \hat{a})$, où U est un ouvert de $\mathbf{C}^n$ étalé trivialement. On définit les notions de *morphisme* (resp. *calcul*, *foncteur*) *fonctionnel holomorphe uniforme* en se limitant, dans les définitions ci-dessus, à des triplets uniformes.

Une simplification d'un triplet uniforme dans un autre :

$$(\tau, \tau') : \quad (a, U, \hat{a}) \to (a', U', \hat{a}')$$

sera dite :

1° *de type* 1 si $a = a'$ et $U \subseteq U'$ (alors, nécessairement, τ' est l'identité de $\mathbf{C}^n$, et $\tau : U \to U'$ est l'injection canonique);

2° *de type* 2 si $U = \mathbf{C}^n$, $U' = \mathbf{C}^m$ et ${}^t\tau' : \Delta m \to \Delta n$ est l'injection canonique ;

3° *de type* 3 si $m = n$, $U = U' = \mathbf{C}^n$ et ${}^t\tau'$ est une permutation de Δn.

Pour abréger on écrira souvent f. h. au lieu de « fonctionnel holomorphe ».

On voit aisément que pour qu'un calcul f. h. uniforme soit simplifiable, il suffit qu'il soit compatible avec les simplifications de types 1, 2 et 3.

Si un calcul f. h. uniforme $\Xi(A)$ est compatible avec les simplifications de type 1, on notera $\Xi u(A)(a)$ la valeur commune de tous les $\Xi(A)(a, U, \hat{a})$ pour U voisinage de sp. a.

Exprimons maintenant les principaux résultats de [3] avec la terminologie que nous venons d'introduire. Soit A une algèbre de Banach, et soit $(a, U, \hat{a})$ un triplet uniforme de A; le morphisme Θ_a du théorème 1 de [3] sera appelé ici $\Theta(A)(a, U, a)$; en vertu dudit théorème 1 de [3], les morphismes de ce type forment un calcul f. h. uniforme compatible avec les simplifications de type 2; il est de plus évidemment compatible avec les simplifications de type 1, ce qui fait qu'on pourra noter $\Theta u(A)(a)$, les morphismes qui le composent, conformément à la convention ci-dessus. D'autre part, ce morphisme est compatible avec les simplifications de type 3, comme on le voit aisément en reprenant la construction développée dans les n^os 2 et 3 de [3]; alors le théorème 1 de [3] s'écrit :

On peut associer à A *un et un seul calcul f. h. uniforme simplifiable* $\Theta u(A)$.

Rappelons (*cf.* [3], exercice 11) qu'il se peut que l'on puisse associer à A plusieurs calculs f. h. (non simplifiables) distincts.

La proposition 2 de [3] nous dit que les $\Theta u(A)$ forment un foncteur f. h. sur la catégorie des algèbres de Banach (commutatives unifères); et le corollaire de la proposition 1 de [3] nous dit que ce foncteur est compatible avec les caractères.

Nous allons maintenant appliquer nos corollaires 2 et 3 à tout ceci, et nous obtiendrons nos résultats principaux.

THÉORÈME 1. — *Soit* A *une algèbre de Banach commutative unifère. On peut associer à* A *un et un seul calcul fonctionnel holomorphe simplifiable* $\Theta(A)$. *De plus les morphismes composant ce calcul sont compatibles avec les caractères.*

Démonstration. — Soit $(a, \mathcal{V}, \rho)$ un triplet, soit π l'étalement de $\mathcal{V}$. D'après le corollaire 2, il existe une famille finie $b = (b_1, \ldots, b_p)$ d'éléments de A, un voisinage U de $(\hat{a}, \hat{b})(\hat{A})$ dans $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^p$ et une application σ: $U \to \mathcal{V} \times \mathbf{C}^p$ qui est un homéomorphisme de U sur un voisinage de $(\rho, \hat{b})(\hat{A})$ et est inverse de $\pi \times i$ (où i désigne l'identité de $\mathbf{C}^p$). Appelons Υ la projection $\mathcal{V} \times \mathbf{C}^p \to \mathcal{V}$; on a alors la relation

$$\Upsilon \circ \sigma \circ (\hat{a}, \hat{b}) = \rho.$$

Soit $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\rho(\hat{A}))$, soit f un représentant de $\tilde{f}$, posons

$$c = \Theta\, u(A)\,(a, b)\,(f \circ \Upsilon \circ \sigma),$$

puisque le morphisme f. h. $\Theta u(\mathrm{A})(a, b)$ est compatible avec les caractères (tous continus) de A, on a

$$\hat{c} = f \circ \Upsilon \circ \sigma \circ (\hat{a}, \hat{b}) = f \circ \rho.$$

Remarque 2. — A ce point nous avons déjà retrouvé un des principaux résultats d'Arens et Calderon ([2], th. 6.9), lequel résultat s'écrit avec nos notations :

Pour tout triplet $(a, \mathcal{V}, \rho)$ *et toute fonction* f *analytique au voisinage de* $\rho(\hat{\mathrm{A}})$ *dans* $\mathcal{V}$, *il existe* $c \in \mathrm{A}$ *tel que* $\hat{c} = f \circ \rho$.

Suite de la démonstration du théorème 1. — La valeur de c ne dépend pas du choix de f représentant de $\tilde{f}$, car si g est un autre représentant de $\tilde{f}$, les fonctions $f \circ \Upsilon \circ \sigma$ et $g \circ \Upsilon \circ \sigma$ ont même germe au voisinage de $(\hat{a}, \hat{b})(\hat{\mathrm{A}})$.

Soit b' une autre famille vérifiant les conditions du corollaire 2, soient Υ' et σ' correspondant ainsi à Υ et σ; en faisant intervenir la famille (a, b, b') et la compatibilité de $\Theta u(\mathrm{A})$ avec les simplifications, on trouve

$$\Theta u(\mathrm{A})(a, b)(f \circ \Upsilon \circ \sigma) = \Theta u(\mathrm{A})(a, b')(f \circ \Upsilon' \circ \sigma'),$$

donc la valeur de c ne dépend pas du choix de b.

En faisant correspondre c à $\tilde{f}$ nous définissons donc une application de $\mathcal{O}(\rho(\hat{\mathrm{A}}))$ dans A ; si le triplet $(a, \mathcal{V}, \rho)$ est uniforme, cette application est $\Theta\ u(\mathrm{A})(a) = \Theta(\mathrm{A})(a, \mathcal{V}, \rho)$ (en effet on peut alors écrire l'égalité ci-dessus en prenant pour b' la famille vide); nous pouvons donc poser par définition [$(a, \mathcal{V}, \rho)$ étant uniforme ou non] :

$$\boxed{\Theta(\mathrm{A})(a, \mathcal{V}, \rho)(f) = \Theta u(\mathrm{A})(a, b)(f \circ \Upsilon \circ \sigma).}$$

S'il existe un calcul f. h. simplifiable $\Xi(\mathrm{A})$ associé à A, on a nécessairement :

$$\Xi(\mathrm{A})(a, \mathcal{V}, \rho) = \Theta(\mathrm{A})(a, \mathcal{V}, \rho);$$

en effet, appelons $\tau' : \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^p \to \mathbf{C}^n$ la projection canonique et posons $\tau = \Upsilon \circ \sigma$, on a ainsi une simplification :

$$(\tau, \tau') : \quad ((a, b), \mathrm{U}, (\hat{a}, \hat{b})) \to (a, \mathcal{V}, \rho),$$

dont on déduit, puisque $\Xi(\mathrm{A})$ est simplifiable :

$$\Xi(\mathrm{A})(a, \mathcal{V}, \rho)(f) = \Xi(\mathrm{A})((a, b), \mathrm{U}, (\hat{a}, \hat{b}))(f \circ \Upsilon \circ \sigma),$$

quelle que soit f analytique au voisinage de $\rho(\hat{\mathrm{A}})$; mais $\Xi(\mathrm{A})$ restreint aux triplets uniformes est un calcul f. h. uniforme simplifiable et coïncide par conséquent avec $\Theta u(\mathrm{A})$, on a donc

$$\Xi(\mathrm{A})(a, \mathcal{V}, \rho)(f) = \Theta u(\mathrm{A})(a, b)(f \circ \Upsilon \circ \sigma),$$

d'où résulte l'égalité cherchée. Par conséquent, *on peut associer à* A *au plus un calcul f. h. simplifiable.*

D'après l'égalité qui précède la remarque 2, si les $\Theta(\mathrm{A})(a, \mathcal{V}, \rho)$ sont des morphismes f. h., *ils sont compatibles avec les caractères.*

L'application $\Theta(\mathrm{A})(a, \mathcal{V}, \rho)$ est un morphisme car c'est le composé de $\Theta u(\mathrm{A})(a, b)$, de la composition avec $\Upsilon \circ \sigma$ de $\mathcal{O}(\rho(\hat{\mathrm{A}}))$ dans $\mathcal{O}(\hat{a}(\hat{\mathrm{A}}) \times \mathbf{C}^p)$ et de la restriction de $\mathcal{O}(\hat{a}(\hat{\mathrm{A}}) \times \mathbf{C}^p)$ dans $\mathcal{O}((\hat{a}, b)(\hat{\mathrm{A}}))$. D'autre part, soit f la $i^{\text{ième}}$ fonction coordonnée dans $\mathcal{V}$, et soit $\tilde{f}$ son germe au voisinage de $\rho(\hat{\mathrm{A}})$, alors $f \circ \Upsilon \circ \sigma$ est la $i^{\text{ième}}$ fonction coordonnée dans $\mathbf{C}^{n+p}$, et comme $\Theta u(\mathrm{A})(a, b)$ est un morphisme f. h., on trouve

$$\Theta(\mathrm{A})(a, \mathcal{V}, \rho)(f) = a_i,$$

où a_i est le $i^{\text{ième}}$ élément de a.

Nous avons donc construit un calcul f. h. $\Theta(\mathrm{A})$; il reste à voir qu'il est simplifiable.

Donnons-nous une simplification :

$$(\tau, \tau') : \quad (a, \mathcal{V}, \rho) \to (a', \mathcal{V}', \rho'),$$

et choisissons une famille b assez grande pour vérifier les conditions du corollaire 2 relativement à $(a, \mathcal{V}, \rho)$ et $(a', \mathcal{V}', \rho')$. Notant π et π', les étalements de $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$, et notant i l'identité de $\mathbf{C}^p$ ($p =$ nombre d'éléments de b); il existe U et U' voisinages de $(\hat{a}, \hat{b})(\hat{\mathrm{A}})$ et $(\hat{a}', \hat{b})(\hat{\mathrm{A}})$ sur lesquels $\pi \times i$ et $\pi' \times i$ ont des inverses σ et σ'. De la relation

$$\pi' \circ \tau = \tau' \circ \pi,$$

on déduit :

$$(\pi' \times i) \circ (\tau \times i) = (\tau' \times i) \circ (\pi \times i) \tag{1}$$

et par conséquent :

$$(\tau \times i) \circ \sigma = \sigma' \circ (\tau' \times i). \tag{2}$$

Appelons $\Upsilon : \mathcal{V} \times \mathbf{C}^p \to \mathcal{V}$ et $\Upsilon' : \mathcal{V}' \times \mathbf{C}^p \to \mathcal{V}'$ les projections canoniques, alors on a bien sûr :

$$\tau \circ \Upsilon = \Upsilon' \circ (\tau \times i). \tag{3}$$

Ceci dit, donnons-nous f analytique au voisinage de $\rho'(\mathrm{A})$ dans $\mathcal{V}'$. On a par définition :

$$\Theta(\mathrm{A})(a', \mathcal{V}', \rho')(f) = \Theta u(\mathrm{A})(a', b)(f \circ \Upsilon' \circ \sigma'),$$

ce qui devient, puisque $\Theta u(\mathrm{A})$ est simplifiable :

$$\Theta u(\mathrm{A})(a, b)(f \circ \Upsilon' \circ \sigma' \circ (\tau' \times i)),$$

ou encore, compte tenu des égalités (2) et (3) :

$$\Theta u(\mathrm{A})\,(a, b)\,(f \circ \tau \circ \Upsilon \circ \sigma),$$

ou enfin, par définition :

$$\Theta(\mathrm{A})\,(a, \mathcal{V}, \rho)\,(f \circ \tau).$$

Le calcul f. h. $\Theta(\mathrm{A})$ *est donc simplifiable.* ■

Lemme 6. — *Les calculs f. h.* $\Theta(\mathrm{A})$ *forment un foncteur f. h. sur la catégorie des algèbres de Banach* (commutatives, unifères).

Démonstration. — Soit $(a, \mathcal{V}, \rho)$ un triplet de A. Si b vérifie les conditions du corollaire 2 pour le triplet $(a, \mathcal{V}, \rho)$, et si $\mathrm{L} : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ est un morphisme de A dans une autre algèbre de Banach B, il est facile de voir que $\mathrm{L}b$ vérifie les conditions du corollaire 2 pour le triplet $(\mathrm{L}a, \mathcal{V}, \rho \circ {}^t\mathrm{L})$. Alors, Υ et σ étant définis comme dans la démonstration du théorème 1, la proposition 2 de [3] nous donne

$$\mathrm{L}\,\Theta\,u(\mathrm{A})\,(a, b)\,(f \circ \Upsilon \circ \sigma) = \Theta u(\mathrm{L}a, \mathrm{L}b)\,(f \circ \Upsilon \circ \sigma),$$

ce qui veut dire :

$$\mathrm{L}\,\Theta(\mathrm{A})\,(a, \mathcal{V}, \rho)\,(f) = \Theta(\mathrm{B})\,(\mathrm{L}a, \mathcal{V}, \rho \circ {}^t\mathrm{L})\,(f).\ ■$$

Rappelons que, si A est un espace de Banach et K un compact, on a un isomorphisme entre $\mathrm{A} \hat{\otimes}_\varepsilon \mathcal{C}(\mathrm{K})$ et $\mathcal{C}(\mathrm{K}, \mathrm{A})$ avec égalité des normes. Ceci prouve que la norme ε sur $\mathrm{A} \otimes \mathcal{C}(\mathrm{K})$ est sous-multiplicative; alors, d'après le théorème 2 de [8], le spectre de $\mathrm{A} \hat{\otimes}_\varepsilon \mathcal{C}(\mathrm{K})$ est $\hat{\mathrm{A}} \times \mathrm{K}$, et le couple (χ, x) est le caractère qui, à $\varphi \in \mathcal{C}(\mathrm{K}, \mathrm{A})$, fait correspondre $\chi(\varphi(x))$.

Théorème 2. — *Soit* A *une algèbre de Banach commutative unifère. Soit* $(a, \mathcal{V}, \rho)$ *un triplet de* A, *et soit* V *un voisinage de* $\rho(\hat{\mathrm{A}})$ *dans* $\mathcal{V}$. *Alors il existe une application continue* r *d'un certain voisinage* Ω *de* a *dans* A^n, *à valeurs dans* $\mathcal{C}(\hat{\mathrm{A}}, \mathrm{V})$, *telle que* $\rho = r(a)$ *et que, pour tout* $a' \in \Omega$, $(a', \mathcal{V}, r(a'))$ *soit un triplet de* A.

De plus, pour toute telle application r, *si* f *est une fonction analytique sur* V (tout entier), *l'application* $q : \Omega \to \mathrm{A}$ *définie par*

$$q(a') = \Theta(\mathrm{A})\,(a', \mathrm{V}, r(a'))\,(f)$$

est continue.

Démonstration. — La première assertion résulte aussitôt du corollaire 3 appliqué au triplet (a, V, ρ).

Comme Ω est métrisable, pour montrer que q est continue il suffit de montrer que ses restrictions à tout compact sont continues. Soit K un compact de Ω et posons

$$\mathrm{B} = \mathcal{C}(\mathrm{K}, \mathrm{A}) = \mathrm{A} \hat{\otimes}_\varepsilon \mathcal{C}(\mathrm{K}),$$

on a alors $B = K \times A$. Soit b l'élément de B^n défini par l'injection canonique de K dans A^n. Définissons $\beta : B \to \mathcal{V}$ par

$$\beta(a', \chi) = (r(a'))(\chi),$$

où a' décrit K et χ décrit $\hat{A}$. Si π est l'étalement de $\mathcal{V}$, on a

$$\pi \circ \beta(a', \chi) = \pi((r(a'))(\chi)) = \hat{a}'(\chi) = \hat{b}(a', \chi).$$

Alors (b, V, β) est un triplet car on a

$$\beta(K \times \hat{A}) = \bigcup_{a' \in K} (r(a'))(\hat{A}) \subseteq V.$$

Pour $a' \in K$, soit $L_{a'}$, le morphisme évaluation en a' de $B = \mathcal{C}(K, A)$ dans A. Si $b_j (j = 1, \ldots, n)$ désigne la $j^{\text{ième}}$ coordonnée de b (c'est-à-dire la composée de $b : K \to A^n$ avec la $j^{\text{ième}}$ coordonnée $A^n \to A$), on a

$$L_{a'}(b_j) = a'_j,$$

où l'on a posé $a' = (a'_1, \ldots, a'_n)$. Ceci peut s'écrire, selon nos conventions de notations :

$$L_{a'}(b) = a',$$

le lemme 6 nous donne alors

$$L_{a'}\Theta(B)(b, V, \beta)(f) = \Theta(A)(a', V, \beta \circ {}^tL_{a'})(f);$$

mais ${}^tL_{a'}$ est l'injection de $\hat{A}$ dans $\hat{B}$ définie par $\chi \to (a', \chi)$, donc $\beta \circ {}^tL_{a'} = r(a')$, et l'on en déduit

$$L_{a'}\Theta(B)(b, V, \beta)(f) = q(a').$$

Il nous suffit maintenant de montrer que pour $c \in B^n$, $L_{a'}(c)$ dépend continuement de a', et cela est bien clair car

$$B^n = (\mathcal{C}(K, A))^n = \mathcal{C}(K, A^n)$$

et alors $L_{a'}$ est l'évaluation en $a' \in K$ dans ce dernier espace de fonctions. ■

Lemme 7. — *Soit* A *une algèbre de Banach* (commutative unifère). *Soit* $(a, \mathcal{V}, \rho)$ *un triplet de* A, *et soient* $f_1, \ldots, f_m$ *des fonctions analytiques au voisinage de* $\rho(\hat{A})$. *Pour* $j = 1, \ldots, m$, *on pose*

$$c_j = \Theta(A)(a, \mathcal{V}, \rho)(f_j).$$

Appelons f *l'application* $(f_1, \ldots, f_m) : \mathcal{V} \to \mathbf{C}^m$ *et* c *la famille* $(c_1, \ldots, c_m)$; *alors on a*

$$\hat{c} = f \circ \rho,$$

et de plus, si g est holomorphe au voisinage de $\hat{c}(\hat{A})$, $g \circ f$ *est holomorphe au voisinage de* $\rho(\hat{A})$ *et l'on a*

$$\Theta(A)(a, \mathcal{V}, \rho)(g \circ f) = \Theta u(A)(c)(g).$$

Démonstration. — La première égalité à démontrer résulte immédiatement du fait que $\Theta(A)(a, \mathcal{V}, \rho)$ est compatible avec les caractères.

Soient b, Υ, σ définis comme au début de la démonstration du théorème 1. On a par définition :

$$c_j = \Theta u(A)(a, b)(f_j \circ \Upsilon \circ \sigma),$$
$$\Theta(A)(a, \mathcal{V}, \rho)(g \circ f) = \Theta u(A)(a, b)(g \circ f \circ \Upsilon \circ \sigma).$$

Introduisant les fonctions $f'_j = f_j \circ \Upsilon \circ \sigma$, on voit qu'on peut se ramener à montrer le lemme dans le cas d'un triplet uniforme; et dans ce cas le résultat est déjà connu ([3], chap. 1, § 4, th. 2). ■

Après avoir utilisé le corollaire 2 (basé sur la compacité du spectre) pour passer du cas uniforme au cas multiforme, nous allons maintenant utiliser le lemme 6 pour passer à des algèbres dont le spectre n'est pas nécessairement compact. Soit A *une algèbre* (sur $\mathbf{C}$, commutative, unifère) *localement multiplicativement convexe, séparée, complète* (en abrégé : lmcsc). La topologie de A peut alors être définie par une famille filtrante $\|.\|_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{C}\!\mathcal{L}$, de semi-normes sous-multiplicatives. Pour chaque α, on appellera A_α la séparée complétée de A munie de $\|.\|_\alpha$, et l'on appellera $\Phi_\alpha : A \to A_\alpha$ le morphisme canonique. Alors $\Phi_\alpha A$ est dense dans A et A est limite projective des A_α. Les applications ${}^t\Phi_\alpha : \hat{A}_\alpha \to \hat{A}$ sont injectives et nous permettent d'identifier les $\hat{A}_\alpha$ à des compacts de $\hat{A}$; et alors $\hat{A}$ est réunion des $\hat{A}_\alpha$. On a de plus

$$(\Phi_\alpha a)\hat{} = \hat{a}\,|\,\hat{A} = \hat{a} \circ {}^t\Phi_\alpha.$$

Enfin, pour $\alpha' \geqq \alpha$, notons $\Phi_\alpha^{\alpha'} : A_{\alpha'} \to A_\alpha$ le morphisme canonique.

Dans ce qui suit, si $H \supseteq H'$ sont des parties d'une variété analytique complexe, $M(H, H')$ sera le morphisme canonique de $\mathcal{O}(H)$ dans $\mathcal{O}(H')$.

THÉORÈME 3. — *Soit* $\mathfrak{A}$ *la catégorie des algèbres localement multiplicativement convexes* (commutatives, unifères), *séparées, complètes et des morphismes d'algèbres* (continus, unitaires). *Il existe sur* $\mathfrak{A}$ *un et un seul foncteur fonctionnel holomorphe* Θ; *et ce foncteur est compatible avec les caractères.*

Démonstration. — Soit A un objet de $\mathfrak{A}$. Comme ci-dessus A est limite projective des algèbres de Banach A_α. Soit $(a, \mathcal{V}, \rho)$ un triplet de A. Comme $(\Phi_\alpha a)\hat{} = \hat{a}\,|\,\hat{A}_\alpha$, il est clair que $(\Phi_\alpha a, \mathcal{V}, \rho\,|\,\hat{A}_\alpha)$ est un triplet de A_α. Pour $\alpha' \geqq \alpha$, le lemme 6 nous donne alors l'égalité

$$\Theta(A_\alpha)(\Phi_\alpha a, \mathcal{V}, \rho\,|\,\hat{A}_\alpha) \circ M(\rho(\hat{A}_{\alpha'}), \rho(\hat{A}_\alpha)) = \Phi_\alpha^{\alpha'} \circ \Theta(A_{\alpha'})(\Phi_{\alpha'} a, \mathcal{V}, \rho\,|\,\hat{A}_{\alpha'}).$$

Posant pour chaque α :

$$L_\alpha = \Theta(A_\alpha)\big(\Phi_\alpha a, \mathcal{V}, \rho \,|\, \hat{A}_\alpha\big) \circ M\big(\rho(\hat{A}), \rho(\hat{A}_\alpha)\big),$$

on en déduit l'égalité

$$L_\alpha = \Phi_\alpha^{\alpha'} \circ L_{\alpha'}.$$

Comme A est limite projective des A_α, il existe alors un et un seul morphisme L de $\mathcal{O}\big(\rho(\hat{A})\big)$ dans A tel que l'on ait pour tout α :

$$L_\alpha = \Phi_\alpha \circ L.$$

Ce morphisme L ne dépend pas du système des semi-normes $\|.\|_\alpha$; en effet, si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ sont deux familles filtrantes de semi-normes sous-multiplicatives définissant la topologie de A, on peut trouver une troisième telle famille $\mathcal{A}''$ contenant les deux autres et il est alors facile de voir que l'on trouve le même morphisme L, que l'on utilise $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, ou $\mathcal{A}''$ dans la construction précédente.

En particulier si A est de Banach on peut prendre pour $\mathcal{A}$ la famille formée par la norme de A toute seule, et l'on voit alors que L est égal à $\Theta(A)(a, \mathcal{V}, \rho)$. Ceci nous autorise à poser par définition (que A soit ou non de Banach) :

$$\Theta(A)(a, \mathcal{V}, \rho) = L.$$

Que ce morphisme soit un morphisme f. h. compatible avec les caractères de A se déduit aisément de ce que les $\Theta(A_\alpha)\big(\Phi_\alpha a, \mathcal{V}, \rho \,|\, \hat{A}_\alpha\big)$ sont des morphismes f. h. compatibles avec les caractères des A.

Enfin, que le calcul f. h. $\Theta(A)$ soit simplifiable se déduit aisément du fait que les $\Theta(A_\alpha)$ sont simplifiables.

Notons que, par construction de $\Theta(A)(a, \mathcal{V}, \rho)$, si f est holomorphe au voisinage de $\rho(\hat{A})$, l'élément $\Theta(A)(a, \mathcal{V}, \rho)(f)$ est caractérisé par le fait que pour tout α on a la relation

$$\boxed{\Phi_\alpha \Theta(A)(a, \mathcal{V}, \rho)(f) = \Theta(A_\alpha)(\Phi_\alpha a, \mathcal{V}, \rho \,|\, \hat{A}_\alpha)(f).} \tag{1}$$

Avant de montrer que $A \to \Theta(A)$ est foncteur f. h., montrons que si Ξ est un foncteur f. h. sur $\mathfrak{A}$, on a nécessairement pour toute A, $\Xi(A) = \Theta(A)$. En effet, pour tout α les calculs $\Xi(A_\alpha)$ et $\Theta(A_\alpha)$ sont des calculs f. h. simplifiables, donc ils sont égaux en vertu du théorème 1; ensuite la définition d'un foncteur f. h. appliquée au morphisme Φ_α nous donne

$$\Phi_\alpha \Xi(A)(a, \mathcal{V}, \rho)(f) = \Xi(A_\alpha)(\Phi_\alpha, \mathcal{V}, \rho \,|\, \hat{A}_\alpha)(f)$$

quels que soient $(a, \mathcal{V}, \rho)$ et f; compte tenu de la relation (1) on a donc bien

$$\Xi(A) = \Theta(A).$$

Ceci prouve qu'il existe sur $\mathfrak{A}$ au plus un foncteur f. h.

Signalons au passage que nous ignorons si $\Theta(A)$ est le seul calcul f. h. simplifiable que l'on puisse associer à A [le principal obstacle est que $\mathcal{O}(\rho(\hat{A}))$ n'est généralement pas limite projective des $\mathcal{O}(\rho(\hat{A}_\alpha))$].

Il nous reste à montrer que les $\Theta(A)$ forment un foncteur f. h., autrement dit à généraliser le lemme 6 aux algèbres lmcsc quelconques.

Soit $N : A \to B$ un morphisme de $\mathfrak{A}$. Soient $\|.\|_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{A}$ et $\|.\|_\beta$, $\beta \in \mathcal{B}$ définissant les topologies de A et B, et introduisons comme ci-dessus les notations A_α, Φ_α, $\Phi_\alpha^{\alpha'}$ (resp. B_β, Ψ_β, $\Psi_\beta^{\beta'}$).

Fixons-nous un indice $\beta \in \mathcal{B}$. Le morphisme $\Psi_\beta \circ N$ est continu et à valeur dans un espace normé, l'image réciproque de la boule unité de B_β par ce morphisme est un voisinage de o dans A donc contient un voisinage de o pour une certaine $\|.\|_\alpha$; alors $\Psi_\beta \circ N$ est continu pour $\|.\|_\alpha$ et, puisque $\Phi_\alpha A$ est dense dans A_α, il existe un morphisme $N_\alpha^\beta : A_\alpha \to B_\beta$ tel que

$$\Psi_\beta \circ N = N_\alpha^\beta \circ \Phi_\alpha.$$

Cela étant, soit $(a, \mathcal{V}, \rho)$ un triplet de A, nous voulons montrer que quelle que soit f analytique au voisinage de $\rho(\hat{A})$, on a

$$N\Theta(A)\,(a, \mathcal{V}, \rho)\,(f) = \Theta(B)\,(Na, \mathcal{V}, \rho \circ {}^t N)\,(f).$$

Il nous suffit pour cela de montrer que pour tout β, on a

$$\Psi_\beta N\Theta(A)\,(a, \mathcal{V}, \rho)\,(f) = \Psi_\beta \Theta(B)\,(Na, \mathcal{V}, \rho \circ {}^t N)\,(f).$$

A chaque β on peut associer un α et un N_α^β comme ci-dessus, alors compte tenu de l'égalité (1) et de son analogue pour B, on est ramené à montrer que

$$N_\alpha^\beta \Theta\,(A_\alpha)\,(\Phi_\alpha a, \mathcal{V}, \rho \mid \hat{A}_\alpha)\,(f) = \Theta\,(B_\beta)\,(\Psi_\beta N a, \mathcal{V}, \rho \circ {}^t N \mid \hat{B}_\beta)\,(f).$$

Enfin cette dernière égalité est bien vraie, en effet on l'obtient en appliquant le lemme 6 au morphisme N_α^β, compte tenu des deux égalités

$$\Psi_\beta N a = N_\alpha^\beta \Phi_\alpha a, \qquad (\rho \mid \hat{A}_\alpha) \circ {}^t N_\alpha^\beta = \rho \circ {}^t N \mid \hat{B}_\beta. \quad \blacksquare$$

THÉORÈME 4. — *Soit* A *une algèbre* (commutative, unifère) *localement multiplicativement convexe, séparée, complète. Soit* $(a, \mathcal{V}, \rho)$ *un triplet de* A. *Soient* $f_1, \ldots, f_m$ *des fonctions analytiques au voisinage de* $\rho(\hat{A})$. *Pour* $j = 1, \ldots, m$, *on pose*

$$c_j = \Theta\,(A)\,(a, \mathcal{V}, \rho)\,(f_j).$$

Appelons f *l'application* $(f_1, \ldots, f_m) : \mathcal{V} \to \mathbf{C}^m$ *et* c *la famille* $(c_1, \ldots, c_m)$; *alors on a*

$$\hat{c} = f \circ \rho.$$

et de plus, si g *est holomorphe au voisinage de* $\hat{c}(\hat{A})$, $g \circ f$ *est holomorphe au voisinage de* $\rho(\hat{A})$ *et l'on a*

$$\Theta(A)\,(a, \mathcal{V}, \rho)\,(g \circ f) = \Theta u\,(A)\,(c)\,(g).$$

La démonstration est facile, compte tenu du lemme 7 et de l'égalité (1) de la démonstration du théorème 3.

Remarque 3. — Le théorème 2 ne se généralise pas aux algèbres lmcsc quelconques; en effet soit A une algèbre lmcsc qui n'est pas à inverse continu, et soit $\mathcal{V} = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ étalé trivialement, si a est l'unité de A, considérant le triplet $(a, \mathcal{V}, \hat{a})$, on voit qu'il n'existe aucun voisinage Ω de a répondant aux conditions du théorème 2. On a toutefois le résultat suivant :

PROPOSITION 2. — *Soit* A *une algèbre lmcsc. Soit* U *un ouvert de* $\mathbf{C}^n$, *et soit* A_U *l'ensemble des* $a \in A^n$ *tels que* sp. $a \subseteq U$. *Alors, si f est analytique sur* U, *l'application de* A_U *dans* A :

$$a \to \Theta u(A)(a)(f)$$

est continue.

Démonstration. — Il est facile de voir que A_U est limite projective des $(A_\alpha)_U$. Alors, l'application considérée est continue car c'est la limite projective des applications :

$$\Phi_\alpha a \to \Theta u(A_\alpha)(\Phi_\alpha a)(f)$$

qui sont continues en vertu du théorème 2. ∎

Terminons ce paragraphe par des remarques diverses.

Remarque 4. — Soit A une algèbre lmcsc, et soit $a \in A^n$. Soit f analytique au voisinage de sp. a. Alors pour que $\Theta u(A)(a)(f)$ soit nul, il suffit que f soit nulle au voisinage de sp. a [le germe de f est alors nul et $\Theta u(A)(a)$ est linéaire]; mais il ne suffit pas que f soit nulle sur sp. a. Par exemple, soit A l'algèbre des germes de fonctions holomorphes au voisinage de $0 \in \mathbf{C}$, soit $a \in A$ le germe de l'identité de $\mathbf{C}$, alors on a sp. $a = \{0\}$; soit f l'identité de $\mathbf{C}$, on a

$$\Theta u(A)(a)(f) = a \neq 0,$$

et cependant f est nulle sur sp. a.

Remarque 5. — Soit A une algèbre de Banach. Soit $a \in A$; les éléments de la forme $\Theta u(A)(a)(f)$ sont dans la sous-algèbre fermée pleine engendrée dans A par a (*cf.* [3], chap. I, § 4, n° 8, remarque); mais il n'en est pas de même pour les éléments de la forme $\Theta(A)(a, \mathcal{V}, \rho)(f)$ pour un triplet $(a, \mathcal{V}, \rho)$ non uniforme. Par exemple, soient X le segment réel $[0, 1]$ et A l'algèbre $\mathcal{C}(X)$, soit $a \in A$ la fonction $t \to e^{2i\pi t}$; alors toutes les fonctions $x \in A$ appartenant à la sous-algèbre fermée pleine engendrée par a vérifient $x(0) = x(1)$; mais on verra que toutes les racines carrées de a sont de la forme $\Theta(A)(a, \mathcal{V}, \rho)(f)$ (*cf.* ci-dessous remarque 7), et pourtant, aucune racine carrée de a ne vérifie $x(0) = x(1)$.

Remarque 6. — Soit A une algèbre de Banach; soit $\mathcal{V}$ une variété étalée par π dans $\mathbf{C}^n$. A chaque ouvert Ω de A^n on associe l'ensemble $\mathcal{F}_\Omega$ des applications continues ψ de Ω dans $\mathcal{C}(\hat{A}, \mathcal{V})$ telles que $\pi \circ \psi(a) = \hat{a}$. Il est évident que les $\mathcal{F}_\Omega$ forment un faisceau $\mathcal{F}$ de base A^n. Ce faisceau est le faisceau des sections d'un espace E étalé par ε dans A^n (*cf.* par exemple [4], th. 1.2.1).

Un élément ξ de E s'identifie alors à une application $A \to \mathcal{V}$ telle que $\pi \circ \xi = (\varepsilon(\xi))\hat{}$. Soit de plus f holomorphe sur $\mathcal{V}$ (tout entière), on peut associer à f l'application de E dans A :

$$f^A: \quad \xi \to \Theta(A)\,(\varepsilon(\xi), \mathcal{V}, \xi)\,(f).$$

D'autre part, si $x \in A^n$, $\overset{-1}{\varepsilon}(x)$ est l'ensemble (peut-être vide) des applications $\xi : \hat{A} \to \mathcal{V}$ telles que $\pi \circ \xi = \hat{x}$.

On verra plus loin (remarque 8) des applications de ceci.

III. — Équations analytiques.

Dans tout ce paragraphe A désignera une algèbre lmcsc. Pour le calcul f. h. uniforme introduisons la notation

$$\bar{f}(a) = \Theta u(A)\,(a)\,(f).$$

Introduisons également la notation sp. a pour désigner l'ensemble $\hat{a}(\hat{A})$.

THÉORÈME 5. — *Soit* G *une fonction analytique définie sur un ouvert* U *de* $\mathbf{C}^{n+1}$; *on la notera* $G(w, z)$ *avec* $w \in \mathbf{C}$ *et* $z \in \mathbf{C}^n$. *Soit* $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A^n$. *On suppose qu'il existe une fonction* $\varphi : \hat{A} \to U$ *telle que, pour tout* $\chi \in \hat{A}$, *on ait*

$$G(\varphi(\chi), \hat{a}(\chi)) = 0 \qquad \text{et} \qquad D_1 G(\varphi(\chi), \hat{a}(\chi)) \neq 0.$$

Alors il existe un élément b *de* A *tel que*

$$b = \varphi \qquad \text{et} \qquad \overline{G}(b, a) = 0.$$

De plus, si A *est de Banach, il existe un voisinage* Ω *de* a, *et une application continue* $\bar{g} : \Omega \to A$ *telle que*

$$\bar{g}(a) = b$$

et que, pour tout $a' \in \Omega$, *on ait* sp. $(\bar{g}(a'), a') \subseteq U$ *et*

$$G(\bar{g}(a'), a') = 0.$$

Démonstration. — Définissons sur U les fonctions $g : (w, z) \to w$ et $\pi : (w, z) \to z$. Alors l'ensemble $\mathcal{V}$ des couples (w, z) de U tels que l'on ait à la fois $G(w, z) = 0$ et $D_1 G(w, z) \neq 0$ est une variété étalée par π

dans C^n (cela résulte du théorème des fonctions implicites); et g est ainsi une fonction analytique sur $\mathcal{V}$.

Posons $\rho = (\varphi, \hat{a})$; alors $\pi \circ \rho = \hat{a}$ et $(a, \mathcal{V}, \rho)$ est un triplet de A.

Si A est de Banach, d'après le théorème 2 il existe un voisinage Ω de a et une application continue $r : \Omega \to \mathcal{C}(\hat{A}, \mathcal{V})$ telle que $r(a) = \rho$ et que pour tout $a' \in \Omega$ on ait $\pi \circ r(a') = \hat{a}'$.

Revenant au cas général, appelons Ω l'ensemble ci-dessus si A est de Banach, et l'ensemble $\{a\}$ si A n'est pas de Banach. On définit une application $\overline{g} : \Omega \to A$, en posant

$$\overline{g}(a') = \Theta(A)(a', \mathcal{V}, r(a'))(g);$$

cette application est continue (si A est de Banach cela résulte du théorème 2, sinon, c'est trivial).

Posons

$$b = \overline{g}(a),$$

comme, par définition de ρ, on a $g \circ \rho = \varphi$, on en déduit

$$\hat{b} = g \circ r(a) = g \circ \rho = \varphi.$$

Montrons maintenant que, quel que soit $a' \in \Omega$, on a

$$\text{sp.}(\overline{g}(a'), a') \subseteq U.$$

D'après la compatibilité des morphismes f. h. avec les caractères continus on a

$$(\overline{g}(a'), a')^\wedge = (g \circ r(a'), \hat{a}'),$$

ou encore par définition de $r(a')$:

$$(\overline{g}(a'), a')^\wedge = (g \circ r(a'), \pi \circ r(a'))$$

ou encore par définition de g et π :

$$(\overline{g}(a'), a')^\wedge = r(a');$$

et comme $r(a')$ est à valeur dans $\mathcal{V}$, on trouve

$$\text{sp.}(\overline{g}(a'), a') \subseteq \mathcal{V} \subseteq U.$$

Ceci montre que $\overline{G}(\overline{g}(a'), a')$ a bien un sens. Nous allons maintenant montrer que la valeur de cette expression est o. Rappelons au passage que le fait que G soit nulle sur sp. $(g(a'), a')$ ne suffit pas pour cela (*cf.* remarque 4).

Soient $f_0, \ldots, f_n$ les fonctions coordonnées de $\mathbf{C}^{n+1}$; alors on a $f_0 = g$ et $(f_1, \ldots, f_n) = \pi$. Par définition d'un calcul f. h. on a, pour $i = 1, \ldots, n$:

$$\Theta(A)(a', \mathcal{V}, r(a'))(f_i) = a'_i.$$

Alors, posant $f = (f_0, \ldots, f_n)$, on peut appliquer le théorème 4, et l'on trouve

$$\Theta(A)(a', \mathcal{V}, r(a'))(G \circ f) = \Theta u(A)(\bar{g}(a'), a')(G),$$

ce qui s'écrit encore, puisque $G \circ f$ est nulle sur $\mathcal{V}$:

$$0 = \overline{G}(\bar{g}(a'), a'). \quad \blacksquare$$

L'idée qu'on puisse avoir un tel théorème est due à Arens et Calderon, mais les résultats que ces auteurs obtiennent en ce sens se bornent à ceci :

Dans les hypothèses du théorème 5 ci-dessus il existe b tel que $\hat{b} = \varphi$; et si de plus la série de Taylor de G converge dans U, alors on a $\overline{G}(b, a) = 0$ (*cf.* [2], th. 6.8 et 8.1).

De plus ces résultats ne sont obtenus que pour A de Banach.

Nous venons de donner un théorème d'existence de solutions d'équations analytiques, donnons maintenant un théorème d'unicité. Pour cela, nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 8. — *Soit* A *une algèbre de Banach, soit* $\mathcal{I}$ *son radical, soit* Ω *un voisinage de* $\mathcal{I}$. *Soit* $u_1, \ldots, u_k, \ldots$ *une suite (finie ou non) d'éléments de* A, *avec* u_1 *inversible. On suppose que la série* $\sum u_k x^k$ *converge pour* $x \in \Omega$, *et l'on appelle* $T(x)$ *la somme de cette série. Alors* $T|\mathcal{I}$ *effectue une bijection de* $\mathcal{I}$ *sur* $\mathcal{I}$.

Ceci est établi dans [2], th. 7.3 (en fait, dans [2], les auteurs disent seulement que $T : \mathcal{I} \to \mathcal{I}$ est surjective, mais leur démonstration prouve que cette application est bijective).

Corollaire 4. — *Dans les hypothèses du théorème* 5, *on suppose de plus que* U *est un polycylindre de centre* $0 \in \mathbf{C}^{n+1}$ *et que la série de Taylor de* G *en* 0 *converge dans* U. *Alors, l'élément* b *tel que* $\hat{b} = \varphi$ *et* $\overline{G}(b, a) = 0$ *est unique.*

Démonstration :

Cas où A *est de Banach :* Le théorème 5 nous donne un élément b; il s'agit de montrer que, si $b' \in A$ avec $\hat{b}' = \varphi$ et $\overline{G}(b', a) = 0$, on a $b = b'$. Pour cela il suffit de montrer, $\mathcal{I}$ étant le radical de A, que l'application $T : \mathcal{I} \to A$ définie par

$$T(x) = \overline{G}(b + x, a)$$

est injective.

Soit W un polycylindre ouvert borné de $\mathbf{C}^{n+1}$ tel que $\overline{W} \subseteq U$ et sp. $(b, a) \subseteq W$. Posons, pour $t \in \mathbf{C}$ et $(w, z) \in U$,

$$h(w, z, t) = G(w + t, z),$$

$$h_k(w, z, t) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n!} D_1^i G(w, z) . t^i ;$$

alors, la formule de Taylor nous dit qu'il existe un disque ouvert V de centre O dans $\mathbf{C}$ tel que $(w, z) \in W$ et $t \in V$ impliquent

$$h(w, z, t) = \lim h_k(w, z, t)$$

uniformément sur tout compact de $W \times V$.

Les $x \in A$ tels que sp. $x \subseteq V$ forment un voisinage Ω de o; pour tout $x \in \Omega$ les germes des h_k convergent dans $\mathcal{O}(\text{sp.}\,(b, a, x))$ vers le germe de h. Comme le morphisme $\Theta u(A)\,(b, a, x)$ est continu, on a

$$\overline{h}(b, a, x) = \lim \overline{h}_k(b, a, x).$$

Pour $i = 1, \ldots, k, \ldots,$ posons

$$u_i = \frac{1}{n!} \Theta u(A)\,(b, a)\,(D_1^i G) ;$$

alors la série $\sum u_i x^i$ converge pour $x \in \Omega$, et sa somme est

$$\overline{h}(b, a, x) = \overline{G}(b + x, a) = T(x).$$

Mais $\mathcal{J} = \{x \in A ; \text{sp.}\, x = \{o\}\}$ est contenu dans Ω; alors le lemme 8 nous dit que $T | \mathcal{J}$ est injective, puisque u_1 est inversible [en effet, par hypothèse, $\hat{u}_1 = D_1 G \circ (\hat{b}, \hat{a})$ ne s'annule pas sur $\hat{A}$].

Cas général : A est limite projective des A_α. Pour chaque α, il existe un et un seul b_α tel que $\hat{b}_\alpha = \varphi | \hat{A}_\alpha$ et $\overline{G}(b_\alpha, \Phi_\alpha a) = o$. Alors b est l'unique élément de A tel que pour tout α on ait $\Phi_\alpha b = b_\alpha$. ■

Corollaire 5. — *On considère le polynôme à coefficients dans* A :

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n.$$

On suppose qu'il existe $\varphi \in \mathcal{C}(\hat{A})$ *tel que*

$$\hat{a}_0 + \hat{a}_1 \varphi + \ldots + \hat{a}_n \varphi^n = o$$

et que la fonction

$$\hat{a}_1 + 2\hat{a}_2 \varphi + \ldots + n\hat{a}_n \varphi^{n-1}$$

ne s'annule en aucun point de $\hat{A}$. *Alors il existe un et un seul* $b \in A$ *tel que* $\hat{b} = \varphi$ *et que* $P(b) = o$.

Pour voir cela, on applique le corollaire 4 en posant, pour $w \in \mathbf{C}$ et $z = (z_0, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^{n+1}$:

$$G(w, z) = z_0 + z_1 w + \ldots + z_n w^n. \blacksquare$$

L'existence (mais non l'unicité) d'un tel b est établie dans [2], dans le cas où A est de Banach ([2], th. 4.1).

Appliquant le corollaire 5 au cas du polynôme $P(x) = x^2 - x$ on retrouve un résultat bien connu dû à Chilov, Arens et Calderon ([2], th. 3.4) pour le cas des algèbres de Banach, et étendu au cas général par Rosenfeld ([7]) :

Corollaire 6. — *On suppose que* $\hat{A}$ *est somme topologique de deux ensembles* X *et* Y; *alors il existe un et un seul idempotent* $c \in A$ *tel que* $\hat{c}$ *soit la fonction caractéristique de* X.

En combinant le théorème 5 et le corollaire 5 on pourrait obtenir un théorème de continuité des zéros d'un polynôme en fonction des coefficients.

Appliquant le corollaire 5 au polynôme $P(x) = a - x^n$, on trouve :

Corollaire 7. — *Soit a un élément inversible de* A. *La transformation de Gelfand de* A *établit une bijection entre les racines $n^{-\text{ièmes}}$ de a et les racines $n^{-\text{ièmes}}$ de $\hat{a}$.*

Pour tout $x \in A$, posons $\exp(x) = \Theta u(A)(x)(\exp)$ où exp désigne fonction exponentielle de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$. Appelons logarithme de $a \in A$ tout x tel que $\exp(x) = a$. Posons, pour $w, z \in \mathbf{C}$, $G(w, z) = z - \exp w$. Alors, appliquant le corollaire 4, on trouve :

Corollaire 8. — *Soit a un élément inversible de* A. *La transformation de Gelfand de* A *établit une bijection entre les logarithmes de a dans* A *et les logarithmes de $\hat{a}$ dans $\mathcal{C}(\hat{A})$.*

Remarque 7. — Revenons au corollaire 7. En reprenant les démonstrations du théorème 5 et du corollaire 5, on voit aisément que toutes les racines $n^{-\text{ièmes}}$ de a sont de la forme $\Theta(A)(a, \mathcal{V}, \rho)(f)$ pour une certaine ρ et une certaine f.

Remarque 8. — Revenons à la démonstration du théorème 5 pour le cas des logarithmes, c'est-à-dire pour le cas où $G(w, z) = z - \exp w$. Alors $\mathcal{V}$ est le graphe de la fonction $\exp : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, π est la projection sur l'espace d'arrivée et g est la projection sur l'espace de départ ($\mathcal{V}$ est donc le revêtement universel de $\mathbf{C} \setminus \{0\}$). Le corollaire 8 nous dit alors que l'application

$$\rho \to \Theta(A)(a, \mathcal{V}, \rho)(g)$$

établit une bijection entre l'ensemble des $\rho \in \mathbf{C}(\hat{A}, \mathcal{V})$ tels que $\pi \circ \rho = \hat{a}$ et l'ensemble des logarithmes de a.

Supposons que A soit de Banach. Soit L l'ensemble des $a \in A$ ayant un logarithme; alors L est ouvert (*cf.* th. 2; *cf.* aussi [3], chap. I, § 4, n° 9). Reprenons les notations de la remarque 6. Pour tout $a \in A$, l'ensemble (peut-être vide) $\overset{-1}{\varepsilon}(a)$ s'identifie à l'ensemble des $\rho \in \mathcal{C}(\hat{A}, \mathcal{V})$ tels que $\pi \circ \rho = \hat{a}$; autrement dit, $\overset{-1}{\varepsilon}(a)$ s'identifie à l'ensemble des logarithmes de a.

On a donc un espace E étalé par ε dans A, et dont la fibre au-dessus de chaque a s'identifie à l'ensemble des logarithmes de a.

Les points de $\mathcal{V}$ étant repérés par leurs coordonnées (w, z), on définit pour tout $k \in \mathbf{Z}$ une application de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$:

$$R_k : \quad (w, z) \to (w + 2ik\Pi, z).$$

Soit Ω un ouvert de A tel que $\mathcal{F}_\Omega$ soit non vide, soit $\psi \in \mathcal{F}_\Omega$, c'est-à-dire que ψ est une application continue de Ω dans $\mathcal{C}(\hat{A}, \mathcal{V})$ telle que, pour tout $a \in \Omega$, on ait $\pi \circ \psi(a) = \hat{a}$. En vertu du théorème 2, tout point de L possède un tel voisinage Ω. D'autre part, il est facile de voir que l'ensemble $\mathcal{F}_\Omega$ est exactement l'ensemble des applications ψ_k définies par

$$\psi_k(a) = R_k \circ \psi(a).$$

Pour $\Omega' \subseteq \Omega$, il est facile de voir que $\mathcal{F}_{\Omega'}$ est l'ensemble des restrictions des ψ_k. Cela étant, revenons à la démonstration du théorème 1.2.1 de [4]; nous trouvons que $\overset{-1}{\varepsilon}(\Omega)$ est somme topologique d'ensemble Σ_k associés aux ψ_k, tels que, pour tout k, $\varepsilon | \Sigma_k$ soit injective et que $\varepsilon(\Sigma_k) = \Omega$.

Autrement dit, E est un revêtement de L.

On pourrait présenter ceci sans parler de faisceaux; en effet, puisque la fibre de E au-dessus de chaque a s'identifie à l'ensemble des logarithmes de a, c'est que E est le graphe de la fonction exp de A dans A, et que ε est la projection de ce graphe sur l'espace d'arrivée. Mais, de toute façon, pour montrer que ε est un étalement et E un revêtement, il faudrait faire intervenir le théorème 2. Néanmoins, ce point de vue nous permet de compléter le précédent; en effet, la projection de E sur l'espace de départ est alors un homéomorphisme, ce qui nous permet de conclure que E est connexe et simplement connexe.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Arens, *Analytic functional calculus in commutative topological algebras* (*Pacific J. of Math.*, vol. 11, 1961, p. 405-429).

[2] Arens et Calderon, *Analytic functions of several Banach algebra elements* (*Annals of Math.*, vol. 62, 1955, p. 204-216).

[3] Bourbaki, *Théories spectrales*, chap. I, § 4.

[4] Godement, *Théorie des faisceaux.*

[5] MARTINEAU, *Sur les fonctionnelles analytiques et la transformation de Fourier-Borel* [*J. d'Analyse* (Jérusalem), vol. 11, 1963, p. 1-164].

[6] MICHAËL, *Locally multiplicatively-convex topological algebras* (*Memoirs of the Amer. Math. Soc.*, nº 11, 1952).

[7] ROSENFELD, *Commutative F-algebras* (*Pacific J. of Math.*, vol. 16, 1965, p. 159-166).

[8] TOMIYAMA, *Tensor products of commutative Banach algebras* (*Tohoku Math. J.*, vol. 12, nº 1, 1960, p. 147-154).

[9] WAELBROECK, *Le calcul symbolique dans les algèbres commutatives* (*J. Math. pures et appl.*, t. 33, 1954, p. 147-186).

[10] WAELBROECK, *Théorie des algèbres de Banach et des algèbres localement convexes* (Séminaire Math. sup., Montréal, 1962).

(Manuscrit reçu le 4 novembre 1968.)

Michel BONNARD,
Les Châtaigniers,
36-Valençay.