PIERRE GRISVARD

Équations différentielles abstraites

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 2, nº 3 (1969), p. 311-395
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1969_4_2_3_311_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4^e série, t. 2, 1969, p. 311 à 395.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ABSTRAITES

PAR PIERRE GRISVARD

TABLE DES MATIÈRES.

1. INTRODUCTION. — Le but de ce travail est d'unifier les méthodes de résolution de plusieurs équations différentielles opérationnelles de différents types.

Les deux exemples les plus simples de telles équations sont les suivants, où f désigne une fonction donnée, à valeurs dans un espace de Banach X, u_0 et u_T des éléments donnés dans X, A un opérateur linéaire dans X de domaine D_A et où u désigne la fonction inconnue à valeurs dans D_A :

Le problème de Cauchy :

$$(1.1)\qquad \begin{cases} u'(t) + A\,u(t) = f(t) & (0 \leqq t \leqq T), \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Le problème de Dirichlet :

$$(1.2)\qquad \left\{\begin{aligned} u''(t)+\mathrm{A}\,u(t)&=f(t)\qquad (0\leqq t\leqq \mathrm{T}),\\ u(0)&=u_0,\\ u(\mathrm{T})&=u_{\mathrm{T}}.\end{aligned}\right.$$

A cause des conditions aux limites on ne peut pas réduire le second problème au problème de Cauchy.

Pour englober ces deux types de problèmes dans une seule théorie on remplace l'opérateur $u\mapsto -u'$ dans (1.1) et l'opérateur $u\mapsto -u''$ dans (1.2) par un opérateur linéaire abstrait B opérant dans un espace de Banach E formé de fonctions de t à valeurs dans X. Avec un choix approprié des espaces et des domaines, les problèmes (1.1) et (1.2) sont de la forme suivante, où f est un élément donné de E et u l'élément inconnu :

$$(1.3)\qquad \left\{\begin{aligned} &u\in \mathrm{D_A}\cap\mathrm{D_B},\\ &\mathrm{A}u-\mathrm{B}u=f.\end{aligned}\right.$$

Les n^os^ 2, 3 et 4 sont consacrés à l'étude des équations abstraites de la forme (1.3) et des équations de forme analogue relatives à plus de deux opérateurs (n° 3). La méthode utilisée pour résoudre le problème (1.3) s'inspire de la théorie des semi-groupes holomorphes qui a été construite pour résoudre le problème de Cauchy (1.1); elle est donc basée essentiellement sur l'emploi des intégrales de Dunford; les grandes lignes de cette méthode sont exposées au n° 2. On a évité d'utiliser les méthodes hilbertiennes, qui ont déjà été amplement utilisées dans l'étude des équations différentielles opérationnelles, par exemple dans le livre de Lions [1]. Une autre méthode pour résoudre les problèmes de la forme (1.3) inspirée de la théorie des semi-groupes continus et en particulier de la démonstration du théorème de Hille et Yosida, peut être utilisée; cette seconde méthode impose des hypothèses moins restrictives sur les opérateurs A et B, mais elle ne permet pas d'obtenir la même régularité pour la solution u, que la méthode employée ici. Ce second point de vue a été développé par Da Prato [1].

Après l'étude abstraite de l'équation (1.3), une première application des résultats obtenus est faite au n° 6, dans lequel on étudie le problème de Cauchy (1.1) et le problème un peu plus général de la forme (1.1) où l'opérateur A est remplacé par un opérateur A(t) dépendant de t. Le n° 5 est purement technique et prépare le n° 6. Le but essentiel du n° 6 est de faire le lien entre les résultats obtenus ici et ceux de la théorie maintenant classique des semi-groupes analytiques. On retrouve ainsi l'essentiel des résultats de Kato et Tanabe [1], par une méthode complètement différente.

Les trois derniers nos 8, 9 et 10, précédés d'un no 7 lui aussi purement technique et préparant les numéros suivants, sont consacrés à l'application des résultats abstraits à l'étude de problèmes mixtes en équations aux dérivées partielles : les applications sont particulièrement développées dans deux directions différentes : la résolution de problèmes mixtes paraboliques d'ordre quelconque en la variable de temps, dans les nos 8 et 9 où l'on trouve pour l'essentiel les mêmes résultats que Solonnikov [1], et la résolution de certains problèmes mixtes quasi-elliptiques au no 10 dont les résultats semblent nouveaux.

Les problèmes mixtes hyperboliques n'entrent pas dans le cadre des équations abstraites étudiées ici; par contre, les problèmes aux limites elliptiques et même certains problèmes aux limites elliptiques dégénérés peuvent être résolus par des méthodes analogues. Ce point de vue sera développé ailleurs.

Il a paru inévitable d'alourdir cet article avec les nos 5 et 7 et trois appendices où l'on récite essentiellement des sorites relatifs aux espaces de Sobolev, qui pourraient sans doute être trouvés dans la littérature mathématique (surtout soviétique) mais malheureusement trop dispersés (1).

Cet article reprend pour l'essentiel le contenu de huit leçons faites au Collège de France dans le cadre du Cours Peccot (janvier et février 1968).

2. Résolution d'une équation opérationnelle. Le cas de deux opérateurs.

2.1. On fixe ici les notations : On désigne par E un espace de Banach *complexe* (2). On note A et B deux opérateurs linéaires dans E, de domaines D_A et D_B respectivement; ces opérateurs seront toujours supposés *fermés*, sauf si le contraire est explicitement supposé. On note σ_A et σ_B les spectres de A et de B respectivement et ρ_A et ρ_B les ensembles résolvants de A et de B respectivement.

On utilisera les notions suivantes :

Définition 2.1. — *L'opérateur* A *est « admissible dans la direction* θ *», si* ρ_A *contient le rayon* $\arg\lambda = \theta$ *dans le plan complexe et il existe une constante* $C_A(\theta)$ *telle que*

$$|(A-\lambda)^{-1}|_{E\to E} \leq C_A(\theta)\,|\lambda|^{-1} \quad (^3)$$

pour $\arg\lambda = \theta$.

(1) La dépendance entre les différents numéros est la suivante : le no 6 utilise les résultats des nos 4 et 5 et les nos 8, 9, 10 utilisent les résultats des nos 2, 5 et 7.

(2) La norme de E est $x \mapsto |x|_E$.

(3) La norme d'un opérateur C linéaire continu dans E est notée $|C|_{E\to E}$.

Remarque 2.2. — Il est facile de voir que l'ensemble des θ dans la direction desquels A est admissible, est ouvert dans $\mathbf{R}$.

Si A est admissible dans la direction θ, alors pour $x \in E$, la fonction $\lambda \mapsto |A(A-\lambda)^{-1}x|_E$ est bornée sur le rayon $\arg\lambda = \theta$ et pour $x \in D_A$, la fonction $\lambda \mapsto |\lambda A(A-\lambda)^{-1}x|_E$ est bornée sur le rayon $\arg\lambda = \theta$. On utilisera les vecteurs x tels que la fonction $\lambda \mapsto |A(A-\lambda)^{-1}x|_E$ ait un comportement « intermédiaire » : Pour $1 \leqq q < +\infty$, on note $L^q_\star$ l'espace des fonctions numériques (complexes) mesurables et de puissance q intégrable dans $(0, +\infty)$ muni de la mesure (de Haar) $\dfrac{dt}{t}$ et pour $q = +\infty$, on note $L^{+\infty}_\star$ l'espace des fonctions numériques (complexes) mesurables et bornées dans $(0, +\infty)$ (4). On peut à présent poser la

Définition 2.3. — *On suppose que* A *est admissible dans la direction* θ, *alors pour* $0 < s < 1$ *et* $1 \leqq q \leqq +\infty$, *on désigne par* $D_A(s;q)$ *le sous-espace vectoriel de* E *formé des* $x \in E$ *tels que* $|t^s A(A - te^{i\theta})^{-1}x|_E \in L^q_\star$, *muni de la norme naturelle* (5).

Cette définition a un sens car on vérifie facilement qu'elle est indépendante du choix de θ dans la direction duquel A est admissible (à une équivalence de norme près). En effet, si θ et α sont deux telles directions, on a

$$A(A - te^{i\alpha})^{-1}x = A(A - te^{i\alpha})^{-1}\{A(A - te^{i\theta})^{-1}x - te^{i\theta}(A - te^{i\theta})^{-1}x\},$$

d'où

$$\begin{aligned}&|A(A - te^{i\alpha})^{-1}x|_E\\ &\quad\leqq \{|A(A - te^{i\alpha})^{-1}|_{E\to E} + |te^{i\theta}(A - te^{i\alpha})^{-1}|_{E\to E}\}\,|A(A - te^{i\theta})^{-1}x|_E\\ &\quad\leqq \{2C_A(\alpha) + 1\}\,|A(A - te^{i\theta})^{-1}x|_E;\end{aligned}$$

cette inégalité montre que

$$|t^s A(A - te^{i\alpha})^{-1}x|_E \in L^q_\star \tag{2.1}$$

dès que

$$|t^s A(A - te^{i\theta})^{-1}x|_E \in L^q_\star \tag{2.2}$$

et réciproquement en échangeant les rôles de α et de θ, que (2.2) implique (2.1); ceci justifie la définition 2.3.

Remarque 2.4. — L'opérateur A étant fermé, on vérifie facilement que $D_A(s;q)$ est complet.

---

(4) $L^q_\star$ est muni de la norme $\varphi \mapsto \left(\int_0^\infty |\varphi(t)|^q \dfrac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}$ pour $1 \leqq q < +\infty$ et de la norme $\varphi \mapsto \operatorname{vrai\,max}_{t>0} |\varphi(t)|$ pour $q = +\infty$; on notera cette norme $|\varphi|_{L^q_\star}$.

(5) i. e. $x \mapsto |x|_E + \big|\,|t^s A(A - te^{i\theta})^{-1}x|_E\big|_{L^q_\star} = |x|_{D_A(s;q)}$.

Les inclusions suivantes sont évidentes :

$$D_A \subset D_A(s_i;\, q) \subset E \qquad (0 < s < 1;\ 1 \leqq q \leqq +\infty).$$

On étudiera plus en détail, ces espaces aux points 5 et 8; dans la suite de ce point 2 on utilisera seulement le

LEMME 2.5. — *On suppose que* A *est admissible dans la direction* θ, *alors* D_A *est dense dans* $D_A(s;q)$ *pour* $0 < s < 1$ *et* $1 \leqq q < +\infty$.

En effet, on va montrer que $x \in D_A(s;q)$ (avec $q < +\infty$) est limite dans $D_A(s;q)$ de la suite

$$x_n = -n\, e^{i\theta}(A - n\, e^{i\theta})^{-1} x \qquad (n \to +\infty)$$

qui est évidemment dans D_A.

On a démontré dans Grisvard [1] (lemme 3.1, chap. I) que lorsque

$$|\, t^s A(A - t\, e^{i\theta})^{-1} x\,|_E \in L^q_* \qquad (q < +\infty),$$

alors

$$\lim_{t \to +\infty} A(A - t\, e^{i\theta})^{-1} x = 0, \tag{2.3}$$

dans E; on a

$$x - x_n = A(A - n\, e^{i\theta})^{-1} x,$$

on voit donc que x_n converge vers x dans E.

Ensuite, on a évidemment

$$|\, t^s A(A - t\, e^{i\theta})^{-1}(x - x_n)|_E \leqq \{ C_A(\theta) + 1 \} \,|\, t^s A(A - t\, e^{i\theta})^{-1} x\,|_E \in L^q_*$$

et

$$|\, t^s A(A - t\, e^{i\theta})^{-1}(x - x_n)\,|_E \to 0$$

lorsque $n \to +\infty$, pour $t > 0$ fixé; par conséquent, du théorème de Lebesgue, on déduit que

$$|\, t^s A(A - t\, e^{i\theta})^{-1}(x - x_n)\,|_E \to 0$$

lorsque $n \to +\infty$, pour la norme de L^q_*. On a ainsi prouvé que $x_n \to x$ lorsque $n \to +\infty$, pour la norme de $D_A(s;q)$.

REMARQUE 2.6. — Le lemme ci-dessus ne suppose pas que D_A est dense dans E; cependant si D_A est dense dans E, l'assertion (2.3) devient évidente mais le résultat ne peut pas être étendu au cas $q = +\infty$ (car de toutes façons on utilise le théorème de Lebesgue dans L^q_*).

2.2. On va maintenant énoncer le théorème essentiel pour la résolution des équations opérationnelles de la forme (1.3) :

THÉORÈME 2.7. — *Soient* A *et* B *deux opérateurs fermés et à domaines denses dans l'espace de Banach* E; *on suppose qu'il existe* θ_A, θ_B *avec* $0 \leqq \theta_B < \theta_A \leqq \pi$, *tels que :*

(i) A *est admissible dans toute direction* θ *telle que* $|\theta| < \theta_A$;

(ii) B *est admissible dans toute direction* θ *telle que* $|\theta - \pi| < |\theta_B - \pi|$;

(iii) A *est inversible;*

(iv) $[(A-\lambda)^{-1}; (B-\mu)^{-1}] = 0$ *pour* $\lambda \in \rho_A$ *et* $\mu \in \rho_B$ (6).

Alors le problème (1.3) *a au plus une solution; l'existence de la solution est assurée si on suppose que*

$$f \in D_A(s; q) \qquad [\text{ou } D_B(s, q)]$$

et alors la solution u *a la régularité suivante :*

$$Au, \quad Bu \in D_A(s; q) \qquad [\text{resp. } D_B(s; q)].$$

On ne répetera pas ici la démonstration de ce résultat qui a déjà été écrite dans Grisvard ([3], [7], [8]) et qui sera généralisée plus loin (théorème 3.1). On en rappelle seulement l'idée essentielle : la résolution du problème (1.3) est basée sur une construction explicite de la solution u sous la forme

$$u = + \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (A-\lambda)^{-1}(B-\lambda)^{-1} f \, d\lambda, \tag{2.4}$$

où γ est un contour (infini) dans $\rho_A \cap \rho_B$, et qui « sépare » σ_A de σ_B.

Remarque 2.8. — On peut remplacer les hypothèses (i)-(ii) du théorème 2.1 par la suivante : pour tout $\theta \in [0, 2\pi[$ l'un des deux opérateurs A ou B est admissible dans la direction θ : compte tenu de la remarque 2.1, on voit qu'il est encore possible de choisir un contour γ dans $\rho_A \cap \rho_B$, qui sépare σ_A de σ_B. De plus, on peut supposer que $D_A \cap D_B$ est dense dans $D_A(s; q)$ [ou $D_B(s; q)$] pour un $q \in [1, +\infty]$ et tout $s \in]0, 1[$, au lieu de supposer que $D_A \cap D_B$ est dense dans E.

L'extension suivante du théorème 2.1 a été démontrée dans Grisvard [3] :

Théorème 2.9. — *Soient* A *et* B *deux opérateurs fermés dans l'espace de Banach* E *et soit* F *un sous-espace vectoriel fermé de* E. *On suppose qu'il existe* θ_A, θ_B *avec* $0 \leq \theta_B < \theta_A \leq \pi$ *et un entier* $k \geq 1$ *tels que :*

(i) *Le rayon* $\arg \lambda = \theta$, *avec* $|\theta| < \theta_A$ *est dans* ρ_A *et*

$$|(A-\lambda)^{-1}|_{E \to E} \leq C_A(\theta)(1 + |\lambda|^{k-2}),$$
$$|(A-\lambda)^{-1}|_{F \to E} \leq C_A(\theta)|\lambda|^{-1};$$

(ii) B *est admissible dans toute direction* θ *telle que*

$$|\theta - \pi| < |\theta_B - \pi|,$$

et de plus :

$$B(D_B \cap F) \subset F,$$
$$(B-\lambda)^{-1} F \subset F$$

(6) Le « crochet » désigne comme d'habitude le commutateur des deux opérateurs (continus), c'est-à-dire $(A-\lambda)^{-1}(B-\mu)^{-1} - (B-\mu)^{-1}(A-\lambda)^{-1}$.

pour $\lambda \in \rho_B$;

(iii) A *est inversible;*

(iv) $[(A-\lambda)^{-1};\ (B-\mu)^{-1}] = 0$ *pour* $\lambda \in \rho_A$ *et* $\mu \in \rho_B$.

Alors le problème (1.3) *a au plus une solution; l'existence de la solution est assurée si on suppose que* $D_A k \cap D_B k \cap F$ *est dense dans* $D_B(s;\, q) \cap F$ *et que*

$$f \in D_B(s;\, q) \cap F$$

et alors la solution u *a la régularité suivante :*

$$Au, \quad Bu \in D_B(s;\, q).$$

Ici encore on construit explicitement la solution u sous la forme (2.4) mais cette fois l'intégrale converge seulement lorsque $f \in F$. Cet énoncé est adapté à la résolution de problèmes mixtes paraboliques d'ordre supérieur à 1 en la variable de temps (*cf.* point 8).

3. Extension au cas de plusieurs opérateurs.

3.1. On va démontrer une extension du théorème 2.1 qui permet de résoudre des équations opérationnelles de la forme plus générale suivante :

$$(3.1)\qquad \begin{cases} u \in D_{A_1} \cap \ldots \cap D_{A_n} \cap D_B, \\ A_1 u + A_2 u + \ldots + A_n u - Bu = f, \end{cases}$$

où f est donné dans l'espace de Banach complexe E, u est l'inconnue et $A_1, \ldots, A_n$, B est une famille d'opérateurs (fermés) dans l'espace de Banach E.

Théorème 3.1. — *Soient* $A_1, \ldots, A_n$, B, $(n+1)$ *opérateurs fermés et à domaines denses dans l'espace de Banach* E; *on suppose qu'il existe* θ_A, θ_B *avec* $\frac{\pi}{2} \leqq \theta_B < \theta_A \leqq \pi$ *tels que :*

(i) $A_1, \ldots, A_n$ *sont admissibles dans toute direction* θ *telle que* $|\theta| < \theta_A$;

(ii) B *est admissible dans toute direction* θ *telle que* $|\theta - \pi| < |\theta_B - \pi|$;

(iii) $A_1, \ldots, A_n$ *sont inversibles;*

(iv) $[(A_k-\lambda)^{-1},\ (B-\mu)^{-1}] = 0$ *pour* $\lambda \in \rho_{A_k}$, $\mu \in \rho_B$, $1 \leqq k \leqq n$, *et* $[(A_k-\lambda)^{-1},\ (A_l-\mu)^{-1}] = 0$ *pour* $\lambda \in \rho_{A_k}$, $\mu \in \rho_{A_l}$, $1 \leqq k,\ l \leqq n$.

Alors le problème (3.1) *a au plus une solution; l'existence de la solution est assurée si on suppose que*

$$f \in \bigcap_{k=1}^{n} D_{A_k}(s;\, q) \qquad (0 < s < 1;\ 1 \leqq q \leqq +\infty),$$

et alors la solution u *a la régularité suivante :*

$$A_k u \in D_{A_k}(s;\, q) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

La démonstration de ce théorème repose sur une construction explicite de la solution de (3.1) sous la forme

$$(3.2)\qquad -u=\left(\frac{-1}{2\pi i}\right)^n\int_{\gamma^{(n)}}(A_1-\lambda_1)^{-1}\ldots(A_n-\lambda_n)^{-1}(B-\lambda_1-\ldots-\lambda_n)^{-1}f\,d\lambda_1\ldots d\lambda_n,$$

où γ est un contour (7) entièrement contenu dans $\rho_{A_1}\cap\ldots\cap\rho_{A_n}\cap\rho_B$ et qui joint $\infty e^{-i\theta_0}$ à $\infty e^{i\theta_0}$ où $\theta_B<\theta_0<\theta_A$. Il est clair que γ « sépare » σ_{A_k} de σ_B, $k=1, 2, \ldots, n$. Pour une plus grande concision des énoncés suivants on introduit l'opérateur

$$(3.3)\qquad S=-\left(\frac{-1}{2\pi i}\right)^n\int_{\gamma^{(n)}}(A_1-\lambda_1)^{-1}\ldots(A_n-\lambda_n)^{-1}(B-\lambda_1-\ldots-\lambda_n)^{-1}\,d\lambda_1\ldots d\lambda_n,$$

c'est évidemment un opérateur linéaire continu dans E; on utilisera aussi les espaces définis ci-dessous :

Définition 3.2. — *Pour m entier ≥ 1, on désigne par $D^{(m)}$ le sous-espace de E formé des $x\in E$ tels que*

$$x\in D_{L_1L_2\ldots L_p}$$

pour $p=1, 2, \ldots, m$, où L_k est l'un quelconque des opérateurs $A_1, \ldots, A_n$ et B.

Comme d'habitude $D_{L_1L_2\ldots L_p}$ est le sous-espace de D_{L_p} formé des x tels que $L_px\in D_{L_{p-1}}$ et que $L_{p-1}L_px\in D_{L_{p-2}}$, etc. En particulier, on a

$$D^{(1)}=D_{A_1}\cap\ldots\cap D_{A_n}\cap D_B,$$

il y a une norme naturelle d'espace de Banach sur $D^{(m)}$, mais nous ne l'utiliserons que pour $m=1$; dans ce cas c'est la norme

$$x\mapsto|x|_E+|A_1x|_E+\ldots+|A_nx|_E+|Bx|_E.$$

3.2. Ceci posé on a le

Lemme 3.3. — *$D^{(m)}$ est dense dans $D^{(1)}$ pour tout m.*

Démonstration. — On approche $x\in D^{(1)}$ par

$$x_\nu=\nu^{m(n+1)}(-1)^{mn}\left\{\prod_{k=1}^{n}(A_k-\nu)^{-m}\right\}(B+\nu)^{-m}x;$$

grâce à l'hypothèse (iv) (du théorème 2.3) il est évident que $x_\nu\in D^{(m)}$.

Pour voir que $x_\nu\to x$ dans $D^{(1)}$ lorsque $\nu\to+\infty$, on calcule $x_\nu-x$; pour cela on écrit

$$\nu(B+\nu)^{-1}=1-B(B+\nu)^{-1}$$

(7) Précisément le contour γ est obtenu en déformant le contour $\Gamma=\{\arg\lambda=\pm\theta_0\}$, de façon à ce qu'il « évite » l'origine et que l'origine soit à « droite » de γ.

et

$$-\nu(A_k-\nu)^{-1} = 1 - A_k(A_k-\nu)^{-1},$$

d'où

$$x_\nu = \left[\prod_{k=1}^{n}\{1-A_k(A_k-\nu)^{-1}\}^m\right]\{1-B(B+\nu)^{-1}\}^m x;$$

en développant cette expression on voit que $x_\nu - x$ est la somme d'un nombre fini de termes de la forme

$$\pm L_1(L_1-\nu)^{-1}\ldots L_p(L_p-\nu)^{-1}x, \tag{3.4}$$

avec $p \leqq m(n+1)$ et où L_k est l'un quelconque des opérateurs $A_1, \ldots, A_n$ et $-B$; il suffit donc de voir que les termes de la forme (3.4) convergent vers zéro dans $D^{(1)}$, c'est-à-dire que

$$y_\nu = L_{p+1}L_1(L_1-\nu)^{-1}\ldots L_p(L_p-\nu)^{-1}x \to 0 \qquad (\nu \to +\infty)$$

dans E où L_{p+1} est l'un quelconque des opérateurs $A_1, \ldots, A_n$ et $-B$ et 1. En utilisant les hypothèses (i), (ii) et (iv) on obtient

$$|y_\nu|_E \leqq K\,|L_p(L_p-\nu)^{-1}L_{p+1}x|_E,$$

où K est une constante indépendante de ν; comme D_{L_p} est dense dans E, on a

$$L_p(L_p-\nu)^{-1}z \to 0 \quad \text{dans E} \qquad (\nu \to \infty)$$

pour tout $z \in E$, donc

$$y_\nu \to 0 \quad \text{dans E} \qquad (\nu \to +\infty)$$

et ceci prouve que

$$x_\nu \to x \quad \text{dans } D^{(1)} \qquad (\nu \to +\infty).$$

3.3. A présent on peut prouver le

LEMME 3.4. — *Pour $u \in D^{(1)}$, on a*

$$S(A_1u + A_2u + \ldots + A_nu - Bu) = u. \tag{3.5}$$

Démonstration. — Par densité, il suffit de vérifier la relation (3.5) avec $u \in D^{(n)}$.

Pour éviter une complication excessive des formules qui vont suivre, on va se borner à les écrire dans le cas particulier $n = 2$, mais le principe du calcul est tout à fait analogue dans le cas général : on a donc

$$S(A_1u + A_2u - Bu) = -\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_2 u(\lambda_1, \lambda_2)\,d\lambda_1\,d\lambda_2,$$

avec

$$u(\lambda_1, \lambda_2) = (A_1-\lambda_1)^{-1}(A_2-\lambda_2)^{-1}(B-\lambda_1-\lambda_2)^{-1}(A_1u + A_2u - Bu);$$

en utilisant l'hypothèse (iv), on obtient

$$\begin{aligned}
u(\lambda_1, \lambda_2) &= (A_2-\lambda_2)^{-1}(B-\lambda_1-\lambda_2)^{-1}\{(A_1-\lambda_1)^{-1}A_1u\}\\
&\quad + (A_1-\lambda_1)^{-1}(B-\lambda_1-\lambda_2)^{-1}\{(A_2-\lambda_2)^{-1}A_2u\}\\
&\quad - (A_1-\lambda_1)^{-1}(A_2-\lambda_2)^{-1}\{(B-\lambda_1-\lambda_2)^{-1}Bu\}\\
&= (A_2-\lambda_2)^{-1}(B-\lambda_1-\lambda_2)^{-1}u + (A_1-\lambda_1)^{-1}(B-\lambda_1-\lambda_2)^{-1}u\\
&\quad - (A_1-\lambda_1)^{-1}(A_2-\lambda_2)^{-1}u\\
&\quad + (\lambda_1+\lambda_2-[\lambda_1+\lambda_2])(A_1-\lambda_1)^{-1}(A_2-\lambda_2)^{-1}(B-\lambda_1-\lambda_2)^{-1}u\\
&= \{(A_1-\lambda_1)^{-1}+(A_2-\lambda_2)^{-1}\}(B-\lambda_1-\lambda_2)^{-1}u - (A_1-\lambda_1)^{-1}(A_2-\lambda_2)^{-1}u.
\end{aligned}$$

On obtient ensuite une expression équivalente de $u(\lambda_1, \lambda_2)$ en écrivant pour $x \in D^{(1)}$:

$$\begin{aligned}
(A_1-\lambda_1)^{-1}x &= -\lambda_1^{-1}x + \lambda_1^{-1}(A_1-\lambda_1)^{-1}A_1x,\\
(A_2-\lambda_2)^{-1}x &= -\lambda_2^{-1}x + \lambda_2^{-1}(A_2-\lambda_2)^{-1}A_2x,\\
(B-\lambda_1-\lambda_2)^{-1}x &= -(\lambda_1+\lambda_2)^{-1}x + (\lambda_1+\lambda_2)^{-1}(B-\lambda_1-\lambda_2)^{-1}Bx,
\end{aligned}$$

d'où, puisque $u \in D^{(2)}$:

$$\begin{aligned}
u(\lambda_1, \lambda_2) &= -\{-\lambda_1^{-1}+\lambda_1^{-1}(A_1-\lambda_1)^{-1}A_1\}\{-\lambda_2^{-1}+\lambda_2^{-1}(A_2-\lambda_2)^{-1}A_2\}u\\
&\quad + \{-\lambda_1^{-1}-\lambda_2^{-1}+\lambda_1^{-1}(A_1-\lambda_1)^{-1}A_1+\lambda_2^{-1}(A_2-\lambda_2)^{-1}A_2\}\\
&\qquad \times\{-(\lambda_1+\lambda_2)^{-1}+(\lambda_1+\lambda_2)^{-1}(B-\lambda_1-\lambda_2)^{-1}B\}u\\
&= -\{\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}-(\lambda_1+\lambda_2)^{-1}[\lambda_1^{-1}+\lambda_2^{-1}]\}u\\
&\quad - \lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}(A_1-\lambda_1)^{-1}(A_2-\lambda_2)^{-1}A_2A_1u\\
&\quad + \lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}(A_1-\lambda_1)^{-1}A_1u + \lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}(A_2-\lambda_2)^{-1}A_2u\\
&\quad - (\lambda_1^{-1}+\lambda_2^{-1})(\lambda_1+\lambda_2)^{-1}(B-\lambda_1-\lambda_2)^{-1}Bu\\
&\quad - \lambda_1^{-1}(\lambda_1+\lambda_2)^{-1}(A_1-\lambda_1)^{-1}A_1u\\
&\quad - \lambda_2^{-1}(\lambda_1+\lambda_2)^{-1}(A_2-\lambda_2)^{-1}A_2u\\
&\quad + \lambda_1^{-1}(\lambda_1+\lambda_2)^{-1}(A_1-\lambda_1)^{-1}(B-\lambda_1-\lambda_2)^{-1}BA_1u\\
&\quad + \lambda_2^{-1}(\lambda_1+\lambda_2)^{-1}(A_2-\lambda_2)^{-1}(B-\lambda_1-\lambda_2)^{-1}BA_2u\\
&= -\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}(A_1-\lambda_1)^{-1}(A_2-\lambda_2)^{-1}A_2A_1u\\
&\quad + \lambda_1^{-1}\{\lambda_2^{-1}-(\lambda_1+\lambda_2)^{-1}\}(A_1-\lambda_1)^{-1}A_1u\\
&\quad + \lambda_2^{-1}\{\lambda_1^{-1}-(\lambda_1+\lambda_2)^{-1}\}(A_2-\lambda_2)^{-1}A_2u\\
&\quad - \lambda_1^{-1}(\lambda_1+\lambda_2)^{-1}(B-\lambda_1-\lambda_2)^{-1}Bu - \lambda_2^{-1}(\lambda_1+\lambda_2)^{-1}(B-\lambda_1-\lambda_2)^{-1}Bu\\
&\quad + \lambda_1^{-1}(\lambda_1+\lambda_2)^{-1}(A_1-\lambda_1)^{-1}(B-\lambda_1-\lambda_2)^{-1}BA_1u\\
&\quad + \lambda_2^{-1}(\lambda_1+\lambda_2)^{-1}(A_2-\lambda_2)^{-1}(B-\lambda_1-\lambda_2)^{-1}BA_2u.
\end{aligned}$$

On obtient ainsi sept différents termes que l'on va intégrer séparément; grâce aux hypothèses (i) et (ii), les intégrales correspondantes convergent :

$$\begin{aligned}
I_1 &= -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (A_1-\lambda_1)^{-1}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (A_2-\lambda_2)^{-1}A_2A_1u\frac{d\lambda_2}{\lambda_2}\right]\frac{d\lambda_1}{\lambda_1}\\
&= +\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (A_1-\lambda_1)^{-1}A_1u\frac{d\lambda_1}{\lambda_1} = -u,
\end{aligned}$$

car on a supposé A_1 et A_2 inversibles [hypothèse (iii)] et les fonctions $\lambda^{-1}(A_1-\lambda)^{-1}$ et $\lambda^{-1}(A_2-\lambda)^{-1}$ ont une décroissance en $|\lambda|^{-2}$ à « droite » de γ. Ensuite, on a

$$I_2=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\left[\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\{\lambda_2^{-1}-(\lambda_1+\lambda_2)^{-1}\}(A_1-\lambda_1)^{-1}A_1u\frac{d\lambda_1}{\lambda_1}\right]d\lambda_2$$
$$=\frac{-1}{2\pi i}\int_\gamma(A_1+\lambda_2)^{-1}A_1u\frac{d\lambda_2}{\lambda_2}=0,$$

car $\{\lambda_2^{-1}-(\lambda_1+\lambda_2)^{-1}\}(A_1-\lambda_1)^{-1}A_1u\lambda_1^{-1}$ a un seul pôle (au point $\lambda_2=-\lambda_1$) à « droite » de γ et admet une majoration en $|\lambda_1|^{-1}$ dans cette région du plan, et la fonction $(A_1+\lambda_2)^{-1}A_1u\lambda_2^{-1}$ est holomorphe à « gauche » de γ et admet une majoration en $|\lambda_2|^{-1}$ dans cette région du plan. Pour des raisons analogues, on a

$$I_3=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\left[\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\{\lambda_1^{-1}-(\lambda_1+\lambda_2)^{-1}\}(A_2-\lambda_2)^{-1}A_2u\frac{d\lambda_2}{\lambda_2}\right]d\lambda_1=0,$$

puis

$$I_4=-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\left[\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma(\lambda_1+\lambda_2)^{-1}(B-\lambda_1-\lambda_2)^{-1}Bu\,d\lambda_2\right]\frac{d\lambda_1}{\lambda_1}=0,$$

car $(\lambda_1+\lambda_2)^{-1}(B-\lambda_1-\lambda_2)^{-1}$ est holomorphe et admet une majoration en $|\lambda_2|^{-2}$ à « gauche » de γ (8); lorsque $\lambda_1\in\gamma$.

De même, on a

$$I_5=-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\left[\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma(\lambda_1+\lambda_2)^{-1}(B-\lambda_1-\lambda_2)^{-1}Bu\,d\lambda_1\right]\frac{d\lambda_2}{\lambda_2}=0.$$

Enfin, on a

$$I_6=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma(A_1-\lambda_1)^{-1}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma(\lambda_1+\lambda_2)^{-1}(B-\lambda_1-\lambda_2)^{-1}BA_1u\,d\lambda_2\right]\frac{d\lambda_1}{\lambda_1}=0$$

et

$$I_7=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma(A_2-\lambda_2)^{-1}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma(\lambda_1+\lambda_2)^{-1}(B-\lambda_1-\lambda_2)^{-1}BA_2u\,d\lambda_1\right]\frac{d\lambda_2}{\lambda_2}=0$$

pour les mêmes raisons que pour I_4 et I_5.

En conclusion, on a

$$S(A_1u+A_2u-Bu)=-\sum_{k=1}^{7}I_k=-I_1=u$$

pour $u\in D^{(2)}$ donc aussi pour $u\in D^{(1)}$ par densité. On a ainsi prouvé le lemme 3.4 dans le cas $n=2$; le cas général $n\geq 2$ suit exactement les mêmes idées.

---

(8) Ici on utilise de façon essentielle le fait que le secteur $|\arg\lambda-\pi|<|\theta_B-\pi|$ est convexe, c'est-à-dire que $\theta_B\geq\frac{\pi}{2}$.

3.4. Le dernier lemme qui servira dans la démonstration du théorème 3.1 est le suivant :

Lemme 3.5. — *Pour* $f \in D_{A_k}(s; q)$, *on a* $u = Sf \in D_{A_k}$ *et l'application* $f \mapsto A_k u$ *est continue de* $D_{A_k}(s; q)$ *dans lui-même.*

Démonstration :

(i) On fixe $f \in D_{A_k}(s; q)$ et on montre d'abord que $u \in D_{A_k}$: Utilisant le lemme 3.1, chapitre I de Grisvard [1], on sait que la fonction

$$|\lambda|^s |A_k(A_k - \lambda)^{-1} f|_E$$

est bornée sur γ. Il est alors immédiat de vérifier que l'intégrale qui représente u converge dans D_{A_k} (9) et que la majoration suivante a lieu :

$$|A_k u|_E \leq C \int_{\gamma^{(n)}} |\lambda_1|^{-1} \ldots |\lambda_n|^{-1} |\lambda_1 + \ldots + \lambda_n|^{-1} |\lambda_k|^{-s+1} |d\lambda_1| \ldots |d\lambda_n| . |f|_{D_{A_k}(s; q)},$$

où C ne dépend pas de f; par conséquent, l'application $f \mapsto A_k u$ est continue de $D_{A_k}(s; q)$ dans E.

(ii) Pour achever de démontrer le lemme, il faut vérifier que $A_k u \in D_{A_k}(s; q)$, c'est-à-dire que

$$|t^s A_k(A_k - t)^{-1} A_k u|_E \in L^q_*;$$

on calcule d'abord $A_k(A_k - t)^{-1} A_k u$: Précisément on va prouver l'identité

$$(3.6) \quad A_k(A_k - t)^{-1} A_k u = -\left(\frac{-1}{2\pi i}\right)^n \int_{\gamma^{(n)}} \lambda_k(\lambda_k - t)^{-1} \left[\prod_{l \neq k} (A_l - \lambda_l)^{-1}\right] \times (B - \lambda_1 - \ldots - \lambda_n)^{-1} A_k (A_k - \lambda_k)^{-1} f \, d\lambda_1 \ldots d\lambda_n;$$

en effet, utilisant l'hypothèse (iv), on voit qu'on peut écrire

$$A_k(A_k - t)^{-1} A_k u = +\left(\frac{-1}{2\pi i}\right)^{n-1} \int_{\gamma^{(n-1)}} \left[\prod_{l \neq k} (A_l - \lambda_l)^{-1}\right] \Phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \, d\lambda_1 \ldots \widehat{d\lambda_l} \ldots d\lambda_n,$$

avec

$$\Phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma A_k(A_k - t)^{-1} (B - \lambda_1 - \ldots - \lambda_n)^{-1} A_k (A_k - \lambda_k)^{-1} f \, d\lambda_k.$$

De l'identité évidente :

$$A_k(A_k - t)^{-1} A_k (A_k - \lambda_k)^{-1} - \lambda_k(\lambda_k - t)^{-1} A_k (A_k - \lambda_k)^{-1} = -t(\lambda_k - t)^{-1} A_k (A_k - t)^{-1},$$

on déduit que

$$\Phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \lambda_k(\lambda_k - t)^{-1} (B - \lambda_1 - \ldots - \lambda_n)^{-1} A_k (A_k - \lambda_k)^{-1} f \, d\lambda_k$$

$$= -t \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (\lambda_k - t)^{-1} (B - \lambda_1 - \ldots - \lambda_n)^{-1} A_k (A_k - t)^{-1} f \, d\lambda_k = 0$$

(9) On suppose D_{A_k} muni de la norme du graphe de A_k, c'est donc un espace de Banach puisque A_k est fermé.

car la fonction à intégrer est holomorphe et admet une majoration en $|\lambda_k|^{-2}$ à « gauche » de γ (rappelons que $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \gamma$). Ceci prouve l'identité (3.6).

(iii) On va enfin prouver que

$$|t^s A_k(A_k - t)^{-1} A_k u|_E \in L^q_*$$

en utilisant l'expression (3.6) : par déformation du contour d'intégration on peut se ramener à intégrer sur $\Gamma = \{\arg\lambda = \pm\theta_0\}$ au lieu de γ (ceci sera justifié *a posteriori* par la convergence de l'intégrale ainsi obtenue) :

$$|t^s A_k(A_k - t)^{-1} A_k u|_E \leq C \int_{\Gamma^{(n)}} t^s |\lambda_k| . |\lambda_k - t|^{-1} \left\{ \prod_{l \neq k} |\lambda_l|^{-1} \right\} \times |\lambda_1 + \ldots + \lambda_n|^{-1} |A_k(A_k - \lambda_k)^{-1} f|_E |d\lambda_1| \ldots |d\lambda_n|,$$

où C ne dépend pas de f, d'après les hypothèses (i) et (ii). Par ailleurs, puisque $f \in D_{A_k}(s; q)$, on a la majoration

$$|A_k(A_k - \lambda)^{-1} f|_E \leq |\lambda|^{-s} F(|\lambda|)$$

avec $F \in L^q_*$, pour $\lambda \in \Gamma$, on obtient ainsi l'inégalité

$$|t^s A_k(A_k - t)^{-1} A_k u|_E \leq C_1 \int_{\Gamma^{(n)}} t^s |\lambda_k - t|^{-1} \left(\prod_l |\lambda_l|^{-1} \right) \times |\lambda_1 + \ldots + \lambda_n|^{-1} |\lambda_k|^{2-s} F(|\lambda_k|) |d\lambda_1| \ldots |d\lambda_n|,$$

d'où par un calcul facile :

$$\begin{aligned} &|t^s A_k(A_k - t)^{-1} A_k u|_E \\ &\leq C \int_{R_+^{(n)}} t^s (x_k + t)^{-1} (x_1 + \ldots + x_n)^{-1} x_k^{2-s} F(x_k) \frac{dx_1}{x_1} \cdots \frac{dx_n}{x_n} \\ &= C_1 \int_{R_+^{(n)}} (x_k + 1)^{-1} (x_1 + \ldots + x_n)^{-1} x_k^{2-s} F(tx_k) \frac{dx_1}{x_1} \cdots \frac{dx_n}{x_n}, \end{aligned}$$

où C_1 ne dépend pas de F, et $|F|_{L^q_*} \leq |f|_{D_{A_k}(s;q)}$ on a donc

$$\begin{aligned} &\left(\int_0^{+\infty} |t^s A_k(A_k - t)^{-1} A_k u|_E^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq C_1 \int_{R_+^{(n)}} (x_k + 1)^{-1} (x_1 + \ldots + x_n)^{-1} x_k^{2-s} \left(\int_0^{+\infty} |F(tx_k)|^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \frac{dx_1}{x_1} \cdots \frac{dx_n}{x_n} \\ &= C_1 \left(\int_{R_+^{(n)}} (x_k + 1)^{-1} (x_1 + \ldots + x_n)^{-1} x_k^{2-s} \frac{dx_1}{x_1} \cdots \frac{dx_n}{x_n} \right) |F|_{L^q_*} \\ &\leq C_2 |f|_{D_{A_k}(s;q)}, \end{aligned}$$

où C_2 ne dépend pas de f. Ceci prouve que $A_k u \in D_{A_k}(s; q)$ et que $f \mapsto A_k u$ est continu de $D_{A_k}(s; q)$ dans lui-même.

3.5. *Démonstration du théorème* 3.1 :

(i) L'unicité de la solution du problème (3.1) résulte évidemment du lemme 3.4 d'après lequel on a nécessairement

$$u = Sf.$$

(ii) On montrera l'existence de la solution du problème (3.1) en posant $u = Sf$. On déduit facilement du lemme 3.4 que pour $f \in D^{(1)}$, on a $u = Sf \in D^{(1)}$ et

$$A_1 u + A_2 u + \ldots + A_n u - Bu = f, \tag{3.7}$$

car en fait grâce à l'hypothèse (iv), on a

$$A_1 u + A_2 u + \ldots + A_n u - Bu = S(A_1 f + \ldots + A_n f - Bf) = f.$$

Les deux membres de l'identité (3.7) sont continus dans $\bigcap_{k=1}^{n} D_{A_k}(s; q)$ d'après le lemme 3.5; pour prouver que l'identité (3.7) a lieu pour tout

$$f \in \bigcap_{k=1}^{n} D_{A_k}(s; q),$$

il suffit donc de vérifier que $D^{(1)}$ est dense dans $\bigcap_{k=1}^{n} D_{A_k}(s; q)$ [10] : pour cela on reprend la construction faite dans la démonstration du lemme 2.5 : on approche f par

$$f_\nu = (-\nu)^n (A_1 - \nu)^{-1} \ldots (A_n - \nu)^{-1} \nu (B + \nu)^{-1} f.$$

(iii) La régularité de la solution résulte immédiatement du lemme 3.5.

Remarque 3.6. — On aurait pu supposer $f \in \bigcap_{k=1}^{n} D_{A_k}(s_k; q_k)$ avec $0 < s_1, \ldots, s_n < 1$, $1 \leqq q_1, \ldots, q_n \leqq +\infty$; on obtiendrait alors $A_k u \in D_{A_k}(s_k; q_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$; de plus, si on suppose $f \in D_B(s_0; q_0)$ avec $0 < s_0 < 1$, $1 \leqq q_0 \leqq +\infty$, alors on obtient $Bu \in D_B(s_0; q_0)$.

---

[10] Dans le cas $q = +\infty$, cet argument ne peut pas être utilisé; néanmoins utilisant l'inclusion $D_{A_k}(s; +\infty) \subset D_{A_k}(\sigma; p)$ (pour tout $p \in [1, +\infty[$ et $0 < \sigma < s$) on voit que l'identité (3.7) a lieu aussi pour $f \in \bigcap_{k=1}^{n} D_{A_k}(s, \infty)$.

4. Le cas non commutatif.

4.1. Revenant au cas de deux opérateurs, c'est-à-dire à l'équation de la forme (1.3), on va donner une extension du théorème 2.7 au cas où l'hypothèse de commutativité (iv) (de ce théorème 2.7) n'est pas vérifiée. Dans ce cas et si on conserve les hypothèses (i), (ii) et (iii) on peut considérer deux intégrales différentes de la forme (2.4), on est ainsi conduit à définir deux opérateurs différents :

$$S = +\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (A-\lambda)^{-1}(B-\lambda)^{-1}\,d\lambda, \tag{4.1}$$

$$T = +\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (B-\lambda)^{-1}(A-\lambda)^{-1}\,d\lambda. \tag{4.2}$$

Ces deux opérateurs sont linéaires continus dans E, et en supposant que certains commutateurs ne sont pas « trop grands » [11] (*voir* les hypothèses précises dans les énoncés, plus loin) on prouvera l'existence de la solution du problème (1.3) en utilisant l'opérateur S et l'unicité en utilisant l'opérateur T.

4.2. On commence par l'unicité :

Théorème 4.1 (*a*). — *Sous les hypothèses* (i), (ii) et (iii) *du théorème* 2.1 *et si de plus on suppose que* D_B *est stable par* $(A-\lambda)^{-1}$ *pour* $\lambda \in \rho_A$ *et qu'il existe* $\alpha > 0$ *tel que*

$$|(B-\lambda)^{-1}[B, (A-\lambda)^{-1}]u|_E \leq K|\lambda|^{-1-\alpha}|u|_E \tag{v}$$

pour $u \in D_B$, $\arg\lambda = \theta_0$, $\theta_B < \theta_0 < \theta_A$, *alors si* K *est assez petit la solution du problème* (1.3) *est unique.*

Démonstration. — On considère u solution de (1.3) avec $f = 0$, donc $u \in D_A \cap D_B$ et $Au - Bu = 0$, et on calcule $TAu - TBu$. On a

$$TAu - TBu = 0 = +\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma u(\lambda)\,d\lambda,$$

---

[11] Il n'y a aucun espoir d'obtenir un résultat d'existence et d'unicité pour le problème (1.3) sous les seules hypothèses (i), (ii) et (iii), comme le montre l'exemple suivant dû à Da Prato : on pose $E = L_2(\Omega)$, avec Ω ouvert borné à frontière régulière dans $\mathbf{R}^n$, $Au = +\Delta u$, avec $D_A = \{u \in H^2(\Omega);\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$ [Δ désigne le laplacien, $H^2(\Omega)$ l'espace de Sobolev usuel d'ordre 2], $Bu = -\Delta u$ avec $D_B = \{u \in H^2(\Omega);\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$ (n désigne la normale à $\partial\Omega$), alors les hypothèses (i), (ii) et (iii) du théorème 2.1 sont vérifiées avec $\theta_B = 0$ et $\theta_A = \pi$ (il est bien connu que A est autoadjoint strictement négatif et B autoadjoint positif) et dans ce cas le problème (1.3) est un problème de Cauchy, relatif à Δ, qui n'est pas « bien posé ».

avec

$$\begin{aligned}
u(\lambda) &= (B-\lambda)^{-1}(A-\lambda)^{-1}(Au - Bu) \\
&= (B-\lambda)^{-1}(A-\lambda)^{-1}Au - (A-\lambda)^{-1}(B-\lambda)^{-1}Bu \\
&\quad + [(A-\lambda)^{-1}, (B-\lambda)^{-1}]Bu \\
&= (B-\lambda)^{-1}\{u + \lambda(A-\lambda)^{-1}u\} - (A-\lambda)^{-1}\{u + \lambda(B-\lambda)^{-1}u\} \\
&\quad + [(A-\lambda)^{-1}, (B-\lambda)^{-1}]Bu \\
&= (B-\lambda)^{-1}u - (A-\lambda)^{-1}u \\
&\quad + [(A-\lambda)^{-1}, (B-\lambda)^{-1}](Bu - \lambda u) \\
&= \lambda^{-1}(B-\lambda)^{-1}Bu - \lambda^{-1}(A-\lambda)^{-1}Au \\
&\quad + (A-\lambda)^{-1}u - (B-\lambda)^{-1}(A-\lambda)^{-1}(Bu - \lambda u) \\
&= \lambda^{-1}(B-\lambda)^{-1}Bu - \lambda^{-1}(A-\lambda)^{-1}Au \\
&\quad + (B-\lambda)^{-1}[B-\lambda, (A-\lambda)^{-1}]u \\
&= \lambda^{-1}(B-\lambda)^{-1}Bu - \lambda^{-1}(A-\lambda)^{-1}Au \\
&\quad + (B-\lambda)^{-1}[B, (A-\lambda)^{-1}]u.
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (B-\lambda)^{-1}Bu\frac{d\lambda}{\lambda} - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (A-\lambda)^{-1}Au\frac{d\lambda}{\lambda}& \\
+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (B-\lambda)^{-1}[B, (A-\lambda)^{-1}]u\,d\lambda &= 0;
\end{aligned}$$

ces trois intégrales convergent grâce aux hypothèses (i), (ii) et (v); la seconde est égale à $+u$ car grâce à (ii) et (iii) la fonction $(A-\lambda)^{-1}Au$ est holomorphe à « droite » de γ et admet une majoration en $|\lambda|^{-1}$ dans cette partie du plan; la première intégrale est nulle car la fonction $(B-\lambda)^{-1}Bu\lambda^{-1}$ est holomorphe et admet une croissance en $|\lambda|^{-2}$ à « gauche » de γ.

On a donc

$$u = Uu$$

si on pose

$$U = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (B-\lambda)^{-1}[B, (A-\lambda)^{-1}]\,d\lambda \tag{4.3}$$

(l'opérateur U est défini *a priori*, seulement sur D_B).

Utilisant l'hypothèse (v), on voit que

$$|Uu|_E \leq \frac{K}{2\pi}\left(\int_\gamma |\lambda|^{-1-\alpha}|d\lambda|\right)|u|_E,$$

d'où

$$|u|_E = |Uu|_E < |u|_E$$

pour K assez petit; ceci implique que $u = 0$ et le théorème 4.1 (*a*) est démontré.

Remarque 4.2. — L'hypothèse (v) peut paraître artificielle dans l'abstrait, elle sera justifiée plus loin (nº 6) dans les applications.

4.3. On donne maintenant un théorème d'existence :

THÉORÈME 4.1 (*b*). — *On suppose que les hypothèses* (i), (ii) et (iii) *du théorème* 2.1 *sont vérifiées et de plus on suppose qu'il existe* $s \in]0, 1[$ *et* $q \in [1, \infty]$ *tels que* $D_A(s; q) \cap D_B(s; q)$ *soit dense dans* $D_B(s; q)$ *et que* D_B *est stable par* $(A-\lambda)^{-1}$ *pour* $\lambda \in \rho_A$ *et qu'il existe* $\alpha > 0$ *tel que*

$$\text{(vi)} \qquad |[B, (A-\lambda)^{-1}](B-\lambda)^{-1}u|_E \leq K|\lambda|^{-1-\alpha}|u|_E$$

et que

$$\text{(vii)} \qquad |[B, (A-\lambda)^{-1}](B-\lambda)^{-1}u|_{D_B(s;q)} \leq K|\lambda|^{-1-\alpha}|u|_{D_B(s;q)}$$

pour $u \in D_B$ *et* $\arg\lambda = \theta_0$, $\theta_B < \theta_0 < \theta_A$, *alors si* K *est assez petit la solution du problème* (1.3) *existe si on suppose* $f \in D_B(s; q)$.

Démonstration. — On cherche u solution de (1.3) sous la forme $u = Sg$, avec $g \in D_B(s; q)$; g sera déterminé plus loin.

(*a*) On montre que $u \in D_B$: il suffit de vérifier que l'intégrale de

$$B(A-\lambda)^{-1}(B-\lambda)^{-1}g = \varphi(\lambda)$$

sur γ, converge, puisque B est fermé : on a

$$\varphi(\lambda) = [B, (A-\lambda)^{-1}](B-\lambda)^{-1}g + (A-\lambda)^{-1}B(B-\lambda)^{-1}g;$$

l'hypothèse (vi) assure la convergence du premier terme; quand au second, d'après (i) et du fait que $g \in D_B(s; q)$ il admet une majoration en $|\lambda|^{-1-s}$, donc il est intégrable. Ceci prouve que $u \in D_B$ et que

$$Bu = +\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \varphi(\lambda)\, d\lambda.$$

(*b*) On montre ensuite que $u \in D_A$: il faut intégrer la fonction

$$A(A-\lambda)^{-1}(B-\lambda)^{-1}g = \psi(\lambda)$$

sur γ. On a

$$\begin{aligned}
&\psi(\lambda) - (A-\lambda)^{-1}B(B-\lambda)^{-1}g\\
&\quad = A(A-\lambda)^{-1}(B-\lambda)^{-1}g - (A-\lambda)^{-1}B(B-\lambda)^{-1}g\\
&\quad = \{1+\lambda(A-\lambda)^{-1}\}(B-\lambda)^{-1}g - (A-\lambda)^{-1}\{1+\lambda(B-\lambda)^{-1}\}g\\
&\quad = (B-\lambda)^{-1}g - (A-\lambda)^{-1}g\\
&\quad = \lambda^{-1}\{B(B-\lambda)^{-1}g - A(A-\lambda)^{-1}g\}.
\end{aligned}$$

Si on fait l'hypothèse supplémentaire que $g \in D_A(s; q) \cap D_B(s; q)$, alors on a

$$\psi(\lambda) = (A-\lambda)^{-1}B(B-\lambda)^{-1}g + \lambda^{-1}\{B(B-\lambda)^{-1}g - A(A-\lambda)^{-1}Ag\},$$

donc $\psi(\lambda)$ est intégrable sur γ et on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}u &= +\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \psi(\lambda)\,d\lambda \\
&= +\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\mathrm{A}-\lambda)^{-1}\mathrm{B}(\mathrm{B}-\lambda)^{-1}g\,d\lambda \\
&\quad -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \mathrm{A}(\mathrm{A}-\lambda)^{-1}g\frac{d\lambda}{\lambda}+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \mathrm{B}(\mathrm{B}-\lambda)^{-1}g\frac{d\lambda}{\lambda} \\
&= +\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\mathrm{A}-\lambda)^{-1}\mathrm{B}(\mathrm{B}-\lambda)^{-1}g\,d\lambda+g.
\end{aligned}$$

Comme le dernier terme de cette suite d'identités dépend continûment de $g\in \mathrm{D_B}(s;q)$, comme $\mathrm{D_A}(s;q)\cap \mathrm{D_B}(s;q)$ est dense dans $\mathrm{D_B}(s;q)$ et enfin comme A est fermé, on a encore $u\in \mathrm{D_A}$ et

$$\mathrm{A}u=+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\mathrm{A}-\lambda)^{-1}\mathrm{B}(\mathrm{B}-\lambda)^{-1}g\,d\lambda+g$$

pour tout $g\in \mathrm{D_B}(s;q)$.

(*c*) On calcule $\mathrm{A}u-\mathrm{B}u$; d'après ce qui précède, on a

$$\mathrm{A}u-\mathrm{B}u=+g-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma [\mathrm{B},(\mathrm{A}-\lambda)^{-1}](\mathrm{B}-\lambda)^{-1}g\,d\lambda=+g-\mathrm{R}g.$$

Si on pose

$$\mathrm{R}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma [\mathrm{B},(\mathrm{A}-\lambda)^{-1}](\mathrm{B}-\lambda)^{-1}\,d\lambda. \tag{4.4}$$

(*d*) Il reste à construire $g\in \mathrm{D_B}(s;q)$ tel que

$$f=g-\mathrm{R}g$$

pour cela il suffit que $1-\mathrm{R}$ soit inversible dans $\mathrm{D_B}(s;q)$; ceci est réalisé lorsque K est assez petit grâce à (vii), car on a

$$\begin{aligned}
|\mathrm{R}g|_{\mathrm{D_B}(s;q)} &\leq \mathrm{K}\left(\int_\gamma |\lambda|^{-1-\alpha}|d\lambda|\right)|g|_{\mathrm{D_B}(s;q)} \\
&\leq \frac{1}{2}|g|_{\mathrm{D_B}(s;q)}.
\end{aligned}$$

Le théorème est ainsi complètement démontré.

Remarque 4.3. — Dans la démonstration on a trouvé un procédé explicite pour construire u : on a

$$u=\mathrm{S}g=+\mathrm{S}(1-\mathrm{R})^{-1}f,$$

où S est défini par (4.1) et R par (4.4).

4.4. Pour terminer on prouve la régularité de la solution :

THÉORÈME 4.1 (*c*). — *Sous les hypothèses du théorème* 4.1 (*b*), *la solution* u *du problème* (1.3) *avec* $f \in D_B(s; q)$, *vérifie* Au, $Bu \in D_B(s; q)$.

Démonstration. — Il suffit de prouver que $Bu \in D_B(s; q)$; on utilise l'écriture de u sous la forme

$$u = Sg$$

et on sait déjà [*voir* partie (*d*) de la démonstration du théorème précédent] que $g \in D_B(s; q)$. On a alors [*voir* partie (*a*) de la démonstration du théorème précédent] :

$$\begin{aligned} Bu &= +\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (A-\lambda)^{-1}B(B-\lambda)^{-1}g\,d\lambda \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma [B, (A-\lambda)^{-1}](B-\lambda)^{-1}g\,d\lambda \\ &= +\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (A-\lambda)^{-1}B(B-\lambda)^{-1}g\,d\lambda + Rg, \end{aligned}$$

on sait déjà que $Rg \in D_B(s; q)$, il suffit donc de vérifier que $Vg \in D_B(s; q)$, où

$$V = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (A-\lambda)^{-1}B(B-\lambda)^{-1}\,d\lambda; \tag{4.5}$$

pour cela d'après la définition 2.3, on doit estimer

$$B(B+t)^{-1}Vg.$$

(*a*) On calcule d'abord $B(B+t)^{-1}Vg$: on a

$$\begin{aligned} B(B+t)^{-1}Vg &= \{1 - t(B+t)^{-1}\}Vg \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (A-\lambda)^{-1}B(B+t)^{-1}B(B-\lambda)^{-1}g\,d\lambda \\ &\quad - \frac{t}{2\pi i}\int_\gamma [(B+t)^{-1}, (A-\lambda)^{-1}]B(B-\lambda)^{-1}g\,d\lambda. \end{aligned} \tag{4.6}$$

On calcule la première de ces deux intégrales en écrivant

$$B(B+t)^{-1} = 1 - t(B+t)^{-1}$$

et

$$t(B+t)^{-1}B(B-\lambda)^{-1} = -t(t+\lambda)^{-1}\{B(B+t)^{-1} - B(B-\lambda)^{-1}\},$$

on obtient ainsi

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (A-\lambda)^{-1}t(B+t)^{-1}B(B-\lambda)^{-1}g\,d\lambda \\ &= \frac{-t}{2\pi i}\int_\gamma (t+\lambda)^{-1}(A-\lambda)^{-1}B(B+t)^{-1}g\,d\lambda + \frac{t}{2\pi i}\int_\gamma (t+\lambda)^{-1}(A-\lambda)^{-1}B(B-\lambda)^{-1}g\,d\lambda \\ &= \frac{t}{2\pi i}\int_\gamma (t+\lambda)^{-1}(A-\lambda)^{-1}B(B-\lambda)^{-1}g\,d\lambda, \end{aligned}$$

car la fonction $(t+\lambda)^{-1}(A-\lambda)^{-1}B(B+t)^{-1}g$ est holomorphe et admet une majoration en $O(|\lambda|^{-2})$ à « droite » du contour γ.

On a donc

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (A-\lambda)^{-1}B(B+t)^{-1}B(B-\lambda)^{-1}g\,d\lambda\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (A-\lambda)^{-1}B(B-\lambda)^{-1}g\,d\lambda-\frac{t}{2\pi i}\int_\gamma (t+\lambda)^{-1}(A-\lambda)^{-1}B(B-\lambda)^{-1}g\,d\lambda\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \lambda(t+\lambda)^{-1}(A-\lambda)^{-1}B(B-\lambda)^{-1}g\,d\lambda.
\end{aligned}$$

Ensuite la seconde intégrale dans (4.6) vaut

$$\begin{aligned}
&-\frac{t}{2\pi i}\int_\gamma \{(B+t)^{-1}(A-\lambda)^{-1}-(A-\lambda)^{-1}(B+t)^{-1}\}B(B-\lambda)^{-1}g\,d\lambda\\
&=-\frac{t}{2\pi i}\int_\gamma (B+t)^{-1}\{(A-\lambda)^{-1}(B+t)-(B+t)(A-\lambda)^{-1}\}(B+t)^{-1}B(B-\lambda)^{-1}g\,d\lambda\\
&=+\frac{t}{2\pi i}\int_\gamma (B+t)^{-1}[B,(A-\lambda)^{-1}](B-\lambda)^{-1}B(B+t)^{-1}g\,d\lambda.
\end{aligned}$$

On a ainsi obtenu l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
(4.7)\quad B(B+t)^{-1}Vg=&\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \lambda(t+\lambda)^{-1}(A-\lambda)^{-1}B(B-\lambda)^{-1}g\,d\lambda\\
&+\frac{t}{2\pi i}\int_\gamma (B+t)^{-1}[B,(A-\lambda)^{-1}](B-\lambda)^{-1}B(B+t)^{-1}g\,d\lambda.
\end{aligned}$$

(*b*) Utilisant (4.7) on peut maintenant majorer $B(B+t)^{-1}Vg$: on a

$$|t^sB(B+t)^{-1}g|_E\leq\varphi(t)\qquad(t>0)$$

et

$$\big||\lambda|^sB(B-\lambda)^{-1}g\big|_E\leq\varphi(|\lambda|)\qquad(\arg\lambda=\pm\theta_0)$$

avec $\varphi\in L^q_*$, puisque $g\in D_B(s;q)$. La convergence de l'intégrale obtenue justifie qu'on déforme le contour γ en $\Gamma=\{\arg\lambda=\pm\theta_0\}$, dans la première intégrale de (4.7), on obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
|B(B+t)^{-1}Vg|_E\leq&\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma|\lambda(t+\lambda)^{-1}|C_A(\pm\theta_0)|\lambda|^{-1}|\lambda|^{-s}\varphi(|\lambda|)\,|d\lambda|\\
&+\frac{C_B(\pi)}{2\pi}\left(\int_\gamma\frac{K}{|\lambda|^{1+\alpha}}|d\lambda|\right)t^{-s}\varphi(t)\\
\leq&C_0\left\{\int_0^\infty(r+t)^{-1}r^{-s}\varphi(r)\,dr+t^{-s}\varphi(t)\right\},
\end{aligned}$$

d'où

$$|t^sB(B+t)^{-1}Vg|_E\leq C_0\left\{\int_0^{+\infty}K\left(\frac{t}{r}\right)\varphi(r)\frac{dr}{r}+\varphi(t)\right\}$$

avec $K(t) = \frac{t^s}{1+t} \in L^1_*$ [12] et C_0 indépendant de t; le produit de composition $\left(\text{sur }]0, +\infty[\text{ relatif à la mesure } \frac{dr}{r}\right)$ est dans L^q_* donc $Vg \in D_B(s; q)$ et ceci prouve le théorème.

Remarque 4.4. — Dans la démonstration du théorème 4.1 (*a*) d'unicité, on a prouvé l'identité

$$T(Au - Bu) = u - Uu$$

pour $u \in D_A \cap D_B$, et dans la démonstration du théorème (*b*) d'existence on a prouvé l'existence en utilisant l'identité

$$(A - B) Sg = g - Rg$$

pour $g \in D_B(s; q)$ et on a fait des hypothèses assurant que $(1 - U)$ et $(1 - R)$ sont inversibles dans E et $D_B(s; q)$ respectivement. Suivant une idée différente on aurait pu chercher à rendre U et R *compacts* [dans E et $D_B(s; q)$ respectivement], alors le problème (1.3) aurait une solution définie modulo un sous-espace de dimension finie dans $D_A \cap D_B$, et cette solution existerait seulement pour f dans le supplémentaire d'un sous-espace de dimension finie de $D_B(s; q)$ ceci grâce à la théorie de Riesz.

5. Espaces d'interpolation.

5.1. Dans les applications des résultats précédents à des situations concrètes, il faudra expliciter les espaces $D_A(s; q)$ et $D_B(s; q)$ qui ont servi dans toutes les démonstrations d'existence. Un outil commode pour cela, est la théorie des espaces d'interpolation « réels » de Lions et Peetre [1]. On rappelle ici les définitions et quelques résultats élémentaires relatifs à cette théorie, qui serviront dans la suite.

La définition la plus simple des espaces d'interpolation réels est celle utilisant des « moyennes » (*cf.* Lions-Peetre [1]).

Définition 5.1. — *Soit* X, Y *un couple d'espaces de Banach avec* $X \subset Y$ [13], *on désigne par* $(X, Y)_{\theta, p}$ *avec* $0 < \theta < 1$ *et* $1 \leqq p \leqq +\infty$, *le sous-espace de* Y *formé des a qui peuvent s'écrire*

$$a = x(t) + y(t) \qquad (t > 0), \tag{5.1}$$

où x et y sont deux fonctions mesurables à valeurs dans X *et* Y *respectivement et telles que*

$$t^{-\theta} |x(t)|_X \in L^p_*, \qquad t^{1-\theta} |y(t)|_Y \in L^p_*, \tag{5.2}$$

l'espace $(X, Y)_{\theta, p}$ *est muni de la norme naturelle* [14].

---

[12] Car $0 < s < 1$.

[13] Et avec injection continue.

[14] C'est-à-dire $a \mapsto \inf \left\{ \left| t^{-\theta} |x(t)|_X \right|_{L^p_*} + \left| t^{1-\theta} |y(t)|_Y \right|_{L^p_*} \right\}$, le inf étant pris par rapport à tous les couples $\{x, y\}$ vérifiant (5.1) et (5.2).

Les espaces ainsi définis sont évidemment complets.

Voici une liste de propriétés (démontrées dans Lions-Peetre [1]) et qui seront utilisées dans la suite :

Proposition 5.2. — *Pour* $0 < \theta < 1$, $1 \leq p < +\infty$, X *est dense dans* $(X, Y)_{\theta, p}$.

Proposition 5.3. — *Soit* π *un opérateur linéaire continu dans* Y, *dont la restriction à* X *est linéaire continue dans* X; *alors la restriction de* π *à* $(X, Y)_{\theta, p}$ *est linéaire continue dans* $(X, Y)_{\theta, p}$.

Ceci justifie que ces espaces soient appelés espaces d'interpolation.

Proposition 5.4. — *Soient* $0 < \theta_0 < \theta_1 < 1$ *et* $1 \leq p_0$, $p_1 \leq +\infty$, *alors on a l'identité*

$$((X, Y)_{\theta_0 p_0}; (X, Y)_{\theta_1, p_1})_{t, p_t} = (X, Y)_{\theta_t, p_t},$$

avec

$$\theta_t = (1 - t)\,\theta_0 + t\theta_1 \qquad \text{et} \qquad p_t^{-1} = (1 - t)\,p_0^{-1} + t p_1^{-1}.$$

Cette propriété est connue sous le nom de « réitération ».

L'exemple essentiel de tels espaces est le suivant (*cf.* Grisvard [1]) :

Proposition 5.5. — *Soit* A *un opérateur fermé dans* E *espace de Banach, on suppose que* A *est admissible dans une direction* (cf. *définition* 2.1), *alors* D_A *étant muni de la norme du graphe, on a*

$$(D_A, E)_{\theta, q} = D_A(s, q),$$

avec $s = 1 - \theta$, $0 < \theta < 1$, $1 \leq q \leq +\infty$.

Pour terminer cette liste de rappels, voici une définition équivalente des espaces d'interpolation réels, utilisant des « traces » (l'équivalence avec la définition 5.1 est prouvée dans Grisvard [5]) :

Définition 5.6. — *Soit* X, Y *un couple d'espaces de Banach avec* $X \subset Y$ *on désigne par* $(X, Y)_{\theta, p}$ *avec* $0 < \theta < 1$ *et* $1 \leq p \leq +\infty$, *le sous-espace de* Y *formé des a qui peuvent s'écrire*

$$a = u^{(j)}(0), \tag{5.3}$$

où u est une fonction mesurable à valeurs dans X *et telle que* [15] :

$$t^{\alpha} |u(t)|_X \in L^p_*, \qquad t^{\beta} |u^{(m)}(t)|_Y \in L^p_*, \tag{5.4}$$

avec

$$0 \leq j \leq m - 1, \qquad \alpha > -j, \qquad \alpha + m > \beta, \qquad j + \beta < m$$

et

$$\theta = (\alpha + j)(\alpha - \beta + m)^{-1}.$$

---

(15) La dérivation doit être comprise au sens des distributions.

5.2. Dans les applications du nº 2 à des situations concrètes les espaces E, D_A et D_B seront en général déduits des espaces de Sobolev dont on rappelle ici la définition et quelques propriétés.

On fixe un espace de Banach X et on désigne par $L_p^{\bullet}(\mathbf{R}^n; X)$ le complété de l'espace $C_0(\mathbf{R}^n; X)$ des fonctions continues à support compact dans $\mathbf{R}^n$ et à valeurs dans X, pour la norme

$$u \mapsto \left(\int_{\mathbf{R}^n} |u(x)|_X^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (1 \leq p < +\infty),$$
$$u \mapsto \max_{x \in \mathbf{R}^n} |u(x)|_X \qquad (p = +\infty);$$

l'espace $L_p^{\bullet}(\mathbf{R}^n; X)$ est donc l'espace usuel des fonctions mesurables à valeurs dans X et de « puissance p » intégrable dans $\mathbf{R}^n$, pour p fini, et c'est l'espace des fonctions continues u à valeurs dans X telles que

$$|u(x)|_X \to 0 \qquad \text{lorsque} \qquad |x| \to +\infty,$$

pour p infini.

Ceci posé, on désigne par $W_p^s(\mathbf{R}^n; X)$ l'espace des u telles que

$$D^\alpha u \in L_p^{\bullet}(\mathbf{R}^n; X) \qquad \text{pour} \quad |\alpha| \leq s$$

lorsque s est entier; pour $0 < s < 1$, on désigne par $W_p^s(\mathbf{R}^n; X)$ l'espace des $u \in L_p^{\bullet}(\mathbf{R}^n; X)$ telles que

$$\frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{s + \frac{n}{p}}} \in L_p^{\bullet}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n; X).$$

Enfin pour s non entier, $s = k + \sigma$, k entier, $0 < \sigma < 1$, on désigne par $W_p^s(\mathbf{R}^n; X)$ l'espace des u telles que

$$u \in W_p^k(\mathbf{R}^n; X),$$
$$D^\alpha u \in W_p^\sigma(\mathbf{R}^n; X) \qquad \text{pour} \quad |\alpha| = k.$$

A présent, on fixe un ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$; pour u fonction définie dans Ω, on pose

$$\tilde{u} = \begin{cases} u & \text{dans } \Omega, \\ 0 & \text{hors de } \Omega \end{cases}$$

et pour φ définie dans $\mathbf{R}^n$, on désigne par $\varphi|_\Omega$ la restriction de φ à Ω; alors on a la

Définition 5.7. — *On désigne par* $W_p^s(\Omega; X)$ *l'espace des* $u = \varphi|_\Omega$ *où* φ *décrit l'espace* $W_p^s(\mathbf{R}^n; X)$ *et on désigne par* $\tilde{W}_p^s(\Omega; X)$ *le sous-espace de* $W_p^s(\Omega; X)$ *formé des* u *telles que* $\tilde{u} \in W_p^s(\mathbf{R}^n; X)$. *On munit ces espaces de la norme naturelle.*

Ces espaces ont été amplement décrits dans la littérature mathématique (*cf.* par exemple Lions-Magenes [1]). La famille des espaces W_p^s (et celle des espaces $\tilde{W}_p^s$) n'est pas complètement stable par interpolation réelle; c'est pourquoi on est conduit à introduire d'autres espaces qui ont été définis pour la première fois par Besov [1]; on désigne par $B_p^1(\mathbf{R}^n; X)$ l'espace des $u \in L_p^{\cdot}(\mathbf{R}^n; X)$ tels que

$$\frac{u(x) + u(y) - 2u\left(\frac{x+y}{2}\right)}{|x-y|^{1+\frac{n}{p}}} \in L_p^{\cdot}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n; X);$$

puis on désigne par $B_p^s(\mathbf{R}^n; X)$ pour s entier > 1 l'espace des $u \in W_p^{s-1}(\mathbf{R}^n; X)$ tels que

$$D^\alpha u \in B_p^1(\mathbf{R}^n; X) \qquad \text{pour} \quad |\alpha| = s-1;$$

enfin pour s non entier, on pose $B_p^s(\mathbf{R}^n; X) = W_p^s(\mathbf{R}^n; X)$.

DÉFINITION 5.8. — *On désigne par* $B_p^s(\Omega; X)$ *l'espace des* $u = v|_\Omega$ *où* v *décrit l'espace* $B_p^s(\mathbf{R}^n; X)$ *et on désigne par* $\tilde{B}_p^s(\Omega; X)$ *le sous-espace de* $B_p^s(\Omega; X)$ *formé des* u *tels que* $\tilde{u} \in B_p^s(\mathbf{R}^n; X)$. *On munit ces espaces de la norme naturelle.*

Le résultat suivant sur l'interpolation des espaces de Sobolev et de Besov est démontré dans Lions-Magenes ([1], [2], [3]) et Lions-Peetre [1] :

PROPOSITION 5.9. — *On suppose que* Ω *est, soit un ouvert borné régulier de* $\mathbf{R}^n$ ([16]), *soit un produit d'intervalles (finis ou infinis), alors on a les identités*

$$\begin{aligned}
(W_p^{s_0}(\Omega; X); W_p^{s_1}(\Omega; X))_{\theta,p} &= B_p^{s_\theta}(\Omega; X),\\
(B_p^{s_0}(\Omega; X); B_p^{s_1}(\Omega; X))_{\theta,p} &= B_p^{s_\theta}(\Omega; X),\\
(W_p^{s_0}(\Omega; X), B_p^{s_1}(\Omega; X))_{\theta,p} &= B_p^{s_\theta}(\Omega; X),\\
(\tilde{W}_p^{s_0}(\Omega; X), \tilde{W}_p^{s_1}(\Omega; X))_{\theta,p} &= \tilde{B}_p^{s_\theta}(\Omega; X),\\
(\tilde{B}_p^{s_0}(\Omega; X), \tilde{B}_p^{s_1}(\Omega; X))_{\theta,p} &= \tilde{B}_p^{s_\theta}(\Omega; X),\\
(\tilde{W}_p^{s_0}(\Omega; X), B_p^{s_1}(\Omega; X))_{\theta,p} &= \tilde{B}_p^{s_\theta}(\Omega; X),
\end{aligned}$$

avec $s_\theta = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$ *et à condition que* $m \geq s_0, s_1$.

Le caractère « local » des espaces décrits ci-dessus est bien connu; c'est ce qui permet de définir des espaces analogues sur une variété compacte suffisamment différentiable de dimension n [précisément on doit supposer la variété Ω de classe C^m avec $m \geq s$, si on veut définir les espaces $W_p^s(\Omega; X)$ et $B_p^s(\Omega; X)$].

([16]) Dans toute la suite on dira qu'un ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$ est régulier si sa frontière Γ est une variété différentiable (C^∞) de dimension $n-1$ régulièrement plongée dans $\mathbf{R}^n$, Ω étant d'un seul côté de Γ.

On sera amené à utiliser dans la suite une autre description des espaces $\tilde{W}_p^s(\Omega; X)$ et $\tilde{B}_p^s(\Omega; X)$ elle est basée sur le résultat suivant qui a été démontré par Lions [2] dans le cas où s est entier et par Uspenski [1] et Grisvard [6] dans le cas général :

THÉORÈME 5.10. — *On suppose que Ω est un ouvert borné régulier de $\mathbf{R}^n$ ou un demi-espace, de frontière Γ, alors l'application γ,*

$$u \mapsto \left\{ u\Big|_\Gamma, \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial n^k}\Big|_\Gamma \right\} \qquad \left(k < s - \frac{1}{p}\right) \quad (^{17})$$

est linéaire continue surjective de

$$W_p^s(\Omega; X) \qquad sur \qquad \prod_{j=0}^{k} B_p^{s-j-\frac{1}{p}}(\Gamma; X)$$

et de

$$B_p^s(\Omega; X) \qquad sur \qquad \prod_{j=0}^{k} B_p^{s-j-\frac{1}{p}}(\Gamma; X)$$

et le noyau de γ est facteur direct

Ceci permet d'énoncer la

PROPOSITION 5.11. — *Si Ω est un ouvert borné et régulier de $\mathbf{R}^n$ ou un demi-espace, de frontière Γ, on a la caractérisation suivante de* $\tilde{W}_p^s(\Omega; X)$ [resp. $\tilde{B}_p^s(\Omega; X)$] :

(i) *pour $s - \frac{1}{p}$ non entier, c'est le sous-espace de* $W_p^s(\Omega; X)$ [resp. $B_p^s(\Omega; X)$] *défini par*

$$\frac{\partial^k u}{\partial n^k}\Big|_\Gamma = 0 \qquad \left(k < s - \frac{1}{p}\right);$$

(ii) *pour $s - \frac{1}{p}$ entier $(= k_0)$ et p fini, c'est le sous-espace de* $W_p^s(\Omega; X)$ [resp. $B_p^s(\Omega; X)$] *défini par*

$$\frac{\partial^k u}{\partial n^k}\Big|_\Gamma = 0 \qquad (k \leq k_0 - 1)$$

et par

$$\int_\Omega |Mu|^p \rho^{-1}\, dx < +\infty,$$

---

(17) $\frac{\partial}{\partial n}$ désigne la dérivée normale à Γ ; l'application γ est définie directement pour $p = +\infty$ et par prolongement par continuité [à partir de $C^\infty(\bar{\Omega}; X)$ qui est dense dans $W_p^s(\Omega; X)$ et $B_p^s(\Omega; X)$] pour p fini.

où $\rho(x)$ désigne la distance de x à Γ et M *est un opérateur différentiel d'ordre k_0 à coefficients indéfiniment dérivables et bornés dans $\overline{\Omega}$, tel que* $M\varphi|_\Gamma = \frac{\partial^{k_0}\varphi}{\partial n^{k_0}}$ *pour toute* $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

En particulier cela montre que $\tilde{W}^s_p(\Omega; X) = \tilde{B}^s_p(\Omega; X) = W^s_p(\Omega; X)$ pour $0 < s < \frac{1}{p}$, que $\tilde{W}^s_p(\Omega; X)$ est fermé dans $W^s_p(\Omega; X)$ et que $\tilde{B}^s_p(\Omega; X)$ est fermé dans $B^s_p(\Omega; X)$ pour $s - \frac{1}{p}$ non entier, mais que $\tilde{W}^s_p(\Omega; X)$ *n'est pas fermé* dans $W^s_p(\Omega; X)$ pour $s - \frac{1}{p}$ entier. Ce résultat a été prouvé dans Lions-Magenes [2].

Pour terminer cette brève description des espaces de Sobolev et de Besov voici quelques inclusions qui permettent de les comparer (lorsque Ω est un ouvert borné régulier de $\mathbf{R}^n$ ou un produit d'intervalles)

(5.5) $W^s_p(\Omega; X) \subset W^{s'}_p(\Omega; X)$ si $s > s'$,

(5.5') $B^s_p(\Omega, X) \subset B^{s'}_p(\Omega; X)$ si $s > s'$,

(5.6) $W^s_p(\Omega; X) \subset W^s_q(\Omega; X)$ si $q < p$ } si Ω est borné.

(5.6') $B^s_p(\Omega; X) \subset B^s_q(\Omega; X)$ si $q < p$ } si Ω est borné.

Si on suppose que X est un espace de Hilbert, on a

(5.7) $B^s_p(\Omega; X) \subset W^s_p(\Omega; X)$ si $p \leqq 2$ et s entier,

(5.7') $W^s_p(\Omega; X) \subset B^s_p(\Omega; X)$ si $p \geqq 2$ et s entier.

Ces deux dernières inclusions ont été prouvées par Taibleson [1], *cf.* aussi Grisvard [1], en particulier on a

(5.8) $$W^s_2(\Omega; X) = B^s_2(\Omega; X) = H^s(\Omega; X),$$

où $H^s(\Omega; X)$ désigne l'espace de Sobolev usuel défini par transformation de Fourier ([18]). Enfin dans le cas général où X est un espace de Banach et où $p = +\infty$, il résulte clairement de la définition que pour s entier, on a $W^s_\infty(\Omega; X) = C^s(\overline{\Omega}; X)$ et que pour s non entier, $s = k + \sigma$, k entier et $0 < \sigma < 1$, on a $W^s_\infty(\Omega; X) = C^{k,\sigma}(\overline{\Omega}; X)$, où ce dernier espace désigne les fonctions de $C^k(\overline{\Omega}; X)$ dont les dérivées d'ordre k sont hölderiennes d'exposant σ dans $\overline{\Omega}$ (si Ω est borné et régulier).

5.3. Pour terminer ce n° 5, on donne une nouvelle caractérisation des espaces d'interpolation « réels » du point 5.1, qui sera indispensable au n° 8. Ce résultat sera démontré car il ne semble pas avoir été utilisé ailleurs : on considère toujours un couple d'espaces de Banach X, Y avec $X \subset Y$ (avec inejction continue), alors on a le

([18]) C'est-à-dire l'espace des $u = v|_\Omega$ où $(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{v}(\xi) \in L_2(\mathbf{R}^n; X)$.

THÉORÈME 5.12. — *L'espace* $(X, Y)_{\theta, p}$ *est le sous-espace de* Y *formé des* a *qui peuvent s'écrire*

$$a = u^{(j)}(0) \tag{5.9}$$

où

$$u \in L_p(\mathbf{R}_+; X) \cap W_p^s(\mathbf{R}_+; Y) \tag{5.10}$$

avec $\theta = \left(j + \frac{1}{p}\right) s^{-1}$, $1 \leq p < +\infty$, $s > j + \frac{1}{p}$.

Démonstration. — On utilise la définition 5.6 de l'espace $(X, Y)_{\theta, p}$: il est toujours possible de trouver j et m entiers avec $0 \leq j \leq m - 1$, et $\beta \in \left[\frac{1}{p}, 1 + \frac{1}{p}\right[$ tels que

$$\theta = \left(\frac{1}{p} + j\right)\left(\frac{1}{p} - \beta + m\right)^{-1},$$

et par conséquent $a \in (X, Y)_{\theta, p}$ si et seulement si

$$a = u^{(j)}(0)$$

avec u, fonction mesurable à valeurs dans X telle que

$$u(t) \in L_p(\mathbf{R}_+; X), \quad t^\gamma u^{(m)}(t) \in L_p(\mathbf{R}_+; Y) \tag{5.11}$$

avec $\gamma = \beta - \frac{1}{p} \in [0, 1[$, donc $\theta = \left(\frac{1}{p} + j\right)(m - \gamma)^{-1}$.

Pour alléger l'écriture de la suite de la démonstration on notera W l'espace des fonctions u qui vérifient (5.10) et Z l'espace des fonctions u qui vérifient (5.11).

(a) On examine d'abord le cas $\gamma = 0$; donc $s = m$ est entier. On a évidemment $W \subset Z$, mais l'inclusion inverse est également vraie car (5.11) avec $\gamma = 0$ (et compte tenu de l'inclusion $X \subset Y$) implique que

$$u^{(k)} \in L_p(\mathbf{R}_+; Y) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m - 1)$$

(on peut par exemple utiliser l'inégalité de Niremberg [1]); on a donc $W = Z$ et par conséquent les espaces décrits par $u^{(j)}(0) = a$ lorsque u décrit W ou Z, coïncident.

(b) On examine à présent le cas $0 < \gamma < 1$.

On montre pour commencer que si $u \in W$, on peut construire $v \in Z$ telle que $v^{(j)}(0) = u^{(j)}(0)$: il suffit de poser

$$v(t) = \frac{j+2}{t^2} \int_0^t s\, u(s)\, ds,$$

alors on a évidemment $v \in L_p(\mathbf{R}_+; X)$ grâce à l'inégalité (9.9.10) de Hardy-Littlewood-Pólya [1]; puis un calcul élémentaire montre que

$$v^{(k)}(t) = \frac{j+2}{t^{k+2}} \int_0^t s^{k+1} u^{(k)}(s)\, ds \qquad (k < s = m - \gamma),$$

d'où

$$v^{(j)}(o) = u^{(j)}(o) \qquad \text{et} \qquad v^{(m-1)}(t) = (F.u^{(m-1)})(t),$$

où F désigne la transformation

$$\varphi(t) \mapsto \frac{j+2}{t^{m+1}} \int_0^t s^m \varphi(s)\, ds.$$

Utilisant de nouveau l'inégalité de Hardy, on vérifie que

$$| t(F.\varphi)'(t) |_{L_p(\mathbf{R}_+; Y)} \leq C_0 | \varphi |_{L_p(\mathbf{R}_+; Y)}$$

et

$$| (F.\varphi)'(t) |_{L_p(\mathbf{R}_+; Y)} \leq C_0 | \varphi |_{W_p^1(\mathbf{R}_+; Y)}$$

avec une constante C_0 indépendante de φ; par interpolation on en déduit que

$$| t^\gamma (F.\varphi)'(t) |_{L_p(\mathbf{R}_+; Y)} \leq C_0 | \varphi |_{W_p^{1-\gamma}(\mathbf{R}_+; Y)} \quad (^{19}),$$

ceci, appliqué avec $\varphi = u^{(m-1)} \in W_p^{1-\gamma}(\mathbf{R}_+; Y)$, prouve que

$$t^\gamma v^{(m)}(t) \in L_p(\mathbf{R}_+; Y)$$

et par conséquent que $v \in Z$.

Réciproquement il reste encore à vérifier que partant de $v \in Z$ on peut construire $u \in W$ avec $u^{(j)}(o) = v^{(j)}(o)$; on commence par poser

$$w(t) = \int_0^{+\infty} \varphi\left(\frac{t}{s}\right) v(s) \frac{ds}{s} = \int_0^{+\infty} \varphi(s)\, v\left(\frac{t}{s}\right) \frac{ds}{s},$$

où φ est une fonction numérique indéfiniment dérivable et à support compact dans $\mathbf{R}_+$, et telle que

$$\int_0^{+\infty} \varphi(s) \frac{ds}{s^{j+1}} = 1$$

(on régularise v sur le groupe multiplicatif $\mathbf{R}_+$); alors écrivant

$$w^{(k)}(t) = \int_0^{+\infty} \varphi^{(k)}\left(\frac{t}{s}\right) v(s) \frac{ds}{s^{k+1}},$$

on vérifie immédiatement que

$$(5.12) \qquad t^k w^{(k)}(t) \in L_p(\mathbf{R}_+; X) \qquad (k = 0, 1, \ldots),$$

(19) On utilise ici la proposition 5.9 sur l'interpolation des espaces de Sobolev la proposition 5.3 et l'identité facile à vérifier $(L_\alpha^p(Y), L_\beta^p(Y))_{\theta, p} = L_\gamma^p(Y)$ avec $\gamma = (1-\theta)\alpha + \theta\beta$ où $L_\alpha^p(Y)$ désigne l'espace des u telles que $t^\alpha u \in L_p(\mathbf{R}_+; Y)$.

puis écrivant

$$w^{(k)}(t) = \int_0^{+\infty} \varphi\left(\frac{t}{s}\right) v^{(k)}(s) \frac{ds}{s^{k+1}} \qquad (k = 0, 1, \ldots, m) \quad ([20]),$$

on vérifie que $w^{(j)}(0) = a$ et que $t^\gamma w^{(m)}(t) \in L_p(\mathbf{R}_+; Y)$.

Ensuite on pose

$$u(t) = \psi(t)\, w(t),$$

où ψ est une fonction numérique indéfiniment dérivable dans $]0, +\infty[$, identiquement égale à un dans $]0,1]$ et identiquement nulle dans $[2, +\infty[$. Il est évident que $u \in L_p(\mathbf{R}_+; X)$, que $u^{(j)}(0) = a$; enfin on vérifie que $t^\gamma u^{(m)}(t) \in L_p(\mathbf{R}_+; Y)$, grâce à (5.12) à l'inclusion $X \subset Y$ et en écrivant

$$t^\gamma u^{(m)}(t) = \psi(t)\, t^\gamma w^{(m)}(t) + t^\gamma \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m+1}{k} \psi^{(m-1-k)}(t)\, w^{(k)}(t).$$

Comme on a

$$u^{(m-1)}(t) = -\int_t^2 u^{(m)}(s)\, ds,$$

on voit immédiatement que $u^{(m-1)} \in L_p(\mathbf{R}_+; Y)$ et

$$t^\gamma u^{(m-1)}(t) \in L_p(\mathbf{R}_+; Y).$$

Par conséquent, utilisant de nouveau l'inégalité de Niremberg [1], on voit que

$$u \in W_p^{m-1}(\mathbf{R}_+; Y);$$

par ailleurs utilisant le lemme 3.2 (§ 1, chap. II de Grisvard [1]), on voit que les conditions

$$t^\gamma u^{(m-1)}(t), \quad t^\gamma u^{(m)}(t) \in L_p(\mathbf{R}_+; Y)$$

impliquent que

$$u^{(m-1)} \in W_p^{1-\gamma}(\mathbf{R}_+; Y);$$

en résumé on a prouvé que $u \in W_p^s(\mathbf{R}_+; Y)$, donc $u \in W$, et ceci achève la démonstration.

Remarque 5.13. — On peut donner une démonstration beaucoup plus simple du théorème 5.12 dans le cas où X et Y sont hilbertiens et $p = 2$ (*cf.* Grisvard [2], définition 2.2).

Remarque 5.14. — On obtient le même résultat en remplaçant (5.10) par

(5.10′) $$u \in L_p(\mathbf{R}_+; X) \cap B_p^s(\mathbf{R}_+; Y).$$

([20]) Ceci a un sens car pour $k = 0, 1, \ldots, m-1$ du fait que $v \in Z$ les fonctions $v^{(k)}$ sont absolument continues dans $]0, +\infty[$ à valeurs dans Y.

6. Équations d'évolution abstraites.

6.1. Avant d'aller plus loin on va examiner ici les relations entre les résultats des nos 2, 3 et 4, et la théorie des semi-groupes et des équations d'évolution abstraites. On va donc prendre pour B un opérateur concret : la dérivation par rapport à une variable (de temps) et pour A (ou $A_1, \ldots, A_n$) on conserve un (ou des) opérateurs abstraits.

Précisément, on fixe un espace de Banach complexe X et on pose

$$E = L_p^{\bullet}(I; X), \qquad I =]0, T[,$$
$$D_B = \{ u \in W_p^1(I; X) ; u(0) = 0 \},$$
$$Bu(t) = u'(t) ;$$

puis on fixe un opérateur fermé Λ de domaine D_Λ dans X, et on pose

$$D_A = L_p^{\bullet}(I; D_\Lambda),$$
$$(Au)(t) = \Lambda u(t).$$

Le problème (1.3) est alors équivalent au suivant : f étant donné dans $L_p^{\bullet}(I; X)$ (21) trouver $u \in W_p^1(I; X) \cap L_p^{\bullet}(I; D_\Lambda)$, solution de l'équation

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Lambda u(t) - u'(t) = f(t) & (t \in I), \\ u(0) = 0, & \end{array} \right. \tag{6.1}$$

il est clair que les hypothèses (ii) et (iv) du théorème 2.7 sont vérifiées automatiquement avec $\theta_B = \frac{\pi}{2}$; pour que $D_A \cap D_B$ soit dense dans E, il suffit que D_Λ soit dense dans X, enfin pour que les hypothèses (i) et (iii) aient lieu, il suffit que Λ soit admissible dans toute direction θ telle que $|\theta| < \theta_\Lambda$ avec un $\theta_\Lambda > \frac{\pi}{2}$, et que Λ soit inversible; ceci équivaut d'après Hille-Phillips [1] à supposer que Λ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe holomorphe et que Λ est inversible.

Dans ce cas, on peut appliquer le théorème 2.7; il y a deux manières de l'appliquer selon qu'on prend f dans $D_A(s; q) = L_p^{\bullet}(I; D_\Lambda(s; q))$ si $p = q$ ou f dans $D_B(s; q)$. Il faut expliciter ce dernier espace; pour cela, on supposera $p = q$ (22); alors d'après la proposition 5.5, on a

$$D_B(s; p) = ({}_0W_p^1(I; X) ; W_p^0(I; X))_{\theta, p}$$

avec $\theta = 1 - s$, le o indexé à gauche de W_p^1 signifiant qu'on impose la condition initiale $u(0) = 0$. Par un procédé de prolongement élémen-

---

(21) C'est-à-dire L_p si p est fini, et f continue si $p = +\infty$ (*cf.* no 5).

(22) On pourrait aussi l'expliciter dans le cas $p \neq q$ mais il aurait fallu au no 5 introduire les espaces de Besov à trois paramètres $B_q^{s, p}$.

taire on vérifie que $D_B(s; p)$ est l'espace des restrictions à I des fonctions de Z avec

$$Z = ({}_0W_p^1(\mathbf{R}_+; X); W_p^0(\mathbf{R}_+; X))_{0,p}.$$

Ensuite d'après la proposition 5.11, on a

$$ {}_0W_p^1(\mathbf{R}_+; X) = \tilde{W}_p^1(\mathbf{R}_+; X), $$
$$ W_p^0(\mathbf{R}_+; X) = \tilde{W}_p^0(\mathbf{R}_+; X), $$

d'où

$$Z = (\tilde{W}_p^1(\mathbf{R}_+; X), \tilde{W}_p^0(\mathbf{R}_+; X))_{0,p};$$

puis grâce à la proposition 5.9, on a

$$Z = \tilde{W}_p^{1-0}(\mathbf{R}_+; X) = \tilde{W}_p^s(\mathbf{R}_+; X);$$

une nouvelle application de la proposition 5.11 montre que

$$Z = W_p^s(\mathbf{R}_+; X) \quad \text{si} \quad s < \frac{1}{p}$$

et que

$$Z = \{ f \in W_p^s(\mathbf{R}_+; X); f(0) = 0 \} \quad \text{si} \quad s > \frac{1}{p}$$

et donc que

$$D_B(s; p) = W_p^s(I; X) \quad \text{si} \quad s < \frac{1}{p}$$

et que

$$D_B(s; p) = \{ f \in W_p^s(I; X); f(0) = 0 \} \quad \text{si} \quad s > \frac{1}{p}.$$

On a ainsi obtenu le

THÉORÈME 6.1. — *On suppose que* Λ *est inversible et que* Λ *est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe holomorphe dans* X, *alors la solution du problème* (6.1) *est unique dans* $W_p^1(I; X) \cap L_p^{\cdot}(I; D_\Lambda)$ *et si de plus on suppose que*

$$f \in W_p^s(I; X) \qquad \left[0 < s < 1,\ s \neq \frac{1}{p} \text{ et } f(0) = 0 \text{ si } s > \frac{1}{p} \right],$$

alors le problème (6.1) *admet une solution*

$$u \in W_p^{s+1}(I; X) \cap L_p^{\cdot}(I; D_\Lambda).$$

REMARQUE 6.2. — La restriction « Λ inversible » est inutile dans le cas où T est fini, car remplaçant u par $e^{+kt}u(t)$, on remplace Λ par $(\Lambda - k)$ qui est inversible sous la seule hypothèse que Λ soit générateur infinitésimal d'un semi-groupe holomorphe $(k > 0)$.

REMARQUE 6.3. — Lorsque $p = +\infty$, l'espace $W_p^s(I; X)$ désigne l'espace des fonctions à valeurs dans X hölderiennes d'exposant s c'est-à-dire $C^s(I; X)$ dans les notations habituelles; on a ainsi prouvé que pour $f \in C^\alpha(I; X)$ avec $f(o) = o$, la solution u du problème (6.1) a la régularité suivante :

$$u'(t), \quad \Lambda u(t) \in C^\alpha(I; X).$$

Ce résultat est meilleur que celui qu'on obtient dans la théorie des semi-groupes analytiques, quand on écrit

$$u(t) = -\int_0^t e^{s\Lambda} f(t-s)\, ds;$$

car on obtient seulement la continuité de u' et Λu (*cf.* par exemple Kato [1]).

Remarque 6.4. — On aurait pu expliciter le résultat pour $s = \frac{1}{p}$, mais il est peu naturel, car on a

$$f \in D_B(s; p) = \left\{ f \in W_p^s(I; X) ; \int_0^T |f(t)|_X^p \frac{dt}{t} < +\infty \right\};$$

d'après les propositions 5.9 et 5.11.

Si on part de $f \in D_\Lambda(s; p)$, $p = q$, on obtient le

Théorème 6.5. — *On suppose que* Λ *est inversible et que* Λ *est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe holomorphe dans* X, *alors la solution du problème* (6.1) *existe pour*

$$f \in L_p^{\cdot}(I; D_\Lambda(s; p))$$

et vérifie

$$u \in W_p^1(I; D_\Lambda(s; p)),$$
$$\Lambda u \in L_p^{\cdot}(I; D_\Lambda(s; p)).$$

Compte tenu de l'identité $D_\Lambda(s; p) = (D_\Lambda; X)_{1-s;p}$ et utilisant un résultat de Lions [2], on voit que l'espace $D_\Lambda(s; p)$ est le sous-espace de X formé des x tels que

$$\int_0^1 \left| \frac{e^{t\Lambda}x - x}{t^s} \right|_X^p \frac{dt}{t} < +\infty \tag{6.2}$$

pour p fini et

$$\max_{t \in [0,1]} \left| \frac{e^{t\Lambda}x - x}{t^s} \right|_X < +\infty \tag{6.2'}$$

pour $p = +\infty$.

6.2. Il est aussi naturel de considérer le problème de Cauchy non homogène associé à (6.1) : Trouver $u \in W_p^1(I; X) \cap L_p^{\cdot}(I; D_\Lambda)$ solution de

$$\begin{cases} \Lambda u(t) - u'(t) = f(t) & (t \in I), \\ u(o) = u_0. \end{cases} \tag{6.3}$$

Pour cela il sera plus commode de partir du résultat « symétrique » que l'on obtient en utilisant simultanément les théorèmes 6.1 et 6.5 : si on suppose que

$$f \in W_p^s(I; X) \cap L_p^{\cdot}(I; D_\Lambda(s; p)) \qquad \left(s \neq \frac{1}{p}\right),$$

avec $f(0) = 0$ dans le cas $s > \frac{1}{p}$, alors on obtient u solution de (6.1) avec

$$u, \quad u', \quad \Lambda u \in W_p^s(I; X) \cap L_p^{\cdot}(I; D_\Lambda(s; p)).$$

Si pour simplifier l'écriture, on note

$$W(s) = W_p^s(I; X) \cap L_p^{\cdot}(I; D_\Lambda(s; p)) \qquad (s \in]0, 1[)$$

et

$$W(s+1) = \{ u;\ u, u', \Lambda u \in W(s) \} \qquad (s \in]0, 1[).$$

il est évident qu'il est nécessaire de connaître les traces de ces espaces, c'est-à-dire l'espace décrit par $f(0)$ lorsque f décrit $W(s)$ $\left(\text{lorsque } s > \frac{1}{p}\right)$, et l'espace décrit par $u(0)$ lorsque u décrit $W(s+1)$; ce problème a été résolu dans Grisvard [1] (chap. II, § 1, nº 3) :

LEMME 6.6. — *L'application* $u \mapsto u(0)$ *est linéaire continue de* $W(s)$ *sur* $D_\Lambda\left(s - \frac{1}{p}; p\right)$ *pour* $0 < s - \frac{1}{p} < 1$ $(s \neq 1)$ *et l'application* $u \mapsto \{u(0), u'(0)\}$ *est linéaire continue de* $W(s+1)$ *sur* $D_\Lambda\left(s + 1 - \frac{1}{p}, p\right) \times D_\Lambda\left(s - \frac{1}{p}, p\right)$ *pour* $1 < s - \frac{1}{p} < 2 - \frac{1}{p}$, *où on désigne par* $D_\Lambda(1 + \sigma; p)$ *le sous-espace de* D_Λ *formé des* x *tels que* $\Lambda x \in D_\Lambda(\sigma; p)$ *pour* $0 < \sigma < 1$.

On en déduit le

THÉORÈME 6.7. — *On suppose que* Λ *est inversible et que* Λ *est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe holomorphe, alors pour* $f \in W(s)$, $u_0 \in D_\Lambda\left(s + 1 - \frac{1}{p}, p\right)$ $\left(s \neq \frac{1}{p}\right)$, *le problème* (6.3) *admet une solution* $u \in W(s+1)$.

Démonstration. — On considère en premier le cas $s > \frac{1}{p}$, alors $f(0) \in D_\Lambda\left(s - \frac{1}{p}; p\right)$ et $u_0 \in D_\Lambda\left(s + 1 - \frac{1}{p}; p\right)$, et par conséquent $f(0) - \Lambda u_0 \in D_\Lambda\left(s - \frac{1}{p}; p\right)$ et grâce au lemme 6.6, il existe $w \in W(s+1)$ tel que

$$w(0) = u_0,$$
$$w'(0) = \Lambda u_0 - f(0);$$

pour résoudre (6.3), il revient donc au même (en posant $u = v + w$) de résoudre le problème suivant :

$$(6.4)\qquad \begin{cases} v \in W(s+1), \\ \Lambda v(t) - v'(t) = f(t) - \Lambda w(t) + w'(t) = g(t), \\ v(0) = 0. \end{cases}$$

On a évidemment $g \in W(s)$ et $g(0) = 0$, donc le problème (6.4) admet une solution d'après ce qui précède. Le théorème est prouvé dans le cas $s > \frac{1}{p}$; le cas $s < \frac{1}{p}$ se traite de la même manière avec cette simplification qu'il n'y a pas de condition à imposer à $w'(0)$.

6.3. Suivant les mêmes idées, on peut utiliser le théorème 3.1, avec le même choix de E et B qu'au point 6.1, mais en considérant plusieurs opérateurs $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n$. Le problème (3.1) est alors équivalent au suivant : f étant donné dans $L_p^{\cdot}(I; X)$, trouver $u \in W_p^1(I; X) \cap L_p^{\cdot}(I; D_\Lambda)$ où $D_\Lambda = \bigcap_{j=1}^{n} D_{\Lambda_j}$ est muni de la norme

$$x \mapsto \sum_{j=1}^{n} |\Lambda_j x|_X,$$

u étant solution de l'équation

$$(6.5)\qquad \begin{cases} \Lambda_1 u(t) + \ldots + \Lambda_n u(t) - u'(t) = f(t) \qquad (t \in I), \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Concernant ce problème, on démontre le résultat suivant (analogue à celui du théorème 6.7), en partant du théorème 3.1.

THÉORÈME 6.8. — *On suppose que* $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n$ *sont inversibles, que* $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n$ *sont des générateurs infinitésimaux de semi-groupes holomorphes et que*

$$[e^{t\Lambda_j}, e^{s\Lambda_k}] = 0 \qquad (j \neq k,\ t,\ s \geq 0),$$

alors la solution du problème (6.5) *est unique, elle existe si on suppose de plus que* $u_0 \in \bigcap_{k=1}^{n} D_{\Lambda_k}\left(s - \frac{1}{p} + 1, p\right)$,

$$f \in W_p^s(I; X) \cap L_p^{\cdot}(I; D_{\Lambda_1}(s; p)) \cap \ldots \cap L_p^{\cdot}(I; D_{\Lambda_n}(s; p))$$

et alors on a

$$u' \in W_p^s(I; X), \quad \Lambda_k u \in L_p(I; D_{\Lambda_k}(s; p)) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

REMARQUE 6.9. — De même qu'en 6.1 et 6.2 l'hypothèse d'inversibilité pour les Λ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, est inutile si on suppose que T est fini (*cf.* Remarque 6.2).

6.4. Pour terminer on étudie dans ce numéro les conséquences des théorèmes 4.1 dans les équations d'évolution abstraites. On fait le même choix de E et B qu'au point 6.1; on fixe ensuite une famille d'opérateurs fermés $\Lambda(t)$ de domaine $D_{\Lambda(t)}$ dans X, dépendant de $t \in I$ (on suppose T fini), puis on pose

$$D_\Lambda = \{u,\ u \in E,\ u(t) \in D_{\Lambda(t)}\ \text{p. p.},\ \Lambda(t)\, u(t) \in E\},$$
$$(\Lambda u)(t) = \Lambda(t)\, u(t).$$

Le problème (1.3) est alors équivalent au suivant : f étant donné dans $L_p^{\bullet}(I;\, X)$, trouver u telle que $u(t)$, $u'(t)$, $\Lambda(t)\, u(t) \in L_p^{\bullet}(I;\, X)$, solution de l'équation

$$\text{(6.6)} \qquad \begin{cases} \Lambda(t)\, u(t) - u'(t) = f(t) & (t \in I), \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

On va prouver le

THÉORÈME 6.10. — *On suppose que pour tout* $t \in I$, $\Lambda(t)$ *est inversible et est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe holomorphe; on suppose de plus que pour* $\operatorname{Re}\lambda \geqq 0$, *la fonction* $t \mapsto (\Lambda(t) - \lambda)^{-1}$ *est continûment dérivable à valeurs dans* $\mathcal{L}(X)$ (*l'algèbre des opérateurs linéaires continus dans* X) *et qu'il existe une constante* C_0, $\alpha \in]0, 1]$ *et* $\theta_0 > \frac{\pi}{2}$ *tels que*

$$(a) \qquad |\Lambda(t)^{-1}|_{X \to X} \leqq C_0 \qquad (t \in I),$$

$$(b) \qquad |(\Lambda(t) - \lambda)^{-1}|_{X \to X} \leqq C_0 |\lambda|^{-1} \qquad (t \in I,\ |\arg\lambda| \leqq \theta_0),$$

$$(c) \qquad \left|\frac{d}{dt}(\Lambda(t) - \lambda)^{-1}\right|_{X \to X} \leqq C_0 |\lambda|^{-\alpha} \qquad (t \in I,\ |\arg\lambda| \leqq \theta_0),$$

alors la solution du problème (6.6) *est unique, et si de plus*

$$(d) \qquad \left|\frac{d}{dt}(\Lambda(t) - \lambda)^{-1} - \frac{d}{ds}(\Lambda(s) - \lambda)^{-1}\right|_{X \to X} \leqq C_0 |t - s|^{\sigma} |\lambda|^{-\alpha} \qquad (t \in I,\ |\arg\lambda| \leqq \theta_0),$$

$$(e) \qquad |(\Lambda(t) - \lambda)^{-1} - (\Lambda(s) - \lambda)^{-1}|_{X \to X} \leqq C_0 |t - s|^{\sigma} |\lambda|^{-1} \qquad (t \in I,\ |\arg\lambda| \leqq \theta_0),$$

alors pour f donné dans $W_p^s(I;\, X)$, $s < \sigma$, $s \neq \frac{1}{p}$ $\left[\text{\textit{et} } f(0) = 0 \text{ \textit{pour} } s > \frac{1}{p}\right]$, *la solution du problème* (6.6) *existe et est de plus telle que*

$$u' \in W_p^s(I;\, X).$$

Démonstration. — Il faut d'abord voir que (a), (b) et (c) impliquent les hypothèses (i), (ii) et (iii) (c'est à peu près évident), puis l'hypothèse (v) du théorème 4.1 (a). Il faut calculer

$$[B,\ (A - \lambda)^{-1}]\, u = v;$$

on a évidemment

$$v(t) = \frac{d}{dt}[(\Lambda(t) - \lambda)^{-1} u(t)] - (\Lambda(t) - \lambda)^{-1} u'(t) = \left[\frac{d}{dt}(\Lambda(t) - \lambda)^{-1}\right] u(t),$$

d'où utilisant (c) :

$$|v(t)|_X \leqq C_0 |\lambda|^{-\alpha} |u(t)|_X, \quad \text{p. p.},$$

puis en intégrant

$$|v|_E \leqq C_0 |\lambda|^{-\alpha} |u|_E.$$

On utilise ensuite le fait que $|(B-\lambda)^{-1}|_{E\to E} \leqq |\operatorname{Re}\lambda|^{-1}$ pour

$$\operatorname{Re}\lambda < 0, \qquad \text{d'où} \qquad |(B+k-\lambda)^{-1}|_{E\to E} \leqq |\operatorname{Re}\lambda - k|^{-1} = |k - \operatorname{Re}\lambda|^{-1},$$

puis

$$\begin{aligned}
&|(B+k-\lambda)^{-1}[B+k, (A-\lambda)^{-1}]u|_E \\
&= |(B+k-\lambda)^{-1}[B, (A-\lambda)^{-1}]u|_E \\
&\leqq C_0 |\lambda|^{-\alpha} (k + |\operatorname{Re}\lambda|)^{-1} |u|_E \\
&\leqq C_1 k^{-\varepsilon} |\lambda|^{-\alpha} |\operatorname{Re}\lambda|^{-1+\varepsilon} |u|_E
\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité élémentaire $C_\varepsilon k^\varepsilon |\operatorname{Re}\lambda|^{1-\varepsilon} \leqq k + |\operatorname{Re}\lambda|$ où on fixe ε assez petit pour que $\alpha > \varepsilon > 0$; alors pour $\arg\lambda = \pm\theta_0$, on obtient

$$|(B+k-\lambda)^{-1}[B+k, (A-\lambda)^{-1}]|_{E\to E} \leqq \frac{C_2 k^{-\varepsilon}}{|\lambda|^{1+\alpha-\varepsilon}};$$

c'est l'inégalité (v) avec $K = C_2 k^{-\varepsilon}$ et α remplacé par $\alpha - \varepsilon > 0$; on peut rendre K aussi petit que l'on veut en augmentant k, et par conséquent le théorème 4.1 (a) assure l'unicité de la solution du problème (6.6) où on remplace $B = \dfrac{d}{dt}$ par $B + k$, c'est-à-dire du problème

$$(6.6') \qquad \begin{cases} Au(t) - u'(t) - ku(t) = f(t) & (t \in I), \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

mais comme on a supposé T fini, l'unicité de la solution du problème (6.6′) est équivalente à l'unicité de la solution du problème (6.6) (*cf.* Remarque 6.2).

Ensuite il faut voir que (d) et (e) impliquent la densité de $D_A(s; p) \cap D_B(s; p)$ dans $D_B(s; p) = W_p^s(I; X)$ et les hypothèses (vi) et (vii) du théorème 4.1 (b). Pour vérifier la densité, on fixe $f \in W_p^s(I; X)$ et on approche $f(t)$ par $f_n(t) = -n(A(t) - n)^{-1} f(t)$; il est évident que $f_n \in D_A \subset D_A(s; p)$; pour voir que $f_n \in D_B(s; p)$, on écrit

$$\begin{aligned}
f_n(t+h) - f_n(t) = &-n\{(A(t+h) - n)^{-1} - (A(t) - n)^{-1}\} f(t+h) \\
&- n(A(t) - n)^{-1}\{f(t+h) - f(t)\},
\end{aligned}$$

d'où grâce à (b) et (e) :

$$(6.7) \qquad |f_n(t+h) - f_n(t)|_X \leqq C_0 |f(t+h) - f(t)|_X + C_0 h^\sigma |f(t+h)|_X$$

puis

$$\left(\int_0^T h^{-sp-1}\int_0^{T-h} |f_n(t+h)-f_n(t)|_X^p\,dt\,dh\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq C_0\left(\int_0^T h^{-sp-1}\int_0^{T-h} |f(t+h)-f(t)|_X^p\,dt\,dh\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$+C_0\left(\int_0^T h^{\sigma p-sp-1}\,dh\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^T |f(t)|_X^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

pourvu que $\sigma > s$; ceci prouve que $f_n \in W_p^s(I; X)$, mais aussi, comme évidemment $f_n(t) \to f(t)$ p. p. lorsque $n \to +\infty$, le théorème de Lebesgue et l'inégalité (6.7) prouvent que f_n converge vers f dans $W_p^s(I; X)$ lorsque p est fini [dans le cas où $p=+\infty$, on utilise le fait que $W_\infty^s(I; X) \subset W_q^s(I; X)$ avec $q<+\infty$, pour prouver l'existence de la solution à l'aide du théorème 4.1 (*b*), et on obtient la régularité à l'aide du théorème 4.1 (*c*)]. Le calcul fait au début de cette démonstration prouve aussi que

$$|[B+k,(A-\lambda)^{-1}](B+k-\lambda)^{-1}|_{E\to E} \leq \frac{C_2 k^{-\varepsilon}}{|\lambda|^{1+\alpha-\varepsilon}}$$

pour $\arg\lambda = \pm\theta_0$ avec $\alpha-\varepsilon > 0$; on en déduit l'inégalité (vi) avec B remplacé par $B+k$ et K aussi petit que l'on veut et α remplacé par $\alpha-\varepsilon$. Enfin reprenant l'identité

$$[B,(A-\lambda)^{-1}]u(t) = \left\{\frac{d}{dt}(A(t)-\lambda)^{-1}\right\}u(t),$$

on a

$$|[B,(A-\lambda)^{-1}]u|_{D_B(s;p)}$$
$$\leq \left(\int_0^T \left|\left\{\frac{d}{dt}(A(t)-\lambda)^{-1}\right\}u(t)\right|_X^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$+\left(\int_0^T\int_0^T \left|\left\{\frac{d}{d\tau}(A(\tau)-\lambda)^{-1}\right\}u(\tau)-\left\{\frac{d}{dt}(A(t)-\lambda)^{-1}\right\}u(t)\right|_X^p \frac{dt\,d\tau}{|t-\tau|^{1+sp}}\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq C_0|\lambda|^{-1}\left(\int_0^T |u(t)|_X^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} + C_0|\lambda|^{-\alpha}\left(\int_0^T\int_0^T |u(\tau)|_X^p \frac{dt\,d\tau}{|t-\tau|^{1+sp-\sigma p}}\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$+C_0|\lambda|^{-\alpha}\left(\int_0^T\int_0^T \frac{|u(t)-u(\tau)|_X^p}{|t-\tau|^{1+sp}}\,dt\,d\tau\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq C_1|\lambda|^{-\alpha}\left\{\left(\int_0^T |u(t)|_X^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_0^T\int_0^T \frac{|u(t)-u(\tau)|_X^p}{|t-\tau|^{1+sp}}\,dt\,d\tau\right)^{\frac{1}{p}}\right\}$$
$$= C_1|\lambda|^{-\alpha}|u|_{D_B(s;p)}$$

pour $s < \sigma$; ensuite par le même raisonnement qu'au début de la démonstration, utilisant l'inégalité élémentaire

$$|(B+k-\lambda)^{-1}|_{D_B(s;p)\to D_B(s;p)} \leqq C_2 k^{-\varepsilon} |\lambda|^{-1+\varepsilon}$$

pour $\arg\lambda = \pm\theta_0$, on obtient

$$|(B+k-\lambda)^{-1}[B+k, (A-\lambda)^{-1}]u|_{D_B(s;p)} \leqq C_3 k^{-\varepsilon} \frac{|u|_{D_B(s;p)}}{|\lambda|^{1+\alpha-\varepsilon}};$$

on obtient enfin (vii) avec B remplacé par $B+k$ et α par $\alpha-\varepsilon > 0$ à condition de prendre k assez grand. Les théorèmes 4.1 (*b*) et (*c*) montrent alors que la solution du problème (6.6′) existe et vérifie

$$u' \in W_p^s(I; X);$$

on en déduit aisément le théorème 6.10 (*cf.* la Remarque 6.2).

Remarque 6.11. — L'hypothèse (*e*) a été faite pour obtenir la densité $D_A(s; p) \cap D_B(s; p)$ dans $D_B(s; p)$; elle est conséquence de (*c*) dans le cas particulier où $\alpha = 1$ (on a alors $\sigma = 1$). *On peut* de toutes façons *supprimer l'hypothèse* (*e*) *lorsque « une puissance fractionnaire » de* $\Lambda(t)$ *a son domaine constant :* précisément si il existe un espace de Banach Y tel que

$$D_{\Lambda(t)}(\beta, p) = Y \qquad (t \in I)$$

pour un $\beta \in]0, 1[$, avec équivalence uniforme des normes :

$$C^{-1}|x|_Y \leqq |x|_X + \left| t^\beta |\Lambda(t)(\Lambda(t)-\tau)^{-1}x|_X \right|_{L_*^p} \leqq C|x|_Y$$

pour tout $t \in I$ (avec C indépendant de t), alors on vérifie aisément que

$$D_A(\beta, p) = L_p^*(I; Y),$$

il est aussi facile de vérifier que

$$L_p^*(I; Y) \cap W_p^s(I; X)$$

est dense dans $W_p^s(I; X)$ (pour p fini), par conséquent $D_A(s; p) \cap D_B(s; p)$ est dense dans $D_B(s; p)$, pourvu que $s \leqq \beta$.

7. Espaces de Sobolev dissymétriques.

7.1. On verra aux n^os 8 et 10 que des espaces de Sobolev et de Besov dissymétriques interviennent de façon naturelle dans l'étude de certains problèmes mixtes paraboliques et quasi elliptiques. On va les définir et en donner quelques propriétés dans ce numéro. Pour r, s réels > 0, $1 \leqq p \leqq +\infty$, on pose

(i) $$W_p^{r,s}(\mathbf{R}^m; \mathbf{R}^n) = L_p^*(\mathbf{R}^m; W_p^s(\mathbf{R}^n)) \cap W_p^s(\mathbf{R}^m; L_p^*(\mathbf{R}^n));$$

(ii) $$B_p^{r,s}(\mathbf{R}^m; \mathbf{R}^n) = L_p^*(\mathbf{R}^m; B_p^s(\mathbf{R}^n)) \cap B_p^s(\mathbf{R}^m; L_p^*(\mathbf{R}^n))$$

(dans ces identités on a identifié les fonctions définies sur $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$ à des fonctions de $x \in \mathbf{R}^m$ à valeurs dans un espace fonctionnel défini sur $\mathbf{R}^n$). A présent, on fixe Ω ouvert de $\mathbf{R}^m$ et G ouvert de $\mathbf{R}^n$; on notera x la variable dans Ω et y la variable dans G. On a la

Définition 7.1. — *Pour r, s réels > 0, $1 \leqq p \leqq +\infty$, on désigne par* $W_p^{r,s}(\Omega; G)$ [*resp.* $B_p^{r,s}(\Omega; G)$] *l'espace décrit par* $u = v|_{\Omega \times G}$ *lorsque* v *décrit* $W_p^{r,s}(\mathbf{R}^m; \mathbf{R}^n)$ [*resp.* $B_p^{r,s}(\mathbf{R}^m; \mathbf{R}^n)$].

Ces espaces sont des espaces de Banach (de Hilbert pour $p = 2$) lorsqu'on les munit de la norme naturelle. D'après les résultats du point 5.2, on a

$$W_p^{r,s}(\Omega; G) = B_p^{r,s}(\Omega; G)$$

lorsque r et s ne sont pas entiers, et dans tous les cas on a

$$\begin{aligned} &B_p^{r,s}(\Omega; G) \subset W_p^{r,s}(\Omega; G) \qquad \text{pour} \quad 1 \leqq p \leqq 2, \\ &W_p^{r,s}(\Omega; G) \subset B_p^{r,s}(\Omega; G) \qquad \text{pour} \quad 2 \leqq p \leqq +\infty. \end{aligned}$$

De plus, dans le cas $p = 2$, on a

$$W_2^{r,s}(\Omega; G) = B_2^{r,s}(\Omega; G) = H^{r,s}(\Omega; G),$$

où $H^{r,s}(\Omega; G)$ désigne l'espace décrit par $u = v|_{\Omega \times G}$ lorsque v décrit $H^{r,s}(\mathbf{R}^m; \mathbf{R}^n)$ et ce dernier espace peut être défini par transformation de Fourier : $v \in H_2^{r,s}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n)$ si et seulement si

$$\left[(1 + |\xi|^2)^{\frac{r}{2}} + (1 + |\eta|^2)^{\frac{s}{2}}\right] \hat{v}(\xi, \eta) \in L_2(\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n)$$

(ξ est la variable duale de x et η la variable duale de y).

Par cartes locales on peut définir des espaces analogues lorsque Ω ou G sont des variétés différentiables compactes.

Dans la suite on utilisera fréquemment le lemme suivant qui sera prouvé dans l'appendice n° 1 :

Lemme 7.2. — *Pour* $u \in B_p^{r,s}(\Omega; G)$ *on a*

$$\frac{\partial^{j+k} u}{\partial x_i^j \, \partial y_l^k} \in B_p^{\mu,\nu}(\Omega; G),$$

avec

$$\frac{\mu}{r} = \frac{\nu}{s} = 1 - \left(\frac{j}{r} + \frac{k}{s}\right).$$

On a un énoncé analogue si Ω (ou G) est remplacé par une variété différentiable compacte et si $\dfrac{\partial^j}{\partial x_i^j}$ $\left(\text{ou } \dfrac{\partial^k}{\partial y_l^k}\right)$ est remplacé par un opérateur différentiel d'ordre j (ou k) à coefficients de classe C^∞.

Dans ce qui suit, on suppose que Ω est un ouvert borné régulier de $\mathbf{R}^m$ ou un demi-espace de frontière Γ et que G est un ouvert borné régulier de $\mathbf{R}^n$ ou un demi-espace, de frontière S. On notera $\frac{\partial}{\partial n_x}$ $\left(\text{resp. } \frac{\partial}{\partial n_y}\right)$ la dérivation dans la direction normale à Γ (resp. S) vers l'intérieur de Ω (resp. G). On a alors le

THÉORÈME 7.3. — *L'application* $u \mapsto \{f_k\}, \{g_j\}$ *définie par*

$$f_k = \left.\frac{\partial^k u}{\partial n_y^k}\right|_{\Omega\times S}, \qquad g_j = \left.\frac{\partial^j u}{\partial n_x^j}\right|_{\Gamma\times G}$$

avec $j < r - \frac{1}{p}$, $k < s - \frac{1}{p}$, *applique l'espace* $W_p^{r,s}(\Omega; G)$ [*et l'espace* $B_p^{r,s}(\Omega; G)$] *sur le sous-espace de*

$$\prod_{k<s-\frac{1}{p}} B_p^{p_k, q_k}(\Omega; S) \times \prod_{j<r-\frac{1}{p}} B_p^{\mu_j, \nu_j}(\Gamma; G)$$

défini par les conditions

(i) $\frac{\partial^j f_k}{\partial n_x^j} = \frac{\partial^k g_j}{\partial n_y^k}$ *sur* $\Gamma \times S$ *pour* $\frac{j}{r} + \frac{k}{s} < 1 - \frac{1}{p}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s}\right)$;

(ii) $$\int_0^\delta \int_\Gamma \int_S \left| \frac{\partial^j f_k}{\partial \tau^j}(x + \tau n_x; y)\Big|_{\tau=t^s} - \frac{\partial^k g_j}{\partial \tau^k}(x; y + \tau n_y)\Big|_{\tau=t^r} \right|^p \frac{dt}{t}\, d\sigma_x\, d\sigma_y < +\infty$$

pour $\frac{j}{r} + \frac{k}{s} = 1 - \frac{1}{p}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s}\right)$ [23]; *les nombres* p_k, q_k, μ_j *et* ν_j *sont définis par les relations*

$$\frac{p_k}{r} = \frac{q_k}{s} = \frac{s - k - \frac{1}{p}}{s}, \qquad \frac{\mu_j}{r} = \frac{\nu_j}{s} = \frac{r - j - \frac{1}{p}}{r}.$$

Ce théorème est prouvé dans toute sa généralité dans Grisvard [1] (chap. II, n° 4, § 2) et une démonstration plus simple, particulière au cas $p = 2$ est donnée dans Grisvard [2]. Qu'il suffise de remarquer ici que les conditions de raccord (ii) n'interviennent que dans le cas particulier où il existe un couple d'entiers (j, k) avec $0 \leq j < r - \frac{1}{p}$, $0 \leq k < s - \frac{1}{p}$ et $\frac{j}{r} + \frac{k}{s} = 1 - \frac{1}{p}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s}\right)$ et que les autres conditions de raccord (i) sont naturelles puisque lorsque $\frac{j}{r} + \frac{k}{s} = 1 - \frac{1}{p}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s}\right)$, la trace

$$\left.\frac{\partial^{j+k} u}{\partial n_x^j\, \partial n_y^k}\right|_{\Gamma\times S}$$

[23] $d\sigma_x$ (resp. $d\sigma_y$) désigne une mesure de Lebesgue sur Γ (resp. S) et δ un nombre > 0 assez petit pour que $x + t^s n_x \in \Omega$ et $y + t^r n_y \in G$ pour tout $t \in]0, \delta[$, $x \in \Gamma$ et $y \in S$.

est définie (théorème 5.2), on a donc nécessairement pour ces valeurs de j et k :

$$\left.\frac{\partial^j f_k}{\partial n_x^j}\right|_{\Gamma\times S}=\left.\frac{\partial^{j+k} u}{\partial n_x^j\,\partial n_y^k}\right|_{\Gamma\times S}=\left.\frac{\partial^k g_j}{\partial n_y^k}\right|_{\Gamma\times S}.$$

De ce théorème on déduit aisément d'autres résultats de traces de la forme suivante : $u\mapsto\{\gamma_k\}$ est linéaire continue de $B_p^{r,s}(\Gamma;\,G)$ sur

$$\prod_{k<s-\frac{1}{p}} B_p^{p_k,q_k}(\Gamma;\,S)$$

par exemple.

7.2. Pour la suite l'intérêt essentiel du théorème 7.3 est un théorème d'interpolation qui s'en déduit, et qui permet de déterminer les espaces $D_A(s;\,p)$ définis au nº 2, dans la plupart des situations pratiques provenant de l'étude de problèmes aux limites en équations aux dérivées partielles.

On fixe une famille $M=\{M_j\}_{j=1}^J$ d'opérateurs différentiels dans Ω ouvert borné régulier de $\mathbf{R}^m$.

On a donc

$$M_j u(x)=\sum_{|\alpha|\leq m_j} a_{j,\alpha}\,D^\alpha u(x),$$

où les $a_{j,\alpha}$ sont des fonctions de classe C^∞ dans $\overline{\Omega}$; m_j est l'ordre de M_j. On utilisera la

Définition 7.4. — *Pour Ω ouvert borné régulier de $\mathbf{R}^m$ on désigne par* $W_{p,M}^r(\Omega)$ [resp. $B_{p,M}^r(\Omega)$] *le sous-espace de* $W_p^r(\Omega)$ [resp. de $B_p^r(\Omega)$] *défini par les conditions*

(i) $M_j u=0$ *sur* Γ *pour* $m_j<r-\frac{1}{p}$;

(ii) $\int_\Omega |M_j u|^p\rho^{-1}\,dx<+\infty$ *pour* $m_j=r-\frac{1}{p}$, *où ρ désigne la distance à la frontière* Γ.

Il y a une norme naturelle d'espace de Banach sur $W_{p,M}^r(\Omega)$ qui en fait un sous-espace vectoriel fermé de $W_p^r(\Omega)$ lorsque $m_j\neq r-\frac{1}{p}$ pour tout j $\left(\text{c'est en particulier le cas lorsque } r-\frac{1}{p} \text{ n'est pas entier}\right)$.

Ceci posé, on a le (*cf.* Grisvard [2] pour la démonstration dans le cas plus simple $p=2$)

Théorème 7.5. — *On suppose que le système* M *est normal, c'est-à-dire :*

(i) $m_j\neq m_k$ *pour* $j\neq k$ [24];

[24] On peut toujours supposer $m_1<m_2<\ldots<m_J$.

(ii) *la frontière* Γ *de* Ω *est non caractéristique pour* M_j, $j = 1, 2, \ldots, J$ [25]; *alors on a les identités*

$$(W^r_{p,M}(\Omega), L_p(\Omega))_{\theta,p} = B^{r(1-\theta)}_{p,M}(\Omega) \tag{7.1}$$

et

$$(B^r_{p,M}(\Omega), L_p(\Omega))_{\theta,p} + B^{r(1-\theta)}_{p,M}(\Omega). \tag{7.2}$$

Démonstration. — On remarque d'abord que l'identité (7.2) résulte de (7.1) grâce à la proposition 5.4.

(*a*) On commence par prouver (7.1) dans le cas où $r - \frac{1}{p}$ et $r(1-\theta) - \frac{1}{p}$ ne sont pas entiers. Dans ce cas la définition des espaces qu'on utilise se simplifie puisqu'on a seulement à considérer la condition (i) dans la définition 7.4. On note Z l'espace inconnu $(W^r_{p,M}(\Omega), L_p(\Omega))_{\theta,p}$ et on utilise le théorème 5.12 : par conséquent, on a

$$f_0 \in Z \tag{7.3}$$

si et seulement si il existe

$$u \in L_p(\mathbf{R}_+;\, W^r_{p,M}(\Omega)) \cap W^s_p(\mathbf{R}_+;\, L_p(\Omega))$$

telle que

$$f_0 = u\,|_{t=0},$$

et grâce à la définition 7.1, il revient au même d'écrire

$$\left\{\begin{aligned} &u \in W^{r,s}_p(\Omega;\, \mathbf{R}_+),\\ &M_j u = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times \mathbf{R}_+; \qquad m_j < r - \frac{1}{p},\\ &u(x, 0) = f_0(x), \end{aligned}\right. \tag{7.4}$$

avec $\theta = \frac{1}{ps}$ $\left(\text{donc } s > \frac{1}{p} \text{ puisque } \theta < 1\right)$. Ensuite, utilisant le théorème 7.3, on voit que (7.3) a lieu si et seulement si $f_0 \in B^{p_0}_p(\Omega)$ et si il existe une famille de fonctions g_j avec $j < r - \frac{1}{p}$ telle que

$$\left\{\begin{aligned} &g_j \in B^{\mu_j,\nu_j}_p(\Gamma;\, \mathbf{R}_+) \qquad \left(j < r - \frac{1}{p}\right),\\ &\frac{\partial^j f_0}{\partial n_x^j} = g_j \quad \text{sur } \Gamma \qquad \text{et pour } t = 0, \quad \frac{j}{r} < 1 - \frac{1}{p}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s}\right),\\ &\sum_{l=0}^{m_j} M_{j,l}\, g_l = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times \mathbf{R}_+, \qquad m_j < r - \frac{1}{p}, \end{aligned}\right. \tag{7.5}$$

---

[25] En d'autres termes, le coefficient de $\frac{\partial^{m_j}}{\partial n_x^{m_j}}$ dans M_j, ne s'annule pas sur Γ.

où les opérateurs $M_{j,l}$ sont définis par

$$(7.6)\qquad M_j v = \sum_{l=0}^{m_j} M_{j,l} \frac{\partial^l v}{\partial n_x^l} \quad (j = 1, 2, \ldots, J) \quad \text{sur } \Gamma$$

pour $v \in W_p^\rho(\Omega)$ avec $\rho > m_j + \frac{1}{p}$. L'opérateur $M_{j,l}$ est donc un opérateur différentiel d'ordre $\leqq m_j - l$ sur Γ, à coefficients de classe C^∞.

En résumé, compte tenu de l'identité

$$p_0 = \frac{r}{s}\left(s - \frac{1}{p}\right) = r\left(1 - \frac{1}{ps}\right) = r(1 - \theta),$$

on a prouvé que $f_0 \in Z$ si et seulement si

$$(7.7)\qquad f_0 \in B_p^{r(1-\theta)}(\Omega)$$

et il existe un système de fonctions g_j vérifiant (7.5).

Il en résulte que pour $\frac{m_j}{r} < 1 - \frac{1}{p}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s}\right)$, c'est-à-dire pour

$$m_j < r - \frac{1}{p} - \frac{r}{ps} = r(1 - \theta) - \frac{1}{p},$$

on a nécessairement

$$M_j f_0 = \sum_{l=0}^{m_j} M_{j,l} g_l \big|_{t=0} = 0 \quad \text{sur } \Gamma,$$

et par conséquent on a

$$(7.8)\qquad f_0 \in B_{p,M}^{r(1-\theta)}(\Omega).$$

Réciproquement, on doit montrer que partant de f_0 vérifiant(7.8), on peut construire des fonctions g_j vérifiant (7.5). Pour cela, on remarque d'abord que $\frac{\partial^j f_0}{\partial n_x^j}$ est donné dans $B_p^{p_0 - j - \frac{1}{p}}(\Gamma)$ (*cf.* théorème 5.10) et que grâce au théorème 5.12 et à la proposition 5.9, l'application $g \mapsto g|_{t=0}$ applique $B_p^{\mu_j, \nu_j}(\Gamma; \mathbf{R}_+)$ sur $B_p^{p_0 - j - \frac{1}{p}}(\Gamma)$. Ceci permet de construire les g_j pour $j \notin \{m_1, m_2, \ldots, m_J\}$, il reste alors à construire les g_{m_j} avec $m_j < r - \frac{1}{p}$. A ce point, on utilise le fait que le système M est normal et on pose

$$(7.9)\qquad g_{m_j} = - M_{j,m_j}^{-1} \sum_{l=0}^{m_j - 1} M_{j,l} g_l$$

(on définit ainsi successivement g_{m_1}, g_{m_2}, ...); de cette façon on obtient $g_j \in B_p^{\mu_j, \nu_j}(\Gamma; \mathbf{R}_+)$ et $\sum_{l=0}^{m_j} M_{j,l}\, g_l = 0$ pour $m_j < r - \frac{1}{p}$; il reste à vérifier que

$$g_{m_j} = \frac{\partial^{m_j} f_0}{\partial n_x^{m_j}} \quad \text{snr } \Gamma \quad \text{pour} \quad t = 0 \quad \text{et} \quad \frac{m_j}{r} < 1 - \frac{1}{p}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s}\right);$$

pour cela on écrit :

$$g_{m_j}|_{t=0} = -\mathrm{M}_{j,m_j}^{-1}\left(\sum_{l=0}^{m_j-1}\mathrm{M}_{j,l}\,g_l\right)\Bigg|_{t=0}$$

$$= -\mathrm{M}_{j,m_j}^{-1}\left(\sum_{l=0}^{m_j-1}\mathrm{M}_{j,l}\frac{\partial^l f_0}{\partial n_x^l}\right) = \frac{\partial^{m_j} f_0}{\partial n_x^{m_j}} - \mathrm{M}_{j,m_j}^{-1}(\mathrm{M}_j f_0)\,|_\Gamma = \frac{\partial^{m_j} f_0}{\partial n_x^{m_j}}$$

puisque l'hypothèse (7.8) implique que $\mathrm{M}_j f_0 = 0$ sur Γ pour

$$m_j < r(1-\theta) - \frac{1}{p}.$$

Ceci prouve le théorème 7.5 dans le cas où $r - \frac{1}{p}$ et $r(1-\theta) - \frac{1}{p}$ ne sont pas entiers.

(*b*) On considère à présent le cas où $r - \frac{1}{p}$ n'est pas entier et où $r(1-\theta) - \frac{1}{p} = m_{j_0}$ pour une certaine valeur j_0 de j.

Suivant le même raisonnement qu'en (*a*) on voit que (7.3) a lieu si et seulement si il existe une famille de fonctions g_j avec $j < r - \frac{1}{p}$ telle que

$$\text{(7.10)}\qquad \left\{\begin{aligned} & g_j \in \mathrm{B}_p^{\mu_j,\nu_j}(\Gamma;\mathbf{R}_+) \qquad \left(j < r - \frac{1}{p}\right),\\ & \sum_{l=0}^{m_j}\mathrm{M}_{j,l}\,g_l = 0 \quad \text{sur } \Gamma\times\mathbf{R}_+, \qquad m_j < r - \frac{1}{p},\\ & \frac{\partial^j f_0}{\partial n_x^j} = g_j \quad \text{sur } \Gamma \qquad \text{et pour } t = 0, \quad \frac{j}{r} < 1 - \frac{1}{p}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s}\right) \end{aligned}\right.$$

et

$$\text{(7.11)}\qquad \int_0^{\delta}\int_\Gamma\left|\frac{\partial^j f_0}{\partial t^j}(x + t n_x) - g_j\left(x, t^{\frac{r}{s}}\right)\right|^p d\sigma_x\,\frac{dt}{t} < +\infty \qquad (j = m_{j_0}).$$

Raisonnant comme en (*a*) on voit que (7.10) implique que $f_0 \in \mathrm{B}_p^{r(1-\theta)}(\Omega)$ et $\mathrm{M}_j f_0 = 0$ sur Γ pour $j < j_0$. Pour vérifier la condition sur $\mathrm{M}_{j_0} f_0$ on emploie une méthode différente :

On utilise la proposition 5.4 et l'identité (7.1) dans les cas où elle est déjà prouvée; de cette façon on peut écrire

$$\mathrm{Z} = (\mathrm{B}_{p,\mathrm{M}}^{r(1-\theta)+\varepsilon}(\Omega);\ \mathrm{B}_{p,\mathrm{M}}^{r(1-\theta)-\varepsilon}(\Omega))_{\frac{1}{2},p}$$

en choisissant $\varepsilon \in \left]0, \frac{1}{p}\right[$; on en déduit que pour $f_0 \in \mathrm{Z}$, on a

$$\mathrm{M}_{j_0} f_0 \in \left(\tilde{\mathrm{W}}_p^{\frac{1}{p}+\varepsilon}(\Omega);\ \mathrm{W}^{\frac{1}{p}-\varepsilon}(\Omega)\right)_{\frac{1}{2},p},$$

grâce à la proposition 5.11, d'où

$$\mathrm{M}_{j_0} f_0 \in \tilde{\mathrm{W}}_p^{\frac{1}{p}}(\Omega)$$

grâce à la proposition 5.9, puis enfin

$$\int_\Omega |\mathrm{M}_{j_0} f_0|^p \rho^{-1}\, dx < +\infty;$$

ceci achève de prouver que $f_0 \in \mathrm{B}_{p,\mathrm{M}}^{r(1-\theta)}(\Omega)$.

Réciproquement partant de f_0 vérifiant (7.8), on doit construire des fonctions g_j vérifiant (7.10) et (7.11). On utilise le même procédé qu'en (a) consistant à construire d'abord les g_j pour $j \notin \{m_1, \ldots, m_j\}$ et à en déduire les g_{m_j} au moyen de (7.9) pour $m_j < r - \frac{1}{p}$. Il reste seulement à vérifier (7.11) : Notre hypothèse sur f_0 implique que [26] :

$$\int_0^\delta \int_\Gamma \left| \sum_{l=0}^{m_{j_0}} \mathrm{M}_{j_0, l} \frac{\partial^l f_0}{\partial t^l}(x + tn_x) \right|^p d\sigma_x \frac{dt}{t} < +\infty,$$

on a

$$\left(\int_0^\delta \int_\Gamma \left| \frac{\partial^{m_{j_0}} f_0}{\partial t^{m_{j_0}}}(x + tn_x) - g_{m_{j_0}}\left(x; t^{\frac{r}{s}}\right) \right|^p d\sigma_x \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \mathrm{C} \left(\int_0^\delta \int_\Gamma \left| \mathrm{M}_{j_0, m_{j_0}} \frac{\partial^{m_{j_0}} f_0}{\partial t^{m_{j_0}}}(x + tn_x) - \mathrm{M}_{j_0, m_{j_0}} g_{m_{j_0}}\left(x; t^{\frac{r}{s}}\right) \right|^p d\sigma_x \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \mathrm{C} \left(\int_0^\delta \int_\Gamma \left| \sum_{l=0}^{m_{j_0}} \mathrm{M}_{j_0, l} \frac{\partial^l f_0}{\partial t^l}(x + tn_x) \right|^p d\sigma_x \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+ \mathrm{C} \sum_{l=0}^{m_{j_0}-1} \left(\int_0^\delta \int_\Gamma \left| \mathrm{M}_{j_0, l} \left(\frac{\partial^l f_0}{\partial t^l}(x + tn_x) - g_l\left(x; t^{\frac{r}{s}}\right) \right) \right|^p d\sigma_x \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+ \mathrm{C} \left(\int_0^\delta \int_\Gamma \left| \sum_{l=0}^{m_{j_0}} \mathrm{M}_{j_0, l}\, g_l\left(x; t^{\frac{r}{s}}\right) \right|^p d\sigma_x \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Il reste donc à vérifier que

$$\left(\int_0^\delta \int_\Gamma \left| \mathrm{M}_{j_0, l} \left(\frac{\partial^l f_0}{\partial t^l}(x + tn_x) - g_l\left(x; t^{\frac{r}{s}}\right) \right) \right|^p d\sigma_x \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$$

---

[26] En fait l'hypothèse porte sur $\mathrm{M}_{j_0} f_0$, mais il est facile de voir que

$$\varphi = \mathrm{M}_{j_0} f_0 - \sum_{l=0}^{m_{j_0}} \mathrm{M}_{j_0 l} \frac{\partial^l f_0}{\partial t^l}(x + tn_x)$$

coïncide avec un élément de $\tilde{\mathrm{W}}_p^{\frac{1}{p}}(\Omega)$ au voisinage de Γ.

pour $l = 0, 1, \ldots, m_{j_0} - 1$. On a $f_0 \in B_p^{p_0}(\Omega)$, $g_l \in B_p^{\mu_l, \nu_l}(\Gamma; \mathbf{R}_+)$ et

$$\frac{\partial^l f_0}{\partial n_x^l} = g_l(x, 0) \quad \text{pour} \quad x \in \Gamma$$

donc grâce au théorème 7.3 il existe $w \in B_p^{r, s}(\Omega; \mathbf{R}_+)$ tel que

$$w(x, 0) = f_0(x) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^l w}{\partial n_x^l}(x, t) = g_l(x, t), \qquad x \in \Gamma;$$

on en déduit grâce au théorème 7.2 que

$$M_{j_0, l}\, w \in B_p^{r - m_{j_0} + l, \frac{s}{r}(r - m_{j_0} + l)}(\Omega; \mathbf{R}_+)$$

et comme on a

$$\frac{l}{r - m_{j_0} + l} = 1 - \frac{1}{p}\left(1 + \frac{r}{s}\right)\frac{1}{r - m_{j_0} + l},$$

une nouvelle application du théorème 7.3 montre que

$$\int_0^{\delta} \int_{\Gamma} \left| M_{j_0, l}\left(\frac{\partial^l f_0}{\partial t^l}(x + t n_x) - g_l\left(x; t^{\frac{r}{s}}\right)\right)\right|^p d\sigma_x \frac{dt}{t} < \infty$$

et ceci achève de prouver (7.1) dans le cas $r(1 - \theta) - \frac{1}{p}$ entier.

(*c*) On remarque pour terminer que l'identité (7.1) dans le cas où $r - \frac{1}{p}$ et $r(1 - \theta) - \frac{1}{p}$ sont entiers résulte de (7.1) dans les cas déjà examinés, grâce à la proposition 5.4.

7.3. On va encore déduire du théorème 7.2 un autre résultat qui sera utile au nº 10 et qui en fait est une généralisation du théorème 7.2. On considère Ω (resp. G) un ouvert borné régulier de $\mathbf{R}^m$ (resp. $\mathbf{R}^n$) et de frontière notée Γ (resp. S). On considère $P = \{P_j(x; D_x)\}_{j=1}^{J}$ (resp. $Q = \{Q_k(y; D_y)\}_{k=1}^{K}$) un système normal d'opérateurs différentiels dans Ω (resp. dans G) à coefficients de classe C^∞ dans $\overline{\Omega}$ (resp. $\overline{G}$). On note a_j le degré de P_j et b_k le degré de Q_k. On peut donc supposer que

$$0 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_J,$$
$$0 \leq b_1 < b_2 < \ldots < b_K$$

et le coefficient de

$$\frac{\partial^{a_j}}{\partial n_x^{a_j}} \quad \text{dans } P_j$$

ne s'annule pas sur Γ tandis que le coefficient de $\frac{\partial^{b_k}}{\partial n_y^{b_k}}$ dans Q_k ne s'annule pas sur S.

Ceci posé on a le

THÉORÈME 7.6. — *L'application $u \mapsto \{\varphi_k\}\{\psi_j\}$ définie par*

(7.12) $$\varphi_k = Q_k u|_{\Omega \times S}, \qquad \psi_j = P_j u|_{\Gamma \times G}$$

avec $a_j < r - \frac{1}{p}$, $b_k < s - \frac{1}{p}$, *applique l'espace* $W_p^{r,s}(\Omega;\ G)$ [*et l'espace* $B_p^{r,s}(\Omega;\ G)$] *sur le sous-espace de*

$$\prod_{b_k < s - \frac{1}{p}} B_p^{p_{b_k}, q_{b_k}}(\Omega;\ S) \times \prod_{a_j < r - \frac{1}{p}} B_p^{\mu_{a_j}, \nu_{a_j}}(\Gamma;\ G)$$

défini par les conditions

$$P_j \varphi_k = Q_k \psi_j \quad sur\ \Gamma \times S \tag{7.13}$$

pour $\frac{a_j}{r} + \frac{b_k}{s} < 1 - \frac{1}{p}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s}\right)$ *avec* $\frac{p_k}{r} = \frac{q_k}{s} = \frac{s - k - \frac{1}{p}}{s}$ *et* $\frac{\mu_j}{r} = \frac{\nu_j}{s} = \frac{r - j - \frac{1}{p}}{r}$, *à condition qu'il n'y ait aucun couple* (a_j, b_k) *tel que* $\frac{a_j}{r} + \frac{b_k}{s} = 1 - \frac{1}{p}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s}\right)$.

On peut également résoudre le cas exceptionnel où il existe un couple (a_j, b_k) avec $\frac{a_j}{r} + \frac{b_k}{s} = 1 - \frac{1}{p}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s}\right)$ en introduisant des conditions intégrales dans (7.13), mais on n'aura pas à utiliser cela dans la suite.

Démonstration. — (*a*) Le théorème 7.3 et le lemme 7.2 montrent que les φ_k et les ψ_j sont définis et que

$$\varphi_k \in B_p^{r_{b_k}, q_{b_k}}(\Omega;\ S), \qquad \psi_j \in B_p^{\mu_{a_j}, \nu_{a_j}}(\Gamma;\ G)$$

et de plus que

$$P_j Q_k u\,|_{\Gamma\times S}$$

est défini pour $u \in W_p^{r,s}(\Omega;\ G)$ [et $B_p^{r,s}(\Omega;\ G)$], à condition que

$$\frac{a_j}{r} + \frac{b_k}{s} < 1 - \frac{1}{p}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s}\right);$$

il en résulte que

$$P_j \varphi_k|_{\Gamma\times S} = P_j Q_k u\,|_{\Gamma\times S} = Q_k P_j u\,|_{\Gamma\times S} = Q_k \psi_j|_{\Gamma\times S}.$$

(*b*) Réciproquement, partant d'une famille $\{\varphi_k\}\ \{\psi_j\}$ vérifiant les conditions du théorème, on doit construire $u \in W_p^{r,s}(\Omega;\ G)$ [ou $B_p^{r,s}(\Omega;\ G)$] satisfaisant aux identités (7.12). Pour cela on écrit

$$P_j v = \sum_{\alpha=0}^{a_j} P_{j,\alpha} \frac{\partial^\alpha v}{\partial n_x^\alpha} \quad \text{sur } \Gamma,$$

pour $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$ et

$$Q_k w = \sum_{\beta=0}^{b_k} Q_{k,\beta} \frac{\partial^\beta w}{\partial n_y^\beta} \quad \text{sur } S,$$

pour $w \in C^\infty(\overline{G})$, avec $P_{j,\alpha}$ opérateur différentiel sur Γ d'ordre $\leqq a_j - \alpha$ et $Q_{k,\beta}$ opérateur différentiel sur S d'ordre $\leqq b_k - \beta$. D'après le théorème 7.3, il suffit de construire une famille de fonctions $\{f_k\}$, $\{g_j\}$ avec

$$f_k \in B_p^{p_k, q_k}(\Omega; S), \qquad g_j \in B_p^{\mu_j, \nu_j}(\Gamma, G)$$

pour $j < r - \frac{1}{p}$ et $k < s - \frac{1}{p}$, avec

$$(7.14) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{\partial^j f_k}{\partial n_x^j} = \dfrac{\partial^k g_j}{\partial n_y^k} & \text{sur } \Gamma \times S & \text{pour } \dfrac{j}{r} + \dfrac{k}{s} < 1 - \dfrac{1}{p}\left(\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{s}\right), \\ \displaystyle\sum_{\alpha=0}^{a_j} P_{j,\alpha} g_\alpha = \psi_j & \text{sur } \Gamma \times G, & a_j < r - \dfrac{1}{p}, \\ \displaystyle\sum_{\beta=0}^{b_k} Q_{k,\beta} f_\beta = \varphi_k & \text{sur } \Omega \times S, & b_k < s - \dfrac{1}{p}, \end{array} \right.$$

(c) Pour cela on déterminera d'abord les

$$h_{j,k} = \left.\frac{\partial^j f_k}{\partial n_x^j}\right|_{\Gamma \times S} = \left.\frac{\partial^k g_j}{\partial n_y^k}\right|_{\Gamma \times S} \in B_p^{\alpha_{j,k}; \beta_{j,k}}(\Gamma; S)$$

avec

$$\frac{\alpha_{j,k}}{r} = \frac{\beta_{j,k}}{s} = 1 - \frac{j + \frac{1}{p}}{r} - \frac{k + \frac{1}{p}}{s}.$$

Il faudra évidemment que ces $h_{j,k}$ vérifient

$$(7.15) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \displaystyle\sum_{\alpha=0}^{a_j} P_{j,\alpha} h_{\alpha,k} = \frac{\partial^k \psi_j}{\partial n_y^k}, & \dfrac{a_j}{r} + \dfrac{k}{s} < 1 - \dfrac{1}{p}\left(\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{s}\right), \\ \displaystyle\sum_{\alpha=0}^{b_k} Q_{k,\beta} h_{j,\beta} = \frac{\partial^j \varphi_k}{\partial n_x^j}, & \dfrac{i}{r} + \dfrac{b_k}{s} < 1 - \dfrac{1}{p}\left(\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{s}\right). \end{array} \right.$$

Ce système est facile à résoudre grâce aux hypothèses sur les systèmes P et Q : les $h_{\alpha,\beta}$ pour $\alpha < a_j$ et $\beta < b_k$, déterminent $h_{a_j,\beta}$ pour $\beta < b_k$ et h_{α, b_k} pour $\alpha < a_j$, et ainsi h_{a_j, b_k} est déterminé de deux manières différentes :

$$h_{a_j, b_k} = \left(\frac{\partial^{b_k} \psi_j}{\partial n_y^{b_k}} - \sum_{\alpha=0}^{a_j - 1} P_{j,\alpha} h_{\alpha, b_k} \right) P_{j, a_j}^{-1},$$

$$h_{a_j, b_k} = \left(\frac{\partial^{a_j} \varphi_k}{\partial n_x^{a_j}} - \sum_{\beta=0}^{b_k - 1} Q_{k,\beta} h_{a_j, \beta} \right) Q_{k, b_k}^{-1}.$$

Il faut vérifier que ces deux expressions sont compatibles : En explicitant h_{α, b_k}, on obtient

$$h_{\alpha, b_k} = Q_{k, b_k}^{-1} \left(\frac{\partial^\alpha \varphi_k}{\partial n_x^\alpha} - \sum_{\beta=0}^{b_k - 1} Q_{k,\beta} h_{\alpha,\beta} \right),$$

d'où

$$h_{a_j, b_k} = \mathrm{P}_{j, a_j}^{-1}\left(\frac{\partial^{b_k}\psi_j}{\partial n_y^{b_k}} - \sum_{\alpha=0}^{a_j-1} \mathrm{P}_{j,\alpha}\mathrm{Q}_{k, b_k}^{-1}\frac{\partial^\alpha \varphi_k}{\partial n_x^\alpha} + \sum_{\alpha=0}^{a_j-1}\sum_{\beta=0}^{b_k-1}\mathrm{P}_{j,\alpha}\mathrm{Q}_{k,b_k}^{-1}\mathrm{Q}_{k,\beta}h_{\alpha,\beta}\right)$$

et de même en explicitant $h_{a_j, \beta}$ on obtient

$$h_{a_j, \beta} = \mathrm{P}_{j, a_j}^{-1}\left(\frac{\partial^\beta \psi_j}{\partial n_y^\beta} - \sum_{\alpha=0}^{a_j-1}\mathrm{P}_{j,\alpha}h_{\alpha,\beta}\right),$$

d'où

$$h_{a_j, b_k} = \mathrm{Q}_{k, b_k}^{-1}\left(\frac{\partial^{a_j}\varphi_k}{\partial n_x^{a_j}} - \sum_{\beta=0}^{b_k-1}\mathrm{Q}_{k,\beta}\mathrm{P}_{j,a_j}^{-1}\frac{\partial^\beta\psi_j}{\partial n_y^\beta} + \sum_{\beta=0}^{b_k-1}\sum_{\alpha=0}^{a_j-1}\mathrm{Q}_{k,\beta}\mathrm{P}_{j,a_j}^{-1}\mathrm{P}_{j,\alpha}h_{\alpha,\beta}\right),$$

on doit donc vérifier que

$$\begin{aligned}\mathrm{Q}_{k,b_k}\frac{\partial^{b_k}\psi_j}{\partial n_y^{b_k}} &- \sum_{\alpha=0}^{a_j-1}\mathrm{P}_{j,\alpha}\frac{\partial^\alpha\varphi_k}{\partial n_x^\alpha} + \sum_{\alpha=0}^{a_j-1}\sum_{\beta=0}^{b_k-1}\mathrm{P}_{j,\alpha}\mathrm{Q}_{k,\beta}h_{\alpha,\beta}\\ &= \mathrm{P}_{j,a_j}\frac{\partial^{a_j}\varphi_k}{\partial n_x^{a_j}} - \sum_{\beta=0}^{b_k-1}\mathrm{Q}_{k,\beta}\frac{\partial^\beta\psi_j}{\partial n_y^\beta} + \sum_{\beta=0}^{b_k-1}\sum_{\alpha=0}^{a_j-1}\mathrm{Q}_{k,\beta}\mathrm{P}_{j,\alpha}h_{\alpha,\beta}\end{aligned}$$

pour $\frac{a_j}{r} + \frac{b_k}{s} < 1 - \frac{1}{p}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s}\right)$. La relation ci-dessus est évidemment vérifiée grâce à (7.13).

(*d*) Pour achever la démonstration, il reste à résoudre (7.14) en utilisant une solution de (7.15) : on choisit d'abord f_k pour $k \notin \{b_1, b_2, \ldots, b_\mathrm{K}\}$ et g_j pour $j \notin \{a_1, a_2, \ldots, a_\mathrm{J}\}$, vérifiant

$$\begin{aligned}\frac{\partial^j f_k}{\partial n_x^j} &= h_{j,k} \quad \text{sur } \Gamma\times \mathrm{S}, \qquad \frac{j}{r} < 1 - \frac{1}{p}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{s}\right) - \frac{k}{s},\\ \frac{\partial^k g_j}{\partial n_y^k} &= h_{j,k} \quad \text{sur } \Gamma\times \mathrm{S}, \qquad \frac{k}{s} < 1 - \frac{1}{p}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{s}\right) - \frac{j}{r}\end{aligned}$$

et on pose ensuite

$$g_{a_j} = \mathrm{P}_{j,a_j}^{-1}\left(\psi_j - \sum_{\alpha=0}^{a_j-1}\mathrm{P}_{j,\alpha}g_\alpha\right),$$

$$f_{b_k} = \mathrm{Q}_{k,b_k}^{-1}\left(\varphi_k - \sum_{\beta=0}^{b_k-1}\mathrm{Q}_{k,\beta}f_\beta\right)$$

(on définit ainsi successivement g_{a_1}, g_{a_2}, ... et f_{b_1}, f_{b_2}, ...).

Les relations (7.15) impliquent que

$$\frac{\partial^j f_{b_k}}{\partial n_x^j} = h_{j, b_k} \quad \text{sur } \Gamma\times\mathrm{S}$$

et

$$\frac{\partial^k g_{a_j}}{\partial n_y^k} = h_{a_j,k} \quad \text{sur } \Gamma \times S$$

et ainsi le théorème 7.6 est complètement démontré.

8. Problèmes mixtes paraboliques (I).

8.1. On utilise dans ce n° 8 les outils étudiés dans les précédents numéros pour résoudre les problèmes mixtes paraboliques de la forme suivante. On fixe un ouvert Ω borné et régulier dans $\mathbf{R}^n$, de frontière Γ. On pose

$$\mathcal{A}(x; \xi, q) = \sum_{k=0}^{l} \mathcal{A}_k(x; \xi)\, q^k,$$

$$\mathcal{M}_j(x; \xi, q) = \sum_{k=0}^{l-1} \mathcal{M}_{j,k}(x; \xi)\, q^k,$$

ces fonctions sont des polynômes en ξ et q pour tout $x \in \overline{\Omega}$; on suppose que le rapport $d = \frac{2m}{l}$ est *entier* et on suppose que

$$\mathcal{A}(x; \xi, q^d)$$

est un polynôme de degré $2m$ en ξ et q, à coefficients de classe C^∞ dans $\overline{\Omega}$, et que

$$\mathcal{M}_j(x; \xi, q^d)$$

est un polynôme de degré m_j en ξ et q, à coefficients de classe C^∞ dans $\overline{\Omega}$.

On cherchera u solution (en un sens qui sera précisé plus loin) du problème

$$(8.1) \qquad \begin{cases} \mathcal{A}(x; D_x, D_t)\, u = g & \text{dans } Q = \Omega \times I, \qquad I =]0, T[, \\ \mathcal{M}_j(x; D_x, D_t)\, u = 0 & \text{sur } \Sigma = \Gamma \times I \qquad (j = 1, 2, \ldots, m), \\ D_t^k u = 0 \quad \text{pour } t = 0 & (k = 0, 1, \ldots, l-1), \end{cases}$$

où

$$D_t = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t} \qquad \text{et} \qquad D_x = \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}\right).$$

Pour fixer les idées [et donner un sens précis à (8.1)] on supposera que g est donné dans $L_p(Q)$ et on cherchera u dans $W_p^{2m,l}(\Omega; I)$.

Pour se ramener à une équation opérationnelle de la forme (1.3), on effectue la réduction de l'ordre de la manière habituelle par rapport à la variable t, posant

$$\vec{u} = \{u, D_t u, \ldots, D_t^{l-1} u\},$$

c'est-à-dire

$$u_k = D_t^k u \qquad (k = 0, 1, \ldots, l-1);$$

on obtient ainsi le système suivant (27) :

$$(8.2)\qquad \begin{cases} D_t u_{l-1} + \mathcal{A}_l^{-1}(x) \sum_{k=0}^{l-1} \mathcal{A}_k(x;\, D_x)\, u_k = \mathcal{A}_l^{-1}(x)\, g \quad \text{dans } Q, \\ D_t u_k = u_{k+1} \qquad (k = 0,\, 1,\, \ldots,\, l-2), \end{cases}$$

avec les conditions aux limites

$$(8.3)\qquad \begin{cases} \sum_{k=0}^{l-1} \mathfrak{M}_{j,k} u_k = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \\ u_k = 0 \quad \text{pour } t = 0 \qquad (k = 0,\, 1,\, \ldots,\, l-1). \end{cases}$$

Pour préciser les espaces dans lequels on travaillera, on pose

$$E = \prod_{k=0}^{l-1} W_p^{2m-(k+1)d,\,0}(\Omega;\, I),$$

$$D_A = \left\{ \vec{u} \in \prod_{k=0}^{l-1} W_p^{2m-kd,\,0}(\Omega;\, I);\ \sum_{k=0}^{l-1} \mathfrak{M}_{j,k}(x;\, D_x)\, u_k = 0 \text{ sur } \Sigma \right\},$$

$$D_B = \{ \vec{u} \in E;\ D_t \vec{u} \in E,\ \vec{u} = 0 \text{ pour } t = 0 \}$$

et le problème (8.1) équivaut à chercher $\vec{u} \in D_A \cap D_B$ solution de (8.2) avec g donné dans $L_p(Q)$. On obtient enfin un problème de la forme (1.3) en posant

$$B\vec{u} = i D_t \vec{u} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$$

et

$$A\vec{u} = \vec{h} = \{ h_0,\, h_1,\, \ldots,\, h_{l-1} \},$$

avec

$$h_k = i u_{k+1} \qquad (k = 0,\, 1,\, \ldots,\, l-2),$$

$$h_{l-1} = -\, i \mathcal{A}_l(x)^{-1} \sum_{k=0}^{l-1} \mathcal{A}_k(x;\, D_x)\, u_k;$$

et alors le problème (8.1) prend la forme

$$(8.4)\qquad \begin{cases} \vec{u} \in D_A \cap D_B, \\ A\vec{u} - B\vec{u} = \vec{f}, \end{cases}$$

avec

$$\vec{f} = \{ 0,\, 0,\, \ldots,\, -i\mathcal{A}_l^{-1}(x)\, g(x,\, t) \}.$$

(27) Dans toute la suite on supposera $\mathcal{A}_l(x) \neq 0$ pour $x \in \overline{\Omega}$.

8.2. Le problème (8.4) est de la forme (1.3) avec cette particularité que $\vec{f}$ est donné dans le sous-espace vectoriel F fermé dans E, ainsi défini :

$$\mathrm{F} = \{\vec{f} \in \mathrm{E}\,;\, f_0 = f_1 = \ldots = f_{l-2} = 0\}.$$

Pour résoudre ce problème, on utilisera le théorème 2.9; il faut en vérifier les hypothèses. On vérifie sans peine l'hypothèse (ii) avec $\theta_{\mathrm{B}} = \frac{\pi}{2}$, car $-\mathrm{B}$ est le générateur infinitésimal du semi-groupe défini par

$$e^{-h\mathrm{B}}\vec{f}(x, t) = \begin{cases} \vec{f}(x, t-h) & (t > h), \\ 0 & (0 < t \leq h). \end{cases}$$

Pour aller plus loin, il faudra fixer des conditions sur $\mathcal{A}$ et les $\mathcal{M}_j$ qui assureront l'hypothèse (i) avec un $\theta_{\mathrm{A}} > \frac{\pi}{2}$. Pour connaître le comportement de l'opérateur $(\mathrm{A} - \lambda)^{-1}$, il faut considérer le problème suivant relatif à A :

$$(8.5) \qquad \begin{cases} \vec{u} \in \mathrm{D}_{\mathrm{A}}, \\ \mathrm{A}\vec{u} - \lambda\vec{u} = \vec{f}, \end{cases}$$

avec $\vec{f}$ donné dans E. Compte tenu de la définition de A, ce problème équivaut au suivant :

$$\begin{cases} u_k \in \mathrm{W}_p^{2m-kd,\,0}(\Omega\,;\, \mathrm{I}) & (k = 0, 1, \ldots, l-1), \\ i u_{k+1} - \lambda u_k = f_k & (k = 0, 1, \ldots, l-2), \\ -i\mathcal{A}_l(x)^{-1} \displaystyle\sum_{k=0}^{l-1} \mathcal{A}_k(x\,;\, \mathrm{D}_x)\, u_k - \lambda u_{l-1} = f_{l-1} & \text{dans } \mathrm{Q}, \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{l-1} \mathcal{M}_{j,k}(x\,;\, \mathrm{D}_x)\, u_k = 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases}$$

ou encore

$$(8.5) \qquad \begin{cases} u_0 \in \mathrm{W}_p^{2m,\,0}(\Omega\,;\, \mathrm{I}), \\ \mathcal{A}\left(x\,;\, \mathrm{D}_x, \dfrac{\lambda}{i}\right) u_0 = i\mathcal{A}_l(x) f_{l-1} - \varphi(\lambda) & \text{dans } \mathrm{Q}, \\ \mathcal{M}_j\left(x\,;\, \mathrm{D}_x, \dfrac{\lambda}{i}\right) u_0 = -\psi_j(\lambda) & \text{sur } \Sigma, \end{cases}$$

avec

$$u_k = \left(\frac{\lambda}{i}\right)^k u_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{\lambda}{i}\right)^j \frac{f_{k-1-j}}{i} \qquad (k = 1, \ldots, l-1)$$

et

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{i} \sum_{k=1}^{l} \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{\lambda}{i}\right)^j \mathcal{A}_k(x\,;\, \mathrm{D}_x)\, f_{k-1-j} - \frac{1}{i}\mathcal{A}_l(x) f_{l-1},$$

puis

$$\psi_j(\lambda) = \frac{1}{i}\sum_{k=1}^{l-1}\sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{\lambda}{i}\right)^j \mathcal{M}_{j,k}(x;\,\mathrm{D}_x)\, f_{k-1-j} \qquad (j=1, 2, \ldots, m).$$

On remarque que dans le cas particulier où $\vec{f} \in \mathrm{F}$, on a $\varphi(\lambda) = 0$ et $\psi_j(\lambda) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, m$, pour tout λ.

Pour résoudre le problème (8.5) on utilisera le résultat suivant prouvé dans Grisvard [3] et Geymonat-Grisvard [1].

Pour obtenir ce résultat on fera l'

Hypothèse 8.1 :

(i) *L'opérateur* $\mathcal{A}(x;\,\mathrm{D}_x,\,\varepsilon\,\mathrm{D}_t^d)$ *est proprement elliptique dans* $\Omega \times \mathbf{R}$, $\varepsilon \in \mathbf{C}$, $|\varepsilon| = 1$, $|\arg i\varepsilon| < \theta_{\mathrm{A}}$.

(ii) *Pour tout* $x_0 \in \Gamma$, *on note* n *la normale à* Γ *issue de* x_0 *et orientée vers l'intérieur de* Ω, *et on note* ξ' *un vecteur tangent à* Γ *en* x_0, *et on suppose que pour* β *fonction continue bornée dans* $[0, +\infty[$, *le problème*

$$(8.6)\qquad \begin{cases} \mathcal{A}(x_0;\,\xi' + \mathrm{D}_s n,\,\varepsilon\tau^d)\,\alpha(s) = \beta(s) & (s > 0), \\ \mathcal{M}_j(x_0;\,\xi' + \mathrm{D}_s n,\,\varepsilon\tau^d)\,\alpha(s) = 0 \quad \text{pour } s = 0 & (j = 1, \ldots, m) \end{cases}$$

admet une solution unique α *telle que* $\alpha, \alpha', \ldots, \alpha^{(2m)}$ *soient continues et bornées dans* $[0, +\infty[$, *pour tout* $\tau \in \mathbf{R}$, $|\xi'| + |\tau| \neq 0$, $\varepsilon \in \mathbf{C}$, $|\varepsilon| = 1$, $|\arg i\varepsilon| < \theta_{\mathrm{A}}$.

On sait d'après Agmon-Douglis-Niremberg [1], Schechter [1], Peetre [1], Agranovitch-Vichik [1] que cette hypothèse équivaut à supposer que $\mathcal{A}(x;\,\mathrm{D}_x,\,\varepsilon\,\mathrm{D}_t^d)$ est proprement elliptique dans $\Omega \times \mathbf{R}$, et que le système des $\mathcal{M}_j(x;\,\mathrm{D}_x,\,\varepsilon\,\mathrm{D}_t^d)$ vérifie la « condition complémentaire » par rapport à $\mathcal{A}(x;\,\mathrm{D}_x,\,\varepsilon\,\mathrm{D}_t^d)$ relativement à l'ouvert $\Omega \times \mathbf{R}$.

On a alors le

Théorème 8.2. — *Sous l'hypothèse* 8.1, *il existe* $\mathrm{R} \geq 0$ *tel que pour* $|\lambda| \geq \mathrm{R}$ *et* $|\arg \lambda| \leq \theta_{\mathrm{A}}$, *le problème* (8.5) *admet une solution unique* u_0, *et il existe une constante* C_0 *telle que*

$$(8.7)\qquad \sum_{j=0}^{l} |\lambda|^j\, |u_0|_{2m-jd,\,p} \leq \mathrm{C}_0 \left\{ \left| \mathcal{A}\left(x;\,\mathrm{D}_x,\,\frac{\lambda}{i}\right) u_0 \right|_{0,p} + \sum_{j=1}^{m} \left| \mathcal{M}_j\left(x;\,\mathrm{D}_x,\,\frac{\lambda}{i}\right) u_0 \right|_{2m - m_j - \frac{1}{p},\,p} \right\}$$

pour $|\lambda| \geq \mathrm{R}$ *et* $|\arg \lambda| \leq \theta_{\mathrm{A}}$ [28].

---

[28] De manière générale $v \mapsto |v|_{s,p}$ désigne la norme dans l'espace de Sobolev W_p^s relatif à Ω ou à Γ selon les cas.

La première démonstration de ce théorème dans le cas particulier $l = 1$ est due à Agmon [1]; ce théorème est prouvé dans le cas l quelconque mais $p = 2$ dans Agranovitch-Vichik [1].

Appliquant l'inégalité (8.7) à la solution du problème (8.8) on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{l-1} |\lambda|.|u_k|_{2m-(k+1)d,\,p} &\leq \sum_{k=0}^{l-1} |\lambda|^{k+1}\,|u_0|_{2m-(k+1)d,\,p} \\ &+ \sum_{k=1}^{l-1}\sum_{j=0}^{k-1} |\lambda|^{j+1}\,|f_{k-1-j}|_{2m-kd+jd} \\ &\leq C_0|f_{l-1}|_{0,p} + C_1(1+|\lambda|)^{l-1}\sum_{k=0}^{l-2}|f_k|_{2m-(k+1)d,\,p},\end{aligned}$$

où C_1 est une constante indépendante de λ et $\vec{f}$; en intégrant cette dernière inégalité par rapport à t dans I, on obtient

$$|\lambda|.|\vec{u}|_E \leq C_2(1+|\lambda|)^{l-1}|\vec{f}|_E, \qquad C_2 = \sup(C_0, C_1)$$

et dans le cas particulier $\vec{f} \in F$, c'est-à-dire $f_0 = \ldots = f_{l-2} = 0$, on obtient

$$|\lambda|.|\vec{u}|_E \leq C_0|\vec{f}|_E.$$

De cette manière l'hypothèse (i) du théorème 2.9 est vérifiée pour $|\lambda| \geq R$; pour obtenir l'hypothèse (i) pour $|\lambda| < R$, il suffit que $(A - \lambda I)$ soit bijectif pour $|\arg\lambda| \leq \theta_A$ et $|\lambda| < R$ [de cette manière on aura aussi vérifié (iii)]; pour cela on fera l'

HYPOTHÈSE 8.3. — *On suppose que le problème* (8.5) *n'a pas de valeur propre dans le secteur* $|\arg\lambda| \leq \theta_A$ *et à l'origine.*

D'après le théorème de Geymonat-Grisvard [1], ceci implique que $(A - \lambda I)$ est bijectif pour $|\arg\lambda| \leq \theta_A$ et pour $\lambda = 0$.

L'hypothèse (iv) du théorème 2.9 est évidemment vérifiée.

8.3. Ayant vérifié les hypothèses du théorème 2.9 on peut l'utiliser à présent.

THÉORÈME 8.4. — *Sous les hypothèses* 8.1 *et* 8.3 *avec* $\theta_A > \frac{\pi}{2}$ *et pour* g *donné dans* $W_p^{0,\sigma}(\Omega; I)$ *avec* σ *et* $\sigma - \frac{1}{p}$ *non entiers avec* $1 < p < +\infty$ *et*

$$D_t^j g(x, 0) = 0 \quad \textit{pour} \quad j < \sigma - \frac{1}{p},$$

le problème (8.1) *admet une solution* u *unique telle que*

$$D_t^k u \in W_p^\sigma(I; W_p^{2m-kd}(\Omega)) \qquad (k = 0, 1, \ldots, l).$$

Démonstration. — On écrit $\sigma = h + s$, avec h entier et $0 < s < 1$ et on applique le théorème 2.9 avec E remplacé par D_{B^h}, donc F remplacé par $F \cap D_{B^h}$ et D_A et D_B remplacés respectivement par $\{x \in D_A \cap D_{B^h}, Ax \in D_{B^h}\}$ et $D_{B^{(h+1)}}$. Dans ce cas $D_B(s; q)$ est l'espace des $\vec{w}$ tels que (*cf.* prop. 5.9 et 5.11) :

$$w_k \in W_p^\sigma(I; W_p^{2m-(k+1)d}(\Omega)) \qquad (k = 0, 1, \ldots, l-1)$$

et que

$$D_t^j w_k(x, 0) = 0 \qquad \text{pour } j < \sigma - \frac{1}{p}.$$

On obtient donc une solution u telle que

$$D_t^k u \in W_p^{\sigma+1}(I; W_p^{2m-(k+1)d}(\Omega)) \qquad (k = 0, 1, \ldots, l-1),$$

et il reste seulement à vérifier que

$$u \in W_p^\sigma(I; W_p^{2m}(\Omega));$$

pour cela on écrit

$$(8.8) \quad \left\{ \begin{aligned} &\mathcal{A}_0(x; D_x)\, u = g - \sum_{k=1}^{l} \mathcal{A}_k(x; D_x)\, D_t^k u \in W_p^\sigma(I; L_p(\Omega)), \\ &\mathcal{M}_{j,0}(x; D_x)\, u = \quad -\sum_{k=1}^{l-1} \mathcal{M}_{j,k}(x; D_x)\, D_t^k u \in W_p^\sigma\left(I; W_p^{2m-m_j-\frac{1}{p}}(\Gamma)\right) \end{aligned} \right.$$

et on remarque que grâce à l'hypothèse 8.1 utilisée avec $\tau = 0$, le problème (8.8) est elliptique au sens de Agmon-Douglis-Niremberg [1] pour t fixé, on a donc l'inégalité

$$|u|_{2m,p} \leq C \left\{ |\mathcal{A}_0(x; D_x)\, u|_{0,p} + |u|_{0,p} + \sum_{j=1}^{m} |\mathcal{M}_{j,0}(x; D_x)\, u|_{2m-m_j-\frac{1}{p},\, p} \right\}$$

avec une constante C qui ne dépend pas de t; on en déduit immédiatement que

$$u \in W_p^\sigma(I; W_p^{2m}(\Omega)).$$

On va déduire de ce résultat le

COROLLAIRE 8.5. — *Sous les hypothèses* 8.1 *et* 8.3 *avec* $\theta_A > \frac{\pi}{2}$ *et pour* g *donné dans* $W_p^{d\sigma, \sigma}(\Omega; I)$ *avec* $1 < p < +\infty$, $0 < \sigma < 1$, σd *non entier,* $\sigma - \frac{1}{p}$ *non entier, et*

$$D_t^j g(x, 0) = 0 \qquad \textit{pour } j < \sigma - \frac{1}{p},$$

le problème (8.1) *admet une solution* u *unique telle que*

$$u \in W_p^{d\sigma+2m, \sigma+l}(\Omega; I).$$

La démonstration est basée sur le lemme suivant qui sera prouvé dans l'Appendice n° 2 :

Lemme 8.6. — *Pour* $1 < p < +\infty$, α *et* d *entiers*, $0 < \sigma < 1$, σd *non entier, on a*

$$W_p^\sigma(I;\, W_p^{\alpha+d}(\Omega)) \cap W_p^{\sigma+1}(I;\, W_p^\alpha(\Omega)) \subset W_p^1(I;\, W_p^{\alpha+\sigma d}(\Omega)).$$

Démonstration du corollaire 8.6. — Comme les hypothèses du corollaire 8.5 impliquent celles du théorème 8.4 on sait déjà que

$$D_t^k u \in W_p^\sigma(I;\, W_p^{2m-kd}(\Omega)) \qquad (k = 0, 1, \ldots, l),$$

d'où

$$D_t^k u \in W_p^\sigma(I;\, W_p^{2m-kd}(\Omega)) \cap W_p^{\sigma+1}(I;\, W_p^{2m-(k+1)d}(\Omega)) \subset W_p^1(I;\, W_p^{2m-(k+1)d+\sigma d}(\Omega))$$

d'après le lemme 8.6 pour $k = 0, 1, \ldots, l-1$. On a donc

$$D_t^k u \in W_p^0(I;\, W_p^{2m-kd+\sigma d}(\Omega)) \qquad (k = 1, 2, \ldots, l)$$

puis

$$(8.9)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathcal{A}_0(x,\, D_x)\, u = g - \sum_{k=1}^{l} \mathcal{A}_k(x;\, D_x)\, D_t^k u \in W_p^0(I;\, W_p^{\sigma d}(\Omega)),\\ &\mathcal{M}_{j,0}(x;\, D_x)\, u = \quad - \sum_{k=1}^{l-1} \mathcal{M}_{j,k}(x;\, D_x)\, D_t^k u \in W_p^0(I;\, W_p^{2m-m_j+\sigma d}(\Omega)).\end{aligned}\right.$$

Toujours grâce à l'hypothèse 8.1 le problème (8.9) est elliptique au sens de Agmon-Douglis-Niremberg [1] pour t fixé, on a donc l'inégalité

$$|u|_{2m+\sigma d,p} \leq C\left\{ |\mathcal{A}_0(x;\, D_x)\, u|_{\sigma d,p} + |u|_{0,p} + \sum_{j=1}^{m} |\mathcal{M}_{j,0}(x;\, D_x)\, u|_{2m-m_j-\frac{1}{p}+\sigma d,p} \right\}$$

avec une constante C qui ne dépend pas de t; on en déduit immédiatement que

$$u \in W_p^0(I;\, W_p^{2m+\sigma d}(\Omega)), \qquad \text{d'où} \qquad u \in W_p^{2m+\sigma d,\, l+\sigma}(\Omega;\, I).$$

Remarque 8.7. — On peut étendre le corollaire 8.5 au cas $\sigma > 1$ de la manière suivante : si on suppose $0 < \sigma < 1$ mais $f \in W_p^{d(\sigma+1),\, \sigma+1}(\Omega;\, I)$, on obtient la régularité de u suivant t grâce au théorème 8.4, puis la régularité de u suivant x grâce au lemme 8.5 dans les cas déjà démontrés et en appliquant la méthode habituelle des « quotients différentiels ».

8.4. Les résultats obtenus ci-dessus supposent que g vérifie des conditions aux limites peu naturelles. On va maintenant lever cette restriction sur g et en même temps introduire des conditions aux limites non homogènes sur Σ. On utilisera pour cela le

LEMME 8.8. — *Si on suppose que le système des* $\mathfrak{M}_j$ *est normal* (29), *l'application* $v \to \{f_k\}\{\varphi_j\}$ *définie par*

$$f_k(x) = D_t^k v(x, 0), \qquad k < r - \frac{1}{p},$$

$$\varphi_j(x, t) = \mathfrak{M}_j(x; D_x, D_t)\, v(x, t), \qquad m_j < rd - \frac{1}{p}$$

applique l'espace

$$W_p^{rd, r}(\Omega; I)$$

sur le sous-espace de

$$\prod_k B_p^{p_k}(\Omega) \times \prod_j B_p^{\alpha_j, \beta_j}(\Gamma; I)$$

défini par les conditions

$$(8.10) \qquad D_t^h \varphi_j(x, 0) = \sum_{k=0}^{l-1} \mathfrak{M}_{j,k} f_{k+h} \qquad \text{pour} \quad x \in \Gamma$$

et

$$\frac{h}{r} + \frac{m_j}{rd} < 1 - \frac{1}{p}\left(\frac{1}{rd} + \frac{1}{r}\right), \qquad \text{avec} \quad p_k = d\left(r - k - \frac{1}{p}\right),$$

$$\frac{\alpha_j}{rd} = \frac{\beta_j}{r} = \frac{rd - m_j - \dfrac{1}{p}}{rd},$$

à condition que $r + \frac{1}{p} - \dfrac{m_j + \frac{1}{p}}{d}$ *ne soit un entier* ≥ 0 *pour aucun* $j = 1, 2, \ldots, m$.

Démonstration. — Elle repose uniquement sur le théorème 7.3.

(*a*) On part de $v \in W_p^{rd, r}(\Omega; I)$, alors d'après le théorème 7.3 et le lemme 7.2, on a

$$(8.11) \qquad f_k \in B_p^{p_k}(\Omega), \qquad k < r - \frac{1}{p}$$

et

$$(8.12) \qquad \varphi_j \in B_p^{\alpha_j, \beta_j}(\Gamma; I), \qquad m_j < rd - \frac{1}{p}$$

et de plus d'après le théorème 7.3, $D_t^h \mathfrak{M}_j v$ a une trace sur Γ pour $t = 0$, à condition que

$$\frac{h}{r} + \frac{m_j}{rd} < 1 - \frac{1}{p}\left(\frac{1}{rd} + \frac{1}{r}\right);$$

---

(29) C'est-à-dire $m_1 < m_2 < \ldots < m_m$ et le coefficient de $\left(\dfrac{\partial}{\partial n_x}\right)^{m_j}$ dans $\mathfrak{M}_j$ ne s'annule pas sur Γ.

on a donc

$$\mathrm{D}_t^h \mathfrak{M}_j v(x, 0) = \mathrm{D}_t^h \varphi_j(x, 0) = \sum_{k=0}^{l-1} \mathfrak{M}_{j,k}(x; \mathrm{D}_x) f_{k+h} \qquad \text{pour} \quad x \in \Gamma$$

et pour ces valeurs de h et m_j. Ceci prouve la nécessité des conditions (8.10).

(b) Réciproquement, partant d'un système de fonctions f_k et φ_j vérifiant les conditions (8.10), (8.11) et (8.12), on doit construire une $v \in \mathrm{W}_p^{rd,r}(\Omega; \mathrm{I})$ telle que

$$f_k(x) = \mathrm{D}_t^k v(x, 0), \qquad x \in \Omega, \qquad k < r - \frac{1}{p}$$

et

$$\varphi_j(x, t) = \mathfrak{M}_j(x; \mathrm{D}_x) v(x, t), \qquad x \in \Gamma, \qquad t \in \mathrm{I}, \qquad m_j < rd - \frac{1}{p},$$

on écrira dans la suite

$$\mathfrak{M}_j v(x) = \sum_{k=0}^{m_j} \sum_{l=0}^{m_j - kd} \mathfrak{M}_{j,k}^l \mathrm{D}_t^k \frac{\partial^l v}{\partial n^l} \qquad \text{pour} \quad x \in \Gamma,$$

où $\mathfrak{M}_{j,k}^l$ désigne un opérateur différentiel d'ordre $\leqq m_j - kd - l$ sur Γ. Grâce à l'hypothèse 8.1, $\mathfrak{M}_{j,0}^{m_j}$ est une fonction inversible sur Γ.

Utilisant une fois encore le théorème 7.3, il suffira de construire une famille de fonctions g_j vérifiant

$$(8.13) \qquad g_j \in \mathrm{B}_p^{\mu_j, \nu_j}(\Gamma; \mathrm{I}), \qquad j < rd - \frac{1}{p}, \qquad \frac{\mu_j}{d} = \nu_j = \frac{rd - j - \frac{1}{p}}{d},$$

$$(8.14) \qquad \mathrm{D}_t^k g_j(x, 0) = \frac{\partial^j f_k}{\partial n^j}(x), \qquad x \in \Gamma, \qquad \frac{j}{d} + k < r - \frac{1}{p}\left(\frac{1}{d} + 1\right),$$

$$(8.15) \qquad \varphi_j = \sum_{k=0}^{m_j} \sum_{l=0}^{m_j - kd} \mathfrak{M}_{j,k}^l \mathrm{D}_t^k g_l \quad \text{sur } \Sigma, \qquad m_j < rd - \frac{1}{p}.$$

L'identité (8.15) équivaut à

$$(8.16) \qquad g_{m_j} = (\mathfrak{M}_{j,0}^{m_j})^{-1} \left(\varphi_j - \sum_{\substack{l + kd \leqq m_j \\ l < m_j}} \mathfrak{M}_{j,k}^l \mathrm{D}_t^k g_l \right).$$

Par conséquent g_{m_j} est automatiquement déterminé par les g_l avec $l = 0, 1, \ldots, m_j - 1$. La construction des g_j peut donc être faite comme suit : on construit d'abord les g_j pour $j \notin \{m_1, \ldots, m_m\}$, solutions de (8.13) et de (8.16) en utilisant le théorème 5.12 et la proposition 5.9, puis on en déduit les g_{m_j} vérifiant (8.13) au moyen de (8.16). La condition (8.15) est alors automatiquement vérifiée; il reste à vérifier (8.14) : On le fait successivement pour g_{m_1}, g_{m_2}, ... : on voit en tenant compte de (8.10) que

$$\begin{aligned}
D_t^h g_{m_j}(x, 0) &= (\mathfrak{M}_{j,0}^{m_j})^{-1}\Big(D_t^h \varphi_j(x, 0) - \sum_{\substack{l+kd \leq m_j \\ l < m_j}} \mathfrak{M}_{j,k}^l D_t^{k+h} g_l(x, 0)\Big) \\
&= (\mathfrak{M}_{j,0}^{m_j})^{-1}\Big(D_t^h \varphi_j(x, 0) - \sum_{\substack{l+kd \leq m_j \\ l < m_j}} \mathfrak{M}_{j,k}^l \frac{\partial^l f_{h+k}}{\partial n^l}\Big) \\
&= (\mathfrak{M}_{j,0}^{m_j})^{-1}\Big(\sum_{k=0}^{m_j} \mathfrak{M}_{j,k} f_{k+h} - \sum_{k=1}^{m_j} \mathfrak{M}_{j,k} f_{k+h} - \sum_{l=0}^{m_j-1} \mathfrak{M}_{j,0}^l \frac{\partial^l f_h}{\partial n^l}\Big) \\
&= (\mathfrak{M}_{j,0}^{m_j})^{-1}\Big(\mathfrak{M}_{j,0}^{m_j} \frac{\partial^{m_j} f_h}{\partial n^{m_j}}\Big) = \frac{\partial^{m_j} f_h}{\partial n^{m_j}}
\end{aligned}$$

grâce à l'hypothèse (8.10). On a ainsi prouvé l'existence des g_j donc celle de v. Le lemme est complètement démontré. On en déduit le

THÉORÈME 8.9. — *Sous les hypothèses* 8.1 *et* 8.3 *et si le système des* $\mathfrak{M}_j$ *est normal l'application* $u \mapsto \{g; f_k, \varphi_j\}$ *définie par*

$$\text{(8.17)} \qquad \left\{\begin{array}{ll}
\mathfrak{A}(x; D_x, D_t)\, u = g & \textit{dans } Q, \\
\mathfrak{M}_j(x; D_x, D_t)\, u = \varphi_j \quad \textit{sur } \Sigma & (j = 1, 2, \ldots, m), \\
D_t^k u = f_k \quad \textit{pour } t = 0 & (k = 0, 1, \ldots, l-1)
\end{array}\right.$$

est un isomorphisme de $W_p^{d\sigma+2m, \sigma+l}(\Omega; I)$ *sur le sous-espace de*

$$W_p^{d\sigma, \sigma}(\Omega; I) \times \prod_{k=0}^{l-1} B_p^{p_k}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{m} B_p^{\alpha_j, \beta_j}(\Gamma; I) = R,$$

avec

$$p_k = d\left(\sigma + l - k - \frac{1}{p}\right), \qquad \frac{\alpha_j}{d\sigma + 2m} = \frac{\beta_j}{\sigma + l} = \frac{d\sigma + 2m - m_j - \dfrac{1}{p}}{d\sigma + 2m},$$

défini par les conditions

$$\text{(8.18)} \qquad D_t^h \varphi_j(x, 0) = \sum_{k=0}^{m_j} \mathfrak{M}_{j;k}(x; D_x) f_{k+h}$$

pour

$$\frac{h}{\sigma + l} + \frac{m_j}{d\sigma + 2m} < 1 - \frac{1}{p}\left(\frac{1}{d\sigma + 2m} + \frac{1}{\sigma + l}\right),$$

où f_{l+j} *est défini par la relation de récurrence*

$$\text{(8.19)} \qquad f_{j+l} = \mathfrak{A}_l^{-1}(x)\left(D_t^j g(x, 0) - \sum_{k=0}^{l-1} \mathfrak{A}_k(x, D_x) f_{k+j}\right) \qquad (j \geq 0),$$

à condition que σ *et* σd *ne soient pas entiers et que* $\sigma + l - \dfrac{1}{p} - \dfrac{m_j + \frac{1}{p}}{d}$ *ne soient pas entiers* ≥ 0 *pour* $j = 1, 2, \ldots, m$, *avec* $1 < p < +\infty$.

Démonstration. — (*a*) Partant de $u \in W_p^{d\sigma+2m,\sigma+l}(\Omega; I)$, on voit en appliquant le lemme 8.8 que $\{f; f_0, \ldots, f_{l-1}; g_1, \ldots, g_m\} \in R$ et les relations (8.18) sont identiques aux relations (8.10). Pour vérifier (8.19), on écrit

$$g = \mathcal{A}(x; D_x, D_t)\, u,$$

d'où

$$D_t^j g = \sum_{k=0}^{l} \mathcal{A}_k(x; D_x)\, D_t^{k+j} u \qquad (j \geq 0)$$

puis

$$D_t^j g(x, 0) = \sum_{k=0}^{l} \mathcal{A}_k(x; D_x) f_{k+j}$$

pour $j < \sigma - \frac{1}{p}$, en posant

$$f_{k+j} = D_t^{k+j} u(x, 0)$$

pour $k + j < \sigma + l - \frac{1}{p}$. Ensuite utilisant l'hypothèse 8.1, on voit que $\mathcal{A}_l(x)$ est une fonction inversible sur $\overline{\Omega}$, on a donc

$$f_{l+j} = \mathcal{A}_l^{-1}(x) \left\{ D_t^j g(x, 0) - \sum_{k=0}^{l-1} \mathcal{A}_k(x; D_x) f_{k+j} \right\},$$

relation qui définit f_{l+j} par récurrence, à partir de $f_0, f_1, \ldots, f_{l-1}$; on a ainsi prouvé la nécessité des relations (8.18) et (8.19).

(*b*) Réciproquement, partant d'un élément dans R vérifiant (8.18) et (8.19), on doit construire u solution de (8.17). On procèdera ainsi : on cherchera u sous la forme $v + w$ avec

$$(8.20) \qquad \left\{ \begin{array}{l} v \in W_p^{d\sigma+2m,\sigma+l}(\Omega; I), \\ \mathcal{M}_j(x; D_x, D_t)\, v = \varphi_j \quad \text{sur } \Sigma \qquad (j = 1, 2, \ldots, m), \\ D_t^k v = f_k \quad \text{pour } t = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, l-1), \\ D_t^j (\mathcal{A}(x; D_x, D_t)\, v - g) = 0 \quad \text{pour } t = 0 \qquad \left(j < \sigma - \frac{1}{p}\right) \end{array} \right.$$

et

$$(8.21) \qquad \left\{ \begin{array}{l} w \in W_p^{d\sigma+2m,\sigma+l}(\Omega; I), \\ \mathcal{M}_j(x; D_x, D_t)\, w = 0 \quad \text{sur } \Sigma \qquad (j = 1, 2, \ldots, m), \\ D_t^k w = 0 \quad \text{pour } t = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, l-1), \\ \mathcal{A}(x; D_x, D_t)\, w = g - \mathcal{A}(x; D_x, D_t)\, v. \end{array} \right.$$

L'existence de w résulte du corollaire 8.5 et de la remarque 8.7. Pour prouver l'existence de v on utilise le lemme 8.8 : la dernière des relations (8.20) peut s'écrire

$$D_t^{l+j} v = \mathcal{A}_l(x)^{-1} \left(D_t^j g - \sum_{k=0}^{l-1} \mathcal{A}_k(x; D_x)\, D_t^{k+j} v \right)$$

pour $t=0$; donc on voit par récurrence sur j et en utilisant les relations (8.19) que v doit vérifier

$$D_t^k v = f_k \quad \text{pour } t=0, \qquad k \leqq \sigma + l - \frac{1}{p}.$$

D'après le lemme 8.8, la condition suffisante pour que v existe est la relation (8.18), donc ceci prouve l'existence de v et le théorème est démontré.

Remarque 8.10. — Ce résultat est le meilleur possible relatif à l'espace $W_p^{d_s+2m,\sigma+l}(\Omega; I)$, puisqu'il donne des conditions *nécessaires et suffisantes* sur le second membre de l'équation et sur les données aux limites du problème (8.17) pour que la solution existe. On pourrait lever la restriction qui impose à $r+\frac{1}{p}-\frac{m_j+\frac{1}{p}}{d}$ d'être non entier en partant de l'énoncé du théorème 7.2 dans le cas général sans restriction sur le couple (r, s), on obtient alors en plus des conditions (8.18) des conditions de raccord de type intégral très déplaisantes à manier. Il est beaucoup plus intéressant de considérer le cas σ entier; c'est le but du numéro suivant. Cependant, par interpolation ([30]) à partir du théorème 8.9, on obtient directement le

Théorème 8.11. — *Sous les hypothèses* 8.1 et 8.3 *et si le système des $\mathfrak{M}_j$ est normal l'application $u \mapsto \{g; f_k, \varphi_j\}$ définie par* (8.17) *est un isomorphisme de* $B_p^{d\sigma+2m,\sigma+l}(\Omega; I)$ *sur le sous-espace de*

$$B_p^{d\sigma,\sigma}(\Omega; I) \times \prod_{k=0}^{l-1} B_p^{p_k}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{m} B_p^{\alpha_j,\beta_j}(\Gamma; I),$$

avec

$$p_k = d\left(\sigma + l - k - \frac{1}{p}\right), \qquad \alpha_j = d\beta_j = d\sigma + 2m - m_j - \frac{1}{p},$$

défini par les conditions (8.18) *et* (8.19) *à condition que* $\sigma > 0$, $\sigma - \frac{1}{p}$ *non entier et* $\sigma + l - \frac{1}{p} - \frac{m_j+\frac{1}{p}}{d}$ *non entier* $j = 1, 2, \ldots, m$, *avec* $1 < p < +\infty$.

Remarque 8.12. — Cela donne une extension du théorème 8.9 aux cas σ et σd entiers dans le cas $p=2$ puisque dans ce cas les espaces B et W coïncident.

([30]) On utilise le fait que $(B_p^{r_0 d, r_0}(\Omega; I); B_p^{r_1 d, r_1}(\Omega; I))_{\theta,p} = B_p^{r_\theta d, r_\theta}(\Omega; I)$ avec $r_\theta = (1-\theta)\, r_0 + \theta r_1$, $0 < \theta < 1$, $1 \leqq p \leqq +\infty$, qui résulte de Grisvard [1] (chap. I, n° 7).

REMARQUE 8.13. — Dans tous les énoncés de ce n° 8, l'hypothèse 8.3 est inutile lorsque T est fini.

9. PROBLÈMES MIXTES PARABOLIQUES (II).

9.1. Le but de ce n° 9 est d'étendre le théorème 8.10 au cas σ entier. Le cas le plus important est évidemment le cas où $\sigma = 0$. Pour éviter d'alourdir outre mesure l'exposé, on traitera ici seulement le cas où l'équation est du premier ordre en t, c'est-à-dire où $l = 1$. Il sera clair d'après les démonstrations que la même chose peut être faite dans le cas général $l > 1$.

On décrit de nouveau les notations en tenant compte de la simplification $l = 1$. On considère les fonctions $\mathcal{A}(x; \xi)$ et $\mathcal{M}_j(x; \xi)$, $j = 1, \ldots, m$, où $\mathcal{A}$ est un polynôme en $\xi \in \mathrm{R}^m$ de degré $2m$, à coefficients de classe C^∞ dans $\overline{\Omega}$, et où $\mathcal{M}_j$ est un polynôme en ξ de degré $m_j < 2m$, $j = 1, 2, \ldots, m$ à coefficients de classe C^∞ dans $\overline{\Omega}$.

On fera les hypothèses suivantes (qui correspondent aux hypothèses 8.1 et 8.3) :

HYPOTHÈSE 9.1. — *Pour tout $x_0 \in \Gamma$ on note n la normale à Γ issue de x_0 et orientée vers l'intérieur de Ω, et on note ξ' un vecteur tangent à Γ en x_0, et on suppose que pour β fonction continue bornée dans $]0, +\infty[$, le problème*

$$(9.1)\qquad \begin{cases} \mathcal{A}(x_0; \xi' + D_s n)\,\alpha(s) + \varepsilon\tau^d \alpha(s) = \beta(s) & (s > 0), \\ \mathcal{M}_j(x_0; \xi' + D_s n)\,\alpha(s) = 0 \quad \textit{pour } s = 0 & (j = 1, 2, \ldots, m), \end{cases}$$

admet une solution unique α telle que $\alpha, \ldots, \alpha^{(2m)}$ soient continues et bornées dans $[0, +\infty[$ pourtout $\tau \in \mathrm{R}$, $|\xi'| + |\tau| \neq 0$, $\varepsilon \in \mathrm{C}$, $|\varepsilon| = 1$, $|\arg i\varepsilon| < \theta_\Lambda$.

HYPOTHÈSE 9.2. — *On suppose que le problème*

$$(9.2)\qquad \begin{cases} u_0 \in W_p^{2m}(\Omega), \\ \mathcal{A}(x; D_x)\,u_0 + \dfrac{\lambda}{i} u_0 = 0 \quad \textit{dans } \Omega, \\ \mathcal{M}_j(x; D_x)\,u_0 = 0 \quad \textit{sur } \Gamma \qquad (j = 1, 2, \ldots, m) \end{cases}$$

n'a pas de valeur propre dans le secteur $|\arg \lambda| \leqq \theta_\Lambda$ et à l'origine.

Ceci posé, si on considère $-i\mathcal{A}$ comme un opérateur non borné Λ dans l'espace $X = L_p(\Omega)\,(1 < p < +\infty)$ et de domaine $D_\Lambda = W_{p,M}^{2m}(\Omega)$, on sait d'après le théorème 8.3 (ou directement en appliquant le résultat d'Agmon [1]), que si $\theta_\Lambda > \frac{\pi}{2}$, Λ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique dans X et que Λ est inversible.

Le but est de prouver le théorème suivant :

THÉORÈME 9.3. — *Sous les hypothèses* 9.1 *et* 9.2 *le problème*

$$(9.3)\qquad \begin{cases} D_t u + \mathcal{A}(x;\, D_x)\, u = g \quad \textit{dans } Q, \\ \mathcal{M}j(x;\, D_x)\, u = 0 \quad \textit{sur } \Sigma \qquad (j = 1, 2, \ldots, m), \\ u(x, 0) = 0, \end{cases}$$

avec $g \in L_p(\Omega;\, I)$ *admet une solution unique* u *telle que* u, $D_t u$ *et* $D_x^\alpha u \in L_p(\Omega;\, I)$ *pour* $|\alpha| \leqq 2m$, *avec* $1 < p < +\infty$.

On ne démontrera pas ce théorème directement; on démontrera d'abord plusieurs résultats préliminaires.

9.2. Dans la suite l'utilisation d'un nouvel espace fonctionnel $B_p^0(I;\, L_p(\Omega))$ sera essentielle :

DÉFINITION 9.4. — *Pour* X *espace de Banach réflexif, on désigne par* $W_q^{-1}(I;\, X)$ *le dual de* $\tilde{W}_{q'}^1(I;\, X')$ *où* X' *est le dual de* X *et* $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ *on désigne par* $B_q^0(I;\, X)$ *l'espace*

$$(W_q^1(I;\, X),\, W_q^{-1}(I;\, X))_{\frac{1}{2},\, q}.$$

Ces espaces ont de nombreuses propriétés. On utilisera les suivantes :

LEMME 9.5. — *L'opérateur* $iD_t + 1$ *est un isomorphisme de* $\tilde{B}_q^1(\mathbf{R}_+;\, X)$ *sur* $B_q^0(\mathbf{R};\, X)$.

PROPOSITION 9.6. — *Les images par l'application*

$$u \mapsto \{ u(x, 0);\, \mathcal{M}_1(x;\, D_x)\, u|_\Gamma,\, \ldots,\, \mathcal{M}_m(x;\, D_x)\, u|_\Gamma \}$$

des espaces

$$B_p^1(I;\, L_p(\Omega)) \cap B_p^0(I;\, W_p^{2m}(\Omega))$$

et

$$W_p^1(I;\, L_p(\Omega)) \cap L_p(I;\, W_p^{2m}(\Omega))$$

sont identiques

PROPOSITION 9.7. — *On a les inclusions*

$$B_p^0(I;\, L_p(\Omega)) \subset L_p(I;\, L_p(\Omega)) \qquad \textit{pour} \quad 1 < p \leqq 2$$

et

$$L_p(I;\, L_p(\Omega)) \subset B_p^0(I;\, L_p(\Omega)) \qquad \textit{pour} \quad 2 \leqq p < +\infty.$$

Toutes ces propriétés seront prouvées dans l'appendice nº 3.

9.3. A présent, on prouve l'unicité de la solution du problème (9.3) sous les hypothèses du théorème 9.3. Pour cela on applique le théorème 2.7 (unicité de la solution) avec le choix suivant de A, B et E :

$$
\begin{gathered}
E = L_p(I; X),\\
D_A = L_p(I; D_\Lambda),\\
(Au)(t) = \Lambda u(t) \qquad (t \in I;\ u \in D_A),\\
D_B = \{ u \in W_p^1(I; X);\ u(0) = 0 \},\\
Bu(t) = \frac{\partial u}{\partial t},
\end{gathered}
$$

X et Λ ayant la même signification qu'au point 9.1.

La preuve de l'existence de la solution est beaucoup moins simple, on procèdera par étapes.

PROPOSITION 9.8. — *Sous les hypothèses* 9.1 *et* 9.2 *et pour*

$$g \in B_p^1(I; L_p(\Omega)), \qquad g(x, 0) = 0,$$

le problème (9.3) *a une solution u telle que*

$$u \in B_p^2(I; L_p(\Omega)) \cap B_p^1(I; W_p^{2m}(\Omega)).$$

Démonstration. — Avec le choix indiqué ci-dessus de A, B et E, et en appliquant le théorème 2.7 (existence de la solution) on construit un opérateur

$$g \mapsto u = Sg$$

continu de

$$\tilde{W}_p^s(\mathbf{R}_+; X) \quad \text{dans } \tilde{W}_p^{s+1}(\mathbf{R}_+; X) \cap \tilde{W}_p^s(\mathbf{R}_+; D_\Lambda) \qquad (0 < s < 1),$$

tel que u soit solution de (9.3) ([31]).

Ensuite appliquant le théorème 2.7 avec E remplacé par D_B, on voit que S est continu de

$$\tilde{W}_p^s(\mathbf{R}_+; X) \quad \text{dans } \tilde{W}_p^{s+1}(\mathbf{R}_+; X) \cap \tilde{W}_p^s(\mathbf{R}_+; D_\Lambda) \qquad (1 < s < 2).$$

Par interpolation, au moyen de la proposition 5.9, on en déduit que S est linéaire continu de

$$\tilde{B}_p^1(\mathbf{R}_+; X) \quad \text{dans } \tilde{B}_p^2(\mathbf{R}_+; X) \cap \tilde{B}_p^1(\mathbf{R}_+; D_\Lambda)$$

et ceci prouve la proposition 9.8.

On en déduit la

PROPOSITION 9.9. — *Sous les hypothèses* 9.1 *et* 9.2 *et pour*

$$g \in B_p^0(I; L_p(\Omega))$$

([31]) Il est évident qu'on peut toujours se ramener au cas $I = \mathbf{R}_+$.

le problème (9.3) *admet* (*au moins*) *une solution* u *telle que*

$$u \in B_p^1(I; L_p(\Omega)) \cap B_p^0(I; W_p^{2m}(\Omega)).$$

Démonstration. — On se ramène au cas $\mathbf{R}_+$ et on utilise l'opérateur $J = (iD_t + 1)^{-1}$. D'après le lemme 9.5, on sait que $f = Jg \in B_p^1(\mathbf{R}_+; X)$ et que $f(x, 0) = 0$. Soit

$$v \in B_p^2(I; X) \cap B_p^1(I; D_\Lambda)$$

la solution du problème

$$\begin{cases} D_t v + \mathcal{A}(x; D_x) v = f \quad \text{dans } Q, \\ \mathcal{M}_j(x; D_x) v = 0 \quad \text{sur } \Sigma \qquad (j = 1, 2, \ldots, m), \\ v(x, 0) = 0 \quad \text{dans } \Omega \end{cases}$$

fournie par l'application de la proposition 9.8; comme $f(x, 0) = 0$ on a aussi $D_t v(x, 0) = 0$ et en posant

$$u = (iD_t + 1) v,$$

on obtient u solution de (9.3) et telle que

$$u \in B_p^1(I; X) \cap B_p^0(I; D_\Lambda).$$

De la proposition 9.9, on déduit le théorème 9.3 dans le *cas particulier* $1 < p \leqq 2$ en remarquant d'abord que l'on a le

Lemme 9.10. — *Sous les hypothèses* 9.1 *et* 9.2 *et pour* $1 < p \leqq 2$ *si on fixe* $v \in W_p^1(I; L_p(\Omega)) \cap L_p(I; W_p^{2m}(\Omega))$, *il existe*

$$u \in W_p^1(I; L_p(\Omega)) \cap L_p(I; W_p^{2m}(\Omega))$$

solution du problème

$$\text{(9.4)} \qquad \begin{cases} D_t u + \mathcal{A}(x; D_x) u = 0 \quad \textit{dans } Q, \\ u(x, 0) = v(x, 0) \quad \textit{dans } \Omega, \\ \mathcal{M}_j(x; D_x) u = \mathcal{M}_j(x; D_x) v \quad \textit{sur } \Sigma \qquad (j = 1, 2, \ldots, m). \end{cases}$$

Démonstration. — Utilisant la proposition 9.6, on associe à v une fonction $w \in B_p^1(I; L_p(\Omega)) \cap B_p^0(I; W_p^{2m}(\Omega))$, telle que

$$\text{(9.5)} \qquad \begin{cases} w(x, 0) = v(x, 0) \quad \text{dans } \Omega, \\ \mathcal{M}_j(x; D_x) w = \mathcal{M}_j(x; D_x) v \quad \textit{sur } \Sigma \qquad (j = 1, 2, \ldots, m). \end{cases}$$

Ensuite on pose $g = D_t w + \mathcal{A}(x; D_x) w$, on a évidemment

$$g \in B_p^0(I; L_p(\Omega)),$$

et par conséquent en appliquant la proposition 9.9, on construit une fonction $\varphi \in B_p^1(I; L_p(\Omega)) \cap B_p^0(I; W_p^{2m}(\Omega))$, solution de

$$\text{(9.6)} \qquad \begin{cases} D_t \varphi + \mathcal{A}(x; D_x) \varphi = g \quad \text{dans } \Omega, \\ \mathcal{M}_j(x; D_x) \varphi = 0 \quad \textit{sur } \Sigma \qquad (j = 1, 2, \ldots, m), \\ \varphi(x, 0) = 0 \quad \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

On obtient u sous la forme $w - \varphi$: (9.4) résulte de (9.5) et (9.6) et on a

$$u \in B_p^1(I; L_p(\Omega)) \cap B_p^0(I; W_p^{2m}(\Omega)),$$

mais comme on a $1 < p \leqq 2$, la proposition 9.7 montre que

$$u \in W_p^1(I; L_p(\Omega)) \cap L_p(I; W_p^{2m}(\Omega))$$

et ceci prouve le lemme 9.10.

Démonstration du théorème 9.3 *dans le cas* $1 < p \leqq 2$. — On se ramène aisément (par l'artifice de Korn) au cas où $\mathcal{A}$ est un opérateur homogène de degré $2m$ et à coefficients constants $\mathcal{A}(D_x)$; dans ce cas l'hypothèse 9.1 implique que l'opérateur $D_t + \mathcal{A}(D_x)$ a une solution élémentaire E dont la transformée de Fourier partielle par rapport à $x \in R^m$ est $\hat{E}(\xi, t)$ définie par

$$\hat{E}(\xi, t) = \begin{cases} \exp - it\mathcal{A}(\xi) & (t \geqq 0), \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

et d'après les travaux de Franck Jones [1], Arnese [1] et Krée [1], cette solution élémentaire a la propriété que pour tout α avec $|\alpha| = m$, il existe une constante C dépendant seulement de α, p et q telle que

$$|D^\alpha E \star \varphi|_{L_p(\mathbf{R}; L_p(\mathbf{R}^n))} \leqq C |\varphi|_{L_p(\mathbf{R}; L_p(\mathbf{R}^n))} \tag{9.7}$$

pour toute fonction $\varphi \in L_p(\mathbf{R}; L_p(\mathbf{R}^n))$ à support compact.

Alors partant de $g \in L_p(I; L_p(\Omega))$, on prolonge g en $\tilde{g}$ par zéro en dehors de Q, puis on pose $v = E \star \tilde{g}$. Il est clair que l'on a

$$v \in L_p(I; W_p^{2m}(\Omega)) \cap W_p^1(I; L_p(\Omega))$$

et

$$\begin{cases} D_t v + \mathcal{A}(D_x) v = g & \text{dans } Q, \\ v(x, 0) = 0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{9.8}$$

car E est à support dans $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}_+$. On construit ensuite u_0 solution de (9.4) en appliquant le lemme 9.10.

Posant $u = v - u_0$, on obtient une fonction u qui est évidemment solution de (9.3) avec

$$u \in L_p(I; W_p^{2m}(\Omega)) \cap W_p^1(I; L_p(\Omega)).$$

Remarque 9.11. — La démonstration précédente utilise la technique des intégrales singulières, c'est-à-dire une technique essentiellement différente des techniques utilisées dans toutes les autres parties de ce travail. Cependant, la démonstration précédente n'est pas une extension pure et simple de la démonstration faite par Agmon-Douglis-Niremberg [1], dans le cas des problèmes aux limites elliptiques, *car on a évité ici la construction de potentiels*, qui est remplacée par le lemme 9.10.

9.4. On déduira du théorème 9.3 dans le cas $1 < p \leqq 2$, le théorème 9.3 dans le cas $2 \leqq p < +\infty$, par dualité. On est ainsi amené à considérer le problème adjoint au problème (9.3), c'est pourquoi on doit supposer que le système des $\mathcal{M}_j$ est normal. Alors d'après Aronszjan-Milgram [1] et Schechter [1], on sait qu'il existe trois autres systèmes d'opérateurs différentiels $\{\mathcal{M}'_j\}_{j=1}^m$, $\{\mathcal{N}_j\}_{j=1}^m$, $\{\mathcal{N}'_j\}_{j=1}^m$ dans $\overline{\Omega}$ d'ordre inférieur à $2m$ et tels que

$$\int_\Omega \mathcal{A}(x; \mathrm{D}_x)\varphi\overline{\psi}\,dx - \int_\Omega \varphi\overline{\mathcal{A}^*(x; \mathrm{D}_x)\psi}\,dx = \sum_{j=1}^m \int_\Gamma \mathcal{M}_j\varphi\,\overline{\mathcal{N}'_j\psi}\,d\sigma - \sum_{j=1}^m \int_\Gamma \mathcal{N}_j\varphi\,\overline{\mathcal{M}'_j\psi}\,d\sigma$$

pour tout $\varphi \in \mathrm{W}_p^{2m}(\Omega)$ et $\psi \in \mathrm{W}_{p'}^{2m}(\Omega)$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.

Alors les techniques précédentes appliquées au problème adjoint à (9.3) permettent de prouver le

THÉORÈME 9.12. — *Sous les hypothèses* 9.1, 9.2 *et si le système des* $\{\mathcal{M}_j\}$ *est normal, le problème*

$$(9.9)\qquad \begin{cases} -\mathrm{D}_t u + \mathcal{A}^*(x; \mathrm{D}_x)u = g \quad \textit{dans } \mathrm{Q}, \\ \mathcal{M}'_j(x; \mathrm{D}_x)u = 0 \quad \textit{sur } \Sigma \qquad (j = 1, 2, \ldots, m), \\ u(x; \mathrm{T}) = 0 \qquad (x \in \Omega) \end{cases}$$

avec $g \in \mathrm{L}_{p'}(\mathrm{I}; \mathrm{L}_{p'}(\Omega))$, $1 < p' \leqq 2$ *admet une solution unique*

$$u \in \mathrm{W}_{p'}^1(\mathrm{I}; \mathrm{L}_{p'}(\Omega)) \cap \mathrm{L}_{p'}(\mathrm{I}; \mathrm{W}_{p'}^{2m}(\Omega)).$$

Démonstration du théorème 9.3 *dans le cas* $2 \leqq p < +\infty$. — On transpose le résultat précédent. Pour cela on pose

$$\mathrm{E} = \mathrm{L}_{p'}(\mathrm{I}; \mathrm{L}_{p'}(\Omega)),$$

$$\mathrm{D}_{\mathcal{L}} = \{u \in \mathrm{W}_{p'}^1(\mathrm{I}; \mathrm{L}_{p'}(\Omega)) \cap \mathrm{L}_{p'}(\mathrm{I}; \mathrm{W}_{p'}^{2m}(\Omega)),\ \mathcal{M}'_j(x; \mathrm{D}_x)u = 0 \text{ sur } \Sigma \text{ pour } j = 1, 2, \ldots, m,\ u(x; \mathrm{T}) = 0\},$$

$$\mathcal{L} = -\mathrm{D}_t + \mathcal{A}^*(x; \mathrm{D}_x);$$

avec ces notations $\mathcal{L}$ est un isomorphisme de $\mathrm{D}_{\mathcal{L}}$ sur E et par conséquent $\mathcal{L}^*$ est un isomorphisme de $\mathrm{D}_{\mathcal{L}^*}$ sur E^* si on désigne par $\mathcal{L}^*$ l'adjoint de $\mathcal{L}$ au sens des opérateurs non bornés. On a évidemment

$$\mathcal{L}^* = \mathrm{D}_t + \mathcal{A}(x; \mathrm{D}_x),$$

donc il faut seulement vérifier que

$$\mathrm{D}_{\mathcal{L}^*} = \{v \in \mathrm{W}_p^1(\mathrm{I}; \mathrm{L}_p(\Omega)) \cap \mathrm{L}_p(\mathrm{I}; \mathrm{W}_p^{2m}(\Omega)),\ \mathcal{M}_j(x; \mathrm{D}_x)v = 0 \text{ sur } \Sigma \text{ pour } j = 1, 2, \ldots, m,\ v(x, 0) = 0\}.$$

Comme $D_{\mathcal{L}}$ est contenu avec injection continue dans $W^1_{p'}(I; L_{p'}(\Omega))$ on a pour $v \in D_{\mathcal{L}^\star}$ avec $\mathcal{L}^\star v = g$:

$$|v|_{E^\star} \leqq C \max |(u, g)|, \tag{9.10}$$

où C ne dépend pas de v et où le maximum est pris par rapport à toutes les $u \in W^1_{p'}(I; L_{p'}(\Omega))$ avec $u(x, T) = 0$:

$$|u|_{W^1_{p'}(I; L_{p'}(\Omega))} \leqq 1,$$

car $\mathcal{L}$ est un isomorphisme de $D_{\mathcal{L}}$ sur E.

En utilisant la méthode des quotients différentiels, on va déduire de (9.10) que $\frac{\partial v}{\partial t} \in E^\star$. Pour cela, on pose

$$v_h(x, t) = \begin{cases} h^{-1}\{v(x, t-h) - v(x, t)\} & (t \geqq h), \\ -h^{-1} v(x, t) & (t < h) \end{cases}$$

pour $h \in I$, et on définit g_h de manière analogue. On va vérifier que $v_h \in D_{\mathcal{L}^\star}$ et que $\mathcal{L}^\star v_h = g_h$, ce qui permettra d'appliquer (9.10) à v_h. On a en effet pour $u \in D_{\mathcal{L}}$:

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}u, v_h) &= -h^{-1}(\mathcal{L}u, v) + h^{-1}\int_h^T \int_\Omega (-D_t u + \mathcal{A}^\star(x; D_x) u)\, \overline{v(x, t-h)}\, dt\, dx \\ &= -h^{-1}(\mathcal{L}u, v) + h^{-1}\int_0^{T-h} \int_\Omega (-D_t u + \mathcal{A}^\star(x; D_x) u)(x, t+h)\, \overline{v(x, t)}\, dt\, dx \\ &= (\mathcal{L}U_h, v)\end{aligned}$$

avec

$$U_h(x, t) = \begin{cases} h^{-1}\{u(x, t+h) - u(x, t)\} & (t \leqq T-h), \\ -h^{-1} u(x, t) & (T-h \leqq t); \end{cases}$$

on a ainsi

$$(\mathcal{L}u, v_h) = (\mathcal{L}U_h, v) = (U_h, g) = (u, g_h) = (u, \mathcal{L}^\star v_h)$$

car $g_h \in E^\star$ et donc $v_h \in D_{\mathcal{L}^\star}$ et $\mathcal{L}^\star v_h = g_h$, l'inégalité (9.10) appliquée à v_h montre alors que

$$|v_h|_{E^\star} \leqq C \max |(u, g_h)| = C \max |(U_h, g)| \leqq C |g|_{E^\star} \tag{9.11}$$

car on a $|U_h|_E \leqq |u|_{W^1_{p'}(I; L_{p'}(\Omega))} \leqq 1$. Comme l'espace $E^\star = L_p(I; L_p(\Omega))$ est réflexif, on déduit de (9.11) que $\frac{\partial v}{\partial t} \in L_p(I; L_p(\Omega))$.

Pour continuer on écrit

$$\mathcal{A}(x, D_x) v = \mathcal{L}^\star v - D_t v = g - D_t v \in L_p(I; L_p(\Omega))$$

comme on sait déjà que $v \in L_p(I; L_p(\Omega))$, on peut d'après Lions-Magenes [4] définir $\mathcal{M}_j(x; D_x)v$ comme élément de $L_p\big(I; W_p^{-m_j-\frac{1}{p}}(\Gamma)\big)$ et on a pour $u \in D_{\mathcal{L}}$:

$$(\mathcal{L}u, v) - (u, g) = 0$$
$$= -\int_\Omega u(x, 0)\,\overline{v(x, 0)}\,dx + \sum_{j=1}^m \int_0^T \langle \mathcal{N}'_j(x; D_x)u, \overline{\mathcal{M}_j(x; D_x)v}\rangle\,dt$$

où le crochet désigne la dualité entre $W_p^{-m_j-\frac{1}{p}}(\Gamma)$ et $W_{p'}^{m_j+\frac{1}{p}}(\Gamma)$.

En faisant varier u on en déduit que $v(x, 0) = 0$ et que $\mathcal{M}_j(x; D_x)v = 0$, $j = 1, 2, \ldots, m$, ce qui par une nouvelle application de Lions-Magenes [4] prouve que $v \in L_p(I; W_p^{2m}(\Omega))$ (32) et ceci achève de prouver le théorème 9.3 dans le cas $2 \leq p < +\infty$.

9.5. Revenant à la situation du n° 8, on énonce les résultats généralisant le théorème 8.10 qui peuvent être prouvés en utilisant les méthodes de ce n° 9.

Théorème 9.13. — *Le théorème* 8.9 *est vrai pour σ entier ≥ 0, à condition que $\sigma + l - \frac{1}{p} - \frac{m_j + \frac{1}{p}}{d}$ ne soit pas entier pour $j = 1, 2, \ldots, m$.*

Remarque 9.14. — Les résultats précédents peuvent être étendus facilement au cas où $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x, t; D_x, D_t)$ et les $\mathcal{M}_j = \mathcal{M}_j(x, t; D_x, D_t)$ dépendent aussi du temps et vérifient les hypothèses 8.1 et 8.3 uniformément pour $t \in I$ avec T fini. Il suffit pour cela d'appliquer l'artifice de Korn.

Remarque 9.15. — Suivant à peu près les mêmes idées, on aurait pu obtenir des résultats analogues pour $g \in L_q(I; L_p(\Omega))$ $(1 < p, q < +\infty, p \neq q)$.

10. Problèmes mixtes quasi-elliptiques.

10.1. Dans ce numéro les données seront les suivantes : on fixe deux ouverts $\Omega \subset \mathbf{R}^m$ et $G \subset \mathbf{R}^n$, bornés réguliers de frontières $\Gamma = \partial\Omega$ et $S = \partial G$.

On notera x la variable dans Ω et y la variable dans G. On donne $\mathcal{A}(x; D_x)$ opérateur elliptique de degré 2μ à coefficients de classe C^∞ dans $\overline{\Omega}$ et $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_j\}_{j=1}^{\mu}$ un système *normal* (33) d'opérateurs différentiels de degré $\leq 2\mu - 1$ à coefficients de classe C^∞ dans $\overline{\Omega}$; on note m_j le degré de $\mathcal{M}_j$ et on suppose que le système $\mathcal{M}$ vérifie la *condition complémentaire* (34) relativement à $\mathcal{A}$ dans Ω. On donne également $\mathcal{B}(y, D_y)$ opéra-

(32) On utilise le fait que $\varphi \in L_p(\Omega)$, $\mathcal{A}(x; D_x)\varphi \in L_p(\Omega)$ et $\mathcal{M}_j(x, D_x)\varphi = 0$, $j = 1, 2, \ldots, m$ sur Γ implique que $\varphi \in W_p^{2m}(\Omega)$.

(33) Au sens de Aronszjan-Milgram [1] et Schechter [1], *cf.* aussi n° 7.

(34) Au sens de Schechter [1], Agmon-Douglis-Niremberg [1].

teur elliptique de degré 2ν à coefficients de classe C^∞ dans $\overline{G}$ et $\mathcal{N} = \{\mathcal{N}_k\}_{k=1}^{\nu}$ un système normal d'opérateurs différentiels de degré $\leqq 2\nu - 1$ à coefficients de classe C^∞ dans $\overline{G}$; on note n_k le degré de $\mathcal{N}_k$ et on suppose que le système $\mathcal{N}$ vérifie la condition complémentaire relativement à $\mathcal{B}$ dans G.

On cherchera $u \in W_p^{2\mu, 2\nu}(\Omega; G)$ solution du problème

$$
(10.1) \qquad \begin{cases} \mathcal{A}(x; D_x)\,u - \mathcal{B}(y; D_y)\,u = f \quad \text{dans } \Omega \times G, \\ \mathcal{M}_j(x; D_x)\,u = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times G \qquad (j = 1, 2, \ldots, \mu), \\ \mathcal{N}_k(y; D_y)\,u = 0 \quad \text{sur } \Omega \times S \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu), \end{cases}
$$

avec f donné dans $L_p(\Omega \times G)$. Des problèmes de ce type ont été étudiés dans Pagni [1].

Le problème (10.1) est évidemment de la forme (1.3) et on pose

$$
\begin{gathered}
E = L_p(\Omega \times G), \\
D_A = \{u \in W_p^{2\mu, 0}(\Omega; G)\,;\ \mathcal{M}_j(x; D_x)\,u = 0 \text{ sur } \Gamma \times G,\ j = 1, 2, \ldots, \mu\}, \\
A u = \mathcal{A}(x; D_x)\,u \qquad \text{pour} \quad u \in D_A; \\
D_B = \{u \in W_p^{0, 2\nu}(\Omega; G)\,;\ \mathcal{N}_k(y; D_y)\,u = 0 \text{ sur } \Omega \times S,\ k = 1, 2, \ldots, \nu\}, \\
B u = \mathcal{B}(y; D_y)\,u \qquad \text{pour} \quad u \in D_B.
\end{gathered}
$$

On appliquera le théorème 2.7 pour résoudre ce problème.

10.2. On fixe maintenant des hypothèses sur les opérateurs différentiels donnés qui permettront d'appliquer le théorème 2.7.

HYPOTHÈSE 10.1. — *Pour tout* $\xi \in \mathbf{R}^m$, $\xi \neq 0$ *et* $x \in \overline{\Omega}$, *on a*

$$
\mathcal{A}_{2\mu}(x; \xi) \neq e^{i\theta}\,|\mathcal{A}_{2\mu}(x; \xi)|,
$$

où $\mathcal{A}_{2\mu}$ *désigne la partie homogène de* $\mathcal{A}$ *de degré* 2μ.

HYPOTHÈSE 10.2. — *Pour tout* $x \in \Gamma$, *on note* n_x *la normale à* Γ *issue de* x *et orientée vers l'intérieur de* Ω *et on note* ξ *un vecteur tangent à* Γ *en* x *et on suppose que pour* β *fonction continue et bornée dans* $[0, +\infty[$, *le problème*

$$
\begin{cases} \mathcal{A}(x; \xi + D_s n_x)\,\alpha(s) - e^{i\theta} r\,\alpha(s) = \beta(s) \qquad (s > 0), \\ \mathcal{M}_j(x; \xi + D_s n_x)\,\alpha(s) = 0 \quad \textit{pour } s = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, \mu) \end{cases}
$$

admet une solution unique α *telle que* $\alpha, \alpha', \ldots, \alpha^{(2\mu)}$ *soient continues et bornées, dans* $[0, +\infty[$, *pour tout* $r \geqq 0$, $|\xi| + r \neq 0$.

HYPOTHÈSE 10.3. — *On suppose que le problème*

$$
\begin{cases} u_0 \in W_p^{2\mu}(\Omega), \\ \mathcal{A}(x; D_x)\,u_0 - \lambda u_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \mathcal{M}_j(x; D_x)\,u_0 = 0 \quad \text{sur } \Gamma \qquad (j = 1, 2, \ldots, \mu), \end{cases}
$$

n'a pas de valeur propre pour $\arg\lambda = \theta$, $|\lambda| \geqq 0$.

D'après Agmon [1], *ces hypothèses impliquent que* A *est « admissible dans la direction* θ » *et inversible.* De manière analogue on fera les hypothèses suivantes :

HYPOTHÈSE 10.4. — *Pour tout* $\xi \in \mathbf{R}^n$, $\xi \neq 0$ *et* $y \in \overline{G}$, *on a*

$$\mathcal{B}_{2\nu}(y;\xi) \neq e^{i\theta}\,|\,\mathcal{B}_{2\nu}(y;\xi)\,|$$

où $\mathcal{B}_{2\nu}$ *désigne la partie homogène de* $\mathcal{B}$ *de degré* 2ν.

HYPOTHÈSE 10.5. — *Pour tout* $y \in S$ *on note* n_y *la normale à* S *issue de* y *et orientée vers l'intérieur de* G *et on note* ξ *un vecteur tangent à* S *en* y *et on suppose que pour* β *fonction continue et bornée dans* $[0, +\infty[$, *le problème*

$$\begin{cases} \mathcal{B}(y;\xi + D_s n_y)\,\alpha(s) - e^{i\theta} r\,\alpha(s) = \beta(s) & (s > 0), \\ \mathcal{N}_k(y;\xi + D_s n_y)\,\alpha(s) = 0 \quad \textit{pour } s = 0 & (k = 1, 2, \ldots, \nu) \end{cases}$$

admet une solution unique α *telle que* α, α', $\ldots$, $\alpha^{(2\nu)}$ *soient continues et bornées dans* $[0, +\infty[$, *pour tout* $r \geq 0$, $|\xi| + r \neq 0$.

HYPOTHÈSE 10.6. — *Le problème*

$$\begin{cases} v_0 \in W_p^{2\nu}(G), \\ \mathcal{B}(y;D_y)\,v_0 - \lambda v_0 = 0 \quad \textit{dans } G, \\ \mathcal{N}_k(y;D_y)\,v_0 = 0 \quad \textit{sur } S \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu) \end{cases}$$

n'a pas de valeur propre pour $\arg\lambda = \theta$, $|\lambda| > 0$.

Ces hypothèses impliquent que B est « admissible dans la direction θ ».

10.3. On applique le théorème 2.7 en remplaçant éventuellement E par $D_A k \cap D_B k$ (k entier ≥ 0) et en tenant compte du théorème 7.4. On obtient ainsi le

THÉORÈME 10.7. — *On suppose que les hypothèses* 10.1, 10.2, 10.3 *sont vérifiées pour* $|\theta| < \theta_A$ *et que les hypothèses* 10.4, 10.5, 10.6 *sont vérifiées pour* $|\theta - \pi| < \pi - \theta_B$ *avec* $\theta_B < \theta_A$, *alors pour* $f \in W_p^{2\sigma\mu, 2\sigma\nu}(\Omega;G)$ *vérifiant*

$$(10.2) \qquad \begin{cases} \mathcal{M}_j \mathcal{A}^\alpha f = 0 \quad \textit{sur } \Gamma \times G \qquad \textit{pour} \quad m_j + 2\mu\alpha < 2\mu\sigma - \dfrac{1}{p}, \\ \mathcal{N}_k \mathcal{B}^\beta f = 0 \quad \textit{sur } \Omega \times S \qquad \textit{pour} \quad n_k + 2\nu\beta < 2\nu\sigma - \dfrac{1}{p}, \end{cases}$$

avec σ, $2\sigma\mu - \frac{1}{p}$, $2\sigma\nu - \frac{1}{p}$ *non entiers, le problème* (10.1) *admet une solution unique* $u \in W_p^{2\mu(\sigma+1), 2\nu(\sigma+1)}(\Omega;G)$.

Les conditions (10.2) expriment que $\mathcal{A}^\alpha f \in D_A$ pour $\alpha < \sigma - 1$ et $\mathcal{A}^\alpha f \in D_A(s;p)$ pour $\alpha < \sigma$ et de même que $\mathcal{B}^\beta f \in D_B$ pour $\beta < \sigma - 1$

et $\mathcal{B}^\beta f \in D_B(s; p)$ pour $\beta < \sigma$, avec $s = \sigma - [\sigma]$ ($[\sigma]$ désignant la partie entière de σ).

10.4. Pour résoudre le problème aux limites non homogène correspondant à (10.1), on utilisera le théorème 7.6 :

Théorème 10.8. — *On suppose que les hypothèses* 10.1, 10.2, 10.3 *sont vérifiées pour* $|\theta| < \theta_A$ *et que les hypothèses* 10.4, 10.5, 10.6 *sont vérifiées pour* $|\theta - \pi| < \pi - \theta_B$ *avec* $\theta_B < \theta_A$, *alors l'application* $u \mapsto (f, \{g_j\}_{j=1}^{\mu}, \{h_k\}_{k=1}^{\nu})$ *définie par*

$$(10.3)\qquad \begin{cases} \mathcal{A}(x; D_x)u - \mathcal{B}(y; D_y)u = f & \textit{dans } \Omega \times G, \\ \mathcal{M}_j(x; D_x)u = g_j & \textit{sur } \Gamma \times G \quad (j = 1, 2, \ldots, \mu), \\ \mathcal{N}_k(y; D_y)u = h_k & \textit{sur } \Omega \times S \quad (j = 1, 2, \ldots, \nu), \end{cases}$$

est un isomorphisme de $W_p^{2\mu(\sigma+1), 2\nu(\sigma+1)}(\Omega; G)$ *sur le sous-espace de*

$$W_p^{2\mu\sigma, 2\nu\sigma}(\Omega; G) \times \prod_{j=1}^{\mu} B_p^{2\mu\alpha_j, 2\nu\alpha_j}(\Gamma; G) \times \prod_{k=1}^{\nu} B_p^{2\mu\beta_k, 2\nu\beta_k}(\Omega; S) = R$$

défini par les conditions

$$(10.4)\qquad \mathcal{M}_j \mathcal{A}^l h_k - \mathcal{N}_k \mathcal{B}^l g_j = \sum_{\alpha=0}^{l-1} \mathcal{M}_j \mathcal{N}_k \mathcal{A}^\alpha \mathcal{B}^{l-\alpha-1} f \quad \textit{sur } \Gamma \times S \quad (^{35})$$

pour $l + \frac{m_j}{2\mu} + \frac{n_k}{2\nu} < \sigma + 2 - \frac{1}{p}\left(\frac{1}{2\mu} + \frac{1}{2\nu}\right)$, *l entier* $\geqq 0$, *avec*

$$\alpha_j = \frac{(\sigma+1)2\mu - m_j - \frac{1}{p}}{(\sigma+1)2\mu}, \qquad \beta_k = \frac{(\sigma+1)2\nu - n_k - \frac{1}{p}}{(\sigma+1)2\nu},$$

à condition que σ *et* $\sigma + 2 - \frac{1}{p}\left(\frac{1}{2\mu} + \frac{1}{2\nu}\right) - \frac{m_j}{2\mu} - \frac{n_k}{2\nu}$ *ne soient pas entiers* $\geqq 0$ *et* $1 < p < +\infty$.

Démonstration. — (*a*) Partant de $u \in W_p^{(\sigma+1)2\mu, (\sigma+1)2\nu}(\Omega; G)$, on voit en appliquant le théorème 7.3 que $\{f; g_1, \ldots, g_\mu; h_1, \ldots, h_\nu\} \in R$.

Pour vérifier les conditions (10.4) on remarque que pour u vérifiant (10.3), on a

$$\mathcal{A}^l u - \mathcal{B}^l u = \sum_{\alpha=0}^{l-1} \mathcal{A}^\alpha \mathcal{B}^{l-\alpha-1}(\mathcal{A}u - \mathcal{B}u)$$
$$= \sum_{\alpha=0}^{l-1} \mathcal{A}^\alpha \mathcal{B}^{l-\alpha-1} f \quad \text{dans } \Omega \times G,$$

(^{35}) On adopte la convention suivante $\sum_{\alpha=0}^{-1} = 0$.

d'où

$$\mathcal{M}_j \mathcal{N}_k (\mathcal{A}^l u - \mathcal{B}^l u) = \mathcal{M}_j \mathcal{A}^l \mathcal{N}_k u - \mathcal{N}_k \mathcal{B}^l \mathcal{M}_j u$$
$$= \sum_{\alpha=0}^{l-1} \mathcal{A}^\alpha \mathcal{B}^{l-\alpha-1} f \quad \text{dans } \Omega \times G \quad (^{36}).$$

Comme $u \in W_p^{(\sigma+1)2\mu, (\sigma+1)2\nu}(\Omega; G)$, la fonction précédente a d'après le n° 7 une trace sur $\Gamma \times S$ à condition que $l + \frac{m_j}{2\mu} + \frac{n_k}{2\nu} < \sigma + 2 - \frac{1}{p}\left(\frac{1}{2\mu} + \frac{1}{2\nu}\right)$; pour ces valeurs de l, on a donc

$$\mathcal{M}_j \mathcal{A}^l h_k - \mathcal{N}_k \mathcal{B}^l g_j = \sum_{\alpha=0}^{l-1} \mathcal{A}^\alpha \mathcal{B}^{l-\alpha-1} f \quad \text{sur } \Gamma \times S.$$

Ce sont les relations (10.4).

(*b*) Réciproquement partant d'un élément de R vérifiant (10.4) on doit construire u solution de (10.3) : on cherchera u sous la forme $v + w$ avec

$$(10.5) \quad \left\{ \begin{array}{lll} & v \in W_p^{2\mu(\sigma+1), 2\nu(\sigma+1)}(\Omega; G), & \\ \mathcal{M}_j(x; D_x) v = g_j & \text{sur } \Gamma \times G & (j = 1, 2, \ldots, \mu), \\ \mathcal{N}_k(y; D_y) v = h_k & \text{sur } \Omega \times S & (k = 1, 2, \ldots, \nu), \\ \mathcal{M}_j \mathcal{A}^\alpha (\mathcal{A} v - \mathcal{B} v - f) = 0 & \text{sur } \Gamma \times G, & m_j + 2\mu\alpha < 2\mu\sigma - \frac{1}{p}, \\ \mathcal{N}_k \mathcal{B}^\beta (\mathcal{A} v - \mathcal{B} v - f) = 0 & \text{sur } \Omega \times S, & n_k + 2\nu\beta < 2\nu\sigma - \frac{1}{p}, \end{array} \right.$$

et

$$(10.6) \quad \left\{ \begin{array}{lll} & w \in W_p^{2\mu(\sigma+1), 2\nu(\sigma+1)}(\Omega; G), & \\ \mathcal{M}_j(x; D_x) w = 0 & \text{sur } \Gamma \times G & (j = 1, 2, \ldots, \mu), \\ \mathcal{N}_k(y; D_y) w = 0 & \text{sur } \Omega \times S & (k = 1, 2, \ldots, \nu), \\ \mathcal{A} w - \mathcal{B} w = f - (\mathcal{A} v - \mathcal{B} v) & \text{dans } \Omega \times G. & \end{array} \right.$$

L'existence de w résulte du théorème 10.7. Pour prouver l'existence de v on utilisera le théorème 7.6 avec

$$P = \{ \mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_\mu; \mathcal{M}_1 \mathcal{A}, \ldots, \mathcal{M}_\mu \mathcal{A}^{\alpha_0 - 1}, \mathcal{M}_1 \mathcal{A}^{\alpha_0}, \ldots, \mathcal{M}_{j_0} \mathcal{A}^{\alpha_0} \}$$

et

$$Q = \{ \mathcal{N}_1, \ldots, \mathcal{N}_\nu; \mathcal{N}_1 \mathcal{B}, \ldots, \mathcal{N}_\nu \mathcal{B}^{\beta_0 - 1}, \mathcal{N}_1 \mathcal{B}^{\beta_0}, \ldots, \mathcal{N}_{k_0} \mathcal{B}^{\beta_0} \},$$

avec

$$m_{j_0} + 2\mu\alpha_0 < 2\mu(\sigma + 1) - \frac{1}{p} < \inf(m_1 + 2\mu\alpha_0 + 2\mu, m_{j_0+1} + 2\mu\alpha_0),$$

$$n_{k_0} + 2\nu\beta_0 < 2\nu(\sigma + 1) - \frac{1}{p} < \inf(n_1 + 2\nu\beta_0 + 2\nu, n_{k_0+1} + 2\nu\beta_0);$$

ces deux systèmes sont évidemment normaux d'après les hypothèses sur les systèmes $\{\mathcal{M}_j\}_{j=1}^{\mu} \{\mathcal{N}_k\}_{k=1}^{\nu}$ et l'ellipticité de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.

---

(36) L'opérateur $\mathcal{N}_k$ commute à $\mathcal{A}$ car ce sont deux opérateurs en des variables indépendantes; il en est de même pour $\mathcal{M}_j$ et $\mathcal{N}_k \mathcal{B}^l$.

Il est plus commode de réécrire les conditions (10.5) : on doit avoir

$$\mathcal{M}_j \mathcal{A}^{\alpha+1} v = \mathcal{M}_j \mathcal{A}^{\alpha} \mathcal{B} v + \mathcal{M}_j \mathcal{A}^{\alpha} f \quad \text{sur } \Gamma \times G, \qquad \alpha < \sigma - \frac{m_j + \frac{1}{p}}{2\mu}$$

et on a

$$\mathcal{M}_j \mathcal{A}^{\alpha+1} v = \mathcal{M}_j \mathcal{B}^{\alpha+1} v + \mathcal{M}_j \sum_{\beta=0}^{\alpha} \mathcal{A}^{\beta} \mathcal{B}^{\alpha-\beta} (\mathcal{A} v - \mathcal{B} v),$$

d'où

$$\mathcal{M}_j \mathcal{A}^{\alpha+1} v = \mathcal{B}^{\alpha+1} g_j + \sum_{\beta=0}^{\alpha} \mathcal{B}^{\alpha-\beta} \{ \mathcal{M}_j \mathcal{A}^{\beta} (\mathcal{A} v - \mathcal{B} v) \} \quad \text{sur } \Gamma \times G, \qquad \alpha < \sigma - \frac{m_j + \frac{1}{p}}{2\mu}.$$

On a aussi des relations analogues avec les opérateurs $\mathcal{N}_k$; on voit ainsi que les relations (10.5) sont équivalentes aux suivantes :

$$(10.7) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{M}_j v = g_j \quad \text{sur } \Gamma \times G & (j = 1, 2, \ldots, \mu), \\ \mathcal{M}_j \mathcal{A}^{\alpha+1} v = \mathcal{B}^{\alpha+1} g_j + \sum_{\beta=0}^{\alpha} \mathcal{B}^{\alpha-\beta} \mathcal{M}_j \mathcal{A}^{\beta} f \quad \text{sur } \Gamma \times G, & \alpha < \sigma - \dfrac{m_j + \frac{1}{p}}{2\mu}, \\ \mathcal{N}_k v = h_k \quad \text{sur } \Omega \times S & (k = 1, 2, \ldots, \nu), \\ \mathcal{N}_k \mathcal{B}^{\gamma+1} v = \mathcal{A}^{\gamma+1} h_k - \sum_{\beta=0}^{\gamma} \mathcal{A}^{\gamma-\beta} \mathcal{N}_k \mathcal{B}^{\beta} f \quad \text{sur } \Omega \times S, & \gamma < \sigma, - \dfrac{n_k + \frac{1}{p}}{2\nu}. \end{array} \right.$$

Appliquant le théorème 7.6 on voit que v existe si et seulement si on a

$$\mathcal{M}_j \mathcal{A}^{\alpha+1} \left(\mathcal{A}^{\gamma+1} h_k - \sum_{\beta=0}^{\gamma} \mathcal{A}^{\gamma-\beta} \mathcal{N}_k \mathcal{B}^{\beta} f \right)$$
$$= \mathcal{N}_k \mathcal{B}^{\gamma+1} \left(\mathcal{B}^{\alpha+1} g_j + \sum_{\beta=0}^{\alpha} \mathcal{B}^{\alpha-\beta} \mathcal{M}_j \mathcal{A}^{\beta} f \right)$$

sur $\Gamma \times S$ pour

$$\frac{m_j + 2\mu(\alpha+1)}{2\mu(\sigma+1)} + \frac{n_k + 2\nu(\gamma+1)}{2\nu(\sigma+1)} < 1 - \frac{1}{p}\left(\frac{1}{2\mu} + \frac{1}{2\nu}\right)\frac{1}{\sigma+1}$$

y compris $\alpha = 0$ ou $\gamma = 0$.

Il est facile de voir que ces dernières relations sont équivalentes aux relations (10.4). Ceci prouve l'existence de v et par conséquent le théorème 10.8 est démontré.

Remarque 10.9. — L'extension du théorème 10.8 au cas σ entier se fait sans difficulté dans le cas $p = 2$, par interpolation et dans le cas $p \neq 2$ il faut suivre la même méthode qu'au n° 9. On peut aussi étendre le théorème 10.9 au cas où $\sigma + 2 - \dfrac{m_j + \frac{1}{p}}{2\mu} - \dfrac{n_k + \frac{1}{p}}{2\nu}$ peut être entier pour une valeur du couple (j, k); dans ce cas, en plus des conditions (10.4) il faut imposer des conditions intégrales (*voir* exemple plus bas).

10.5. L'exemple le plus simple d'application de ce qui précède est le suivant :

(*a*) On pose

$$\mathcal{A} = \Delta_x = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}, \qquad \mathcal{B} = -\Delta_y = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial y_k^2},$$

$\mathfrak{M}$ est réduit au seul opérateur 1 de même que $\mathfrak{N}$.

On obtient le résultat suivant : le problème

$$\text{(10.8)} \qquad \begin{cases} \Delta u = f & \text{dans } \Omega \times G, \\ u = g & \text{sur } \Gamma \times G, \\ u = h & \text{sur } \Omega \times S \end{cases}$$

admet une solution dans $W_p^{2\sigma+2}(\Omega \times G)$ si et seulement si $f \in W_p^{2\sigma}(\Omega \times G)$, $h \in W_p^{2\sigma+2-\frac{1}{p}}(\Omega \times S)$, $g \in W_p^{2\sigma+2-\frac{1}{p}}(\Gamma \times G)$ et

$$\Delta_x^l h - (-\Delta_y)^l g = \sum_{\alpha=0}^{l-1} \Delta_x^\alpha (-\Delta_y)^{l-\alpha-1} f, \qquad l < \sigma + 2 - \frac{1}{p}$$

sur $\Gamma \times S$, à condition que $\sigma + 2 - \frac{1}{p}$ ne soit pas entier, $\sigma \geqq 0$.

Dans le cas $p = 2$, le premier cas exceptionnel correspond à $\sigma = \frac{1}{2}$; en reprenant les raisonnements précédents dans les cas où interviennent des conditions de raccord intégrales on voit que la solution de (10.8) existe dans $H^3(\Omega \times G)$ pour $f = 0$ si et seulement si $h \in H^{\frac{5}{2}}(\Omega \times S)$, $g \in H^{\frac{5}{2}}(\Gamma \times G)$ et

$$h = g \quad \text{sur } \Gamma \times S,$$

$$\int_0^{\infty} \int_\Gamma \int_S |(\Delta_x h)(x + t n_x, y) + (\Delta_y g)(x, y + t n_y)|^2 \, d\sigma_x \, d\sigma_y \frac{dt}{t} < +\infty,$$

ces conditions ne déterminent pas un sous-espace fermé de

$$H^{\frac{5}{2}}(\Omega \times S) \times H^{\frac{5}{2}}(\Gamma \times G),$$

ce qui prouve qu'il *n'existe pas de constante* C *telle que*

$$\text{(10.9)} \qquad |u|_{H^3(\Omega \times G)} \leqq C \left\{ |\Delta u|_{H^1(\Omega \times G)} + |g|_{H^{\frac{5}{2}}(\Gamma \times G)} + |h|_{H^{\frac{5}{2}}(\Omega \times S)} \right\}$$

alors que l'inégalité (10.9) est bien connue lorsque $\Omega \times G$ est remplacé par un ouvert à frontière régulière.

(*b*) Si on pose

$$\mathcal{A} = \Delta_x, \qquad \mathcal{B} = -\Delta_y, \qquad \mathcal{M} = 1, \qquad \mathcal{N} = \frac{\partial}{\partial n_y},$$

on obtient ceci : le problème

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{dans } \Omega \times G, \\ u = g & \text{sur } \Gamma \times G, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n_y} = h & \text{sur } \Omega \times S \end{cases}$$

admet une solution dans $W_p^{2\sigma+2}(\Omega \times G)$, si et seulement si $f \in W_p^{2\sigma}(\Omega \times G)$, $h \in W_p^{2\sigma+1-\frac{1}{p}}(\Omega \times S)$, $g \in W_p^{2\sigma+2-\frac{1}{p}}(\Gamma \times G)$ et

$$\Delta_x^l h - \frac{\partial}{\partial n_y}(-\Delta_y)^l g = \sum_{\alpha=0}^{l-1} \frac{\partial}{\partial n_y} \Delta_x^\alpha (-\Delta_y)^{l-\alpha-1} f, \qquad l + \frac{1}{2} < \sigma + 2 - \frac{1}{p}$$

sur $\Gamma \times S$, à condition que $\sigma + \frac{3}{2} - \frac{1}{p}$ ne soit pas entier, $\sigma \geqq 0$.

(*c*) Si on pose

$$\mathcal{A} = \Delta_x, \qquad \mathcal{B} = \Delta_y^2, \qquad \mathcal{M} = 1, \qquad \mathcal{N} = \left\{1, \frac{\partial}{\partial n_y}\right\},$$

on obtient ceci : le problème

$$\begin{cases} \Delta_x u - \Delta_y^2 u = f & \text{dans } \Omega \times G, \\ u = g & \text{sur } \Gamma \times G, \\ u = h_1 & \text{sur } \Omega \times S, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n_y} = h_2 & \text{sur } \Omega \times S, \end{cases}$$

admet une solution dans $W_p^{2\sigma+2,4\sigma+4}(\Omega; G)$ si et seulement si $f \in W_p^{2\sigma,4\sigma}(\Omega; G)$, $g \in B_p^{2\alpha_0,4\alpha_0}(\Gamma; G)$, $h_1 \in B_p^{2\beta_0,4\beta_0}(\Omega; S)$, $h_2 \in B_p^{2\beta_1,4\beta_1}(\Omega; S)$ et

$$\Delta_x^l h_1 - \Delta_y^{2l} g = \sum_{\alpha=0}^{l-1} \Delta_x^\alpha \Delta_y^{2l-2\alpha-2} f, \qquad l < \sigma + 1 - \frac{3}{4}\frac{1}{p};$$

$$\Delta_x^l h_2 - \frac{\partial}{\partial n_y}\Delta_y^{2l} g = \sum_{\alpha=0}^{l-1} \frac{\partial}{\partial n_y} \Delta_x^\alpha \Delta_y^{2l-2\alpha-2} f, \qquad l < \sigma + \frac{3}{4}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

sur $\Gamma \times S$ avec

$$\alpha_0 = 1 - \frac{1}{2p(\sigma+1)}, \qquad \beta_k = 1 - \frac{1+kp}{4p(\sigma+1)} \qquad (k = 0, 1),$$

à condition que $\sigma + 1 - \frac{3}{4}\frac{1}{p}$ et $\sigma + \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\frac{1}{p}$ ne soient pas entiers, $\sigma \geqq 0$.

Appendice n° 1.

On démontre le lemme 7.2, qui résulte du suivant :

Lemme. — *Pour* $u \in B_p^{r,s}(\mathbf{R}^m ; \mathbf{R}^n)$ *on a* $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in B_p^{\mu,\nu}(\mathbf{R}^m ; \mathbf{R}^n)$ *avec* $\frac{\mu}{r} = \frac{\nu}{s} = 1 - \frac{1}{r}$, *pour* $\frac{r}{s}$ *rationnel,* $r > 1$.

Démonstration. — On doit donc vérifier que pour

$$u \in B_p^r(\mathbf{R}^m ; L_p(\mathbf{R}^n)) \cap L_p(\mathbf{R}^m ; B_p^s(\mathbf{R}^n)),$$

on a

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} \in B_p^{r-1}(\mathbf{R}^m ; L_p(\mathbf{R}^n)) \cap L_p\left(\mathbf{R}^m ; B_p^{s-\frac{s}{r}}(\mathbf{R}^n)\right).$$

Il est évident que

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} \in B_p^{r-1}(\mathbf{R}^m ; L_p(\mathbf{R}^n)).$$

Pour prouver l'inclusion

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} \in L_p\left(\mathbf{R}^m ; B_p^{s-\frac{s}{r}}(\mathbf{R}^n)\right),$$

on utilise le fait que $B_p^{r,s}(\mathbf{R}^m ; \mathbf{R}^n)$ est un espace d'interpolation : on fixe α et β entiers > 0 tels que $\frac{r}{s} = \frac{\alpha}{\beta}$, alors on a

$$\begin{aligned}(W_p^{\alpha,\beta}(\mathbf{R}^m ; \mathbf{R}^n) ; L_p(\mathbf{R}^m ; \mathbf{R}^n))_{\theta,p} &= (W_p^\alpha(\mathbf{R}^m ; L_p(\mathbf{R}^n)) \cap L_p(\mathbf{R}^m ; W_p^\beta(\mathbf{R}^n)) ; L_p(\mathbf{R}^m ; L_p(\mathbf{R}^n)))_{\theta,p} \\ &= B_p^{\alpha(1-\theta)}(\mathbf{R}^m ; L_p(\mathbf{R}^n)) \cap L_p(\mathbf{R}^m ; B_p^{\beta(1-\theta)}(\mathbf{R}^n)) \\ &= B_p^{\alpha(1-\theta);\beta(1-\theta)}(\mathbf{R}^m ; \mathbf{R}^n)\end{aligned}$$

d'après le théorème 8.1 (chap. I) de Grisvard [1]. De ce théorème on déduit aussi :

$$\begin{aligned}&(W_p^{\alpha,\beta}(\mathbf{R}^m ; \mathbf{R}^n) ; L_p(\mathbf{R}^m ; \mathbf{R}^n))_{\theta,1} \\ &= (W_p^\alpha(\mathbf{R}^m ; L_p(\mathbf{R}^n)) ; L_p(\mathbf{R}^m ; L_p(\mathbf{R}^n)))_{\theta,1} \cap L_p(\mathbf{R}^m ; (W_p^\beta(\mathbf{R}^n) ; L_p(\mathbf{R}^n))_{\theta,1}) \\ &\subset W_p^{\alpha(1-\theta)}(\mathbf{R}^m ; L_p(\mathbf{R}^n)) \cap L_p(\mathbf{R}^m ; W_p^{\beta(1-\theta)}(\mathbf{R}^n)) \\ &= W_p^{\alpha(1-\theta),\beta(1-\theta)}(\mathbf{R}^m ; \mathbf{R}^n) \\ &\subset (W_p^\alpha(\mathbf{R}^m ; L_p(\mathbf{R}^n)) ; L_p(\mathbf{R}^m ; L_p(\mathbf{R}^n)))_{\theta,\infty} \cap L_p(\mathbf{R}^m ; (W_p^\beta(\mathbf{R}^n) ; L_p(\mathbf{R}^n))_{\theta,\infty}) \\ &= (W_p^{\alpha,\beta}(\mathbf{R}^m ; \mathbf{R}^n) ; L_p(\mathbf{R}^m ; \mathbf{R}^n))_{\theta,\infty}.\end{aligned}$$

Dans la terminologie de Lions-Peetre [1], cela signifie que $W_p^{\alpha(1-\theta),\beta(1-\theta)}(\mathbf{R}^m ; \mathbf{R}^n)$, appartient à la classe $K_\theta(W_p^{\alpha,\beta}(\mathbf{R}^m ; \mathbf{R}^n) ; L_p(\mathbf{R}^m ; \mathbf{R}^n))$ et par conséquent d'après ces mêmes auteurs (théorème de réitération), on a

$$B_p^{r,s}(\mathbf{R}^m ; \mathbf{R}^n) = (W_p^{r_0,s_0}(\mathbf{R}^m ; \mathbf{R}^n) ; W_p^{r_1,s_1}(\mathbf{R}^m ; \mathbf{R}^n))_{\theta,p}$$

à condition que

$$\frac{r}{s} = \frac{r_0}{s_0} = \frac{r_1}{s_1} = \frac{\alpha}{\beta}$$

avec $r_0 < r < r_1$, $s_0 < s < s_1$, $r = (1-\theta)r_0 + \theta r_1$, $s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$. Dans la suite on prendra $r_0 = 1$ et r_1 entier $> r$, on posera $r_1 = l$, on a donc l'identité

$$\text{(A.1.1)} \qquad B_p^{r,s}(\mathbf{R}^m; \mathbf{R}^n) = \left(W_p^{1,\frac{s}{r}}(\mathbf{R}^m; \mathbf{R}^n); W_p^{l,l\frac{s}{r}}(\mathbf{R}^m; \mathbf{R}^n)\right)_{\theta, p}.$$

Il est clair que $u \mapsto \dfrac{\partial u}{\partial x_1}$ est linéaire continue de $W_p^{1,\frac{s}{r}}(\mathbf{R}^m;\mathbf{R}^n)$ dans $L_p(\mathbf{R}^m;\mathbf{R}^n)$. D'autre part, d'après Lions [3], on sait que $u \mapsto \dfrac{\partial u}{\partial x_1}$ est linéaire continue de

$$W_p^{l,l\frac{s}{r}}(\mathbf{R}^m; \mathbf{R}^n) = W_p^l(\mathbf{R}^m; L_p(\mathbf{R}^n)) \cap L_p\left(\mathbf{R}^m; W_p^{l\frac{s}{r}}(\mathbf{R}^n)\right)$$

dans $L_p\left(\mathbf{R}^m; \left(W_p^{l\frac{s}{r}}(\mathbf{R}^n); L_p(\mathbf{R}^n)\right)_{\frac{1}{l},\infty}\right)$. Utilisant (A.1.1), on en déduit que $u \mapsto \dfrac{\partial u}{\partial x_1}$ est linéaire continue de

$$B_p^{r,s}(\mathbf{R}^m; \mathbf{R}^n) \qquad \text{dans} \quad L_p\left(\mathbf{R}^m; \left(L_p(\mathbf{R}^n); \left(W_p^{l\frac{s}{r}}(\mathbf{R}^n); L_p(\mathbf{R}^n)\right)_{\frac{1}{l},\infty}\right)_{\theta, p}\right)$$

et ce dernier espace coïncide avec

$$L_p\left(\mathbf{R}^m; B_p^{s-\frac{s}{r}}(\mathbf{R}^n)\right)$$

d'après le théorème de réitération de Lions-Peetre [1].

Ceci prouve le lemme.

Appendice n° 2.

On prouve le lemme 8.6, dont on rappelle ici l'énoncé :

Lemme. — *Pour* $1 < p < +\infty$, $0 < \sigma < 1$, α *et* d *entiers* $\geqq 0$, σd *non entier, on a l'inclusion*

$$W_p^{\sigma}(I; W_p^{\alpha+d}(\Omega)) \cap W_p^{\sigma+1}(I; W_p^{\alpha}(\Omega)) \subset W_p^1(I; W_p^{\alpha+\sigma d}(\Omega)).$$

Par la méthode habituelle de prolongement, il suffit de prouver le lemme dans le cas particulier $I = \mathbf{R}$ et $\Omega = \mathbf{R}^m$.

La démonstration utilise une variante du théorème 2.7 relatif au problème (1.3) :

Lemme A 2.1. — *Sous les hypothèses du théorème* 2.7, *la solution* u *du problème* (1.3) *avec* $f \in D_B(s; q)$ *vérifie* $Bu \in D_A(s; q)$.

Démonstration. — On utilise la formule explicite (2.4) :

$$u = +\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (A-\lambda)^{-1}(B-\lambda)^{-1} f\,d\lambda,$$

où γ est un contour situé dans $\rho_A \cap \rho_B$, joignant $\infty e^{-i\theta_0}$ à $\infty e^{i\theta_0}$ avec $\theta_B < \theta_0 < \theta_A$ et passant « à gauche » de l'origine pour fixer les idées. On a alors pour $t > 0$:

$$\begin{aligned}(A-t)^{-1}u &= +\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (A-t)^{-1}(A-\lambda)^{-1}(B-\lambda)^{-1} f\,d\lambda \\ &= +\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (t-\lambda)^{-1}[(A-t)^{-1}-(A-\lambda)^{-1}](B-\lambda)^{-1} f\,d\lambda \\ &= +\frac{1}{2\pi i}(A-t)^{-1}\int_\gamma (t-\lambda)^{-1}(B-\lambda)^{-1} f\,d\lambda \\ &\quad -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (t-\lambda)^{-1}(A-\lambda)^{-1}(B-\lambda)^{-1} f\,d\lambda,\end{aligned}$$

d'où

$$(A-t)^{-1}u = +\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\lambda-t)^{-1}(A-\lambda)^{-1}(B-\lambda)^{-1} f\,d\lambda,$$

car

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (t-\lambda)^{-1}(B-\lambda)^{-1} f\,d\lambda = 0.$$

Utilisant ensuite l'identité $A(A-t)^{-1} = 1 + t(A-t)^{-1}$, on obtient

$$A(A-t)^{-1}Bu = +\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \lambda(\lambda-t)^{-1}(A-\lambda)^{-1}B(B-\lambda)^{-1} f\,d\lambda.$$

Comme $f \in D_B(s;\, q)$, on a $|\lambda|^s |B(B-\lambda)^{-1}f| \leq \varphi(|\lambda|)$ pour $\lambda \in \gamma$ avec $\varphi \in L_*^q$, d'où

$$|t^s A(A-t)^{-1}Bu|_E \leq C\int_\gamma |\lambda - t|^{-1}\left(\frac{t}{|\lambda|}\right)^s \varphi(|\lambda|)\,|d\lambda|,$$

et on déduit facilement de cette majoration que

$$|t^s A(A-t)^{-1}Bu|_E \in L_*^q,$$

c'est-à-dire que $Bu \in D_A(s;\, q)$.

On appliquera le lemme A 2.1 de la manière suivante, on prendra

$$E = L_p(\mathbf{R};\, W_p^\alpha(\mathbf{R}^m)), \qquad D_A = L_p(\mathbf{R};\, W_p^{\alpha+d}(\mathbf{R}^m)), \qquad D_B = W_p^1(\mathbf{R};\, W_p^\alpha(\mathbf{R}^m))$$

et (en notant t la variable dans $\mathbf{R}$ et x la variable dans $\mathbf{R}^m$) $B = \dfrac{\partial}{\partial t}$, $A = (1-\Delta_x)^{\frac{d}{2}}$ (défini par transformation de Fourier). Il est facile de voir que les hypothèses du théorème 2.7 sont vérifiées avec $\theta_A = 0$, $\theta_B = \dfrac{\pi}{2}$.

On a évidemment

$$\mathrm{D_B}(\sigma; p) = \mathrm{W}_p^\sigma(\mathbf{R}; \mathrm{W}_p^\alpha(\mathbf{R}^m)),$$
$$\mathrm{D_A}(\sigma; p) = \mathrm{L}_p(\mathbf{R}; \mathrm{W}_p^{\alpha+\sigma d}(\mathbf{R}^m))$$

car $0 < \sigma < 1$ et σd n'est pas entier. Alors si on part de

$$u \in \mathrm{W}_p^\sigma(\mathbf{R}; \mathrm{W}_p^{\alpha+d}(\mathbf{R}^m)) \cap \mathrm{W}_p^{\sigma+1}(\mathbf{R}; \mathrm{W}_p^\alpha(\mathbf{R}^m)) \subset \mathrm{D_A} \cap \mathrm{D_B},$$

on a

$$f = \mathrm{A}u - \mathrm{B}u = (1 - \Delta_x)^{\frac{d}{2}} u - \frac{\partial u}{\partial t} \in \mathrm{W}_p^\sigma(\mathbf{R}; \mathrm{W}_p^\alpha(\mathbf{R}^m)),$$

c'est-à-dire

$$f \in \mathrm{D_B}(\sigma; p);$$

du lemme A.2.1, on en déduit que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{B}u \in \mathrm{D_A}(s; p) = \mathrm{L}_p(\mathbf{R}; \mathrm{W}_p^{\alpha+\sigma d}(\mathbf{R}^m)),$$

c'est-à-dire que

$$u \in \mathrm{W}_p^1(\mathbf{R}; \mathrm{W}_p^{\alpha+\sigma d}(\mathbf{R}^m)).$$

Ceci prouve le lemme dans le cas où σd n'est pas entier.

Dans le cas où σd est entier on obtient

$$\mathrm{D_A}(\sigma; p) = \mathrm{L}_p(\mathbf{R}; \mathrm{B}_p^{\alpha+\sigma d}(\mathbf{R}^m)) \subset \mathrm{L}_p(\mathbf{R}; \mathrm{W}_p^{\alpha+\sigma d}(\mathbf{R}^m))$$

lorsque $p \leqq 2$ et la démonstration précédente donne encore le résultat.

Appendice n° 3.

On prouve le lemme 9.5 et les propositions 9.6 et 9.7 concernant l'espace $\mathrm{B}_p^0(\mathrm{I}; \mathrm{L}_p(\Omega))$ qui ont été utilisés dans le n° 9.

1. L'énoncé du lemme 9.5 est le suivant :

Lemme. — *L'opérateur* $i\mathrm{D}_t + 1$ *est un isomorphisme de* $\tilde{\mathrm{B}}_q^1(\mathbf{R}_+; \mathrm{X})$ *sur* $\mathrm{B}_q^0(\mathbf{R}_+; \mathrm{X})$.

Démonstration. — D'après la définition 9.4, on a

$$\mathrm{B}_q^0(\mathbf{R}_+; \mathrm{X}) = \big(\tilde{\mathrm{W}}_q^1(\mathbf{R}_+; \mathrm{X}), \mathrm{W}_q^{-1}(\mathbf{R}_+; \mathrm{X})\big)_{\frac{1}{2}, q}$$

d'après la proposition 5.9, on a

$$\tilde{\mathrm{B}}_q^1(\mathbf{R}_+; \mathrm{X}) = \big(\tilde{\mathrm{W}}_q^2(\mathbf{R}_+; \mathrm{X}), \mathrm{L}_q(\mathbf{R}_+; \mathrm{X})\big)_{\frac{1}{2}, q}.$$

On note J l'opérateur $i\mathrm{D}_t + 1$ et K l'opérateur de convolution par $k(t) = e^{-t}$ pour $t \geqq 0$ et $k(t) = 0$ pour $t < 0$. Il est élémentaire de vérifier que J est linéaire continu de $\tilde{W}^2_q(\mathbf{R}_+; X)$ dans $\tilde{W}^1_q(\mathbf{R}_+; X)$ et de $L_q(\mathbf{R}_+; X)$ dans $W^{-1}_q(\mathbf{R}_+; X)$ (37), que K est linéaire continu de $\tilde{W}^1_q(\mathbf{R}_+; X)$ dans $\tilde{W}^2_q(\mathbf{R}_+; X)$ et de $W^{-1}_q(\mathbf{R}_+; X)$ dans $L_q(\mathbf{R}_+; X)$ et que

$$KJ\varphi = \varphi$$

pour toute $\varphi \in W^{-1}_q(\mathbf{R}_+; X)$. Par interpolation on en déduit que J est linéaire continu et surjectif de $\tilde{B}^1_q(\mathbf{R}_+; X)$ sur $B^0_q(\mathbf{R}_+; X)$.

Pour voir que J est injectif, il suffit de remarquer que pour $u \in \tilde{B}^1_q(\mathbf{R}_+; X)$ telle que $Ju = 0$, on a $u' + u = 0$ et $u(0) = 0$, d'où évidemment $u = 0$ [alors que J considéré comme opérateur de $L_q(\mathbf{R}_+; X)$ dans $W^{-1}_q(\mathbf{R}_+; X)$ n'est pas injectif].

2. L'énoncé de la proposition 9.7 est le suivant :

Proposition. — *On a les inclusions*

$$B^0_p(I; L_p(\Omega)) \subset L_p(I; L_p(\Omega)) \qquad \textit{pour} \quad 1 < p \leq 2,$$

et

$$L_p(I; L_p(\Omega)) \subset B^0_p(I; L_p(\Omega)) \qquad \textit{pour} \quad 2 \leq p < +\infty.$$

Démonstration. — D'après le théorème 5.1 (chap. I) de Grisvard [1], on a

$$(B^0_{p_0}(I; L_{p_0}(\Omega)); B^0_{p_1}(I; L_{p_1}(\Omega)))_{\theta, p_\theta} = B^0_{p_\theta}(I; L_{p_\theta}(\Omega)),$$

avec

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \qquad (0 < \theta < 1;\ 1 \leq p_0,\ p_1 \leq +\infty).$$

Ensuite d'après les inclusions (5.7) (chap. I) (*loc. cit.*), on a pour X, espace de Banach quelconque :

$$B^0_1(I; X) \subset L_1(I; X),$$
$$L_\infty(I; X) \subset B^0_\infty(I; X).$$

Enfin lorsque X est un espace de Hilbert, on a

$$B^0_2(I; X) = (\tilde{W}^1_2(I; X); W^{-1}_2(I; X))_{\frac{1}{2}, 2} = L_2(I; X)$$

d'après le théorème de Lions-Peetre [1]; en particulier, on a

$$B^0_2(I; L_2(\Omega)) = L_2(I; L_2(\Omega)).$$

De ce qui précède, on déduit les inclusions

$$\begin{aligned} B^0_{p_\theta}(I; L_{p_\theta}(\Omega)) &= (B^0_1(I; L_1(\Omega)); B^0_2(I; L_2(\Omega)))_{\theta, p_\theta} \\ &\subset (L_1(I; L_1(\Omega)), L_2(I; L_2(\Omega)))_{\theta, p_\theta} = L_{p_\theta}(I; L_{p_\theta}(\Omega)) \end{aligned}$$

(37) $W^{-1}_q(\mathbf{R}_+; X)$ est formé des distributions de la forme $f + g'$ avec $f, g \in L_q(\mathbf{R}_+; X)$.

lorsque

$$\frac{1}{p_\theta} = (1-\theta) + \frac{\theta}{2} \qquad (0 < \theta < 1)$$

c'est-à-dire $1 < p_\theta < 2$; de même, on a

$$\begin{aligned} B^0_{p_\theta}(I; L_{p_\theta}(\Omega)) &= (B^0_\infty(I; L_\infty(\Omega)); B^0_2(I; L_2(\Omega)))_{\theta, p_\theta} \\ &\supset (L_\infty(I; L_\infty(\Omega)), L_2(I; L_2(\Omega)))_{\theta, p_\theta} = L_{p_\theta}(I; L_{p_\theta}(\Omega)) \end{aligned}$$

lorsque

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{\theta}{2} \qquad (0 < \theta < 1).$$

c'est-à-dire $2 < p_\theta < +\infty$.

Ceci prouve la proposition.

Remarque. — Par une extension évidente de la démonstration précédente, on peut prouver que

$$\begin{aligned} &B^k_p(I; L_p(\Omega)) \subset W^k_p(I; L_p(\Omega)) \qquad \text{pour } 1 < p \leqq 2, \\ &W^k_p(I; L_p(\Omega)) \subset B^k_p(I; L_p(\Omega)) \qquad \text{pour } 2 \leqq p < +\infty \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &B^0_p(I; W^k_p(\Omega)) \subset L_p(I; W^k_p(\Omega)) \qquad \text{pour } 1 < p \leqq 2, \\ &L_p(I; W^k_p(\Omega)) \subset B^0_p(I; W^k_p(\Omega)) \qquad \text{pour } 2 \leqq p < +\infty, \end{aligned}$$

pour tout entier $k \geqq 0$.

3. L'énoncé de la proposition 9.6 résulte du suivant :

Proposition. — *Les images des espaces*

$$B^1_p(I; L_p(\Omega)) \cap B^0_p(I; W^{2m}_p(\Omega))$$

et

$$W^1_p(I; L_p(\Omega)) \cap L_p(I; W^{2m}_p(\Omega)) = W^{2m,1}_p(\Omega; I)$$

par l'application

$$u \to \left\{ u(x, 0), u|_\Gamma, \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma, \ldots, \frac{\partial^{2m-1} u}{\partial n^{2m-1}}\Big|_\Gamma \right\} = T(u)$$

sont identiques pour $1 < p < +\infty$.

Démonstration. — D'après le théorème 7.3 l'image de $W^{2m,1}_p(\Omega; I)$ et l'image de $B^{2m,1}_p(\Omega; I)$ par T coïncident. Pour $1 < p \leqq 2$, d'après (5.7) et la remarque ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} B^{2m,1}_p(\Omega; I) &= B^1_p(I; B^0_p(\Omega)) \cap B^0_p(I; B^{2m}_p(\Omega)) \\ &\subset B^1_p(I; L_p(\Omega)) \cap B^0_p(I; W^{2m}_p(\Omega)) \\ &\subset W^1_p(I; L_p(\Omega)) \cap L_p(I; W^{2m}_p(\Omega)) = W^{2m,1}_p(\Omega; I) \end{aligned}$$

et ceci prouve la proposition pour $1 < p \leqq 2$. Dans le cas $2 \leqq p < +\infty$ on a les inclusions en sens inverse.

BIBLIOGRAPHIE.

AGMON :

[1] *On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems* (*C. P. A. M.*, vol. 15, 1962, p. 119).

AGMON-NIREMBERG :

[1] *Properties of solutions of ordinary differential equations in Banach spaces* (*C. P. A. M.*, vol. 16, 1963, p. 121).

AGMON-DOUGLIS-NIREMBERG :

[1] *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations* (*C. P. A. M.*, vol. 12, 1959, p. 623).

AGRANOVITCH-VICHIK :

[1] *Problèmes elliptiques avec un paramètre et problèmes paraboliques de type général* (*Uspehi Mat. Nauk*, t. 20, n° 43, 1964).

ARNESE :

[1] *Su alcune proprietà dei potenziali relativi ad un'equazione parabolica d'ordine* 2 *m* (*Le Mathematiche*, t. 20, n° 2, 1965).

ARONSZJAN-MILGRAM :

[1] *Differential operators on Riemanian manifolds* (*Rendiconti Circolo Mat. Palermo*, vol. 2, 1952).

BESOV :

[1] *Investigations of a class of functions spaces in connection with imbedding...* (*Trudy Mat. Inst. Steklova*, t. 60, 1961, p. 42).

CALDERON :

[1] *Intermediate spaces and interpolation; the complex method* (*Studia Mathematica*, t. 24, 1964, p. 113).

DA PRATO :

[1] *Équations opérationnelles dans les espaces de Banach et applications* (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 266, série A, 1968, p. 60).

[2] *Équations opérationnelles dans les espaces de Banach* (*cas analytique*) (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 266, série A, 1968, p. 277).

DUNFORD-SCHWARTZ :

[1] *Linear operators*, part I, 1958, Interscience, New-York.

GEYMONAT :

[1] *Sui problemi ai limiti per i sistemi lineari ellittici* (*Annali di Mat. Pura ed Applic.*, (IV), t. 69, 1965, p. 207).

GEYMONAT-GRISVARD :

[1] *Alcuni risultati di teoria spettrale per i problemi ai limiti lineari ellittici* (*Rend. Sem. Mat. Univ. di Padova*, t. 38, 1967, p. 121).

GRISVARD :

[1] *Commutativité de deux foncteurs d'interpolation et applications* (*J. Math. pures et appl.*, t. 45, 1966, p. 143).

[2] *Caractérisation de quelques espaces d'interpolation* (*Archive for rational mechanics and analysis*, vol. 25, n° 1, 1967, p. 40).

[3] *Équations opérationnelles abstraites dans les espaces de Banach et problèmes aux limites dans des ouverts cylindriques* (*Annali S. N. S. Pisa*, vol. 21, 1967, p. 307).
[4] *Espaces intermédiaires entre espaces de Sobolev avec poids* (*Annali S. N. S. Pisa*, vol. 17, 1963, p. 255).
[5] *Identités entre espaces de traces* (*Math. Scand.*, vol. 13, 1963, p. 70).
[6] *Théorème de trace et applications* (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 256, 1963, p. 3226).
[7] *Méthodes opérationnelles dans l'étude des problèmes aux limites* (Exposé au Séminaire Bourbaki, 17e année, 1964-1965, nº 289).
[8] *Sur l'utilisation du calcul opérationnel dans l'étude des problèmes aux limites* (Exposé au Séminaire de Mathématiques supérieures, Montréal, 1965).

HARDY-LITTLEWOOD-POLYA :

[1] *Inequalities*, Cambridge University Press, 1934.

HILLE-PHILLIPS :

[1] *Functionnal Analysis and semi-groups* (*Amer. Math. Soc. Colloquium Publications*).

JONES :

[1] *A class of singular integrals* (*Amer. J. Math.*, vol. 86, nº 2, 1964).

KATO :

[1] *Semi-groups and temporally inhomogeneous evolution equations* (*C. I. M. E.*, 1º Ciclo, Varenna, 1963).

LIONS :

[1] *Équations différentielles opérationnelles*, Springer Verlag, Die Grundlehren der Mat.
[2] *Théorème de traces et d'interpolation*, (I) et (II) (*Annali S. N. S. Pisa*, vol. 13, 1959, p. 389 et vol. 14, 1960, p. 317).
[3] *Dérivées intermédiaires et espaces intermédiaires* (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 256, 1963, p. 4343).

LIONS-MAGENES :

[1] *Problèmes aux limites non homogènes* (III) (*Annali S. N. S. Pisa*, vol. 15, 1961, p. 39).
[2] *Problèmes aux limites non homogènes* (IV) (*Annali S. N. S. Pisa*, vol. 15, 1961, p. 311).
[3] *Problèmes aux limites non homogènes* (V) (*Annali S. N. S. Pisa*, vol. 16, 1962, p. 1).
[4] *Problèmes aux limites non homogènes* (VI) (*Journal d'Analyse mathématique*, vol. 11, 1963, p. 65).

LIONS-PEETRE :

[1] *Sur une classe d'espaces d'interpolation* (*Publ. I. H. E. S.*, Paris, nº 19, 1964, p. 5).

NIKOLSKI :

[1] *Théorèmes d'immersion, de prolongement et d'approximation* (*Uspehi Mat. Nauk*, t. 16, 1961, p. 63).

NIREMBERG :

[1] *On elliptic partial differential equations* (*Annali S. N. S. Pisa*, série III, vol. 13, fasc. 2, 1959, p. 1).

PAGNI :

[1] *Problemi al contorno per una certa classe di equazioni lineari alle derivate parziali* (*Atti del Sem. Mat. e Fisico dell' Univ. di Modena*, vol. 13, 1964, p. 120).

PEETRE :

[1] *A new approch to elliptic boundary problems* (*C. P. A. M.*, vol. 14, 1961, p. 711).

SCHECHTER :

[1] *General boundary value problems for elliptic partial differential equations* (*C. P. A. M.*, vol. 12, 1959, p. 457).

SCHWARTZ :

[1] *A remark on inequalities of Calderon-Zygmund type for vector valued functions* (*C. P. A. M.*, vol. 14, 1961, p. 785).

SOLONNIKOV :

[1] *Sur les problèmes aux limites pour les systèmes linéaires paraboliques* (*Trudy Mat. Inst. Steklov*, t. 83, 1965, p. 1).

USPENSKI :

[1] *Propriétés des classes généralisées* W_p^r *de Sobolev* (*Sibirski Mat. J.*, t. 3, 1962, p. 418).

TAIBLESON :

[1] *On the theory of Lipchsitz spaces of distributions on Euclidian n-space* (*J. Math. and Mechs*, vol. 13, n° 3, 1964, p. 407).

(Manuscrit reçu le 11 juillet 1968.)

Pierre GRISVARD,
Département de Mathématiques,
Faculté des Sciences,
Parc Valrose, 06-Nice.