

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

J. FRISCH

Aplatissement en géométrie analytique

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 1, n° 2 (1968), p. 305-312

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1968_4_1_2_305_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

APLATISSEMENT EN GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

PAR J. FRISCH.

1. NOTATIONS. — Soient S un espace analytique ⁽¹⁾, X et T deux espaces (analytiques) au-dessus de S . On notera $X(T)$ le produit fibré $X \times_S T$. Si $f: X \rightarrow Y$ est un morphisme d'espaces au-dessus de S , $f(T)$ sera le morphisme $X(T) \rightarrow Y(T)$ qui s'en déduit. Si $\mathcal{F}$ est un faisceau analytique sur X , on posera $\mathcal{F}(T) = f^* \mathcal{F}$, où f est le morphisme de projection $X(T) \rightarrow X$.

Soit $\varphi: X \rightarrow S$ un morphisme d'espaces analytiques; pour $x \in X$, on notera X_x le germe de X en x , et φ_x le germe de morphisme $X_x \rightarrow S_{\varphi(x)}$.

Si $\mathcal{F}$ est un faisceau analytique sur X , on dit que $\mathcal{F}$ est S -plat en x , ($x \in X$), si le $\mathcal{O}_{S, \varphi(x)}$ -module $\mathcal{F}_x$ est plat, et que $\mathcal{F}$ est S -plat s'il l'est en tout point de X . On dit que $\varphi: X \rightarrow S$ est propre si l'image réciproque de tout compact de S est compacte (donc séparée).

Cela dit, le but de cet article est de prouver le

THÉORÈME 1. — Soient $\varphi: X \rightarrow S$ un morphisme propre d'espaces analytiques, $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur X . Il existe un morphisme $j: \tilde{S} \rightarrow S$ d'espaces analytiques jouissant de la propriété universelle que voici :

- (i) $\mathcal{F}(\tilde{S})$ est $\tilde{S}$ -plat;
- (ii) Pour tout morphisme $f: R \rightarrow S$ tel que $\mathcal{F}(R)$ soit R -plat, il existe un morphisme et un seul $\tilde{f}: R \rightarrow \tilde{S}$ tel que $f = j \circ \tilde{f}$.

En outre, j est une immersion bijective.

Remarques. — 1. Cela peut encore s'énoncer en disant qu'on peut représenter le foncteur qui à tout espace R au-dessus de S associe l'ensemble réduit à un point si $\mathcal{F}(R)$ est R -plat, et l'ensemble vide si $\mathcal{F}(R)$ ne l'est pas.

⁽¹⁾ Les espaces analytiques considérés sont, sauf mention expresse du contraire, de dimension finie, et ne sont pas nécessairement réduits.

2. En prenant pour R un point simple de S , on voit que l'ensemble sous-jacent à $\tilde{S}$ coïncide avec l'ensemble sous-jacent à S . Le problème est donc de munir ce dernier d'une structure convenable d'espace analytique.

3. $\tilde{S}$ n'est en général pas réduit, même si X et S le sont.

L'analogue algébrique du théorème 1 est connu, et démontré dans [3]. Cependant, on ne dispose pas en géométrie analytique d'un critère général de représentabilité semblable à celui de [3]. La démonstration qui suit sera très différente de celle de [3], et s'appuiera essentiellement sur les méthodes et les résultats de la thèse de Douady [1], dont le théorème 1 s'est révélé une conséquence facile ⁽²⁾.

2. — Voici d'abord quelques préliminaires. Soient L_1 et L_0 deux espaces de Banach, (M_1, N_1) et (M_0, N_0) deux couples de sous-espaces vectoriels supplémentaires topologiques dans L_1 et L_0 respectivement, et $f \in \mathbf{L}(L_1, L_0)$ ⁽³⁾. On représente f par une matrice :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix},$$

où $\alpha : M_1 \rightarrow M_0$, $\beta : M_1 \rightarrow N_0$, $\gamma : N_1 \rightarrow M_0$, et $\delta : N_1 \rightarrow N_0$. La démonstration du lemme qui suit est laissée au lecteur.

LEMME 1. — *Pour que N_1 et N_0 soient respectivement supplémentaires topologiques de $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ dans L_1 et L_0 , il faut et il suffit que γ soit inversible et que $\beta = \delta^{-1} \alpha$.*

Soient maintenant S un espace analytique, U un ouvert de $\mathbf{C}^n$, f un morphisme de $\mathcal{L}_1 = \mathcal{O}_{S \times U}^{r_1}$ dans $\mathcal{L}_0 = \mathcal{O}_{S \times U}^{r_0}$, et K un polycylindre compact contenu dans U . Posons $L_i = B(K, \mathcal{O}_U^{r_i}) = B(K)^{r_i}$, $i = 0, 1$ ⁽⁴⁾. Alors f définit un morphisme de fibrés analytiques banachiques triviaux de base S :

$$B(K, f) : B(K, \mathcal{L}_1) \rightarrow B(K, \mathcal{L}_0).$$

On peut aussi interpréter $B(K, f)$ comme un morphisme (banachique) de S dans $\mathbf{L}(L_1, L_0)$. Soit $L_i = M_i \oplus N_i$ une décomposition de L_i en somme directe topologique d'espaces vectoriels, $i = 1, 0$; $B(K, f)$ se représente alors par une matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix},$$

⁽²⁾ L'auteur s'est d'ailleurs lourdement appuyé sur l'aide de celui de [1].

⁽³⁾ Si E et F sont deux espaces de Banach, $\mathbf{L}(E, F)$ désigne l'espace de Banach des applications linéaires continues de E dans F .

⁽⁴⁾ Pour la définition de $B(K)$, cf. [1], § 5 et § 8, n° 3.

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des morphismes (banachiques) de S dans $\mathbf{L}(M_1, M_0)$, $\mathbf{L}(M_1, N_0)$, $\mathbf{L}(N_1, M_0)$, $\mathbf{L}(N_1, N_0)$ respectivement (on peut aussi les interpréter comme des morphismes de fibrés).

Pour $s \in S$,

$$B(K, f(s)) = \begin{pmatrix} \alpha(s) & \gamma(s) \\ \beta(s) & \delta(s) \end{pmatrix}$$

est alors un élément de $\mathbf{L}(L_1, L_0)$. L'ensemble Ω des points $s \in S$ tels que $\gamma(s)$ soit inversible est ouvert dans S . Soit T le sous-espace analytique fermé de Ω défini par l'équation

$$\beta - \delta \gamma^{-1} \alpha = 0.$$

Conformément aux conventions du début, on notera $B(K, f(T))$ la restriction de $B(K, f)$ au sous-espace T de S . On peut le considérer, soit comme un morphisme (banachique) $T \rightarrow \mathbf{L}(L_1, L_0)$, soit comme un morphisme de fibrés analytiques banachiques triviaux de base $T : T \times L_1 \rightarrow T \times L_0$.

LEMME 2. — (i) $B(K, f(T)) : T \times L_1 \rightarrow T \times L_0$ possède un fibré-noyau A_1 et un fibré-image A_0 ; A_i est un sous-fibré (analytique banachique) supplémentaire topologique de $T \times N_i$, $i = 0, 1$.

(ii) T est universel pour cette propriété, au sens suivant : Si $u : R \rightarrow \Omega$ est un morphisme tel que $B(K, f(R)) : R \times L_1 \rightarrow R \times L_0$ admette un fibré-noyau A'_1 et un fibré-image A'_0 , respectivement supplémentaires topologiques de $R \times N_1$ et $R \times N_0$ dans $R \times L_1$ et $R \times L_0$, alors U se factorise de façon unique à travers T , et l'on a $A'_i = u^* A_i$, $i = 0, 1$.

Démonstration. — Les notations utilisées ici sont celles de ([1], § 2).

(i) Considérons dans $\mathbf{L}(L_1, L_0) = \mathbf{L}(M_1 \oplus N_1, M_0 \oplus N_0)$ l'ouvert V des matrices

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

telles que c soit inversible; soit E la sous-variété directe (analytique banachique) de V défini par l'équation

$$b - d^{-1}c a = 0.$$

On sait ([1], § 2, prop. 2) qu'il existe un ouvert W de $\mathfrak{S}(L_1, L_0)$ tel que la projection $p : \mathfrak{S}(L_1, L_0) \rightarrow \mathbf{L}(L_1, L_0)$ définisse un isomorphisme de W sur E . Puisque $B(K, f(T))$ envoie T dans E , $B(K, f(T))$ se factorise à travers $\mathfrak{S}(L_1, L_0)$, ce qui prouve (i).

(ii) L'hypothèse sur u signifie que $B(K, f(R))$ se factorise à travers $\mathfrak{S}(L_1, L_0)$, qui est une sous-variété directe de $\mathcal{G}(L_1) \times \mathbf{L}(L_1, L_0) \times \mathcal{G}(L_0)$,

et plus précisément à travers l'intersection de $\mathcal{S}(L_1, L_0)$ avec la carte $U_{N_1} \times L(L_1, L_0) \times U_{N_0}$. Donc $B(K, f(R))$ se factorise à travers E ; posant

$$B(K, f(R)) = \begin{pmatrix} \alpha' & \gamma' \\ \beta' & \delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \cdot u,$$

cela signifie que $\beta' - \delta'^{-1} \gamma' \alpha' = 0$, i. e. $(\beta - \delta^{-1} \gamma) \cdot u = 0$, ce qui exprime que U se factorise à travers T . Cela prouve (ii).

Soit $\mathcal{F}$ le conoyau de $f: \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_0$. Fixons dans S un point s , et supposons que le polycylindre K soit $\mathcal{F}(s)$ -privilegié^(*), ce qui entraîne que le noyau et l'image de $B(K, f(s))$ sont des sous-espaces directs de L_1 et L_0 respectivement. On prendra alors $M_1 = \text{Ker} B(K, f(s))$ et $M_0 = \text{Im} B(K, f(s))$. Ainsi, Ω est un voisinage ouvert de s , et T est un sous-espace fermé de Ω passant par s . Dans ces conditions,

LEMME 3. — (i) *Il existe un voisinage ouvert V de s dans T tel que $\mathcal{F}(V)$ soit V -plat sur $V \times \mathring{K}$ ($\mathring{K}$ est l'intérieur de K).*

(ii) *Supposons que K soit $\mathcal{F}(t)$ privilégié par tout $t \in T$. Si $u: R \rightarrow \Omega$ est un morphisme tel que $\mathcal{F}(R)$ soit R -plat sur $R \times U$, si $r \in R$ s'envoie par u sur un point $t \in T$, alors le germe $u_r: R_r \rightarrow \Omega_t$, se factorise de façon unique à travers T_t .*

Démonstration. — (i) On peut supposer que $T = S$, et l'on doit alors prouver que $\mathcal{F}$ est S -plat sur $S \times \mathring{K}$. Soit

$$\mathcal{L}_2(s) \xrightarrow{\gamma} \mathcal{L}_1(s) \xrightarrow{f(s)} \mathcal{L}_0(s) \rightarrow \mathcal{F}(s) \rightarrow 0$$

un début de résolution de $\mathcal{F}(s)$ au voisinage de K , avec $\mathcal{L}_2 = \mathcal{O}_{S \times U}^{r_2}$, $\mathcal{L}_2(s) = \mathcal{O}_U^{r_2}$. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_{r_2}$ les images par $B(K, \gamma)$ des éléments de la base canonique de $B(K, \mathcal{L}_2(s))$. Les α_i forment un système de générateurs de $\text{Ker} B(K, f(s))$. Comme $\text{Ker} B(K, f)$ est un fibré analytique banachique de base S [lemme 2, (i)], il existe un voisinage ouvert V' de s dans S et des sections $a_1, \dots, a_{r_2}$ de ce fibré au-dessus de V' , telles que $\alpha_i = a_i(s)$, $i = 1, \dots, r_2$ (une telle section est, rappelons-le, un *morphisme* de l'espace analytique V' dans l'espace analytique banachique $\text{Ker} B(K, f)$ dont le composé par le morphisme de projection est l'identité). Ces sections définissent un morphisme $B(K)$ -linéaire de fibrés analytiques banachiques triviaux :

$$G: B(K, \mathcal{L}_2)|_{V'} \rightarrow \text{Ker} B(K, f)|_{V'}$$

qui en s est un épimorphisme. C'est donc encore un épimorphisme au-dessus d'un voisinage ouvert V de s . On obtient ainsi au-dessus de V une suite

(*) Cf. [1], . 7.

exacte directe $B(K)$ -linéaire de fibrés

$$B(K, \mathcal{L}_2) \xrightarrow{G} B(K, \mathcal{L}_1) \xrightarrow{B(K, f)} B(K, \mathcal{L}_0).$$

Celle-ci donne naissance ([1], § 5, n° 2) à un complexe de faisceaux sur $V \times \hat{K}$:

$$(\star) \quad \mathcal{L}_2 \xrightarrow{g} \mathcal{L}_1 \xrightarrow{f} \mathcal{L}_0$$

tel que, pour tout $t \in V$,

$$\mathcal{L}_2(t) \xrightarrow{g^{(s)}} \mathcal{L}_1(t) \xrightarrow{f^{(s)}} \mathcal{L}_0(t)$$

soit une suite exacte ([1], § 8, lemme 1, (b)). Cela entraîne (*ibid.*, prop. 2) que $(\star)$ est une suite exacte (donc un début de résolution de $\mathcal{F}$) et que $\mathcal{F}$ est S -plat au-dessus de V .

(ii) D'après « platitude et privilège » (*ibid.*, Scholie), l'hypothèse entraîne que $B(K, f(R))$ admet au voisinage de r un fibré-image et un fibré-noyau respectivement supplémentaires topologiques de $R \times N_1$ et $R \times N_0$ dans $R \times L_1$ et $R \times L_0$ (car c'est vrai au point r). L'assertion résulte alors du lemme 2, (ii).

Conjecture (Douady). — Il est vraisemblable que, dans la partie (i) du lemme 3, $\mathcal{F}(V)$ est en fait V -plat au voisinage de $V \times K$ dans $V \times U$. (Cela simplifierait la démonstration du lemme 5.)

3. — Soit $\varphi: X \rightarrow S$ un morphisme *propre* d'espaces analytiques. Appelons armure de φ la donnée :

- (i) d'un ouvert Ω de S ,
- (ii) d'un ensemble fini d'indices I ,
- (iii) pour tout $i \in I$, d'un morphisme $\alpha_i: V_i \rightarrow \Omega \times U_i$ (où V_i est un ouvert de Y au-dessus de Ω , et U_i un ouvert d'un $\mathbb{C}^{r_i}$) identifiant V_i à un sous-espace fermé de $\Omega \times U_i$, et rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} V_i & \xrightarrow{\alpha_i} & \Omega \times U_i \\ & \searrow \varphi & \swarrow \text{pr}_1 \\ & \Omega & \end{array}$$

- (iv) pour tout $i \in I$, d'un polycylindre $K_i \subset U_i$, de sorte que

$$(\star \star) \quad \bar{\varphi}^{-1}(\Omega) = \bigcup_{i \in I} \bar{\alpha}_i^{-1}(\Omega \times \hat{K}_i).$$

Si $\mathcal{F}$ est un faisceau analytique cohérent sur X , on posera

$$\mathcal{F}_i = (\alpha_i)_* (\mathcal{F}|_{V_i}),$$

et l'on dira que l'armure est $\mathcal{F}$ -privilegiée en $s \in \Omega$ (resp. $\mathcal{F}$ -privilegiée) si pour tout $i \in I$, K_i est $\mathcal{F}_i(s)$ -privilegié [resp. $\mathcal{F}_i(t)$ -privilegié pour

tout $t \in \Omega$] et si, de plus, $\mathcal{F}_i$ admet (pour tout $i \in I$) une présentation sur $\Omega \times K_i$.

LEMME 4. — Soient $\varphi : X \rightarrow S$ un morphisme propre d'espaces analytiques, $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur X , s un point de S . Il existe une armure $[\Omega, I, (\alpha_i), (K_i)]$ de φ telle que $s \in \Omega$, et qui soit $\mathcal{F}$ -privilegié en s .

Si, de plus, $\mathcal{F}$ est S -plat en tout point $x \in X$ au-dessus de s , on peut prendre l'armure $\mathcal{F}$ -privilegiée.

Démonstration. — La première partie résulte de ce que φ est propre et du théorème des voisinages privilégiés ([1], § 7, th. 1), la seconde de « platitude et privilège », (ibid § 8, Scholie).

LEMME 5. — Soient $\varphi : X \rightarrow S$ un morphisme propre d'espaces analytiques, $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur X , s un point de S . Il existe un voisinage ouvert ω de s dans S , et un sous-espace analytique fermé T de ω tels que :

- (i) $\mathcal{F}(T)$ soit T -plat;
- (ii) Si $u : R \rightarrow \omega$ est un morphisme tel que $\mathcal{F}(R)$ soit R -plat, et si $r \in R$ s'envoie par u sur $t \in T$, alors $u_r : R_r \rightarrow \omega_t$ se factorise de façon unique à travers T_t .

Démonstration. — D'après le lemme 4, on peut prendre une armure $[\Omega, I, (\alpha_i), (K_i)]$ de φ $\mathcal{F}$ -privilegiée en s , et aussi, pour tout $i \in I$, une présentation

$$\mathcal{L}_1^i \xrightarrow{\varphi^i} \mathcal{L}_0^i \rightarrow \mathcal{F}_i \rightarrow 0$$

de $\mathcal{F}_i$ sur $\Omega \times K_i$. Pour chaque $i \in I$, on peut alors appliquer la construction du paragraphe 2 au morphisme $B(K_i, \varphi^i)$ et à une décomposition en sommes directes topologiques de $B(K_i, \mathcal{L}_1^i(s))$ et $B(K_i, \mathcal{L}_0^i(s))$ respectivement suivant le noyau et l'image de $B(K_i, \varphi^i(s))$. On obtient ainsi, pour chaque $i \in I$, un voisinage ouvert Ω_i de s dans Ω , et un sous-espace analytique fermé T'_i de Ω_i passant par s vérifiant les conditions du lemme 3 relatif à $\mathcal{F}_i$. Comme I est fini, on peut, quitte à restreindre Ω , supposer que $\Omega_i = \Omega$ pour tout i . Posons

$$T' = \bigcap_{i \in I} T'_i = \bigcap_{i \in I} T'_i.$$

D'après le lemme 3, pour tout $i \in I$, $\mathcal{F}_i(T'_i)$ est T'_i -plat sur $T'_i \times K_i$; *a fortiori*, $\mathcal{F}_i(T')$ est T' -plat sur $T' \times K_i$. La relation (★★) entraîne alors que $\mathcal{F}(T')$ est T' -plat en tout point de $\bar{\varphi}^{-1}(T')$. Par suite, pour tout $i \in I$, $\mathcal{F}_i(T')$ est T' -plat sur $T' \times U_i$. On peut alors trouver (c'est « platitude et privilège », [1], § 8, Scholie) un voisinage ouvert ω de s dans Ω tel que pour tout $i \in I$, K_i soit $\mathcal{F}_i(t)$ -privilegié pour tout point t de $T = T' \cap \omega$.

On a ainsi construit un couple (ω, T) vérifiant la condition (i) du lemme 5. Il en vérifie aussi la condition (ii). En effet, dans l'hypothèse de (ii), pour tout $i \in I$, $\mathcal{F}_i(R)$ est R -plat sur $R \times U_i$, et K_i est $\mathcal{F}_i(t)$ -privilegié. D'après le lemme 3, (ii), $u_r : R_r \rightarrow \omega_i$ se factorise donc de façon unique à travers $(T_i)_t$ pour tout $i \in I$, donc à travers T_t , et le lemme est démontré.

Démonstration du théorème 1. — Pour tout $s \in S$, soient ω^s un voisinage ouvert de s dans S , et T^s un sous-espace analytique fermé de ω^s passant par s vérifiant les conditions du lemme 5. Il résulte facilement de ce lemme que si s_1 et s_2 sont deux points de S tels que T^{s_1} et T^{s_2} aient un point commun t , alors $(T^{s_1})_t = (T^{s_2})_t$.

Construisons alors l'espace analytique $\tilde{S}$ de la façon suivante. Son ensemble sous-jacent est l'ensemble $|S|$ sous-jacent à S . Sa topologie est la plus fine sur $|S|$ induisant sur chaque $T^s, s \in S$, la même topologie que S (autrement dit, $E \subset |S|$ est ouvert si et seulement si pour tout $s \in S$, $E \cap T^s$ est ouvert dans T^s), ce qui implique en particulier que tous les $T^s, s \in S$, sont ouverts dans $\tilde{S}$. Enfin, son faisceau structural est défini par la condition que pour tout $s \in S$, $\mathcal{O}_{\tilde{S}}|_{T^s} = \mathcal{O}_{T^s}$.

L'espace $\tilde{S}$ ainsi construit est naturellement au-dessus de S , et le morphisme $j : \tilde{S} \rightarrow S$ est une immersion bijective. Il résulte du lemme 5 que $\mathcal{F}(\tilde{S})$ est $\tilde{S}$ -plat, et que l'espace $\tilde{S}$ au-dessus de S est universel pour cette propriété. Cela achève la démonstration.

4. — Notons S_{red} l'espace analytique réduit associé à S .

COMPLÉMENT AU THÉORÈME 1.

(a) *Il existe un sous-espace ouvert partout dense S' de S , dont le complémentaire est un ensemble analytique, tel que $S'_{\text{red}} \subset \tilde{S}' \subset S'$ (ce qui implique que j définit un homéomorphisme de $j^{-1}(S')$ sur S');*

(b) *Tout point $s \in S$ possède un système fondamental de voisinages dont les images réciproques par j n'ont qu'un nombre fini de composantes connexes.*

Démonstration.

(a) On sait que l'ensemble Y des points $x \in X$ en lesquels $\mathcal{F}(S_{\text{red}})$ n'est pas S_{red} -plat est analytique, et que $Z = \varphi(Y)$ est négligeable dans S ([2], th. IV, 9 et prop. IV, 14). Comme φ est propre, Z est analytique et son complémentaire S' est partout dense. Munissons S' de la structure induite; d'après le théorème 1, l'injection canonique $i : S' \rightarrow S$ se factorise à travers $\tilde{S}'$, d'où (a).

(b) Raisonnons par récurrence sur la dimension de S , en remarquant que l'assertion résulte de (a) pour les points de S' . Soit donc $s \in Z$. On peut

évidemment supposer S irréductible en s . Munissons Z de la structure réduite, et notons $\tilde{Z} \xrightarrow{h} Z$ l'aplatissement de $\varphi(Z) : X(Z) \rightarrow Z$ pour le faisceau $\mathcal{F}(Z)$. Par hypothèse de récurrence, il existe un système fondamental $\mathfrak{V}$ de voisinages (qu'on peut supposer connexes) de s dans S , tel que, pour tout $V \in \mathfrak{V}$, $h^{-1}(V \cap Z)$ n'ait qu'un nombre fini de composantes connexes $A_1, \dots, A_p$. Or le carré

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Z} & \xrightarrow{\tilde{\tau}} & \tilde{S} \\ j(Z) \downarrow & & \downarrow j \\ Z & \xrightarrow{i} & S \end{array}$$

est cartésien. Par suite,

$$j^{-1}(V) = j^{-1}(V \cap \bigcup Z) \cup \tilde{\tau}(A_1) \cup \dots \cup \tilde{\tau}(A_p).$$

Mais $\tilde{\tau}(A_1), \dots, \tilde{\tau}(A_p)$ sont connexes, et $j^{-1}(V \cap \bigcup Z)$ aussi d'après (a), car $(V \cap \bigcup Z)$ est connexe. Ainsi $j^{-1}(V)$ n'a pas plus de $p + 1$ composantes connexes, ce qui prouve (b).

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] A. DOUADY, *Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné* (Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 16, 1966, p. 1).
- [2] J. FRISCH, *Points de platitude d'un morphisme d'espaces analytiques* (Inventiones Math., t. 4, 1967).
- [3] J.-P. MURRE, *Representation of unramified functors; Applications* (Séminaire Bourbaki, n° 294, 1965).

(Manuscrit reçu le 25 Novembre 1967).

