

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MAX KAROUBI

Algèbres de Clifford et K -théorie

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 1, n° 2 (1968), p. 161-270

[<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1968_4_1_2_161_0>](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1968_4_1_2_161_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ALGÈBRES DE CLIFFORD ET K -THÉORIE

PAR MAX KAROUBI.

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
INTRODUCTION.....	162
CHAPITRE I.	
NOTIONS PRÉLIMINAIRES.	
1.1. Algèbres de Clifford.....	166
1.2. Catégories de Banach.....	177
1.3. Le groupe de Grothendieck.....	183
CHAPITRE II.	
COHOMOLOGIE DES CATÉGORIES DE BANACH.	
2.1. Les foncteurs K^n et $K^{p,q}$	200
2.2. Le théorème fondamental.....	208
2.3. Les théorèmes de périodicité de Bott.....	221
2.4. Structures multiplicatives.....	229
CHAPITRE III.	
APPLICATIONS.	
3.1. Le « théorème de Thom » en K -théorie.....	234
3.2. K -théorie des fibrés projectifs réels.....	242
3.3. Théorie KR	246
3.4. K -théorie réelle et K -théorie complexe.....	253
3.5. Le « théorème de Thom » en K -théorie équivariante.....	261
BIBLIOGRAPHIE.....	267
INDEX TERMINOLOGIQUE.....	269

INTRODUCTION.

Comme l'ont montré Atiyah, Bott et Shapiro [6], les algèbres de Clifford semblent jouer un rôle important en K -théorie. En particulier, « l'isomorphisme de Thom » en K -théorie réelle trouve là, sans doute, son cadre le plus naturel. Cependant, plusieurs points de [6] restaient encore obscurs. Les groupes d'homotopie stables du groupe orthogonal étaient isomorphes à certains groupes A_k assez mystérieux. L'isomorphisme de Thom était démontré seulement pour des fibrés de rang multiple de 8 et il apparaissait que cette restriction était inutile. D'autre part, comme on l'avait déjà remarqué dans [6], le calcul du groupe KO d'espaces projectifs réels ne pouvait se faire aisément qu'en ayant à sa disposition une « bonne » définition des foncteurs KO^n pour $n > 0$.

Une première tentative d'explication de ces phénomènes fut entreprise par Wood [25] qui attacha certains invariants à une algèbre de Banach $\mathbf{Z}_2$ -graduée. En appliquant ses résultats à l'algèbre de Clifford de $\mathbf{R}^n$ (muni d'une forme quadratique définie négative), Wood en déduisait les théorèmes de périodicité de Bott. Cependant, le travail de Wood, bien qu'apportant déjà une certaine simplification, ne répondait pas à toutes les questions posées plus haut.

L'origine de ces difficultés provenait du fait que la définition des groupes K^n due à Atiyah et Hirzebruch [7] était inadaptée aux besoins de la cause. Dans cet article, nous avons donné une nouvelle définition, d'esprit tout différent, où interviennent encore les algèbres de Clifford. Avec ce point de vue, la périodicité des groupes K^n (2 dans le cas complexe et 8 dans le cas réel) est évidente car elle résulte de la « périodicité » correspondante des algèbres de Clifford. Nous espérons que cet article convaincra les spécialistes de K -théorie du bien-fondé de cette définition.

Le théorème fondamental de ce travail exprime, si l'on veut, que les deux définitions des groupes K^n sont équivalentes. Ceci est, en fait, une nouvelle version des théorèmes de périodicité de Bott. De manière précise, considérons un fibré vectoriel V , de base compacte X , muni d'une forme quadratique définie positive. On associe à ce fibré un groupe $K^r(X)$ qui peut être interprété comme un groupe K à coefficients dans un certain « système local ». Lorsque le fibré V est spinoriel, ce système local est trivial et le groupe correspondant est isomorphe à $K^{-n}(X)$ ($n = \text{rang } V$). On définit maintenant un homomorphisme fondamental

$$t: K^r(X) \rightarrow K^0(B(V), S(V)),$$

où $B(V)$ [resp. $S(V)$] est le fibré en boules (resp. en sphères) de V , dont on montre que c'est un isomorphisme [th. (2.2.4)]. Cet homomorphisme t généralise l'homomorphisme α du théorème 11.5 de [6]. Bien entendu, on retrouve ainsi comme cas particulier le théorème d'isomorphisme de Thom de [6]. En fait, on démontre un peu plus : le groupe $K(B(V), S(V))$ (qui est isomorphe, comme on sait, au groupe $\tilde{K}$ de l'espace de Thom de V) ne dépend que des deux premières classes de Stiefel-Whitney de V .

Le point de vue adopté nous amène aussi à développer des applications nombreuses et variées qui sont passées en revue plus loin. Par exemple, avec ces nouvelles techniques, on calcule aisément les groupes KO et Ksp d'espaces projectifs réels. Ceci permet de retrouver les résultats d'Adams [1] de manière plus simple.

Parlons maintenant d'un certain formalisme que nous avons été contraint d'adopter ici. Comme il est bien connu, la K -théorie d'Atiyah et Hirzebruch admet plusieurs généralisations et raffinements qui se sont développés ces dernières années : théories KC ou KSC ([2] [15]), K_c [8], KR [4], etc. Dans cet article où l'on remet en question des notions fondamentales comme la définition des groupes K^n , il était nécessaire de trouver une certaine unité à ces « théories ». Ceci permettrait au moins de distinguer les résultats qui sont vrais pour toutes ces théories de ceux qui sont des traits typiques de quelques-unes d'entre elles seulement. De fait, si l'on remonte aux sources de la K -théorie, on trouve le groupe de Grothendieck d'une catégorie additive. On pouvait donc chercher à définir des groupes K^n de catégories additives qui donneraient comme cas particuliers les groupes K^n qu'on connaît et qui jouiraient de certaines propriétés « cohomologiques ». Malheureusement, ce problème (s'il admet une solution) semble très difficile. En fait, les objets avec lesquels nous travaillerons seront des catégories additives munies de structures topologiques appropriées : les « catégories de Banach ». Une telle catégorie est *grosso modo* une catégorie additive où l'ensemble des morphismes de mêmes source et but est muni d'une structure d'espace de Banach. Pour les catégories de Banach, on pourra définir des groupes K^n et démontrer des propriétés non triviales qui généraliseront les résultats d'Atiyah, Hirzebruch et Wood. Cependant, que le lecteur non averti se rassure : ceci n'est pas un traité sur les catégories et peu de choses est supposé connu, l'auteur insistant surtout sur le côté topologique de la question. Si certains sorites n'ont pu être évités, ce sont uniquement ceux destinés à démontrer les théorèmes fondamentaux ou quelques applications.

Ce travail est divisé en trois chapitres dont nous allons maintenant détailler le contenu.

Le premier chapitre est purement technique et contient les notions de base qui serviront dans les chapitres suivants. On pourra donc le lire assez rapidement, quitte à y revenir par la suite. Les propriétés élémentaires des algèbres de Clifford y sont plus développées que dans [6]. L'innovation essentielle est ici la considération des algèbres de Clifford relatives à une forme quadratique (non dégénérée) quelconque. Celles-ci interviennent naturellement dans la définition des groupes K^n pour n de signe arbitraire. A une telle algèbre est associé un groupe, noté $Spin(p, q)$, qui est un revêtement à deux feuillets de $SO(p, q)$ de la même manière que $Spin(n)$ est un revêtement de $SO(n)$. Les catégories de Banach apparaissent au deuxième paragraphe où, avec les définitions générales, de nombreux exemples sont donnés. La notion essentielle mise en valeur est celle de « famille continue de catégories de Banach » qui représente plus ou moins l'aspect « faisceautique » de la K -théorie. Ainsi $K^r(X)$ peut être interprété comme le groupe K à coefficients dans un certain « faisceau ». On a des interprétations analogues pour les foncteurs K_c , KR , etc. Le dernier paragraphe donne les définitions du groupe de Grothendieck d'une catégorie, d'un foncteur, d'une « grille carrée ». Le théorème (1.3.9) est important; il nous servira pour la construction de la théorie cohomologique $K^n(X, Y)$ donnée au paragraphe 2.3. Dans les applications, la proposition (1.3.12), qui est une forme raffinée de l'axiome d'excision, nous sera aussi très utile, notamment pour pouvoir écrire des suites de Mayer-Vietoris. D'autre part, la proposition (1.3.4) (qui exprime que le groupe de Grothendieck d'une catégorie additive est une limite inductive de groupes K d'anneaux convenables), bien que de démonstration facile, ne semble pas être connue. Elle nous sera précieuse lorsqu'on voudra calculer les groupes K^n d'une catégorie de Banach de dimension finie [i.e. où $Hom(M, N)$ est un espace vectoriel de dimension finie; cf. prop. (2.3.15)].

Dans le deuxième chapitre, nous développons ce qu'on peut appeler la « cohomologie des catégories de Banach » ⁽¹⁾. On y définit les groupes $K^n(X, Y)$ [plus généralement $K^n(\varphi)$, où φ est un foncteur entre deux catégories de Banach jouissant de certaines propriétés] comme le groupe K d'une grille carrée particulière. En fait, $K^n(X, Y)$ satisfait à une propriété universelle analogue à celle du groupe de Grothendieck [prop. (2.1.14)]. On montre aussi que les K^n sont périodiques et que K^0 est le foncteur K usuel. Dans le paragraphe 2.2 se trouve la démonstration du théorème fondamental cité plus haut. On utilise ici des techniques d'approximation déjà éprouvées par Atiyah, Bott et Wood; l'esprit de la

⁽¹⁾ Le mot « homologie » serait plus juste mais nous préférons cette terminologie eu égard à l'origine « géométrique » de la K -théorie.

démonstration est cependant différent. Dans le paragraphe 2.3, on établit enfin les théorèmes de « périodicité » de Bott non classique [th. (2.3.1)] et classiques [th. (2.3.2), (2.3.3); prop. (2.3.6) et (2.3.7)] sous une forme plus générale. La proposition (2.3.8) permet de faire le lien entre notre travail et celui de Wood. Dans ce contexte, la simple connaissance des algèbres de Clifford permet le calcul des groupes d'homotopie stables du groupe orthogonal. Le point essentiel est ici le fait que le groupe K^1 d'une catégorie de dimension finie est nul [prop. (2.3.14)]. Enfin, le chapitre se termine par une étude succincte des structures multiplicatives en K -théorie. Malheureusement, nous n'avons pas réussi à trouver de formules de multiplication simples avec notre définition des groupes K^n , notamment pour les valeurs impaires de n . Cependant quelques formules sont nouvelles [prop. (2.4.1), (2.4.2), etc.].

Dans le chapitre III, en appliquant les idées précédentes, nous obtenons des résultats qui complètent en de nombreux points ceux de ([2], [4], [6], [8]). Le théorème de Thom en K -théorie est démontré sans restriction sur le rang [th. (3.1.4)]; notons qu'ici notre définition des groupes K^n pour n positif est essentielle, notamment pour démontrer la « multiplicativité » de la classe de Thom. Des raffinements divers sont donnés [cor. (3.1.10), prop. (3.1.12)]; on démontre par exemple un isomorphisme de Thom pour des fibrés réels orientés (sans hypothèses spinorielles) en K -théorie mod $\mathbf{Z}_n$, n impair. Enfin, la proposition (3.1.12) fait le lien entre notre travail et celui d'Atiyah, Bott et Shapiro [6]. Dans le paragraphe 1.2, nous calculons les groupes KU , KO et Ksp de *fibrés* projectifs réels. En particulier, si le fibré V est spinoriel, nous montrons que ce groupe ne dépend que du rang de V (il n'en est pas de même, bien entendu, en ce qui concerne les structures multiplicatives). Si la base de V est réduite à un point, nous retrouvons pour KO et KU les résultats d'Adams, comme il a été annoncé plus haut. Dans le paragraphe 3.3, nous montrons comment la théorie KR d'Atiyah [4] s'insère dans notre cadre général. On démontre aussi de nouveaux résultats [cor. (3.3.8) et (3.3.9) notamment], ce qui permet de donner un sens au groupe « $K(B(V), S(V))$ » lorsque la forme quadratique non dégénérée sur V n'est plus nécessairement positive. On calcule également le groupe KR d'espaces projectifs réels munis de certaines involutions. Ces résultats sont appliqués dans le paragraphe 3.4 où nous retrouvons les suites exactes d'Anderson dans le cadre général des catégories de Banach [th. (3.4.7)]. L'introduction des catégories de Banach à ce stade n'est pas seulement esthétique. Par exemple, la méthode d'Anderson ne permet pas de démontrer une suite exacte du type

$$\dots \rightarrow KU^n_c(X) \rightarrow KO^n_c(X) \oplus Ksp^n_c(X) \rightarrow KC^n_c(X) \rightarrow KU^{n+1}_c(X) \rightarrow \dots$$

en K -théorie équivalente. Nous pouvons ainsi étendre le théorème de Segal $K_c(X) \approx K(X_c)$ en K -théorie réelle [th. (3.4.19)] ⁽²⁾. Enfin, nous démontrons dans le paragraphe 3.5 deux « théorèmes de Thom » en K -théorie équivariante [th. (3.5.5) et (3.5.12)] en utilisant pour le second certains résultats récents d'Atiyah [8]. En particulier, si V est un fibré réel G -spinoriel de rang n , $KO_c^n(X)$ est isomorphe à $KO_c(B(V), S(V))$.

Les résultats essentiels contenus dans cet article ont été résumés dans trois Notes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* [18].

Pour conclure, je tiens à remercier MM. les Professeurs H. Cartan et W. Shih qui m'ont aidé à comprendre la K -théorie durant leurs séminaires respectifs ainsi que M. le Professeur J.-P. Serre qui a accepté de me donner un second sujet de thèse. Je remercie aussi M. le Professeur A. Grothendieck pour l'intérêt constant qu'il a porté à mon travail et pour ses critiques pertinentes responsables pour une bonne part du point de vue général adopté ici. Enfin, qu'il me soit permis d'exprimer ma gratitude envers l'Institut des Hautes Études Scientifiques pour son aide matérielle qui a contribué à la bonne fin de ce manuscrit.

CHAPITRE I.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

1.1. Algèbres de Clifford.

Soient k un corps commutatif, V un k -espace vectoriel et Q une forme quadratique sur V . Soit $T(V) = \sum_{i \geq 0} T^i(V)$ l'algèbre tensorielle de V et soit $I(Q)$ l'idéal bilatère de $T(V)$ engendré par les éléments de la forme $x \otimes x - Q(x) \cdot 1$. L'algèbre quotient $T(V)/I(Q)$ est dite *algèbre de Clifford* de V pour la forme quadratique Q . On la note $C(V, Q)$ ou, plus simplement, $C(V)$ ou $C(Q)$. L'application i_Q de V dans $C(V, Q)$ définie comme le composé évident $V \rightarrow T(V) \rightarrow C(Q)$ est une injection; celle-ci permet d'identifier V à son image $i_Q(V)$. Le couple $(i_Q, C(Q))$ est la solution du problème d'applications universelles que voici : soit $f: V \rightarrow A$ une application k -linéaire de V dans une k -algèbre A telle que, quel que soit l'élément x de V , on ait $(f(x))^2 = Q(x) \cdot 1$; il existe alors un homomorphisme de k -algèbres $\tilde{f}: C(Q) \rightarrow A$, et un seul, tel que $\tilde{f} \cdot i_Q = f$.

⁽²⁾ Cette extension du théorème de Segal [8] a été obtenue indépendamment par Atiyah et Segal grâce à un usage plus direct de la théorie KR . (Note ajoutée à la correction des épreuves le 1^{er} février 1968.)

Soit $C^0(Q)$ [resp. $C^1(Q)$] l'image de $\sum_{i \geq 0} T^{2i}(V)$ [resp. $\sum_{i \geq 1} T^{2i+1}(V)$] dans $C(Q)$. La décomposition $C(Q) = C^0(Q) \oplus C^1(Q)$ définit une structure de k -algèbre $\mathbb{Z}_2$ -graduée sur $C(Q)$.

PROPOSITION (1.1.1). — Soient V_1 et V_2 deux k -espaces vectoriels munis de formes quadratiques respectives Q_1 et Q_2 . L'application

$$f: V_1 \oplus V_2 \rightarrow C(V_1, Q_1) \hat{\otimes} C(V_2, Q_2),$$

définie par

$$f(x_1, x_2) = i_{Q_1}(x_1) \otimes 1 + 1 \otimes i_{Q_2}(x_2),$$

induit un isomorphisme f des algèbres $\mathbb{Z}_2$ -graduées $C(V_1 \oplus V_2, Q_1 \oplus Q_2)$ et $C(V_1, Q_1) \hat{\otimes} C(V_2, Q_2)$.

Démonstration. — Immédiate (cf. [10] ou [6]).

Comme toute algèbre $\mathbb{Z}_2$ -graduée, l'algèbre de Clifford $C(Q)$ possède une involution canonique, notée σ ou $-$, définie par $\bar{s} = s$ (resp. $\bar{s} = -s$) si s est de degré 0 (resp. 1). Elle possède aussi deux antiinvolutions, notées $'$ et $*$, définies par $'x = x$ et $x^* = -x$ si $x \in V$. On a évidemment $s^* = '\bar{s}$, $\forall s \in C(Q)$. On démontre (cf. [10]) que $C(V)$ est un k -espace vectoriel de dimension 2^n , n désignant la dimension de V . De manière plus précise, si $e_1, \dots, e_n$ est une base de V , les produits $e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_p}$, $i_1 < i_2 < \dots < i_p$, ainsi que 1, forment une base de $C(V)$.

Soit V un k -espace vectoriel de dimension finie et soit $\varphi: V \times V \rightarrow k$ une application bilinéaire non dégénérée. Sur $\tilde{V} = V \oplus V$, la forme quadratique $\tilde{Q}$ définie par $\tilde{Q}(\tilde{v}) = \varphi(v_1, v_2)$ pour $\tilde{v} = (v_1, v_2)$ est neutre [cf. [10]]. Désignons par $\Lambda V = \bigoplus \Lambda^n V$ l'algèbre extérieure de V et, pour $v \in V$, notons d_v l'endomorphisme (d'espace vectoriel) de ΛV défini par la multiplication extérieure à gauche par v . Soit δ_v l'adjoint à droite de d_v pour la forme bilinéaire φ . La proposition suivante et son corollaire sont bien connus [10].

PROPOSITION (1.1.2). — L'application $\alpha: \tilde{V} \rightarrow \text{End } \Lambda V$, définie par $\alpha(\tilde{v}) = d_{v_1} + \delta_{v_2}$ pour $\tilde{v} = (v_1, v_2)$, vérifie la relation $(\alpha(\tilde{v}))^2 = \tilde{Q}(\tilde{v}) \cdot 1$. Elle induit un isomorphisme $\tilde{\alpha}$ de $C(\tilde{V}, \tilde{Q})$ sur l'algèbre $\text{End } \Lambda V$ [munie de la graduation induite par celle de $\Lambda V = C(V, 0)$].

COROLLAIRE (1.1.3). — Soit Q une forme quadratique non dégénérée sur un k -espace vectoriel de dimension finie V . Alors, si la dimension de V est paire (resp. impaire), l'algèbre $C(V, Q)$ [resp. $C^0(V, Q)$] est centrale simple.

Remarques. — Les seuls idéaux gradués de $C(Q)$ sont donc, dans tous les cas, 0 et $C(Q)$. De plus, les seuls éléments de $C^0(Q)$ qui commutent à tous les éléments de $C(Q)$ sont les scalaires.

Dans les considérations suivantes Q désignera toujours une forme quadratique non dégénérée.

DÉFINITION (1.1.4). — *Le groupe de Clifford $\Gamma(Q)$ [resp. le groupe de Clifford tordu $\tilde{\Gamma}(Q)$, le groupe de Clifford spécial $\Gamma^0(Q)$] est le groupe multiplicatif des éléments inversibles s de $C(Q)$ [resp. $C(Q)$, $C^0(Q)$] tels que $sVs^{-1} = V$ (resp. $\bar{s}Vs^{-1} = V$).*

PROPOSITION (1.1.5). — *Posons, pour $s \in \tilde{\Gamma}(Q)$ et $x \in V$, $\tilde{\rho}(s).x = \bar{s}xs^{-1}$ et supposons la caractéristique de k différente de 2. L'homomorphisme $\tilde{\rho}$ est alors un homomorphisme de $\tilde{\Gamma}(Q)$ dans le groupe orthogonal $O(Q)$ et on a la suite exacte :*

$$(1.1.6) \quad 1 \rightarrow k^* \rightarrow \tilde{\Gamma}(Q) \rightarrow O(Q) \rightarrow 1.$$

Démonstration. — Montrons d'abord que le noyau de $\tilde{\rho}$ est réduit à k^* . Soit $\{e_i\}$ une base orthogonale de V pour la forme quadratique Q formée de vecteurs non singuliers. Soit $x \in \text{Ker } \tilde{\rho}$ et soit $x = x^0 + x^1$ la décomposition de x en éléments homogènes. Alors, $\forall y \in V$, $x^0y = yx^0$, $x^1y = -yx^1$. Écrivons $x^0 = a_i^0 + e_ib_i^1$, où a_i^0 (resp. b_i^1) est de degré 0 (resp. 1) et en contient pas e_i . On a alors, pour $y = e_i$,

$$a_i^0 + e_ib_i^1 = e_i(a_i^0 + e_ib_i^1)e_i^{-1} = a_i^0 - e_ib_i^1.$$

Donc $b_i^1 = 0 \forall i$ et x^0 est un scalaire réel. De même, en écrivant $x^1 = a_i^1 + e_ib_i^0$, on a

$$a_i^1 + e_ib_i^0 = -e_i(a_i^1 + e_ib_i^0)e_i^{-1} = a_i^1 - e_ib_i^1.$$

Donc $b_i^0 = 0 \forall i$ et $x^1 = 0$ puisque x^1 est de degré 1. Par suite, $x = x^0$ est un scalaire inversible.

D'autre part, si ν est un vecteur non singulier, on voit aisément que $\tilde{\rho}(\nu)$ est la symétrie par rapport à l'hyperplan orthogonal à ν . Puisque tout élément de $O(Q)$ est engendré par le produit de telles symétries [10], on a $\tilde{\rho}(\tilde{\Gamma}(Q)) \supset O(Q)$. Pour démontrer que $\tilde{\rho}(\tilde{\Gamma}(Q)) \subset O(Q)$ introduisons la norme spinorielle $N : C(Q) \rightarrow C(Q)$ définie par $N(s) = s^*s$. Alors, d'après le lemme (1.1.7), $N(s)$ est un scalaire si $s \in \tilde{\Gamma}(Q)$ et N définit un homomorphisme de $\tilde{\Gamma}(Q)$ dans le groupe multiplicatif k^* . De plus, $N(s) = -Q(s)$ si $s \in V$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \forall y \in V, \quad N(\tilde{\rho}(s).y) &= N(\bar{s}ys^{-1}) = N(\bar{s})N(y)N(s^{-1}) \\ &= \overline{N(s)}(N(s))^{-1}N(y) = N(s)(N(s))^{-1}N(y) = N(y). \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

Remarque 1. — Le raisonnement précédent montre que $\tilde{\Gamma}(Q)$ est formé d'éléments homogènes et qu'on a aussi la suite exacte

$$(1.1.6 \text{ bis}) \quad 1 \rightarrow k^* \rightarrow \Gamma^0(Q) \rightarrow SO(Q) \rightarrow 1.$$

Remarque 2. — La définition du groupe de Clifford tordu et la proposition ci-dessus sont dues essentiellement à Atiyah, Bott et Shapiro [6].

Il nous reste à démontrer le lemme :

LEMME (1.1.7). — *Quels que soient les éléments s et s' de $\tilde{\Gamma}(Q)$ $N(s)$ et $N(s')$ sont des scalaires et $N(ss') = N(s) N(s')$.*

Démonstration. — Montrons que $N(s) \in \text{Ker } \tilde{\rho}$ pour $s \in \tilde{\Gamma}(Q)$. En effet, $\forall x \in V$, on a

$${}^t(\bar{s} x s^{-1}) = \bar{s} x s^{-1};$$

soit, en développant,

$$x = {}^t s \cdot \bar{s} x s^{-1} {}^t s^{-1} = \overline{N(s)} x (N(s))^{-1}.$$

D'autre part,

$$N(ss') = (ss')^* (ss') = s'^* (s^* s) s' = N(s) N(s')$$

puisque $s^* s$ est un scalaire.

PROPOSITION (1.1.8). — *Posons, pour $s \in \Gamma(Q)$ et $x \in V$, $\rho(s) \cdot x = s x s^{-1}$.*

a. *L'application ρ est un homomorphisme de $\Gamma(Q)$ dans le groupe orthogonal $O(Q)$ et son noyau est l'ensemble des éléments inversibles du centre Z de $C(Q)$.*

b. *Si la dimension de V est paire (resp. impaire) on a*

$$\rho(\Gamma(Q)) = O(Q) \quad [\text{resp. } \rho(\Gamma(Q)) = SO(Q)].$$

Démonstration. — C'est une conséquence directe de la proposition précédente si la caractéristique de k est différente de 2. Dans le cas général, voir [10].

Introduisons maintenant une définition qui nous sera utile plus loin.

DÉFINITION (1.1.9). — *Soient A et B deux k -algèbres graduées et $\varphi : A \rightarrow B$ une application k -linéaire de degré 0. On dit que φ est un homomorphisme gauche si, quels que soient les éléments x et y de A de degrés respectifs $\omega(x)$ et $\omega(y)$, on a la relation*

$$(1.1.10) \quad \varphi(xy) = (-1)^{\omega(x)\omega(y)} \varphi(x) \varphi(y).$$

Le composé de deux homomorphismes gauches est évidemment un homomorphisme au sens ordinaire. On définit ainsi une catégorie dont les objets sont les k -algèbres graduées et dont les morphismes sont les homomorphismes au sens ordinaire ainsi que les homomorphismes gauches. Dans cette catégorie deux objets A et B sont dits *gauchement isomorphes* s'il existe un isomorphisme gauche de A sur B .

LEMME (1.1.11). — *Soient V un k -module, A une k -algèbre graduée et $l : V \rightarrow A$ un homomorphisme k -linéaire tel que, $\forall x \in V$, $\omega(l(x)) = 1$.*

Il existe alors un homomorphisme gauche de k -algèbres graduées $l : T(V) \rightarrow A$, et un seul, tel que $l_r = l$ [comme il est d'usage on identifie V à un sous-module de l'algèbre tensorielle $T(V)$].

Démonstration. — L'unicité est évidente puisque l'algèbre $T(V)$ est engendrée par les éléments de V . Soit $x = x_1 \otimes \dots \otimes x_n$ un élément décomposable de $T^n(V)$. Pour cet élément posons

$$\tilde{l}(x) = (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} l(x_1) \dots l(x_n)$$

$\left[\frac{n}{2}\right]$ désignant la partie entière de $\frac{n}{2}$ et prolongeons $\tilde{l}$ à $T^n(V)$ par linéarité, ceci pour tout n . Alors l'application $\tilde{l}$ est un homomorphisme gauche en raison de la relation suivante facile à vérifier :

$$\left[\frac{n+p}{2}\right] - \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{p}{2}\right] \equiv np \pmod{2}.$$

C. Q. F. D.

Avec les hypothèses du lemme, supposons V muni d'une forme quadratique Q et que, $\forall x \in V$, l'homomorphisme l satisfasse à la relation $(l(x))^2 = -Q(x)$. Alors $\tilde{l}$ définit par passage au quotient un homomorphisme gauche $\tilde{l} : C(Q) \rightarrow A$: c'est le seul vérifiant la relation $\tilde{l}(i_Q(x)) = l(x)$, $\forall x \in V$. Par exemple, si $A = C(V, -Q)$ et $l = i_{-Q}$, les conditions précédentes sont réalisées et $\theta = \tilde{l}_{-Q}$ est un homomorphisme gauche de $C(Q)$ sur $C(-Q)$.

PROPOSITION (1.1.12). — L'homomorphisme θ défini ci-dessus est un isomorphisme gauche de $C(Q)$ sur $C(-Q)$. En particulier, θ induit un isomorphisme au sens ordinaire de $C^0(Q)$ sur $C^0(-Q)$.

En effet, l'inverse de θ s'obtient en remplaçant Q par $-Q$ dans les raisonnements précédents.

COROLLAIRE (1.1.13). — L'homomorphisme θ induit une bijection de $\tilde{\Gamma}(Q)$ sur $\tilde{\Gamma}(-Q)$ [resp. de $\Gamma(Q)$ sur $\Gamma(-Q)$ si la dimension de V est paire] compatible avec les projections $\tilde{\rho}$ (resp. ρ). En particulier, θ induit un isomorphisme des groupes $\Gamma^0(Q)$ et $\Gamma^0(-Q)$.

Démonstration. — Lorsque la caractéristique de k est égale à 2, θ est l'identité et l'assertion est triviale. Supposons donc la caractéristique différente de 2 et considérons un élément s de $\tilde{\Gamma}(Q)$. Alors $\theta(s)$ est inversible, car s est homogène. D'autre part, si $x \in V$, on a la relation $ys = \bar{s}x$ avec $y = \bar{s}xs^{-1} \in V$. En décomposant s en éléments homogènes on en déduit la relation

$$\theta(y) \theta(s) = \theta(\bar{s}) \theta(x) = \overline{\theta(s)} \theta(x).$$

Donc $\theta(s) \in \tilde{\Gamma}(-Q)$. On démontre de même que $\theta(s) \in \Gamma(-Q)$ si $s \in \Gamma(Q)$ et si la dimension de V est paire.

Remarque. — Les groupes $\tilde{\Gamma}(Q)$ et $\tilde{\Gamma}(-Q)$ ne sont pas isomorphes en général [cf. prop. (1.1.26)].

PROPOSITION (1.1.14). — *Supposons qu'il existe un élément ε de $C(Q)$ de degré 0 et de carré 1 tel que, $\forall x \in V$, $\varepsilon x = -x\varepsilon$ (une telle algèbre est dite positive). L'application χ de V dans $C(Q)$ définie par $\chi(x) = \varepsilon x$ vérifie la relation $(\chi(x))^2 = -Q(x) \cdot 1$ et induit donc un automorphisme gauche de $C(Q)$ noté encore χ . Par suite, θ_χ est un isomorphisme (au sens ordinaire) de $C(Q)$ sur $C(-Q)$. De plus, si la dimension de V est paire, θ_χ induit un isomorphisme de $\tilde{\Gamma}(Q)$ sur $\Gamma(-Q)$ compatible avec les projections sur $O(Q) = O(-Q)$.*

Démonstration. — L'application χ est définie par

$$\chi(s) = s \quad [\text{resp. } \chi(s) = \varepsilon s] \quad \text{si } \omega(s) = 0 \quad [\text{resp. } \omega(s) = 1].$$

Donc, si $s \in \Gamma^0(Q)$, $\chi(s) = s \in \Gamma^0(Q)$. Soit maintenant

$$s \in \tilde{\Gamma}(Q) \cap C^1(Q); \quad \text{alors } \chi(s)x(\chi(s))^{-1} = -sxs^{-1} = \bar{s}xs^{-1},$$

d'où le résultat annoncé en composant avec l'isomorphisme gauche θ .

PROPOSITION (1.1.15). — *Supposons qu'il existe un élément η de $C(Q)$ de degré 0 et de carré -1 tel que, $\forall x \in V$, $\eta x = -x\eta$ (une telle algèbre est dite négative). L'application ξ de V dans $C(Q)$ définie par $\xi(x) = \eta x$ vérifie alors la relation $(\xi(x))^2 = Q(x) \cdot 1$. Elle définit donc un automorphisme de $C(Q)$ noté encore ξ . Si la dimension de V est paire, cet automorphisme induit un isomorphisme des groupes $\tilde{\Gamma}(Q)$ et $\Gamma(Q)$ compatible avec les projections sur $O(Q)$.*

Démonstration. — Elle est analogue à la précédente.

Nous nous intéressons surtout au cas où $k = \mathbf{R}$, $V = \mathbf{R}^{p+q}$, la forme quadratique Q étant définie par la formule

$$Q(x_1, \dots, x_{p+q}) = -x_1^2 - \dots - x_p^2 + x_{p+1}^2 + \dots + x_{p+q}^2.$$

Les objets $C(Q)$, $O(Q)$, $SO(Q)$, $\tilde{\Gamma}(Q)$, $\Gamma(Q)$, $\Gamma^0(Q)$ seront désignés respectivement par $C^{p,q}$, $O(p, q)$, $SO(p, q)$, $\tilde{\Gamma}(p, q)$, $\Gamma(p, q)$, $\Gamma^0(p, q)$. Remarquons qu'il existe une base orthogonale de $\mathbf{R}^{p+q}$, à savoir la base canonique $\{e_i\}$, telle que $(e_i)^2 = -1$ pour $i \leq p$ et $(e_i)^2 = +1$ pour $i > p$. Par définition, le groupe pinoriel tordu $Pin(p, q)$ [resp. le groupe spinoriel $Spin(p, q)$] est le sous-groupe de $\tilde{\Gamma}(p, q)$ [resp. $\Gamma^0(p, q)$] formé des éléments s tels

que $|N(s)| = 1$. Les suites (1.1.5) et (1.1.6) impliquent les suites exactes :

$$(1.1.16) \quad 1 \rightarrow Z_2 \rightarrow \text{Pin}(p, q) \rightarrow O(p, q) \rightarrow 1;$$

$$(1.1.17) \quad 1 \rightarrow Z_2 \rightarrow \text{Spin}(p, q) \rightarrow SO(p, q) \rightarrow 1.$$

Nous nous proposons de déterminer maintenant les algèbres graduées $C^{p,q}$. Pour cela on aura besoin de deux lemmes faciles que nous laissons en exercice au lecteur.

LEMME (1.1.18). — Soient V et W deux k -espaces vectoriels Z_2 -gradués de dimension finie. Alors l'application

$$u : \text{End } V \hat{\otimes} \text{End } W \rightarrow \text{End } V \hat{\otimes} W$$

définie par $u(\alpha \otimes \beta)(x \otimes y) = (-1)^{\omega(\beta)\omega(x)} \alpha x \otimes \beta y$, est un isomorphisme d'algèbres graduées. En particulier, les algèbres Z_2 -graduées $k(n) \hat{\otimes} k(p)$ et $k(np)$ sont isomorphes ⁽³⁾.

LEMME (1.1.19). — Soit A une algèbre Z_2 -graduée et soit V un k -espace vectoriel Z_2 -gradué. Alors l'application

$$v : (\text{End } V) \hat{\otimes} A \rightarrow \text{End}_A(V \hat{\otimes} A)$$

définie par

$$v(\alpha \otimes a)(x \otimes b) = (-1)^{\omega(a)\omega(x)} \alpha x \otimes ab,$$

est un isomorphisme. En particulier, les algèbres Z_2 -graduées $k(n) \hat{\otimes} A$ et $A(n)$ sont isomorphes.

La « périodicité » des algèbres de Clifford résulte maintenant des observations élémentaires suivantes. Dans l'algèbre $C^{4,0}$ l'élément $e_1 e_2 e_3 e_4$ est de carré 1 et de degré 0 et anticommute aux vecteurs de $\mathbf{R}^4$. D'après la proposition (1.1.14), les algèbres graduées $C^{4,0}$ et $C^{0,4}$ sont isomorphes. Par conséquent,

$$C^{8,0} \approx C^{4,0} \hat{\otimes} C^{4,0} \approx C^{4,0} \hat{\otimes} C^{0,4} \approx C^{4,4} \quad [\text{prop. (1.1.1)}].$$

Mais, d'après la proposition (1.1.2), l'algèbre $C^{n,n}$ est isomorphe à l'algèbre des endomorphismes de l'algèbre extérieure $\Lambda(\mathbf{R}^n)$ car la forme quadratique qui donne naissance à $C^{n,n}$ est neutre. Donc $C^{8,0} \approx C^{4,4} = \mathbf{R}(16)$. On démontre de même que $C^{0,8} \approx \mathbf{R}(16)$. Il en résulte que

$$C^{p+8,q} \approx C^{p,q} \hat{\otimes} C^{8,0} \approx C^{p,q}(16),$$

⁽³⁾ Si $A = A_0 \oplus A_1$ est une algèbre Z_2 -graduée, on convient de graduer le A -module A^n [donc l'algèbre $A(n)$ des matrices $n \times n$ à coefficients dans A] en posant

$$\begin{aligned} (A^n)_0 &= A_0 \oplus A_1 \oplus A_0 \oplus \dots (n \text{ facteurs}), \\ (A^n)_1 &= A_1 \oplus A_0 \oplus A_1 \oplus \dots (\quad \quad). \end{aligned}$$

Pour $A = k$ on conviendra que $A_1 = 0$.

et que, de même, $C^{p,q+8} \approx C^{p,q}$ (16). En complexifiant les algèbres $C^{p,q}$, on a un résultat plus simple, compte tenu que les algèbres $C^{1,0} \otimes \mathbf{C}$ et $C^{0,1} \otimes \mathbf{C}$ sont trivialement isomorphes. En résumé :

PROPOSITION (1.1.20). — *Les algèbres de Clifford $C^{p,q}$ vérifient les relations suivantes :*

$$\begin{aligned} C^{p+1,q+1} &\approx C^{p,q} \hat{\otimes} C^{1,1} \approx C^{p,q} (2), \\ C^{p+4,q} &\approx C^{p,q+4}, \\ C^{p+8,q} &\approx C^{p,q+8} \approx C^{p,q} (16), \\ C^{p+1,q} \otimes \mathbf{C} &\approx C^{p,q+1} \otimes \mathbf{C}, \\ C^{p+2,q} \otimes \mathbf{C} &\approx C^{p,q+2} \otimes C \approx C^{p,q} (2) \otimes \mathbf{C}. \end{aligned}$$

La proposition montre qu'il suffit de déterminer les algèbres $C^{n,0}$ et $C^{0,n}$ pour $n < 8$ ($n < 2$ si l'on s'intéresse aux algèbres complexifiées). Ce calcul a été effectué par Atiyah, Bott et Shapiro [6]. On trouve ainsi la table suivante d'algèbres (non graduées) :

n .	$C^{n,0}$.	$C^{0,n}$.	$C^{n,0} \otimes \mathbf{C} \approx C^{0,n} \otimes \mathbf{C}$.
0.....	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{C}$
1.....	$\mathbf{C}$	$\mathbf{R} \oplus \mathbf{R}$	$\mathbf{C} \oplus \mathbf{C}$
2.....	$\mathbf{H}$	$\mathbf{R} (2)$	$\mathbf{C} (2)$
3.....	$\mathbf{H} \oplus \mathbf{H}$	$\mathbf{C} (2)$	$\mathbf{C} (2) \oplus \mathbf{C} (2)$
4.....	$\mathbf{H} (2)$	$\mathbf{H} (2)$	$\mathbf{C} (4)$
5.....	$\mathbf{C} (4)$	$\mathbf{H} (2) \oplus \mathbf{H} (2)$	$\mathbf{C} (4) \oplus \mathbf{C} (4)$
6.....	$\mathbf{R} (8)$	$\mathbf{H} (4)$	$\mathbf{C} (8)$
7.....	$\mathbf{R} (8) \oplus \mathbf{R} (8)$	$\mathbf{C} (8)$	$\mathbf{C} (8) \oplus \mathbf{C} (8)$

Cette table nous permet de voir en particulier que, pour $p+q$ impair, le centre des algèbres $C^{p,q}$ est $\mathbf{C}$ si $p-q \equiv 1 \pmod{4}$ (resp. $\mathbf{R} \oplus \mathbf{R}$ si $p-q \equiv -1 \pmod{4}$). D'après la proposition (1.1.8), on a donc la suite exacte :

$$(1.1.21) \quad 1 \rightarrow \mathbf{C}^* \rightarrow \Gamma(p, q) \rightarrow SO(p, q) \rightarrow 1$$

[resp.

$$(1.1.22) \quad 1 \rightarrow \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}^* \rightarrow \Gamma(p, q) \rightarrow SO(p, q) \rightarrow 1].$$

D'autre part, pour $p+q$ pair, on a la suite exacte :

$$(1.1.23) \quad 1 \rightarrow \mathbf{R}^* \rightarrow \Gamma(p, q) \rightarrow O(p, q) \rightarrow 1.$$

Soit maintenant V un fibré vectoriel réel de dimension finie de base un espace paracompact X , muni d'une forme quadratique non dégénérée Q [i. e. de groupe structural $O(p, q)$]. Alors V peut s'écrire comme une somme directe $V^- \oplus V^+$ de deux sous-fibrés, la forme quadratique Q étant définie positive (resp. négative) sur V^+ (resp. V^-) ⁽⁴⁾.

⁽⁴⁾ Ceci résulte par exemple du fait que $O(p) \times O(q)$ est rétracte par déformation de $O(p, q)$ (cf. HELGASON, *Differential geometry and symmetric spaces*, p. 344).

DÉFINITION (1.1.24). — Le fibré V est dit spinoriel (resp. pinoriel, resp. cliffordien) si l'on s'est donné un fibré principal P de groupe $Spin(p, q)$ [resp. $Pin(p, q)$, resp. $\Gamma(p, q)$] tel que $V \approx P \times_{Spin(p, q)} \mathbf{R}^{p+q}$ [resp. $V \approx P \times_{Pin(p, q)} \mathbf{R}^{p+q}$, resp. $V \approx P \times_{\Gamma(p, q)} \mathbf{R}^{p+q}$].

Avant de donner des exemples de fibrés spinoriels, pinoriels ou cliffordiens, il est bon de chercher le groupe compact associé au groupe pinoriel. Remarquons pour cela que, pour $m' \geq m$ et $n' \geq n$, l'inclusion naturelle de $C^{m, n}$ dans $C^{m', n'}$ induit un monomorphisme de $Pin(m, n)$ dans $Pin(m', n')$. En particulier, $Pin(p, 0)$ et $Pin(0, q)$ peuvent être considérés comme des sous-groupes de $Pin(p, q)$. Considérons le groupe $Pin'(p, q) = Pin(p, 0) \times_z Pin(0, q)$, le produit étant défini par

$$(x, y) \cdot (x', y') = ((-1)^{\omega(x') \omega(y)} x x', y y').$$

Alors l'application $i : Pin'(p, q) \rightarrow Pin(p, q)$ définie par $i((x, y)) = xy$ est un homomorphisme et le diagramme suivant est commutatif :

$$(1.1.25) \quad \begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathbf{Z}_2 & \longrightarrow & Pin'(p, q) & \longrightarrow & O(p) \times O(q) \longrightarrow 1 \\ & & \parallel & & \downarrow i & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & \mathbf{Z}_2 & \longrightarrow & Pin(p, q) & \longrightarrow & O(p, q) \longrightarrow 1 \end{array}$$

En particulier i est une équivalence d'homotopie.

Un exemple intéressant de fibré spinoriel est le suivant. Considérons un fibré vectoriel réel W muni d'une forme quadratique Q définie positive et munissons $\tilde{W} = W \oplus W$ de la forme quadratique $Q \oplus (-Q)$. Alors le fibré $\tilde{W}$ a la structure spinorielle suivante. Il s'agit de relever dans $Spin(n, n)$ l'application $r : O(n) \rightarrow SO(n, n)$ définie par

$$r(M) = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}.$$

Soit $\tilde{M} \in Pin(n, 0)$ tel que $\tilde{p}(\tilde{M}) = M$. Alors $\tilde{M}$ est défini au signe près, mais $(\tilde{M}, \theta(\tilde{M})) \in Pin(n, 0) \times_z Pin(0, n) \subset Pin(n, n)$ est un élément bien déterminé de $Spin(n, n)$. L'homomorphisme $\tilde{r} : O(n) \rightarrow Spin(n, n)$ défini par $\tilde{r}(M) = (\tilde{M}, \theta(\tilde{M}))$ est alors le relèvement cherché.

On se propose de donner maintenant des conditions nécessaires et suffisantes pour que le groupe structural de V se réduise à $Spin(p, q)$, $Pin(p, q)$ ou $\Gamma(p, q)$. Cette discussion nous sera utile pour les considérations géométriques du chapitre III.

PROPOSITION (1.1.26). — Notons ω_i^+ (resp. ω_i^-) les classes de Stiefel-Whitney de V^+ (resp. V^-). Pour que le groupe structural de $V = V^- \oplus V^+$

se réduise à $Pin(p, q)$ [resp. $Spin(p, q)$] il faut et il suffit que

$$\omega_2^- + \omega_2^+ + (\omega_1^-)^2 + \omega_1^- \omega_1^+ = 0 \quad (\text{resp. } \omega_1^- + \omega_1^+ = \omega_2^- + \omega_2^+ = 0).$$

Démonstration. — Pour que le groupe structural de V se réduise à $Pin(p, q)$, il faut et il suffit que l'opérateur cobord

$$\partial : H^1(X, O(p) \times O(q)) \rightarrow H^2(X, Z_2)$$

associé à la suite exacte (1.1.25) s'annule sur la classe du fibré V dans

$$H^1(X, O(p) \times O(q)) \approx H^1(X, O(p, q)).$$

Comme l'algèbre de cohomologie $H^*(B_{O(n)}, Z_2)$ est engendré par les classes de Stiefel-Whitney universelles, on voit que $\partial(V)$ est de la forme

$$a\omega_2^- + b\omega_2^+ + c(\omega_1^-)^2 + d\omega_1^- \omega_1^+ + e(\omega_1^+)^2,$$

où a, b, c, d et e sont des constantes du corps Z_2 indépendantes du fibré V . Faisons d'abord $q = 0$; alors, compte tenu que l'opérateur cobord associé à la suite exacte (1.1.17) est $V^- \mapsto \omega_2^-$, on a $a = 1$. D'autre part, on voit immédiatement que $Pin(1, 0) = Z_4$ et que l'opérateur cobord de $H^n(X, Z_2)$ dans $H^{n+1}(X, Z_2)$ associé à la suite exacte :

$$0 \rightarrow Z_2 \rightarrow Z_4 \rightarrow Z_2 \rightarrow 0$$

est, pour $n = 1$, le cup-carré; donc $c = 1$ aussi. Faisons maintenant $p = 0$; alors, compte tenu que $Pin(0, 1) \approx Z_2 \oplus Z_2$ et que $Spin(q, 0)$ et $Spin(0, q)$ sont isomorphes au-dessus de $SO(q)$ par θ , un raisonnement analogue montre que $b = 1$ et $e = 0$. Il nous reste à déterminer d ; pour cela remarquons que si $d = 0$, le fibré $\tilde{W}$ considéré dans l'exemple cité plus haut ne serait pas spinoriel en général, car on aurait alors $\partial(\tilde{W}) = (\omega_1^-)^2$. Or ceci est contradictoire avec les calculs de cet exemple; donc $d = 1$. Ceci achève la démonstration de la proposition pour le groupe pinoriel. Pour le groupe spinoriel, il suffit de vérifier que l'homomorphisme naturel de $H^1(X, O(p, q))$ dans $H^1(X, Z_2)$ associé à la suite exacte :

$$1 \rightarrow SO(p, q) \rightarrow O(p, q) \rightarrow Z_2 \rightarrow 1$$

est $V \mapsto \omega_1^- + \omega_1^+$, ce qui est immédiat.

C. Q. F. D.

PROPOSITION (1.1.27). — *La table suivante donne, suivant la congruence de p et de $q \bmod 4$, les conditions nécessaires et suffisantes pour que le fibré V soit cliffordien (on remarquera que la condition $W_3^- + W_3^+ = 0$ équivaut au*

fait que $\omega_2^- + \omega_2^+$ provient d'une classe entière si $\omega_1^- + \omega_1^+ = 0$:

$q(+), p(-) \dots$	0.	1.	2.	3.
0.....	$w^- = 0$	$w_1^+ + w_1^- = 0$	$w^+ = 0$	$w_1^+ + w_1^- = 0$
		$W_3^+ + W_3^- = 0$		$w_2^+ + w_2^- = 0$
1.....	$w_1^+ + w_1^- = 0$	$w^- = 0$	$w_1^+ = w_1^- = 0$	$w^+ = 0$
	$w_2^+ + w_2^- = 0$		$W_3^+ + W_3^- = 0$	
2.....	$w^+ = 0$	$w_1^+ + w_1^- = 0$	$w^- = 0$	$w_1^+ + w_1^- = 0$
		$w_2^+ + w_2^- = 0$		$W_3^+ + W_3^- = 0$
3.....	$w_1^+ + w_1^- = 0$	$w^+ = 0$	$w_1^+ + w_1^- = 0$	$w^- = 0$
	$W_3^+ + W_3^- = 0$		$w_2^+ + w_2^- = 0$	

avec les notations suivantes :

$$\omega^+ = \omega_2^+ + \omega_2^- + (\omega_1^+)^2 + \omega_1^- \omega_2^+,$$

$$\omega^- = \omega_2^- + \omega_2^+ + (\omega_1^-)^2 + \omega_1^+ \omega_2^-.$$

Démonstration. — Pour $p + q$ impair, le fibré V est cliffordien seulement si le groupe structural se réduit à $SO(p, q)$, ce qui est exprimé par la condition $\omega_1^+ + \omega_1^- = 0$. La deuxième condition, variable suivant la congruence de $p - q \bmod 4$, est obtenue par la comparaison des opérateurs cobords associés aux deux suites exactes (1.1.21) et (1.1.22). Pour $p + q$ pair considérons l'élément $e_1 \dots e_{p+q}$. Alors, suivant la congruence de p et de $q \bmod 4$, cet élément est de degré 0, de carré $+1$ ou -1 et anticommute aux vecteurs de $\mathbf{R}^{p+q}$. Les propositions (1.1.14) et (1.1.15) donnent alors le résultat dans ce cas.

DÉFINITION (1.1.28). — Soit $\mathbf{U}(1)$ le groupe multiplicatif des nombres complexes de norme 1. On définit alors les groupes suivants au-dessus de $O(p, q)$:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}^U(p, q) &= \tilde{\Gamma}(p, q) \times_{\mathbf{Z}_2} \mathbf{U}(1), & \Gamma^U(p, q) &= \Gamma(p, q) \times_{\mathbf{Z}_2} \mathbf{U}(1), \\ Pin^U(p, q) &= Pin(p, q) \times_{\mathbf{Z}_2} \mathbf{U}(1), & Spin^U(p, q) &= Spin(p, q) \times_{\mathbf{Z}_2} \mathbf{U}(1). \end{aligned}$$

En fait, seul le cas où $p = 0$ nous intéressera par la suite. Il est bon de remarquer cependant que les groupes $Pin^U(p, 0)$ et $Pin^U(0, p)$ sont isomorphes au-dessus de $O(p)$. En effet, l'application

$$\alpha : Pin^U(p, 0) \rightarrow Pin^U(0, p)$$

définie par

$$\alpha(v, \lambda) = (\theta(v), i^{\omega(v)} \lambda)$$

est l'isomorphisme cherché. On montre de même que $\Gamma^U(p, 0)$ et $\Gamma^U(0, p)$ sont isomorphes si p est pair.

On dit que le fibré V est $^U spinoriel$ (resp. $^U pinoriel$, resp. $^U cliffordien$) si son groupe structural est $Spin^U(p, q)$ [resp. $Pin^U(p, q)$, resp. $\Gamma^U(p, q)$].

PROPOSITION (1.1.29). — Soit V un fibré vectoriel réel de dimension n muni d'une forme quadratique définie positive. Pour que le fibré V soit ${}^u\text{spinoriel}$ (resp. ${}^u\text{pinoriel}$; resp. ${}^u\text{cliffordien}$), il faut et il suffit que $\omega_1 = W_3 = 0$ (resp. $W_3 = 0$; resp. $W_3 = 0$ si n est pair, $\omega_1 = W_3 = 0$ si n est impair).

Démonstration. — Elle est analogue à celle de la proposition précédente.

1.2. Catégories de Banach.

Nous commencerons ce paragraphe par la définition suivante :

DÉFINITION (1.2.1). — Une catégorie additive $\mathcal{C}$ est dite pseudo-abélienne si tout projecteur d'un objet de $\mathcal{C}$ ⁽³⁾ admet un noyau.

Soient $\mathcal{C}$ une catégorie additive et $\mathcal{C}'$ la catégorie suivante : un objet de $\mathcal{C}'$ est un couple (E, p) , où E est un objet de $\mathcal{C}$ et où p est un projecteur de E ; un morphisme de $\mathcal{C}'$ de source (E, p) et de but (E', p') est un $\mathcal{C}$ -morphisme $f: E \rightarrow E'$ tel que $p' \cdot f = f \cdot p$. Deux morphismes tels, f et g , sont dits équivalents si $p' \cdot f = p' \cdot g$. Soit $\tilde{\mathcal{C}}$ la catégorie additive dont les objets sont les objets de $\mathcal{C}'$ et dont les morphismes sont les classes d'équivalence de morphismes de $\mathcal{C}'$. Alors $\mathcal{C}$ se plonge dans $\tilde{\mathcal{C}}$ par le foncteur pleinement fidèle i défini par $i(E) = (E, \text{Id}_E)$ et par $i(f) = f$ sur les objets E et les morphismes f de $\mathcal{C}$.

Notation. — Si f est un morphisme de $\tilde{\mathcal{C}}$, on désignera souvent par f' (ou f par abus de langage) un morphisme quelconque de $\mathcal{C}'$ de classe f .

LEMME ET DÉFINITION (1.2.2). — La catégorie $\tilde{\mathcal{C}}$ est pseudo-abélienne. C'est la catégorie pseudo-abélienne associée à $\mathcal{C}$.

Démonstration. — Soit (E, p) un objet de $\tilde{\mathcal{C}}$ et soit f un projecteur de cet objet. Alors $((E, p(1 - f')), 1 - f')$ est un noyau de f . En effet, si $g: (F, q) \rightarrow (E, p)$ est un morphisme tel que $f \cdot g = 0$, il existe un morphisme de (F, q) dans $(E, p(1 - f'))$ et un seul, à savoir g' , qui jouit des propriétés de commutativité usuelles.

DÉFINITION (1.2.3). — Soit $\mathcal{C}$ une catégorie additive et soit $k = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Une k -structure prébanachique sur $\mathcal{C}$ est la donnée, pour tout couple (M, N) d'objets de $\mathcal{C}$, d'une structure de k -espace de Banach sur l'ensemble $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)$ compatible avec sa structure de groupe abélien. De plus, l'application

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, P) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, P)$$

définie par la composition des morphismes, est bilinéaire et continue.

⁽³⁾ i. e. un endomorphisme idempotent.

Une *catégorie prébanachique* est une catégorie additive munie d'une structure prébanachique. Une *catégorie de Banach* est une catégorie prébanachique pseudo-abélienne. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie prébanachique, $\tilde{\mathcal{C}}$ est de manière évidente une catégorie de Banach.

Voici maintenant des exemples variés de catégories de Banach.

Exemple 1. — La « plus petite » des catégories de Banach, excepté la catégorie nulle, est évidemment celle des k -espaces vectoriels de dimension finie. Plus généralement, soit A une algèbre de Banach (sur k). La catégorie des A -modules libres de type fini est une catégorie prébanachique et la catégorie de Banach associée s'identifie (dans un sens précisé plus loin) à la catégorie $\mathcal{T}(A)$ des A -modules projectifs de type fini. Il est bien connu que si A est l'algèbre des fonctions numériques continues sur un compact X $\mathcal{T}(A)$ est équivalente à la catégorie $\mathcal{E}_k(X)$ des fibrés vectoriels de dimension finie sur X .

Exemple 2. — Soit G un groupe topologique opérant sur un espace compact X . Considérons la catégorie $\mathcal{E}_G(X)$ formée des fibrés vectoriels de dimension finie où G opère de manière compatible avec la projection sur X [8]. Si E et F sont de tels fibrés, $\text{Hom}_{\mathcal{E}_G(X)}(E, F)$ s'identifie à un sous-espace fermé de $\text{Hom}_{\mathcal{E}(X)}(E, F)$. Muni de la « topologie induite », la catégorie $\mathcal{E}_G(X)$ est donc une catégorie de Banach.

Exemple 3. — Soit V un objet de $\mathcal{E}(X)$ muni d'une forme quadratique non dégénérée Q et soit $C(V)$ le fibré en algèbres de Clifford associé à V . On désigne par $\mathcal{E}'(X)$ la catégorie formée des objets de $\mathcal{E}(X)$ où opère le fibré en algèbres $C(V)$. Comme dans l'exemple 2, on démontre que $\mathcal{E}'(X)$ est une catégorie de Banach.

Exemple 4. — Soit X un $\mathbb{Z}_2$ -espace compact. On désigne par $\mathcal{ER}(X)$ la catégorie de Banach *réelle* suivante : un objet de $\mathcal{ER}(X)$ est un couple (E, τ) où E est un fibré *complexe* de dimension finie sur X et où τ est une involution *antilinéaire* de E compatible avec l'action de $\mathbb{Z}_2$ sur la base. Un morphisme de $\mathcal{ER}(X)$ de source (E, τ) et de but (E', τ') est un $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}(X)$ -morphisme f de E dans E' tel que $f \cdot \tau = \tau' \cdot f$. Lorsque $\mathbb{Z}_2$ opère trivialement sur la base, cette catégorie est évidemment équivalente à $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}(X)$ (cf. [4]).

DÉFINITION (1.2.4). — Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories de Banach et $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur additif. Le foncteur φ est dit *linéaire continu* si l'application naturelle de $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)$ dans $\text{Hom}_{\mathcal{C}'}(\varphi M, \varphi N)$ est linéaire continue. Le foncteur φ est dit une *équivalence de catégories de Banach* s'il est pleinement fidèle, essentiellement surjectif et linéaire continu.

PROPOSITION (1.2.5). — *Pour que le foncteur φ soit une équivalence de catégories de Banach, il faut et il suffit qu'il existe un foncteur linéaire continu ψ tel que $\psi \cdot \varphi \approx \text{Id}_{\mathcal{C}}$ et que $\varphi \cdot \psi \approx \text{Id}_{\mathcal{C}'}$.*

Démonstration. — Comme l'application $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(\varphi M, \varphi N)$ est linéaire, continue et bijective, elle est bicontinue d'après le théorème de Banach. La suite de la démonstration est classique (cf. [14]).

Remarque. — Cette proposition montre en particulier que « l'équivalence » entre catégories de Banach est une relation d'équivalence.

DÉFINITION (1.2.6). — *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories additives et $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur additif. Le foncteur φ est dit quasi-surjectif si tout objet de $\mathcal{C}'$ est isomorphe à un facteur direct de l'image d'un objet de $\mathcal{C}$ par φ .*

PROPOSITION ET DÉFINITION (1.2.7). — *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories de Banach et $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur linéaire continu. Le foncteur φ est dit foncteur de Serre s'il satisfait aux conditions équivalentes suivantes :*

- (i) $\forall M \in \text{Ob } \mathcal{C}$, l'application naturelle
 $A_M : \text{Aut}_{\mathcal{C}} M \rightarrow \text{Aut}_{\mathcal{C}'} \varphi M$ est une fibration de Serre.
- (ii) $\forall M \in \text{Ob } \mathcal{C}$, l'application naturelle
 $E_M : \text{End}_{\mathcal{C}} M \rightarrow \text{End}_{\mathcal{C}'}(\varphi M)$ est surjective.
- (iii) $\forall M, N \in \text{Ob } \mathcal{C}$, l'application naturelle
 $E_{M,N} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(\varphi M, \varphi N)$ est surjective.
- (iv) $\forall M \in \text{Ob } \mathcal{C}$, A_M est une fibration localement triviale.

Démonstration :

(i) $\Rightarrow$ (ii). Puisque A_M est une fibration de Serre, A_M va induire une application surjective de $(\text{Aut } M)^0$ sur $(\text{Aut } \varphi M)^0$ (0 désignant les composantes neutres). Comme $(\text{Aut } \varphi M)^0$ est un voisinage ouvert de l'unité, il existe un sous-ensemble A de $\text{End } M$ tel que $E_M(A)$ soit une boule ouverte de centre l'origine; d'où (ii) par homothétie.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii). Évident (considérer la somme directe $M \oplus N$).

(ii) $\Rightarrow$ (iv). Si E_M est surjective, E_M est une application ouverte d'après le théorème de Banach. D'après un théorème bien connu de Michael [20], un tel homomorphisme A_M est donc une fibration localement triviale.

(iv) $\Rightarrow$ (i). C'est le théorème de relèvement des homotopies pour les fibrés localement triviaux.

Soient X un espace et $\mathcal{C}$ une catégorie de Banach. On désigne par $\mathcal{C}_T(X)$ la catégorie suivante : un objet de $\mathcal{C}_T(X)$ est un objet de $\mathcal{C}$; un morphisme de $\mathcal{C}_T(X)$ de source M et de but N est une famille f_x , $x \in X$, de morphismes

de M dans N paramétrée par X , telle que l'application $x \mapsto f_x$ de X dans $\text{Hom}_c(M, N)$ soit continue. Si l'on munit

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}_T(X)}(M, N) = F(X, \text{Hom}(M, N))$$

de la topologie de la norme, la catégorie $\mathcal{C}_T(X)$ est une catégorie prébanachique qui n'est pas de Banach en général. On désigne par $\mathcal{C}(X) = \widehat{\mathcal{C}_T(X)}$ la catégorie de Banach associée. Un objet de $\mathcal{C}_T(X)$ [resp. $\mathcal{C}(X)$] est dit $\mathcal{C}$ -fibré trivial (resp. $\mathcal{C}$ -fibré localement trivial). Nous verrons dans les pages suivantes la justification de cette terminologie.

Si $f : Y \rightarrow X$ est une application continue, on a des foncteurs « image inverse » $f_T^* : \mathcal{C}_T(X) \rightarrow \mathcal{C}_T(Y)$ et $f^* : \mathcal{C}(X) \rightarrow \mathcal{C}(Y)$. Bornons-nous à définir f^* . Soit (M, p) un fibré localement trivial; on a alors

$$f^*((M, p)) = (M, q) \quad \text{avec} \quad q_Y = p_{f(Y)}.$$

Si $\alpha : (M, p_1) \rightarrow (N, p_2)$ est un morphisme de $\mathcal{C}(X)$, on définit $f^*(\alpha)$ au point y comme étant α au point $f(y)$. On vérifie aisément les relations

$$(f \cdot g)^* = g^* \cdot f^* \quad \text{et} \quad f^* = \text{Id} \quad \text{si} \quad f = \text{Id}.$$

En particulier, si Y est un sous-ensemble fermé de X et si f est l'inclusion canonique, la « restriction » de $E = (M, p)$ à Y sera par définition $E_Y = f^*(E)$.

Soient $E = (M, p)$ et $G = (N, q)$ deux $\mathcal{C}$ -fibrés localement triviaux de base compacte X et Y respectivement et soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue. Un f -morphisme de E dans G est, par définition, la donnée; pour chaque point x de X , de morphismes $g_x : E_x \rightarrow G_{f(x)}$ induisant un morphisme de E dans f^*G . Soit $\mathcal{HOM}(E, G)$ l'ensemble des f -morphismes de E dans G , f variant dans $F(X, Y)$. Alors $\mathcal{HOM}(E, G)$ peut être muni de la topologie induite par $F(X, Y) \times F(X, \text{Hom}(M, N))$ de manière évidente. Si $E = G$, on désigne par $\mathcal{ENOE}$ l'ensemble $\mathcal{HOM}(E, E)$, par $\mathcal{AUOE}$ le sous-ensemble de $\mathcal{ENOE}$ formé des morphismes g tels que g_x soit un isomorphisme quel que soit x .

PROPOSITION (1.2.8). — *Soit E un $\mathcal{C}$ -fibré localement trivial de base (compacte) X ; $\forall x_0 \in X$, il existe alors un voisinage fermé U de x_0 tel que la restriction de E à U soit isomorphe à un fibré trivial.*

Démonstration. — Posons

$$E = (M, p) \quad \text{et} \quad N = \text{Ker}(1 - p_{x_0}) = \text{Im } p_{x_0}.$$

Le morphisme f de (M, p) dans (M, p_{x_0}) défini par

$$f_x = 1 - p_x - p_{x_0} + 2p_{x_0}p_x$$

est égal à l'identité pour $x = x_0$. Puisque $\text{Aut } M$ est un sous-ensemble ouvert de $\text{End } M$, il existe un voisinage fermé U de x_0 tel que la restriction de f à U soit un isomorphisme. On a donc

$$E|_U \approx (M, p_{x_0}) \approx (\text{Ker}(1 - p_{x_0}), \text{Id}).$$

C. Q. F. D.

DÉFINITION (1.2.9). — Soient $E = (M, p)$ et $F = (N, q)$ deux $\mathcal{C}$ -fibrés localement triviaux de base X . On désigne par $\text{HOM}(E, F)$ le fibré banachique dont la fibre au-dessus de $x \in X$ est l'espace de Banach $\text{Hom}(E_x, F_x)$: c'est l'image du projecteur $r : X \times \text{Hom}(M, N) \rightarrow X \times \text{Hom}(M, N)$ défini par $r(x, f) = (x, q.f.p)$. Si $E = F$, on désigne par ENDE le fibré $\text{HOM}(E, E)$.

DÉFINITION (1.2.10). — Fixons un objet M de $\mathcal{C}$. Soit A l'algèbre de Banach $\text{End } M$ et soit $E = (M^n, p)$ un $\mathcal{C}$ -fibré localement trivial. Le fibré principal en A -modules (à droite) $\tilde{E}$ associé à E est le fibré banachique image du projecteur $s : X \times A^n \rightarrow X \times A^n$ défini par $s(x, f) = (x, \bar{p}_x.f)$, où $\bar{p}_x$ désigne la matrice du projecteur p_x .

Soient $E = (M^n, p)$, $F = (M^m, q)$ et $\alpha : E \rightarrow F$ un $\mathcal{C}(X)$ -morphisme. Alors α induit un homomorphisme $\tilde{\alpha} : \tilde{E} \rightarrow \tilde{F}$ par la formule

$$\tilde{\alpha}(x, f) = (x, \alpha'.f).$$

PROPOSITION (1.2.11). — La correspondance $E \mapsto \tilde{E}$, $\alpha \mapsto \tilde{\alpha}$ est fonctorielle et induit une équivalence de la sous-catégorie de Banach pleine $\mathcal{C}_M(X)$ de $\mathcal{C}(X)$ formée des objets d'écrivant (M^n, p) sur la catégorie des fibrés banachiques en A -modules facteurs directs de $X \times A^n$. En particulier, les fibrés E et F sont isomorphes si et seulement si $\tilde{E}$ et $\tilde{F}$ le sont.

Démonstration. — Directe.

Remarque. — La proposition précédente nous permet, en de nombreuses circonstances, de supposer que les objets de $\mathcal{C}$ sont des espaces de Banach par la correspondance $\mathcal{C}$ -fibré $\leftrightarrow$ fibré principal associé. Nous supposons souvent de manière implicite qu'il en est ainsi de manière à alléger certains raisonnements.

DÉFINITION (1.2.12). — Soit X un espace compact. Une famille continue $\mathcal{C}$ de catégories de Banach sur X est la donnée, pour tout sous-espace fermé U de X , d'une catégorie de Banach $\mathcal{C}(U)$ ainsi que de foncteurs linéaires continus (dits de restriction) $\rho^{T,U} : \mathcal{C}(U) \rightarrow \mathcal{C}(T)$ pour tout sous-espace fermé T de U . Cette donnée est astreinte aux conditions suivantes :

(a) On a les relations

$$\rho^{S,T} \rho^{T,U} = \rho^{S,U} \quad \text{et} \quad \rho^{U,U} = \text{Id}$$

pour tout triple $S \subset T \subset U$.

(b) (Recollement des morphismes) : Soit Y un sous-ensemble fermé de X et soit $[U_i]$ ($i = 1, \dots, n$) un recouvrement fermé fini de Y . Soient $E, F \in \text{Ob } \mathcal{C}(Y)$ et soient $f_i : E|_{U_i} \rightarrow F|_{U_i}$ des morphismes tels que $f_{ij} = f_j$ (avec $f_{ij} = f_i|_{U_i \cap U_j}$). Il existe alors un morphisme $f : E \rightarrow F$, et un seul, tel que $f|_{U_i} = f_i$.

(c) (Recollement des objets) : Reprenons les notations de l'axiome (b). Soit E_i un objet de $\mathcal{C}(U_i)$ et soient $g_{ji} : E_i|_{U_i \cap U_j} \rightarrow E_j|_{U_i \cap U_j}$ des isomorphismes satisfaisant à la condition de transitivité $g_{kj}g_{ji} = g_{ki}$ au-dessus de $U_i \cap U_j \cap U_k$. Il existe alors un objet E de $\mathcal{C}(Y)$ et des isomorphismes $g_i : E|_{U_i} \rightarrow E_i$ tels que $g_{ji} = (g_j \cdot g_i^{-1})|_{U_i \cap U_j}$.

(d) Les foncteurs restriction $\rho^{T,U}$ sont des foncteurs de Serre quasi-surjectifs.

PROPOSITION (1.2.13). — Soient X un espace compact et $\mathcal{C}$ une catégorie de Banach. La correspondance $U \mapsto \mathcal{C}(U)$, les foncteurs restriction $\rho^{T,U}$ étant évidents, définit une famille continue de catégories de Banach sur X .

Démonstration. — La vérification de (a) est triviale. Dans l'énoncé de l'axiome (b), posons $E = (M, p)$, $F = (N, q)$ et notons f'_i des morphismes de $(\mathcal{C}(U_i))'$ de classe f_i . Quitte à changer f'_i en $f'_i \cdot p$, on peut supposer que $f'_i|_{U_i \cap U_j} = f'_j|_{U_i \cap U_j}$. Le morphisme $f : E \rightarrow F$, classe du morphisme f' défini par f'_i au-dessus de chaque U_i répond à la question. Démontrons maintenant (d) : le fait que $\rho^{U,T}$ soit quasi-surjectif résulte de manière immédiate de nos définitions ; si (M, p) est un objet de $\mathcal{C}(T)$, le morphisme g de $(M \oplus M, p \oplus (1 - p))$ dans (M, Id) défini par $(p, 1 - p)$ est un isomorphisme. Pour démontrer que $\rho^{T,U}$ est un foncteur de Serre, on va se servir du critère (ii), i. e. on va montrer que, pour tout $\mathcal{C}$ -fibré E sur U , l'homomorphisme $\text{End } E \rightarrow \text{End } E|_T$ est surjectif. Il suffit évidemment de le vérifier pour E trivial, i. e. de la forme (M, Id) . Si l'on pose alors $A = \text{End } M$, l'homomorphisme précédent n'est autre que l'homomorphisme de restriction à T des fonctions continues sur U à valeurs dans l'espace de Banach sous-jacent à A . Il est bien connu que cet homomorphisme est surjectif.

La vérification de (c) est plus délicate. Supposons d'abord que $[\dot{U}_i]$ soit un recouvrement de X . Soient $E_i = (M_i, p_i)$, $M = \bigoplus M_i$ et α_i une partition de l'unité subordonnée au recouvrement ouvert $[\dot{U}_i]$. Posons

$$\alpha = \sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2} \quad \text{et} \quad \beta_i = \frac{\alpha_i}{\alpha};$$

on a donc $\sum_{i=1}^n \beta_i^2 = 1$. L'endomorphisme p de M représenté par la matrice

$p_{ji} = \beta_i \beta_j g'_{ji} p_i$ est idempotent. Posons $E = (M, p)$ et considérons le morphisme

$$f_i: (M_i, p_i) \rightarrow E|_{U_i} \quad [\text{resp. } g_i: E|_{U_i} \rightarrow (M_i, p_i)]$$

défini par la matrice colonne (resp. ligne)

$$(f'_i)_j = \beta_j g'_{ji} p_i \quad [\text{resp. } (g'_i)_j = \beta_j g'_{ij} p_i].$$

Le diagramme suivant est alors commutatif :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{p} & M \\ \uparrow f_i & \downarrow g'_i & \uparrow f'_i \\ M_i & \xrightarrow{p_i} & M_i \end{array}$$

et f_i, g_i sont des morphismes inverses l'un de l'autre.

D'autre part, $(g_j \cdot g_i^{-1})|_{U_i \cap U_j}$ est la classe du morphisme

$$(g'_j \cdot f'_i)|_{U_i \cap U_j} = \sum_{k=1}^n \beta_k g'_{jk} p_k \beta_k g'_{ki} p_i = g'_{ji} p_i \sim g'_{ji}.$$

Pour démontrer l'axiome (c) dans le cas général, on peut procéder par « recollements successifs ». Il suffit donc de démontrer l'assertion pour $n = 2$ seulement. On aura besoin de deux lemmes.

LEMME (1.2.14). — Soient E et F deux $\mathcal{C}$ -fibrés de base compacte U et soit $\alpha: E|_T \rightarrow F|_T$ un isomorphisme de leurs restrictions à un sous-espace fermé T . Il existe alors un voisinage fermé T' de T et un isomorphisme $\tilde{\alpha}$ de E sur F au-dessus de T' qui prolonge α .

Démonstration. — D'après la discussion précédente, il existe un endomorphisme $\tilde{\alpha}: E \rightarrow F$ qui prolonge α au-dessus de X tout entier. Comme $\text{Iso}(E, F)$ est un sous-ensemble ouvert de $\text{Hom}(E, F)$, l'ensemble des points x de U tels que $\tilde{\alpha}_x$ soit un isomorphisme est un voisinage ouvert V de T . On choisit alors T' de façon que $T \subset \dot{T}' \subset T' \subset V$.

LEMME (1.2.15). — Soit X un espace compact et soit E un $\mathcal{C}$ -fibré de base un sous-espace fermé T . Il existe alors un voisinage fermé U de T et un fibré $\tilde{E}$ de base U tel que $\tilde{E}|_T = E$.

Démonstration. — Soit $E = (M, p)$. D'après l'axiome (d), p se prolonge en un endomorphisme p' de M au-dessus de X tout entier. D'après un raisonnement analogue au raisonnement ci-dessus, il existe un voisinage fermé U de T tel que le spectre de p'_x pour $x \in U$, ne rencontre pas la droite $\mathcal{R}(z) = \frac{1}{2}$.

Soit γ une courbe différentiable entourant le spectre de p'_x , $\forall x \in U$, dans la bande $\mathcal{R}(z) > \frac{1}{2}$. Posons

$$\tilde{P}_x = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} (1 \cdot z - p'_x)^{-1} dz.$$

Alors $\tilde{P}_x$ est un projecteur de M dépendant continûment de x et $\tilde{P}_x = p_x$ pour $x \in T$ (cf. [16]).

Revenons maintenant à la démonstration de (c) pour $n = 2$. Soit $\tilde{E}_i$ un prolongement de E_i au voisinage fermé $\tilde{U}_i$ de U_i . Quitte à restreindre $\tilde{U}_1$ et $\tilde{U}_2$, on peut supposer que g_{12} se prolonge en un isomorphisme $\tilde{g}_{12}$ de $\tilde{E}_2$ sur $\tilde{E}_1$. Posons $\tilde{g}_{ii} = \text{Id}$ et $\tilde{g}_{21} = (\tilde{g}_{12})^{-1}$. On est ainsi ramené à la discussion précédente puisque $[\tilde{U}_i]$, $i = 1, 2$, est un recouvrement de X .

C. Q. F. D.

Remarque. — Supposons que $\mathcal{C}$ soit, par exemple, la catégorie $\mathcal{T}(k)$ des k -espaces vectoriels de dimension finie. On définit alors une équivalence $u : \mathcal{C}(X) \rightarrow \mathcal{E}_k(X)$ par les formules $u((E, p)) = \text{Im } p$, $u(f) = f'|_{\text{Im } p}$. Ce foncteur est pleinement fidèle de manière évidente. Il est essentiellement surjectif car tout objet de $\mathcal{E}(X)$ admet un supplémentaire [3]. Nous nous proposons de généraliser de même, et simultanément, les exemples 2, 3 et 4 du début de ce paragraphe. Ceci sera important pour les applications, mais pourra être omis en première lecture.

Soit G un groupe compact Z_2 -augmenté, i. e. muni d'un homomorphisme continu ε de G dans le groupe $Z_2 = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. On pose $G^0 = \text{Ker } \varepsilon$ et $G^1 = G - G^0$. Soit maintenant $\mathcal{C}$ une catégorie de Banach. On note $\mathcal{C}'$ la catégorie complexifiée de $\mathcal{C}$: les objets de $\mathcal{C}'$ sont donc les objets de $\mathcal{C}$ où $\mathbf{C}$ opère et les morphismes sont ceux de $\mathcal{C}$ compatibles avec l'action de $\mathbf{C}$. Si E et F sont des objets de $\mathcal{C}'$ et si J est l'automorphisme de E ou F de carré -1 représentant la structure complexe, un morphisme de E dans F (considérés comme objets de $\mathcal{C}$) est dit $\mathbf{C}$ -linéaire (resp. $\mathbf{C}$ -antilinéaire) s'il commute (resp. anticommute) avec J . On désigne par $\text{Hom}^0(E, F)$ [resp. $\text{Hom}^1(E, F)$] l'ensemble des morphismes linéaires (resp. antilinéaires) de E dans F . Si $E = F$, on pose

$$\mathcal{A}\mathcal{U}\mathcal{T}^0(E) = \mathcal{A}\mathcal{U}\mathcal{T}_{\mathcal{C}} E \cap \mathcal{H}\mathcal{O}\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^0(E, E), \quad \mathcal{A}\mathcal{U}\mathcal{T}^1(E) = \mathcal{A}\mathcal{U}\mathcal{T}_{\mathcal{C}} E \cap \mathcal{H}\mathcal{O}\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^1(E, E).$$

On a alors sur $\mathcal{A}\mathcal{U}\mathcal{T}(E) = \mathcal{A}\mathcal{U}\mathcal{T}^0(E) \sqcup \mathcal{A}\mathcal{U}\mathcal{T}^1(E)$ une structure naturelle de groupe augmenté.

Ceci dit, soit X un G -espace compact et soient V' et V'' deux G -fibrés réels de dimension finie sur X , munis de formes quadratiques Q' et Q'' définies positives invariantes par G . Munissons $V = V' \oplus V''$ de la forme

quadratique non dégénérée $Q = Q' \oplus (-Q'')$. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie de Banach, on désigne par $\mathcal{CR}'_G(X)$ la catégorie de Banach suivante : un objet de $\mathcal{CR}'_G(X)$ est la donnée d'un $\mathcal{C}'$ -fibré localement trivial E et d'applications continues $\tau : G \rightarrow \mathcal{AU}\mathfrak{E}(E)$ $\sigma : V \rightarrow \text{ENDE}$ telles que τ soit graduée,

$$\tau(g)_x : E_x \rightarrow E_{gx}, \quad (\sigma(v))^2 = Q(v) \cdot 1 \quad \text{et} \quad \tau(g)\sigma(v) = \sigma(g.v)\tau(g);$$

$\sigma(v)$ est donc $\mathbf{C}$ -linéaire et $\tau(g)$, pour $g \in G^0$ (resp. G^1) est linéaire (resp. antilinéaire). Enfin les morphismes de $\mathcal{CR}'_G(X)$ sont les morphismes de $\mathcal{C}'$ -fibrés ($\mathbf{C}$ -linéaires) compatibles avec l'action de G et de V . Comme il est d'usage, si les fibres E_x sont des espaces de Banach, on écrira simplement $g.e$ (resp. $v.e$) au lieu de $\tau(g).e$ [resp. $\tau(v).e$]; la condition

$$\tau(g)\sigma(v) = \sigma(g.v)\tau(g)$$

s'écrit alors

$$g.(v.e) = (g.v).(g.e).$$

Avec les notations précédentes, soit X/G l'espace des orbites des points de X par G et soit $\pi : X \rightarrow X/G$ la projection canonique. Pour tout fermé U de X/G , posons

$$\mathcal{O}(U) = \mathcal{CR}'_G|_{\pi^{-1}(U)}(\pi^{-1}(U))$$

[qu'on notera simplement $\mathcal{CR}'_G(U')$ avec $U' = \pi^{-1}(U)$]. Pour $T \subset U$, on a des foncteurs restriction $\varphi^{T,U} : \mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}(T)$ qui sont évidents.

PROPOSITION (1.2.16). — *La donnée des catégories $\mathcal{O}(U)$ et des foncteurs restriction $\varphi^{T,U}$ définit une famille continue de catégories de Banach sur X/G .*

Démonstration. — La vérification des axiomes (a), (b) et (c) est triviale [compte tenu de la proposition [1.2.13]]. Démontrons l'axiome (d) en deux temps :

(d') *Le foncteur restriction $\mathcal{C}^{T,U} : \mathcal{CR}'_G(U') \rightarrow \mathcal{CR}'_G(T')$ est un foncteur de Serre.*

Soit $\text{Pin } V'$ (resp. $\text{Pin } V''$) le fibré en groupes associé au fibré en algèbres de Clifford $C(V', Q')$ [resp. $C(V'', -Q'')$]. Posons $\text{Pin}' V = \text{Pin } V' \times_{\mathbb{Z}_2} \text{Pin } V''$: c'est un sous-fibré en groupes du fibré en algèbres $C(V)$. Munissons chaque fibre $\text{Pin}' V_x$ du fibré localement trivial $\text{Pin}' V$ de la mesure de Haar μ_x : elle varie continûment avec x et est invariante par G . Ceci dit, soient E et F deux objets de $\mathcal{CR}'_G(U')$ et soit $\alpha : E|_{T'} \rightarrow F|_{T'}$ un homomorphisme. D'après la proposition (1.2.13), α se prolonge en un homomorphisme $\tilde{\alpha} : E \rightarrow F$ non nécessairement compatible avec l'action de V et de G . On va normaliser $\tilde{\alpha}$ en deux temps. Posons d'abord

$$\tilde{\tilde{\alpha}}_x = \int_{\text{Pin}' V_x} v^{-1} \cdot \tilde{\alpha}_x \cdot v \, d\mu_x = \int_{\text{Pin}' V_x} v^* \cdot \tilde{\alpha}_x \cdot v \, d\mu_x.$$

Alors $\tilde{\alpha}$ est un homomorphisme compatible avec l'action de $C(V)$ [car $\text{Pin}' V \supset S(V)$ et $\tilde{\alpha}_x = \alpha_x$ pour $x \in T'$]. Posons ensuite

$$\tilde{\alpha}_x = \int_G g \cdot \tilde{\alpha}_{g^{-1}x} \cdot g^{-1} dg,$$

où dg désigne la mesure de Haar de G . Alors $\tilde{\alpha}$ est le prolongement cherché.

(d'') Le foncteur restriction $\rho^{T,U}$ est quasi-surjectif.

Soit E un objet de $\mathcal{CR}'_G(T')$ et soit F l'objet $C(V) \otimes_{\mathbf{R}} E$, considéré comme $C(V)$ -module sur le premier facteur du produit tensoriel seulement. Les morphismes $i : E \rightarrow F$ et $j : F \rightarrow E$ définis par $j(\nu \otimes e) = \nu \cdot e$ et par

$$i(e) = \int_{\text{Pin}' V_x} \nu^{-1} \cdot 1 \otimes \nu \cdot e d\mu_x, \quad e \in E_x,$$

sont des morphismes de G - $C(V)$ -modules et vérifient $j \cdot i = \text{Id}$. Donc il suffit de vérifier maintenant que E , considéré comme G -module seulement, est facteur direct de la restriction à T' d'un G -module sur U' . Pour cela, nous allons utiliser la méthode d'Atiyah et Segal [8] qui s'appuie sur la définition et le lemme suivants bien connus (cf. [22]) :

DÉFINITION (1.2.17). — Soit $\gamma : G \rightarrow \text{Aut } \Gamma$ une représentation d'un groupe compact G dans le groupe des automorphismes d'un espace de Banach Γ . Un vecteur s de Γ est dit périodique si $G \cdot s$ est contenu dans un sous-espace vectoriel de dimension finie de Γ .

LEMME (1.2.18). — Les vecteurs périodiques de Γ forment un sous-ensemble dense de Γ .

Revenons maintenant au G -module E . D'après la construction du fibré principal [prop. (1.2.11)], on peut considérer E comme un fibré banachique dont la fibre est un facteur direct d'une algèbre de Banach A . Soit $\Gamma(E)$ le A -module des sections continues de E ; G opère sur $\Gamma(E)$ par la formule $(g \cdot s)_x = g \cdot s_{g^{-1}x} \cdot g^{-1}$. Comme E est localement trivial, il existe pour tout point x , une section $s(x)$ tel que $s(x)_y$ engendre, comme A -module, la fibre E_y pour y suffisamment voisin de x . D'après le lemme ci-dessus on peut supposer en outre que $s(x)$ est un vecteur périodique du G -espace $\Gamma(E)$. Puisque X est compact, on peut choisir un nombre fini de telles sections $s_1, \dots, s_n$, qui engendrent E_y , $\forall y \in T'$. Ces sections sont contenues dans un sous-espace vectoriel M de $\Gamma(E)$ de dimension finie invariant par G . Si l'on pose $M' = M \otimes_{\mathbf{R}} A$, M' est un A -module libre de type fini et l'application naturelle $X \times M' \rightarrow E$ est un épimorphisme direct.

Exemples. — Si $G = H \times Z_2$, où $\varepsilon: G \rightarrow Z_2$ est la deuxième projection et si Z_2 opère trivialement sur X et sur V , la catégorie $\mathcal{C}'_G(X)$, qu'on écrira $\mathcal{C}'_H(X)$, se décrit simplement comme la catégorie des $\mathcal{C}$ -fibrés localement triviaux sur le H -espace X munis d'une structure de $C(V)$ -module et de H -module (il est inutile de complexifier). Pour $H = 0$ (resp. $V = 0$), on notera cette catégorie $\mathcal{C}'(X)$ [resp. $\mathcal{C}_H(X)$]. Pour $\mathcal{C} = \mathcal{A}(k)$, on retrouve ainsi la catégorie $E'(X)$ [resp. $E_H(X)$]. Si maintenant $H = 0$ et $V = 0$ et si $G = Z_2$ opère de manière quelconque sur la base, on notera $\mathcal{C}\mathcal{R}(X)$ la catégorie $\mathcal{C}\mathcal{R}'_G(X)$. Lorsque $\mathcal{C} = \mathcal{A}(k)$ on retrouve, bien entendu, la catégorie $\mathcal{E}\mathcal{R}(X)$.

PROPOSITION (1.2.19). — Soit V (resp. V') un G -fibré de base un G -espace compact X (resp. Y). Soient $f_0, f_1: V \rightarrow V'$ deux morphismes cartésiens (i. e. induisant un isomorphisme sur chaque fibre) homotopes. Si $E \in \text{Ob } \mathcal{C}\mathcal{R}'_G(Y)$, les images inverses évidentes $f_0^* E$ et $f_1^* E$ sont isomorphes.

Démonstration (cf. Atiyah-Bott [5]). — Soit $f: V \times [0, 1] \rightarrow V'$ l'application continue réalisant l'homotopie entre f_0 et f_1 et soit $F = f^* E$. Pour $t \in [0, 1]$, soit $\pi_t: V \times [0, 1] \rightarrow V \times \{t\}$ la projection canonique et $F_t = F|_{V \times \{t\}}$. L'application identique de $(\pi_t^* F_t)|_{V \times \{t\}}$ sur $F|_{V \times \{t\}}$ se prolonge alors en un isomorphisme au-dessus d'une bande $X \times U$, où U est un voisinage de t . Il en résulte que la classe d'isomorphie de F_t est une fonction localement constante, donc constante, du point t . Par suite,

$$f_0^* E = F_0 \approx F_1 = f_1^* E.$$

Soit Y un espace compact et soit V un G -fibré sur un G -espace compact X ; notons $\pi: X \times Y \rightarrow X$ la projection canonique. D'après la démonstration de la proposition (1.2.16), la catégorie $\mathcal{C}\mathcal{R}'^{\pi^*}_G(X \times Y)$ s'identifie à la catégorie de Banach associée à la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}\mathcal{R}'^{\pi^*}_G(X \times Y)$ dont les objets sont les fibrés de la forme $C(V) \otimes E$; dans ce produit tensoriel E est un objet de $\mathcal{C}'$ où G opère de manière compatible avec l'augmentation. D'autre part, $(\mathcal{C}\mathcal{R}'_G(X))(Y)$ s'identifie aussi à la catégorie de Banach associée à la sous-catégorie pleine de $(\mathcal{C}\mathcal{R}'_G(X))(Y)$ dont les objets s'écrivent (F, Id_Y) avec $F = C(V) \otimes E$. Grâce à l'homéomorphisme bien connu

$$\mathcal{F}(X \times Z, \text{End } E) \approx \mathcal{F}(X, \mathcal{F}(Y, \text{End } E)),$$

on en déduit la proposition :

PROPOSITION (1.2.20). — Les catégories de Banach $(\mathcal{C}\mathcal{R}'_G(X))(Y)$ et $\mathcal{C}\mathcal{R}'^{\pi^*}_G(X \times Y)$ sont équivalentes. En particulier, si X et Y sont deux espaces compacts et si $\mathcal{C}$ est une catégorie de Banach, les catégories $\mathcal{C}(X)(Y)$ et $\mathcal{C}(X \times Y)$ sont équivalentes.

Remarque. — Si X est un G -espace compact et si X' est un G' -espace compact, on démontre de même que $(\mathcal{C}_G(X))_{G'}(X') \sim \mathcal{C}_{G \times G'}(X \times X')$.

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories de Banach et soient $\varphi_0, \varphi_1 : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ deux foncteurs linéaires continus. Ces foncteurs sont dits *homotopes* s'il existe un foncteur $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'([0, 1])$ tel que $p_0 \cdot \varphi \approx \varphi_0$ et que $p_1 \cdot \varphi \approx \varphi_1$ [on note p_0 et p_1 les foncteurs restriction de $\mathcal{C}'([0, 1])$ à $\mathcal{C}'(\{0\})$ et $\mathcal{C}'(\{1\})$ respectivement]. On dira que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont même type d'homotopie s'il existe deux foncteurs linéaires continus $\psi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ et $\theta : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ tels que $\theta \cdot \psi$ et $\psi \cdot \theta$ soient respectivement homotopes à $\text{Id}_{\mathcal{C}}$ et à $\text{Id}_{\mathcal{C}'}$.

PROPOSITION (1.2.24). — Soient $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ deux applications continues homotopes et $\mathcal{C}$ une catégorie de Banach. Les foncteurs image inverse $f_0^*, f_1^* : \mathcal{C}(Y) \rightarrow \mathcal{C}(X)$ sont alors homotopes. En particulier, le type d'homotopie de $\mathcal{C}(X)$ ne dépend que du type d'homotopie de X .

Démonstration. — Exercice (utiliser la proposition précédente).

Remarque. — Cette proposition s'écrit aussi dans le cadre des fibrés en $G\text{-}\mathcal{C}(V)$ -modules; nous en laissons le soin au lecteur.

Nous avons introduit cette notion d'homotopie pour la raison essentielle suivante : l'expérience montre qu'il existe des foncteurs linéaires continus $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ qui sont intéressants et qui ne sont pas des foncteurs de Serre. En fait, en nous inspirant de la construction analogue dans le cadre des espaces topologiques, nous allons construire la catégorie « cylindre d'application » $\mathcal{M}_{\varphi}$ du foncteur φ , ainsi que deux foncteurs linéaires continus $\theta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{M}_{\varphi}$ et $\tilde{\varphi} : \mathcal{M}_{\varphi} \rightarrow \mathcal{C}'$ jouissant des propriétés suivantes : $\tilde{\varphi}$ est un foncteur de Serre, θ une équivalence d'homotopie et le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{C}' \\ \theta \searrow & & \nearrow \tilde{\varphi} \\ & \mathcal{M}_{\varphi} & \end{array}$$

est commutatif.

On définit $\mathcal{M}_{\varphi}$ comme la sous-catégorie de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'([0, 1])$ formée des couples $(E, \mathbf{E}')$ tels que $\varphi E = \mathbf{E}'|_{\{0\}}$; θ est le foncteur $E \mapsto (E, \pi^* \varphi E)$, $\pi : [0, 1] \rightarrow P$; $\tilde{\varphi}$ est défini par $(E, \mathbf{E}') \mapsto \mathbf{E}'|_{\{1\}}$. Si $f : \mathbf{E}'|_{\{1\}} \rightarrow \mathbf{E}'|_{\{1\}}$ est un morphisme de $\mathcal{C}'$, l'endomorphisme de $(E, \mathbf{E}')$ défini au point $t \in [0, 1]$ par tf pour $\mathbf{E}'$ et par 0 pour E (au point $t = 0$) est évidemment un relèvement de f ; il en résulte que $\tilde{\varphi}$ est un foncteur de Serre. Définissons $\chi : \mathcal{M}_{\varphi} \rightarrow \mathcal{C}$ par $\chi((E, \mathbf{E}')) = E$. Alors $\chi \cdot \theta = \text{Id}$ et $\theta \cdot \chi$ est homotope à l'identité par « l'homotopie » $\xi_t : \mathcal{M}_{\varphi} \rightarrow \mathcal{M}_{\varphi}$, $t \in [0, 1]$, définie par $\xi_t((E, \mathbf{E}')) = (E, \mathbf{E}')$, où $\mathbf{E}'^t|_{\{u\}}$ est égal à $\mathbf{E}'|_{\{t-u\}}$ pour $t \geq u$ et à E pour $t \leq u$.

Remarques. — Si φ est quasi-surjectif, $\tilde{\varphi}$ l'est aussi. D'autre part, pour que $\mathcal{M}_{\varphi}$ soit une catégorie de Banach, il est nécessaire que φ soit d'image fermée (sur les espaces de morphismes).

1.3. Le groupe de Grothendieck.

DÉFINITION (1.3.1). — Soit M un monoïde abélien et soit $L(M)$ le groupe libre engendré par les éléments de M . Le groupe symétrisé $S(M)$ de M est le quotient de $L(M)$ par le sous-groupe engendré par les relations

$$\{a + b\} - \{a\} - \{b\} = 0.$$

On désigne par s l'homomorphisme canonique, non injectif en général, défini comme le composé évident $M \rightarrow L(M) \rightarrow S(M)$. Le couple $(s, S(M))$ est alors la solution du problème d'applications universelles que voici : pour tout homomorphisme de monoïdes α de M dans un groupe abélien G , il existe un homomorphisme de groupes $\tilde{\alpha}$ de $S(M)$ dans G , et un seul, tel que $\alpha = \tilde{\alpha} \circ s$.

On peut donner du couple $(s, S(M))$ une description équivalente souvent utile : on considère le quotient de $M \times M$ par la relation d'équivalence

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow \exists e \mid a + d + e = b + c + e.$$

Le monoïde quotient est alors un groupe abélien $S'(M)$. Si l'on définit $s' : M \rightarrow S'(M)$ par $s'(a) = (a, 0)$, le couple $(s', S'(M))$ résout le problème universel précédent, donc est isomorphe au couple $(s, S(M))$.

DÉFINITION (1.3.2). — Soit $\mathcal{C}$ une catégorie additive. Le groupe de Grothendieck $K(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$ est le groupe symétrisé du monoïde abélien (pour la somme des objets) de l'ensemble des classes d'isomorphie d'objets de $\mathcal{C}$. Il dépend fonctoriellement de $\mathcal{C}$ de manière évidente.

Exemples. — L'exemple le plus important pour la topologie est sans doute celui où $\mathcal{C}$ est la catégorie des *fibrés vectoriels*, réels ou complexes, de dimension finie, ayant pour base un espace compact fixé X . On note alors $K(X)$ le groupe de Grothendieck de $\mathcal{C}$. Ce groupe a été introduit par Atiyah et Hirzebruch [7]; dans le cas complexe il a des liens étroits avec la cohomologie ordinaire de X .

Malheureusement, le calcul de $K(X)$ reste en général plus difficile que celui de la cohomologie. Le point de vue des catégories, plus sophistiqué a priori, nous permettra cependant de mieux calculer $K(X)$. Ainsi, une *catégorie de Banach* peut être considérée comme une simple catégorie additive et son groupe de Grothendieck se révélera intéressant par la suite.

Enfin, d'un point de vue purement algébrique, Bass a étudié le groupe de Grothendieck de la catégorie $\mathcal{A}$ formée des A -modules projectifs de type fini, A étant un *anneau* quelconque [9]. Dans ce cas particulier, on notera $K(A)$, par abus de langage, le groupe $K(\mathcal{A})$. Nous allons voir qu'en fait, moyennant certaines hypothèses, le groupe de Grothendieck

s'exprime comme une limite inductive de groupes K d'anneaux conveys.

Si $\mathcal{C}$ est une catégorie additive *pseudo-abélienne* [déf. (1.2.1)] et si E est un objet de $\mathcal{C}$, on désigne par $\mathfrak{X}(E)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ formée des objets de $\mathcal{C}$ facteurs directs de E^n pour un n . Soit maintenant A l'anneau des endomorphismes de E . On définit un foncteur φ de $\mathfrak{X}(A)$ dans $\mathfrak{X}(E)$ de la manière suivante : pour $(A^n, p) \in \text{Ob } \mathfrak{X}(A)$ et $f \in \text{Fl}(\mathfrak{X}(A))$ de source (A^n, p) , on pose

$$\varphi((A^n, p)) = \text{Ker}(1 - p), \quad \varphi(f) = f|_{\text{Ker}(1-p)}$$

(les objets de $\mathfrak{X}(A)$ sont identifiés aux facteurs directs de A^n , $n \in \mathbb{N}$).

LEMME (1.3.3). — *Le foncteur φ est une équivalence des catégories $\mathfrak{X}(A)$ et $\mathfrak{X}(E)$.*

La démonstration de ce lemme est immédiate.

Définissons une catégorie d'indices $I(\mathcal{C})$ (qu'on notera simplement I) de la manière suivante : un objet de I est un objet de $\mathcal{C}$; un morphisme de I de source E et de but F est un couple (f, g) de morphismes de $\mathcal{C}$, $f: E \rightarrow F$, $g: F \rightarrow E$, tel que $g \cdot f = \text{Id}_E$. On compose évidemment les morphismes par la formule

$$(f', g') \cdot (f, g) = (f' \cdot f, g \cdot g').$$

Toute flèche f de I de E dans F induit alors un foncteur de $\mathfrak{X}(E)$ dans $\mathfrak{X}(F)$, donc un homomorphisme de $K(\mathfrak{X}(E)) \approx K(\text{End } E)$ dans $K(\mathfrak{X}(F)) \approx K(\text{End } F)$. D'autre part, l'inclusion de $\mathfrak{X}(E)$ et de $\mathfrak{X}(F)$ dans $\mathcal{C}$ induit une application de $K(\mathfrak{X}(E))$ et de $K(\mathfrak{X}(F))$ dans $K(\mathcal{C})$ compatible avec la flèche précédente. On obtient ainsi en définitive un homomorphisme ω de $\varinjlim K(\text{End } E)$ dans $K(\mathcal{C})$.

PROPOSITION (1.3.4). — *L'homomorphisme ω de $\varinjlim K(\text{End } E)$ dans $K(\mathcal{C})$ défini ci-dessus est un isomorphisme.*

Démonstration. — Il est clair que ω est surjective. Soit

$$\{E'\} - \{E''\} \in K(\text{End } E) \quad \text{tel que} \quad \omega(\{E'\} - \{E''\}) = 0.$$

Il existe donc $G \in \text{Ob } \mathcal{C}$ tel que $E' \oplus G \approx E'' \oplus G$. Mais alors l'image de $\{E'\} - \{E''\}$ dans $K(\text{End}(E \oplus G))$ est nulle.

Pour notre travail les groupes de Grothendieck de catégories ne suffiront pas. Nous aurons besoin de définir le groupe K de foncteurs additifs $\varphi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$. Pour cela, on devra supposer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont des catégories de Banach et que φ est un foncteur linéaire continu ⁽⁶⁾. Dans ce cas,

⁽⁶⁾ Voir cependant [17] pour des hypothèses un peu moins restrictives.

définissons l'ensemble $\Gamma(\varphi)$ dont les éléments sont les triples (E, F, α) , E et F étant des objets de $\mathcal{C}$ et $\alpha: \varphi E \xrightarrow{\sim} \varphi F$ étant un isomorphisme. Deux éléments σ_0 et σ_1 de cet ensemble sont dits *homotopes* s'il existe un élément de $\Gamma(\varphi([0, 1]))$ dont les restrictions à $\{0\}$ et à $\{1\}$ soient isomorphes aux deux triples donnés. Un triple (E, E, Id) est dit *élémentaire*; on définit la somme de deux triples (E_0, F_0, α_0) et (E_1, F_1, α_1) comme étant le triple $(E_0 \oplus E_1, F_0 \oplus F_1, \alpha_0 \oplus \alpha_1)$. On définit alors $K(\varphi)$ comme le monoïde (pour la somme des objets) quotient de l'ensemble $\Gamma(\varphi)$ par la relation d'équivalence engendrée par l'homotopie et l'addition de triples élémentaires ⁽⁷⁾. On note $d(E, F, \alpha)$ la classe du triple (E, F, α) dans $K(\varphi)$.

PROPOSITION (1.3.5). — *Le monoïde $K(\varphi)$ est un groupe abélien. C'est le groupe de Grothendieck de $\mathcal{C}$ si $\mathcal{C}' = 0$.*

Démonstration (cf. [11]). — La seconde assertion est triviale. Pour démontrer la première il suffit de vérifier la formule de « transitivité »

$$d(E, F, \alpha) + d(F, G, \beta) = d(E, G, \beta \cdot \alpha);$$

l'élément $d(F, E, \alpha^{-1})$ sera alors l'inverse de $d(E, F, \alpha)$ pour la loi de monoïde de $K(\varphi)$.

Par définition de l'addition des triples, on a

$$d(E, F, \alpha) + d(F, G, \beta) = d(E \oplus F, F \oplus G, \alpha \oplus \beta).$$

L'isomorphisme $\alpha \oplus \beta$ se décompose en

$$\varphi(E \oplus F) \xrightarrow{\alpha \oplus 1} \varphi(F \oplus F) \xrightarrow{1 \oplus \beta} \varphi(F \oplus G).$$

Or l'automorphisme γ de $\varphi F \oplus \varphi F$ défini par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est homotope à l'identité par la rotation

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \left(\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right] \right).$$

On a donc

$$d(E \oplus F, F \oplus G, \alpha \oplus \beta) = d(E \oplus F, F \oplus G, (1 \oplus \beta) \cdot \gamma \cdot (\alpha \oplus 1)).$$

Soit, d'autre part, $\delta: F \oplus G \rightarrow G \oplus F$ l'isomorphisme défini par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(7) Cette définition ne coïncide pas avec celle de [17] si φ n'est pas quasi-surjectif.

Le composé $\varphi(\delta) \cdot (1 \oplus \beta) \cdot \gamma \cdot (\alpha \oplus 1)$ est l'isomorphisme de $\varphi(E \oplus F)$ sur $\varphi(G \oplus F)$ défini par $\beta \cdot \alpha \oplus 1$. On a donc finalement

$$d(E \oplus F, F \oplus G, \alpha \oplus \beta) = d(E \oplus F, G \oplus F, \beta \cdot \alpha \oplus 1) = d(E, G, \beta \cdot \alpha).$$

C. Q. F. D.

Remarque 1. — La structure « vectorielle » de la catégorie $\mathcal{C}$ a servi de manière essentielle dans cette démonstration.

Remarque 2. — Si φ est un foncteur de Serre on peut, dans la définition de $K(\varphi)$, remplacer la relation d'homotopie entre triples par la relation d'isomorphie. On peut en effet, considérer $\Gamma(\varphi)$ comme l'ensemble des objets d'une catégorie dont les morphismes de source (E_0, F_0, α_0) et de but (E_1, F_1, α_1) sont les couples (f, g) de $\mathcal{C}$ -morphisms $f: E_0 \rightarrow E_1$, $g: F_0 \rightarrow F_1$ tels que

$$\varphi(g) \cdot \alpha_0 = \alpha_1 \cdot \varphi(f).$$

Remarque 3. — Considérons un diagramme de catégories prébanachiques

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_0 & \xrightarrow{\varphi_0} & \mathcal{C}'_0 \\ \downarrow \psi & & \downarrow \psi' \\ \mathcal{C}_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & \mathcal{C}'_1 \end{array}$$

commutatif à homotopie près. Il définit un homomorphisme de $K(\varphi_0)$ dans $K(\varphi_1)$ de manière évidente. En particulier, si ψ et ψ' sont des équivalences d'homotopie, cet homomorphisme est un isomorphisme. Considérons maintenant un foncteur linéaire continu $\varphi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ et la catégorie cylindre d'application $\mathcal{M}_\varphi$ du foncteur φ . Le foncteur θ défini à la fin du § 1.2 induit alors un isomorphisme de $K(\varphi)$ sur $K(\tilde{\varphi})$ d'après ce qui précède. Comme $\tilde{\varphi}$ est un foncteur de Serre on peut donc, sans restreindre la généralité, supposer que les foncteurs qu'on considère sont de Serre.

DÉFINITION (1.3.6). — Une grille carrée de catégories de Banach est la donnée d'un diagramme carré

$$(10) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\varphi_2} & \mathcal{C}_2 \\ \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \psi_2 \\ \mathcal{C}_1 & \xrightarrow{\psi_1} & \mathcal{C}_{12} \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow c_{21} \\ \end{array}$$

de catégories de Banach et de foncteurs linéaires continus ainsi que d'un isomorphisme fonctoriel c_{21} de $\psi_1 \cdot \varphi_1$ sur $\psi_2 \cdot \varphi_2$.

On se propose de définir un groupe $K(\mathcal{O})$ attaché à cette grille carrée, groupe qui coïncidera avec $K(\varphi_1)$ si $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_{12} = 0$. Par exemple,

ceci nous permettra de définir le groupe $K(X, Y; \varphi)$ (X compact, Y fermé dans X) comme étant le groupe K de la grille

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(X) & \xrightarrow{\varphi(X)} & \mathcal{C}'(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{C}(Y) & \xrightarrow{\varphi(Y)} & \mathcal{C}'(Y) \end{array}$$

Revenons aux notations de la définition (1.3.6) et considérons la catégorie prébanachique $\mathcal{C}'$ suivante : un objet de $\mathcal{C}'$ est un triple (E_1, E_2, ε) , où $E_1 \in \text{Ob } \mathcal{C}_1$, $E_2 \in \text{Ob } \mathcal{C}_2$ et $\varepsilon : \psi_1 E_1 \xrightarrow{\sim} \psi_2 E_2$. Un morphisme de source (E_1, E_2, ε) et de but $(E'_1, E'_2, \varepsilon')$ est un couple (f_1, f_2) , $f_1 : E_1 \rightarrow E'_1$ et $f_2 : E_2 \rightarrow E'_2$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \psi_1 E_1 & \xrightarrow{\psi_1 f_1} & \psi_1 E'_1 \\ \varepsilon \downarrow & & \downarrow \varepsilon' \\ \psi_2 E_2 & \xrightarrow{\psi_2 f_2} & \psi_2 E'_2 \end{array}$$

Soit $\varphi(\mathcal{O}) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ le foncteur linéaire continu défini par

$$\varphi(\mathcal{O})(E) = (\varphi_1 E, \varphi_2 E, c_{21}(E)) \quad (\text{resp. } \varphi(\mathcal{O})(\alpha) = (\varphi_1 \alpha, \varphi_2 \alpha))$$

sur les objets E (resp. les morphismes α) de $\mathcal{C}$.

DÉFINITION (1.3.7). — *Le groupe $K(\mathcal{O})$ de la grille $\mathcal{O}$ est le groupe de Grothendieck du foncteur $\varphi(\mathcal{O})$.*

On peut donner une description directe plus simple du groupe $K(\mathcal{O})$. Considérons l'ensemble $\Gamma(\mathcal{O})$ formé des quadruples $(E, F, \alpha_1, \alpha_2)$, où E et F sont des objets de $\mathcal{C}$ et où

$$\alpha_1 : \varphi_1 E \rightarrow \varphi_1 F, \quad \alpha_2 : \varphi_2 E \rightarrow \varphi_2 F$$

sont des isomorphismes tels que

$$\psi_2 \alpha_2 = (c_{21}(E))^{-1} \psi_1 \alpha_1 (c_{21}(E))$$

(ce que, par abus de notation, on écrira simplement $\psi_2 \alpha_2 = \psi_1 \alpha_1$ par la suite). Un objet de $\Gamma(\mathcal{O})$ est dit élémentaire s'il est de la forme $(E, E, \text{Id}, \text{Id})$. Le groupe $K(\mathcal{O})$ est alors le quotient de $\Gamma(\mathcal{O})$ par la relation d'équivalence engendrée par l'homotopie et l'addition d'objets élémentaires. On note $d(E, F, \alpha_1, \alpha_2)$ la classe du quadruple $(E, F, \alpha_1, \alpha_2)$ dans $K(\mathcal{O})$.

Le groupe $K(\mathcal{O})$ dépend fonctoriellement de $\mathcal{O}$ en un sens facile à préciser.

Soit $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur linéaire continu entre deux catégories prébanachiques et soit $\mathcal{O}$ la grille carrée

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(D^n) & \longrightarrow & \mathcal{C}'(D^n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{C}(S^{n-1}) & \longrightarrow & \mathcal{C}'(S^{n-1}) \end{array}$$

D^n désignant la boule unité de $\mathbf{R}^n$ et S^{n-1} son bord. Un élément de $\Gamma(\mathcal{O})$ est dit *normalisé* s'il s'écrit $(\mathbf{E}, \mathbf{E}, \alpha_1, \alpha_2)$ où $\mathbf{E} = \pi^* E$, $\pi : D^n \rightarrow P$ et où α_1 et α_2 sont des isomorphismes tels que $\alpha_1 = \text{Id}$ et $\alpha_2 = \text{Id}$ au point base $(1, 0, 0, 0, \dots)$ de D^n .

LEMME (1.3.8). — *Tout élément de $K(D^n, S^{n-1}; \varphi)$, $n \geq 1$, s'écrit sous la forme $d(\sigma)$, où σ est un élément normalisé de $\Gamma(\mathcal{O})$. Pour que $d(\sigma) = d(\tau)$, où $\sigma = (\mathbf{E}, \mathbf{E}, \alpha_1, \alpha_2)$ et $\tau = (\mathbf{F}, \mathbf{F}, \beta_1, \beta_2)$ sont normalisés, il faut et il suffit qu'il existe un objet G de $\mathcal{C}$ et des homotopies $a_1(t)$ de $\text{Aut}((\mathbf{E} \oplus \mathbf{F} \oplus \mathbf{G})|_{S^{n-1}})$ et $a_2(t)$ de $\text{Aut}((\varphi \mathbf{E} \oplus \varphi \mathbf{F} \oplus \varphi \mathbf{G}))$, $t \in [0, 1]$, telles que $a_1(t) = \text{Id}$ et $a_2(t) = \text{Id}$ au point base canonique de D^n et qu'on ait les relations*

$$\begin{aligned} a_1(0) &= \alpha_1 \oplus \text{Id}_{\mathbf{F}|_{S^{n-1}}} \oplus \text{Id}_{\mathbf{G}|_{S^{n-1}}}, & a_1(1) &= \text{Id}_{\mathbf{E}|_{S^{n-1}}} \oplus \beta_1 \oplus \text{Id}_{\mathbf{G}|_{S^{n-1}}}, \\ a_2(0) &= \alpha_2 \oplus \text{Id}_{\varphi \mathbf{F}} \oplus \text{Id}_{\varphi \mathbf{G}}, & a_2(1) &= \text{Id}_{\varphi \mathbf{E}} \oplus \beta_2 \oplus \text{Id}_{\varphi \mathbf{G}}, \\ a_2(t)|_{S^{n-1}} &= \varphi(a_1(t)). \end{aligned}$$

Démonstration. — Exercice.

Considérons maintenant une grille carrée

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\varphi_2} & \mathcal{C}_2 \\ \varphi_1 \downarrow & & \downarrow \psi_2 \\ \mathcal{C}_1 & \xrightarrow{\psi_1} & \mathcal{C}_{12} \end{array}$$

telle que φ_2 soit *quasi-surjectif* et que φ_1 soit un *foncteur de Serre*. On va définir un opérateur « cobord »

$$\partial : K(D^1, S^0; \psi_2) \rightarrow K(\mathcal{O}).$$

Le groupe $K(D^1, S^0; \psi_2)$ est le groupe K de la grille carrée

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_2(D^1) & \longrightarrow & \mathcal{C}_2(S^0) \\ \psi_2(D^1) \downarrow & & \downarrow \psi_2(S^0) \\ \mathcal{C}_{12}(D^1) & \longrightarrow & \mathcal{C}_{12}(S^0) \end{array}$$

Tout élément de $K(D^1, S^0; \psi_2)$ s'écrit donc sous la forme $d(\varphi_2(\theta), \varphi_2(\theta), \alpha, \beta)$, où

$$\alpha(t) : \psi_2 \varphi_2 \theta \xrightarrow{\sim} \psi_2 \varphi_2 \theta, \quad t \in D^1$$

et

$$\beta : \varphi_2 \theta|_{S^0} \xrightarrow{\sim} \varphi_2 \theta|_{S^0}$$

sont des isomorphismes tels que $\psi_2(\beta) = \alpha|_{S^0}$, $\alpha(0) = \text{Id}$ et que $\beta|_{\{0\}} = \text{Id}$. Puisque $\alpha(t)$ est une homotopie de $\psi_2(\beta)|_{\{1\}}$ à l'identité et que ψ_1 est un foncteur de Serre, il existe $\varepsilon(t) \in \text{Aut} \varphi_1 \theta$, dépendant continûment de t , tel que $\varepsilon(0) = \text{Id}$ et que $\alpha(t) = \psi_1(\varepsilon(t))$; on a donc

$$\alpha(1) = \psi_1(\varepsilon(1)) = \psi_2(\beta|_{\{1\}}).$$

On pose alors, par définition,

$$d(\varphi_2 \theta, \varphi_2 \theta, \alpha, \beta) = d(\theta, \theta, \varepsilon(1), \beta|_{\{1\}}).$$

Il faut vérifier que cette définition est indépendante du choix des relèvements θ et ε . Supposons, en effet, que $\varphi_2 \theta = \varphi_2 \theta'$ et désignons par ' les constructions précédentes appliquées à θ' . Il suffit de montrer que

$$d(\theta \oplus \theta', \theta \oplus \theta', \varepsilon(1) \oplus \text{Id}, \beta|_{\{1\}} + \text{Id}) = d(\theta \oplus \theta', \theta \oplus \theta', \text{Id} \oplus \varepsilon'(1), \text{Id} \oplus \beta|_{\{1\}}).$$

Considérons alors l'automorphisme de

$$(\psi_2 \varphi_2)(\theta \oplus \theta') = (\psi_2 \varphi_2)(\theta) \oplus (\psi_2 \varphi_2)(\theta')$$

défini par le produit des matrices

$$\alpha(t, u) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi u}{2} & -\sin \frac{\pi u}{2} \\ \sin \frac{\pi u}{2} & \cos \frac{\pi u}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi u}{2} & \sin \frac{\pi u}{2} \\ -\sin \frac{\pi u}{2} & \cos \frac{\pi u}{2} \end{pmatrix}.$$

En utilisant le fait que ψ_1 est un foncteur de Serre, on démontre qu'il existe un automorphisme $\delta(t, u)$ de $\varphi_1 \theta \oplus \varphi_1 \theta'$ tel que

$$\psi_1(\delta(t, u)) = \alpha(t, u), \quad \delta(0, u) = \text{Id}, \quad \delta(t, 0) = \varepsilon(t) \oplus \text{Id}, \quad \delta(t, 1) = \text{Id} \oplus \varepsilon'(t).$$

Les homotopies $u \mapsto \delta(1, u)$ et

$$u \mapsto \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi u}{2} & -\sin \frac{\pi u}{2} \\ \sin \frac{\pi u}{2} & \cos \frac{\pi u}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta|_{\{1\}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi u}{2} & \sin \frac{\pi u}{2} \\ -\sin \frac{\pi u}{2} & \cos \frac{\pi u}{2} \end{pmatrix}$$

permettent de montrer que les deux éléments de $K(\mathcal{O})$ obtenus sont égaux.

THÉORÈME (1.3.9). — *Considérons une grille carrée*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\varphi_2} & \mathcal{C}_2 \\ \varphi_1 \downarrow & & \downarrow \psi_2 \\ \mathcal{C}_1 & \xrightarrow{\psi_1} & \mathcal{C}_{12} \end{array}$$

où φ_2 est un foncteur quasi-surjectif et où ψ_1 est un foncteur de Serre. Alors la suite

$$K(D^1, S^0; \varphi_1) \xrightarrow{\nu_1} K(D^1, S^0; \psi_2) \xrightarrow{\partial} K(\mathcal{O}) \xrightarrow{u} K(\varphi_1) \xrightarrow{\nu} K(\psi_2),$$

où tous les homomorphismes, excepté ∂ , sont naturels est une suite exacte.

Démonstration.

Exactitude en $K(\varphi_1)$:

$$(\nu.u)(d(E, F, \alpha_1, \alpha_2)) = d(\varphi_2 E, \varphi_2 F, \psi_1(\alpha_1)) = d(\varphi_2 E, \varphi_2 F, \psi_2 \alpha_2) = 0.$$

Réciproquement, si

$$v(d(E, F, \alpha)) = d(\varphi_2 E, \varphi_2 F, \psi_1 \alpha) = 0,$$

il existe un objet élémentaire de la forme $(\varphi_2 \theta, \varphi_2 \theta, \text{Id})$, car φ_2 est quasi-surjectif, tel que $(\varphi_2(E \oplus \theta), \varphi_2(F \oplus \theta), \psi_1(\alpha \oplus \text{Id}))$ soit isomorphe à un objet $(\theta', \theta', \gamma')$ où γ' est un automorphisme de $\psi_2 \theta'$ homotope à l'identité. On a donc un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \psi_1 \varphi_1(E \oplus \theta) = \psi_2 \varphi_2(E \oplus \theta) & \xrightarrow[\approx]{\psi_2 f} & \psi_2 \theta' \\ \psi_1(\alpha \oplus \text{Id}) \downarrow \approx & & \downarrow \gamma' \\ \psi_1 \varphi_1(F \oplus \theta) = \psi_2 \varphi_2(F \oplus \theta) & \xrightarrow[\approx]{\psi_2 g} & \psi_2 \theta' \end{array}$$

où γ' est homotope à l'identité. Comme ψ_1 est un foncteur de Serre, il existe β homotope à $\alpha \oplus \text{Id}$ tel que

$$\psi_1(\beta) = \psi_2(g^{-1}) \psi_2(f) = \psi_2(g^{-1}f).$$

Alors,

$$d(E, F, \alpha) = d(E \oplus \theta, F \oplus \theta, \alpha \oplus \text{Id}) = v(d(E \oplus \theta, F \oplus \theta, \beta, g^{-1}f)).$$

Exactitude en $K(\mathcal{O})$:

$$(u, \partial)(d(\varphi_2 \theta, \varphi_2 \theta, \alpha, \beta)) = u(d(\theta, \theta, \varepsilon(1), \beta|_{\{1\}})) = d(\theta, \theta, \varepsilon(1)).$$

[On suppose que $\alpha|_{\{0\}} = \text{Id}$, $\beta|_{\{0\}} = \text{Id}$ et que $\varepsilon(t)$ est choisi de telle sorte que $\psi_1(\varepsilon(t)) = \alpha(t)$]. Cet élément est évidemment égal à 0 puisque $\varepsilon(1)$ est homotope à l'identité. Réciproquement, si

$$u(d(E, F, \alpha, \beta)) = d(E, F, \alpha) = 0,$$

il existe des objets θ et θ' de $\mathcal{C}$ et $\varepsilon \in \text{Aut } \theta'$ [ε étant homotope à l'identité par une homotopie $\varepsilon(t)$ telle que $\varepsilon(0) = \text{Id}$ et que $\varepsilon(1) = \varepsilon$] de façon que $(E \oplus \theta, F \oplus \theta, \alpha \oplus \text{Id})$ soit isomorphe à $(\theta', \theta', \varepsilon)$. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \varphi_1(E \oplus \theta) & \xrightarrow{\varphi_1(f)} & \theta' \\ \alpha \oplus \text{Id} \downarrow & & \downarrow \varepsilon \\ \varphi_1(F \oplus \theta) & \xrightarrow{\varphi_1(g)} & \theta' \end{array}$$

Alors

$$\begin{aligned} d(E, F, \alpha, \beta) &= d(E \oplus \theta, F \oplus \theta, \alpha \oplus \text{Id}, \beta \oplus \text{Id}) \\ &= d(\theta', \theta', \varepsilon, \varphi_2(f)(\alpha \oplus \text{Id}) \varphi_2(g^{-1})) = \partial(d(\varphi_2 \theta', \varphi_2 \theta', \varepsilon(t), \beta)), \end{aligned}$$

avec

$$\beta|_{\{0\}} = \text{Id} \quad \text{et} \quad \beta|_{\{1\}} = \varphi_2(g)(\alpha \oplus \text{Id}) \varphi_2(g^{-1}).$$

Exactitude en $K(D^1, S^0; \psi_2)$: Soit $d(\theta, \theta, \alpha, \beta)$, où $\alpha|_{\{0\}} = \text{Id}$ et $\beta|_{\{0\}} = \text{Id}$, un élément quelconque de $K(D^1, S^0; \psi_2)$. Alors

$$\begin{aligned} \partial(v_1(d(\theta, \theta, \alpha, \beta))) &= \partial(d(\varphi_2 \theta, \varphi_2 \theta, \psi_1 \alpha, \varphi_2 \beta)) \\ &= d(\theta, \theta, \alpha|_{\{1\}}, \varphi_2 \beta|_{\{1\}}) = d(\theta, \theta, \varphi_1 \beta|_{\{1\}}, \varphi_2 \beta|_{\{1\}}) = d(\theta, \theta, \text{Id}) = 0. \end{aligned}$$

Réciproquement, soit $d(\theta, \theta, \alpha, \beta) \in K(D^1, S^0; \psi_2)$ tel que $\varphi_2 \theta' = \theta$, ce qui est loisible, φ_2 étant quasi-surjectif, et tel que

$$\partial(d(\theta, \theta, \alpha(t), \beta)) = d(\theta', \theta', \varepsilon(1), \beta|_{\{1\}}) = 0$$

(où $t \in D^1$ et où $\psi_1(\varepsilon(t)) = \alpha(t)$, $\beta|_{\{0\}} = \text{Id}$). Il existe donc des homotopies $\gamma(u) \in \text{Aut}(\varphi_1 \theta'')$ et $\gamma'(u) \in \text{Aut}(\varphi_2 \theta''')$, $u \in [0, 1]$, $\theta'', \theta''' \in \text{Ob } \mathcal{C}$, telles que

$$\gamma(0) = \text{Id}, \quad \gamma'(0) = \text{Id}, \quad \psi_2(\gamma'(u)) = \psi_1(\gamma(u))$$

et telles que les quadruples

$$(\theta' \oplus \theta'', \theta' \oplus \theta'', \varepsilon(1) \oplus \text{Id}, \beta|_{\{1\}} \oplus \text{Id}) \quad \text{et} \quad (\theta'', \theta''', \gamma(1), \gamma'(1))$$

soient isomorphes. On a donc des diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} \varphi_1(\theta' \oplus \theta'') & \xrightarrow[\approx]{\varphi_1(f)} & \varphi_1(\theta''') \\ \varepsilon(1) \oplus \text{Id} \downarrow \approx & & \downarrow \gamma(1) \\ \varphi_1(\theta' \oplus \theta'') & \xrightarrow[\approx]{\varphi_1(g)} & \varphi_1(\theta''') \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \varphi_2(\theta' \oplus \theta'') & \xrightarrow[\approx]{\varphi_2(f)} & \varphi_2(\theta''') \\ \beta|_{\{1\}} \oplus \text{Id} \downarrow \approx & & \downarrow \gamma'(1) \\ \varphi_2(\theta' \oplus \theta'') & \xrightarrow[\approx]{\varphi_2(g)} & \varphi_2(\theta''') \end{array}$$

On a

$$d(\theta, \theta, \alpha, \beta) = d(\varphi_2(\theta' \oplus \theta''), \varphi_2(\theta' \oplus \theta''), \alpha(t) \oplus \text{Id}, \beta \oplus \text{Id}),$$

or

$$\alpha(t) \oplus \text{Id} = \psi_1(\varepsilon(t) \oplus \text{Id}) \quad \text{et} \quad (\alpha(t) \oplus \text{Id})|_{t=1} = \psi_2(\varphi_2(g^{-1})\gamma'(1)\varphi_2(f)).$$

Soit $\beta(t, u)$, $t \in D^1$, $u \in [0, 1]$, un prolongement de

$$\omega(u) = \psi_2(\varphi_2(g^{-1})\gamma'(u)\varphi_2(f)) \quad \text{à } D^1 \times [0, 1]$$

qui coïncide avec $\alpha(t) \oplus \text{Id}$ pour $u = 1$ et qui est égal à l'identité pour $t = 0$. Un tel prolongement existe toujours car l'ensemble formé par deux côtés consécutifs d'un carré est rétracte du carré tout entier. Comme

$$\alpha(t) \oplus \text{Id} = \psi_1(\varepsilon(t) \oplus \text{Id})$$

il existe $\delta(t, u) \in \text{Aut}(\varphi_1(\theta' \oplus \theta''))$ tel que

$$\delta(t, 1) = \varepsilon(t) \oplus \text{Id}, \quad \delta(0, u) = \text{Id}$$

et tel que

$$\psi_1(\delta(t, u)) = \beta(t, u).$$

Alors

$$d(\theta, \theta, \alpha, \beta) = \nu_1(d(\theta' \oplus \theta'', \theta' \oplus \theta'', \delta(t, 0), \eta)),$$

avec $\eta|_{\{1\}} = g^{-1}$ et $\eta|_{\{0\}} = \text{Id}$.

C. Q. F. D.

Parmi les nombreux corollaires de ce théorème (cf. [17]) retenons surtout celui-ci, qui nous servira pour le calcul du groupe K des fibrés projectifs réels :

COROLLAIRE (1.3.10). — Soit

$$\mathcal{C} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{C}' \xrightarrow{\psi} \mathcal{C}''$$

une suite de catégories de Banach et de foncteurs linéaires continus quasi-surjectifs. La suite

$$K(D^1, S^0; \psi\varphi) \rightarrow K(D^1, S^0; \psi) \rightarrow K(\varphi) \rightarrow K(\psi\varphi) \rightarrow K(\psi)$$

associée à la grille

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{C}' \\ \psi.\varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ \mathcal{C}'' & \xrightarrow{\text{Id}} & \mathcal{C}'' \end{array}$$

est alors une suite exacte.

Soient maintenant $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux familles continues de catégories de Banach sur X (Définition 1.2.12). Une famille continue φ de foncteurs linéaires continus de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$ est la donnée, pour chaque U , de foncteurs linéaires continus $\varphi_U: \mathcal{C}(U) \rightarrow \mathcal{C}'(U)$ commutant aux foncteurs restriction $\rho^{T,U}$. On désigne alors par $K(U, T; \varphi)$ le groupe K de la grille carrée

$$(\mathcal{O}) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C}(U) & \xrightarrow{\rho^{T,U}} & \mathcal{C}(T) \\ \varphi_U \downarrow & & \downarrow \varphi_T \\ \mathcal{C}'(U) & \xrightarrow{\rho^{T,U}} & \mathcal{C}'(T) \end{array}$$

PROPOSITION (1.3.11) (Excision). — Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux familles continues de catégories de Banach et soit $\varphi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ une famille de foncteurs linéaires continus de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$. L'inclusion $i: (X_1, X_1 \cap X_2) \rightarrow (X_1 \cup X_2, X_2)$ induit alors un isomorphisme i^* de $K(X_1 \cup X_2, X_2; \varphi)$ sur $K(X_1, X_1 \cap X_2; \varphi)$.

Pour démontrer cette proposition, on aura besoin de la définition et du lemme suivants :

DÉFINITION (1.3.12). — Un élément (E, F, α, β) de $\Gamma(\mathcal{O})$, où $\alpha: \varphi E \xrightarrow{\sim} \varphi F$ et $\beta: E|_T \xrightarrow{\sim} F|_T$, avec $\varphi(\beta) = \alpha|_T$, est dit quasi-élémentaire si $E = F$, $\beta = \text{Id}$ et si α est homotope à l'identité dans une homotopie constante au-dessus de T .

LEMME (1.3.13). — Pour qu'un élément $d(\sigma)$ de $K(U, T; \varphi)$, avec $\sigma = (E, F, \alpha, \beta)$, soit nul, il faut et il suffit qu'il existe un objet élémentaire τ et un objet quasi-élémentaire τ' tels que $\sigma \oplus \tau$ soit isomorphe à τ' .

Démonstration du lemme. — La condition suffisante est évidente. D'après la définition de $K(U, T; \varphi)$ il suffit donc de montrer que pour tout quadruple $\sigma = (\theta, \theta, \alpha, \beta)$ tel qu'il existe des homotopies $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ de $\text{Aut } \theta|_T$ et de $\text{Aut } \theta|_T$ respectivement avec $\varphi(\beta(t)) = \alpha(t)|_T$, $\alpha(o) = \text{Id}$, $\beta(o) = \text{Id}$, $\alpha(1) = \alpha$, $\beta(1) = \beta$, σ est isomorphe à un quadruple quasi-

élémentaire. Comme le foncteur restriction $\mathcal{C}(U) \rightarrow \mathcal{C}(T)$ est un foncteur de Serre, il existe un automorphisme $\tilde{\beta}(t)$ de $\text{Aut } \theta$ dépendant continûment de t tel que $\tilde{\beta}(t)|_T = \beta(t)$. Donc σ est isomorphe de manière évidente au quadruple $(\theta, \theta, \varphi(\tilde{\beta}(1))^{-1}\alpha, \text{Id})$ qui est quasi-élémentaire.

Démonstration de la proposition (1.3.11).

(a) *i^* est surjectif.* Soit $d(E, F, \alpha, \beta)$ un élément de $K(X_1, X_1 \cap X_2; \varphi)$. Comme le foncteur restriction $\mathcal{C}(X_1 \cup X_2) \rightarrow \mathcal{C}(X_1)$ est quasi-surjectif, on peut supposer que $F = F'|_{X_1}$, où $F' \in \text{Ob } \mathcal{C}(X_1 \cup X_2)$. Soit E' l'objet obtenu par recollement de E et de $F'|_{X_1}$ grâce à l'isomorphisme β .

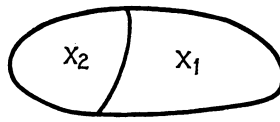


Fig. 1.

En identifiant $E'|_{X_1}$ et $F'|_{X_1}$ grâce à ce recollement, on peut prolonger α et β en posant $\alpha = \text{Id}$ et $\beta = \text{Id}$ au-dessus de X_2 . On a alors de manière évidente

$$i^*(d(E', F', \alpha, \beta)) = d(E, F, \alpha, \beta).$$

(b) *i^* est injectif.* Soit $d(E, F, \alpha, \beta)$ un élément de $K(X_1 \cup X_2, X_2; \varphi)$ tel que $d(\sigma) = 0$, avec

$$\sigma = (E|_{X_1}, F|_{X_1}, \alpha|_{X_1}, \beta|_{X_1 \cap X_2}).$$

D'après le lemme précédent, il existe donc un quadruple quasi-élémentaire $(\theta, \theta, \varepsilon, \text{Id})$ tel que σ lui soit isomorphe (à addition avec un objet élémentaire près), soit

$$f: E|_{X_1} \xrightarrow{\sim} \theta, \quad g: F|_{X_1} \xrightarrow{\sim} \theta.$$

On peut alors prolonger β en un isomorphisme $\tilde{\beta}$ de E sur F en posant $\tilde{\beta} = \beta$ au-dessus de X_2 et $\tilde{\beta} = g^{-1} \cdot f$ au-dessus de X_1 . D'autre part, on a $\alpha = \varphi\beta$ au-dessus de X_2 et $\alpha = \varphi g^{-1} \cdot \varepsilon \cdot \varphi f$ au-dessus de X_1 . L'isomorphisme α est donc homotope à $\varphi\tilde{\beta}$. Par suite

$$d(E, F, \alpha, \beta) = d(E, F, \varphi\tilde{\beta}, \tilde{\beta}) = 0.$$

C. Q. F. D.

Pour conclure, signalons que, dans de nombreux cas particuliers, on a une propriété d'excision plus forte. Par exemple, en anticipant sur les paragraphes 2.1 et 3.3, on a la proposition suivante dont la démonstration est calquée sur celle de la proposition (1.3.11) :

PROPOSITION (1.3.14). — Soit $\varphi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur linéaire continu entre deux catégories de Banach. Soient X un G -espace compact, Y un sous-ensemble fermé invariant par G et V un G -fibré de base X/Y muni d'une forme quadratique non dégénérée. La projection $\pi: X \rightarrow X/Y$ induit alors un isomorphisme

$$KR_G^\nu(X/Y, \{\gamma\}) \xrightarrow{\sim} KR_G^{\pi^*\nu}(X, Y).$$

CHAPITRE II.

COHOMOLOGIE DES CATÉGORIES DE BANACH.

2.1. Les foncteurs K^n et $K^{p,q}$.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie de Banach et soit $C^{p,q}$ l'algèbre de Clifford de $\mathbf{R}^{p,q}$ pour la forme quadratique

$$-x_1^2 - \dots - x_p^2 + x_{p+1}^2 + \dots + x_{p+q}^2 \quad (\text{cf. § 1.1}).$$

On désigne alors par $\mathcal{C}^{p,q}$ la catégorie formée des objets de $\mathcal{C}$ où l'algèbre $C^{p,q}$ opère (cf. § 1.2, exemples après le lemme 1.2.18). D'autre part, d'après la proposition 1.1.20, les algèbres $C^{p+4,q}$ et $C^{p,q+4}$ sont isomorphes. Explicitement, désignons par $e_i, \varepsilon_j, i = 1, \dots, p; j = 1, \dots, q$, les générateurs de l'algèbre $C^{p,q}$ en général. L'homomorphisme $f: C^{p+4,q} \rightarrow C^{p,q+4}$ défini par

$$f(e_i) = e_{i-4}, \quad f(\varepsilon_j) = \varepsilon_{j+4}$$

pour $i > 4$ et j quelconque et par

$$f(e_i) = \varepsilon_1 \dots \varepsilon_4 \hat{\varepsilon}_i \dots \varepsilon_4$$

pour $i \leq 4$, est alors un isomorphisme de $C^{p+4,q}$ sur $C^{p,q+4}$.

PROPOSITION (2.1.2). — L'isomorphisme de $C^{p+4,q}$ sur $C^{p,q+4}$ défini ci-dessus induit un isomorphisme des catégories de Banach $\mathcal{C}^{p+4,q}$ et $\mathcal{C}^{p,q+4}$. Si $\mathcal{C}$ est complexe, l'isomorphisme évident de $C^{p+1,q} \otimes \mathbf{C}$ sur $C^{p,q+1} \otimes \mathbf{C}$ induit de même un isomorphisme de $\mathcal{C}^{p+1,q}$ sur $\mathcal{C}^{p,q+1}$.

On définit maintenant un foncteur linéaire continu χ de $\mathcal{C}^{p,q}$ dans $\mathcal{C}^{p+1,q+1}$ de la manière suivante : soit E un objet de $\mathcal{C}$ et soient $e_i, \varepsilon_j, i = 1, \dots, p; j = 1, \dots, q$, les générateurs de $C^{p,q}$. On pose alors $\chi(E) = E \oplus E$, l'algèbre $C^{p+1,q+1}$ opérant sur $\chi(E)$ par les formules

$$e'_i = \begin{pmatrix} e_i & 0 \\ 0 & -e_i \end{pmatrix}, \quad \varepsilon'_j = \begin{pmatrix} \varepsilon_j & 0 \\ 0 & -\varepsilon_j \end{pmatrix}, \quad e'_{p+1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon'_{q+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Pour un morphisme f quelconque de $\mathcal{C}^{p,q}$, on pose de même

$$\chi(f) = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}.$$

PROPOSITION (2.1.3). — *Le foncteur χ est une équivalence des catégories de Banach $\mathcal{C}^{p,q}$ et $\mathcal{C}^{p+1,q+1}$.*

Démonstration. — On va définir un foncteur quasi-inverse

$$\chi' : \mathcal{C}^{p+1,q+1} \rightarrow \mathcal{C}^{p,q}.$$

Soit E un $\mathcal{C}^{p+1,q+1}$ -module; $\eta = \varepsilon_{q+1} e_{p+1}$ est alors un automorphisme involutif de E (considéré comme $\mathcal{C}^{p,q}$ -module par « restriction des scalaires »). On pose

$$\chi'(E) = E^0 = \text{Ker}(1 - \eta)/2 \quad \text{et} \quad \chi'(f) = f|_{E^0}.$$

On vérifie trivialement que $\chi' \cdot \chi \approx \text{Id}_{\mathcal{C}^{p,q}}$. Démontrons maintenant que $\chi \cdot \chi' = \text{Id}_{\mathcal{C}^{p+1,q+1}}$. Posons

$$E^1 = \text{Ker}(1 + \eta)/2;$$

E se décompose alors en la somme directe $E^0 \oplus E^1$ et e_{p+1} est un automorphisme de E (considéré comme objet de $\mathcal{C}$) qui s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & -\alpha^{-1} \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

Le morphisme de $E^0 \oplus E^0$ dans $E^0 \oplus E^1$ défini par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

induit alors un isomorphisme de $\chi \cdot \chi'$ sur le foncteur identique.

C. Q. F. D.

Remarque. — Dans cette démonstration on a utilisé implicitement le fait que $\mathcal{C}^{p+1,q+1} \approx \mathcal{C}^{p,q}(2)$.

Les propositions précédentes nous serviront également sous une autre forme qu'il est bon d'expliciter. Pour cela, nous aurons besoin d'une notion un peu plus riche que celle de catégorie de Banach et qui est la notion de *catégorie de Banach graduée*. Une telle catégorie est la donnée d'une catégorie prébanachique $\mathcal{C}$ et, pour tout couple (M, N) d'objets de $\mathcal{C}$, d'une $\mathbb{Z}_2$ -gradation $\text{Hom}(M, N) = \text{Hom}^0(M, N) \oplus \text{Hom}^1(M, N)$ sur l'espace vectoriel des morphismes de source M et de but N . On suppose évidemment que cette graduation est compatible avec la composition des morphismes et la somme directe des objets. Donc $\text{Hom}^p(M, N) \times \text{Hom}^q(N, P)$ s'envoie dans $\text{Hom}^{p+q}(M, P)$ par la composition des morphismes et l'on a des isomorphismes

$$\text{Hom}^p(M \oplus N, P) \approx \text{Hom}^p(M, P) \oplus \text{Hom}^p(N, P),$$

$$\text{Hom}^p(P, M \oplus N) \approx \text{Hom}^p(P, M) \oplus \text{Hom}^p(P, N).$$

Enfin, on suppose que tout projecteur *de degré zéro* admet un noyau. Si l'on désigne par $\mathcal{C}^0$ la catégorie prébanachique dont les objets sont ceux de $\mathcal{C}$ et dont les morphismes sont les morphismes de $\mathcal{C}$ de degré 0, la catégorie $\mathcal{C}^0$ est donc une catégorie de Banach. On laisse au lecteur le soin de définir lui-même les notions de foncteur gradué, d'équivalence et d'isomorphie (de degré 0) entre deux catégories de Banach graduées.

Si $\mathcal{C}$ est une catégorie de Banach arbitraire, les objets de $\mathcal{C}^{p, q+1}$ peuvent être considérés comme les objets d'une catégorie de Banach graduée qu'on définit ainsi. Soient $e_i, \varepsilon_j, i = 1, \dots, p; j = 1, \dots, q+1$, les générateurs de l'algèbre $C^{p, q+1}$ et soient E, F deux objets de $\mathcal{C}^{p, q+1}$. Un $C^{p, q}$ -morphisme f de E dans F est dit de degré 0 (resp. 1) si $f \cdot \varepsilon_{q+1} = \varepsilon_{q+1} \cdot f$ (resp. $f \cdot \varepsilon_{q+1} = -\varepsilon_{q+1} \cdot f$). On vérifie aisément qu'on a défini ainsi une catégorie de Banach graduée qu'on désigne par $\hat{\mathcal{C}}^{p, q}$. Elle s'interprète également comme la catégorie formée des objets *gradués* de $\mathcal{C}$ où l'algèbre *graduée* $C^{p, q}$ opère. Il résulte de là que l'isomorphisme des algèbres graduées $C^{p+4, q}$ et $C^{p, q+4}$ (resp. $C^{p+1, q} \otimes \mathbf{C}$ et $C^{p, q+1} \otimes \mathbf{C}$ dans le cas complexe) induit un isomorphisme de $\hat{\mathcal{C}}^{p+4, q}$ sur $\hat{\mathcal{C}}^{p, q+4}$ (resp. de $\hat{\mathcal{C}}^{p+1, q}$ sur $\hat{\mathcal{C}}^{p, q+1}$). On montre de même que les catégories $\mathcal{C}^{p, q}$ et $\mathcal{C}^{p+1, q+1}$ sont équivalentes. On vérifie que ces deux sortes d'équivalence (dans les cas gradué et non gradué) sont compatibles entre elles; on a ainsi les diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^{p+4, q} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{C}^{p+5, q+1} \\ \downarrow \approx & & \downarrow \approx \\ \mathcal{C}^{p, q+4} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{C}^{p+1, q+5} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \hat{\mathcal{C}}^{p+4, q} & \xrightarrow{\sim} & \hat{\mathcal{C}}^{p+5, q+1} \\ \downarrow \approx & & \downarrow \approx \\ \hat{\mathcal{C}}^{p, q+4} & \xrightarrow{\sim} & \hat{\mathcal{C}}^{p+1, q+5} \end{array}$$

et des diagrammes analogues dans le cas complexe.

Remarque. — La catégorie $(\hat{\mathcal{C}}^{p, q})^0$ s'identifie de manière évidente à $\mathcal{C}^{p, q+1}$.

DÉFINITION (2.1.4). — Soit $\mathcal{C}$ une catégorie de Banach et soit $n \in \mathbf{Z}$. On désigne par $\mathcal{C}^n$ (resp. $\hat{\mathcal{C}}^n$) la catégorie de Banach (resp. la catégorie de Banach graduée) $\hat{\mathcal{C}}^{n, 0}$ si $n \geq 0$ ou $\mathcal{C}^{0, -n}$ si $n < 0$.

PROPOSITION (2.1.5). — Les catégories $\mathcal{C}^n$ et $\mathcal{C}^{n+8}$ (resp. $\hat{\mathcal{C}}^n$ et $\hat{\mathcal{C}}^{n+8}$) sont canoniquement équivalentes. Si $\mathcal{C}$ est complexe, il en est de même de $\mathcal{C}^n$ et $\mathcal{C}^{n+2}$ (resp. $\hat{\mathcal{C}}^n$ et $\hat{\mathcal{C}}^{n+2}$).

Démonstration. — Raisonnons dans le cas réel non gradué pour fixer les idées. Il résulte de la proposition (2.1.3) que $\mathcal{C}^{p, q}$ est équivalente à la catégorie $\mathcal{C}^{p-q}$ par la composition de p ou q équivalences χ . Si $p - q = n$, on a donc les équivalences

$$\mathcal{C}^n \sim \mathcal{C}^{p, q} \sim \mathcal{C}^{p+4, q+4} \sim \mathcal{C}^{p+8, q} \sim \mathcal{C}^{n+8}.$$

En raison des diagrammes commutatifs précédents, ces équivalences sont indépendantes du choix des entiers p et q .

Si $\mathcal{C}$ est une catégorie de Banach graduée, on a un foncteur « oubli de structure graduée » $\mathbf{O} : \mathcal{C}^0 \rightarrow \overline{\mathcal{C}}$, $\overline{\mathcal{C}}$ désignant la catégorie prébanachique sous-jacente à $\mathcal{C}$: il est défini par l'identité sur les objets et les morphismes de $\mathcal{C}^0$. Le foncteur $\mathbf{O}$ est évidemment quasi-surjectif, mais n'est pas de Serre en général.

DÉFINITION (2.1.6). — *Le groupe K du foncteur $\mathbf{O}$, qu'on note $\hat{K}(\mathcal{C})$, est le groupe de Grothendieck gradué de la catégorie graduée $\mathcal{C}$. En particulier, si $\mathcal{C}$ est une catégorie de Banach arbitraire, on désigne par $K^{p,q}(\mathcal{C})$ [resp. $K^n(\mathcal{C})$] le groupe de Grothendieck gradué de la catégorie graduée $\hat{\mathcal{C}}^{p,q}$ (resp. $\hat{\mathcal{C}}^n$).*

Remarque 1. — Il résulte des calculs précédents qu'on a des isomorphismes naturels

$$K^{p,q}(\mathcal{C}) \approx K^{p+1,q+1}(\mathcal{C}), \quad K^{p+k,q}(\mathcal{C}) \approx K^{p,q+k}(\mathcal{C})$$

et des isomorphismes analogues dans le cas complexe. En particulier, les groupes K^n sont périodiques par rapport à n , de période 8 dans le cas réel et 2 dans le cas complexe.

Remarque 2. — On peut définir les groupes $K^{p,q}$, K^n sans avoir recours aux catégories graduées. Ainsi le groupe $K^{p,q}(\mathcal{C})$ est le groupe K du foncteur restriction des scalaires $\mathcal{C}^{p,q+1} \rightarrow \mathcal{C}^{p,q}$. Ceci résulte du fait que la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}^{p,q}$ engendrée par les images des objets de $\mathcal{C}^{p,q+1}$ par ce foncteur s'identifie à la catégorie prébanachique $(\overline{\hat{\mathcal{C}}^{p,q}})$. Notons que ce foncteur restriction est quasi-surjectif : si E est un $\mathcal{C}^{p,q}$ -module, désignons par $\bar{E}$ l'objet « conjugué » de E obtenu en faisant opérer $\mathcal{C}^{p,q}$ sur E via son involution canonique; alors, d'après la proposition (2.1.3), $E \oplus \bar{E}$ peut être muni d'une structure de $\mathcal{C}^{p+1,q+1}$ -module, donc de $\mathcal{C}^{p,q+1}$ -module, étendant la structure de $\mathcal{C}^{p,q}$ -module initiale.

D'après les considérations précédentes, tout élément de $K^0(\mathcal{C})$ s'écrit en particulier sous la forme $d(E, F, \alpha)$, où E et F sont des objets gradués de $\mathcal{C}$ (i. e. muni d'un automorphisme ε de carré 1) et où $\alpha : E \rightarrow F$ est un isomorphisme non nécessairement compatible avec les graduations. D'une manière générale, si G est un objet de $\mathcal{C}$ muni d'une graduation ε , posons $G^0 = \text{Ker}(1 - \varepsilon)/2$.

PROPOSITION (2.1.7). — *L'homomorphisme g de $K^0(\mathcal{C})$ dans $K(\mathcal{C})$ défini par $g(d(E, F, \alpha)) = \{E^0\} - \{F^0\}$ est un isomorphisme.*

Nous ne démontrerons pas cette proposition qui sera conséquence de la proposition (2.1.10) plus générale. Notons qu'on peut aisément définir

l'homomorphisme g' de $K(\mathcal{C})$ dans $K^0(\mathcal{C})$ en sens inverse. En effet, si E est un objet de $\mathcal{C}$, on peut le munir de la graduation $+1$ ou -1 . Désignons par E^+ ou E^- les objets gradués obtenus. On a alors

$$g'(E) = d(E^+, E^-, \alpha),$$

où α est l'identité sur les objets de $\mathcal{C}$ sous-jacents.

PROPOSITION (2.1.8). — Soit $\varphi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur de Serre (resp. quasi-surjectif). Le foncteur évident $\varphi^{p,q}: \mathcal{C}^{p,q} \rightarrow \mathcal{C}'^{p,q}$ est alors de Serre (resp. quasi-surjectif).

Démonstration. — On peut employer la méthode qui nous a servi à démontrer la proposition (1.2.16) mais d'une façon plus élémentaire dans ce contexte. Soit G le sous-groupe multiplicatif fini de $(C^{q,p})^*$ engendré par e_i, ε_j . Supposons que φ soit de Serre et considérons deux objets E et F de $\mathcal{C}^{p,q}$ ainsi qu'un morphisme $\alpha: \varphi^{p,q}(E) \rightarrow \varphi^{p,q}(F)$. Soit $\tilde{\alpha}$ un morphisme de E dans F (considérés comme objets de $\mathcal{C}$) tel que $\varphi(\tilde{\alpha}) = \alpha$. Alors, $\tilde{\alpha} = 1/2^{p+q+1} \sum_{\nu \in G} \nu^{-1} \cdot \alpha \cdot \nu$ est un morphisme de $\mathcal{C}^{p,q}$ -modules tel que $\varphi^{p,q}(\tilde{\alpha}) = \alpha$.

Supposons maintenant φ quasi-surjectif et considérons un objet E de $\mathcal{C}'^{p,q}$. Munissons $\tilde{E} = C^{p,q} \otimes E (\approx E^{p+q})$ de la structure de $\mathcal{C}^{p,q}$ -module induite par le premier facteur du produit tensoriel. Soient $i: E \rightarrow \tilde{E}, j: \tilde{E} \rightarrow E$ les morphismes définis par $i(e) = 1/2^{p+q+1} \sum_{\nu \in G} \nu^{-1} \cdot 1 \otimes \nu \cdot e$ et par $j(\lambda \otimes f) = \lambda \cdot f$

(avec les abus de langage signalés dans le paragraphe 1.2). Alors $j \cdot i = \text{Id}_E$; donc E est facteur direct de $\tilde{E}$. D'autre part, soient E' un objet de $\mathcal{C}'$ et F un objet de $\mathcal{C}$ tels que $\varphi(F) \approx E \oplus E'$. Alors $\varphi^{p,q}(\tilde{F}) = \tilde{E} \oplus \tilde{E}'$.

C. Q. F. D.

Soit $\varphi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur linéaire continu gradué entre deux catégories de Banach graduées. Nous dirons (par abus de langage) que φ est un foncteur de Serre quasi-surjectif si le foncteur $\bar{\varphi}: \bar{\mathcal{C}} \rightarrow \bar{\mathcal{C}}'$ est un foncteur de Serre et si $\varphi^0: \mathcal{C}^0 \rightarrow \mathcal{C}'^0$ est quasi-surjectif.

DÉFINITION (2.1.9). — Soit $\varphi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur de Serre gradué et quasi-surjectif. Le groupe K de la grille

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0 & \xrightarrow{\varphi^0} & \mathcal{C}'^0 \\ \circ \downarrow & & \downarrow \circ \\ \bar{\mathcal{C}} & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & \bar{\mathcal{C}}' \end{array}$$

qu'on note $\hat{K}(\varphi)$, est le groupe de Grothendieck gradué du foncteur φ . En particulier, si $\psi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ est un foncteur de Serre quasi-surjectif entre deux caté-

gories de Banach ordinaires, on désigne par $K^{p,q}(\psi)$ le groupe de Grothendieck du foncteur gradué évident $\hat{\psi}^{p,q} : \hat{C}^{p,q} \rightarrow \hat{C}'^{p,q}$. Le groupe $K^{p,q}(\psi)$ est donc le groupe K de la grille

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^{p,q+1} & \xrightarrow{\psi^{p,q+1}} & \mathcal{C}'^{p,q+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{C}^{p,q} & \xrightarrow{\psi^{p,q}} & \mathcal{C}'^{p,q} \end{array}$$

Comme dans la définition (2.1.6), on pose $K^n(\psi) = K^{n,0}(\psi)$ si n est positif et $K^n(\psi) = K^{0,-n}(\psi)$ si n est négatif. Ces définitions recourent évidemment les précédentes lorsque la catégorie d'arrivée est la catégorie nulle.

D'après les considérations du paragraphe 1.3, on peut donner une définition directe simple du groupe $K^{p,q}(\psi)$: considérons l'ensemble $\Gamma^{p,q}(\psi)$ formé des triples (E, F, α) , où $E, F \in \text{Ob } \mathcal{C}^{p,q+1}$ (i. e. sont des $\mathcal{C}^{p,q}$ -modules gradués) et où $\alpha : E \rightarrow F$ est un isomorphisme de $\mathcal{C}^{p,q}$ -modules, $\psi\alpha : \varphi E \rightarrow \varphi F$ étant un isomorphisme de $\mathcal{C}^{p,q+1}$ -modules (i. e. de degré 0). Un triple (E, F, α) est dit *élémentaire* si α est de degré 0. Deux triples (E_0, F_0, α_0) et (E_1, F_1, α_1) sont dits *homotopes* s'il existe un triple (E, F, α) de $\Gamma^{p,q}(\psi[0, 1])$ dont les restrictions en $\{0\}$ et $\{1\}$ soient isomorphes aux deux triples donnés. Ceci revient à dire qu'il existe deux isomorphismes $f : E_0 \rightarrow E_1$, $g : F_0 \rightarrow F_1$ de degré 0 et une application continue $t \mapsto \alpha(t)$ du segment $[0, 1]$ dans $\text{Iso}(E_0, F_0)$ telle que $\alpha(0) = \alpha_0$, $\alpha(1) = g^{-1} \cdot \alpha_1 \cdot f$ et que $\psi(\alpha(t))$ soit de degré 0. L'ensemble quotient de $\Gamma^{p,q}(\psi)$ par la relation d'équivalence engendrée par l'homotopie et l'addition d'objets élémentaires est le groupe abélien $K^{p,q}(\psi)$ [cf. aussi la proposition (2.1.14)]. On note $d(E, F, \alpha)$ la classe du triple (E, F, α) dans $K^{p,q}(\psi)$.

Si $\rho^{Y,X} : \mathcal{C}(X) \rightarrow \mathcal{C}(Y)$ est le foncteur restriction associé à une catégorie de Banach $\mathcal{C}$, à un espace compact X et à un sous-espace fermé Y , on note $K^{p,q}(X, Y; \mathcal{C})$, $K^n(X, Y; \mathcal{C})$ les groupes $K^{p,q}(\rho^{Y,X})$, $K^n(\rho^{Y,X})$.

Dans la définition (2.1.8) considérons le cas particulier où $p = q = 0$. Tout élément de $K^0(\psi)$ s'écrit sous la forme $d(E^0 \oplus E^1, F^0 \oplus F^1, \alpha)$, où $\alpha : E^0 \oplus E^1 \rightarrow F^0 \oplus F^1$ est un $\mathcal{C}$ -isomorphisme tel que $\psi\alpha$ soit de degré 0, i. e. représenté par une matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} \varphi^0 \alpha & 0 \\ 0 & \psi^1 \alpha \end{pmatrix}.$$

Alors $d(E^0, F^0, \psi^0 \alpha)$ représente un élément de $K(\psi)$ et la correspondance $d(E, F, \alpha) \rightarrow d(E^0, F^0, \psi^0 \alpha)$ définit un homomorphisme g de $K^0(\psi)$ dans $K(\psi)$. La proposition suivante généralise alors la proposition (2.1.7).

PROPOSITION (2.1.10). — *L'homomorphisme $g : K^0(\psi) \rightarrow K(\psi)$ est un isomorphisme.*

On peut donner plusieurs démonstrations de cette proposition (cf. [17]). Nous allons adopter celle-ci qui a l'avantage de mettre en valeur le lemme suivant :

LEMME (2.1.11). — Soit

$$(\mathcal{O}) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\varphi_2} & \mathcal{C}_2 \\ \varphi_1 \downarrow & & \downarrow \psi_2 \\ \mathcal{C}_1 & \xrightarrow{\psi_1} & \mathcal{C}_{12} \end{array}$$

une grille carrée de catégories de Banach où φ_1 , φ_2 , ψ_1 et ψ_2 sont quasi-surjectifs et où ψ_2 est un foncteur de Serre. On a alors une suite exacte :

$$K(D^1, S^0; \varphi_1) \rightarrow K(D^1, S^0; \psi_2) \xrightarrow{\partial'} K(\mathcal{O}) \rightarrow K(\varphi_1) \rightarrow K(\psi_2),$$

où tous les homomorphismes, excepté ∂' , sont déduits de la fonctorialité du groupe K .

Démonstration du lemme. — Soit $\mathcal{M}_{\varphi_2}$ (resp. $\mathcal{M}_{\varphi_1}$) la catégorie cylindre d'application de φ_2 (resp. φ_1) (cf. fin du § 1.2). D'après le théorème (1.3.9), il suffit de démontrer que $K(\mathcal{O})$ est isomorphe au groupe K de la grille

$$(\tilde{\mathcal{O}}) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{\varphi_2} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_2} & \mathcal{C}_2 \\ \varphi_1 \downarrow & & \downarrow \psi_2 \\ \mathcal{M}_{\varphi_1} & \xrightarrow{\tilde{\psi}_1} & \mathcal{C}_1 \end{array}$$

Mais ceci résulte de la comparaison des deux suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} K(D^1, S^0; \tilde{\varphi}_2) & \rightarrow & K(D^1, S^0; \tilde{\psi}_1) & \xrightarrow{\partial} & K(\tilde{\mathcal{O}}) & \rightarrow & K(\tilde{\varphi}_2) \rightarrow K(\tilde{\psi}_1) \\ \uparrow \tilde{\theta}_2 & & \uparrow \tilde{\theta}_1 & & \uparrow \theta & & \uparrow \theta_2 \quad \uparrow \theta_1 \\ K(D^1, S^0; \varphi_2) & \rightarrow & K(D^1, S^0; \varphi_1) & \xrightarrow{\partial} & K(\mathcal{O}) & \rightarrow & K(\varphi_2) \rightarrow K(\varphi_1) \end{array}$$

obtenues en considérant les grilles « symétriques par rapport à la diagonale ».

Démonstration de la proposition (2.1.9). — Puisque l'algèbre de Clifford $C^{0,1}$ s'identifie à $\mathbf{R} \oplus \mathbf{R}$, $\mathcal{C}^{0,1}$ s'identifie à $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ pour toute catégorie de Banach $\mathcal{C}$. Le foncteur restriction des scalaires $\varphi: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ est défini par $\varphi((E, F)) = E \oplus F$ et le groupe $K^0(\psi)$ est donc le groupe K de la grille carrée

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} \times \mathcal{C} & \xrightarrow{\psi \times \psi} & \mathcal{C}' \times \mathcal{C}' \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi' \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{C}' \end{array}$$

D'autre part, d'après le lemme précédent appliqué à la grille symétrique, on a la suite exacte :

$$K(D^1, S^0; \psi \times \psi) \xrightarrow{\partial} K(D^1, S^0; \psi) \rightarrow K(\mathcal{O}) \rightarrow K(\psi \times \psi) \xrightarrow{\partial} K(\psi).$$

Comme

$$K(\psi \times \psi) \approx K(\psi) \oplus K(\psi) \quad \text{et} \quad K(D^1, S^0; \psi \times \psi) \approx K(D^1, S^0; \psi) \oplus K(D^1, S^0; \psi)$$

de manière évidente, il existe des homomorphismes γ_1 et γ inverses à gauche de δ_1 et δ respectivement. On a donc la suite exacte courte :

$$0 \rightarrow K^0(\psi) \rightarrow K(\psi) \oplus K(\psi) \rightarrow K(\psi) \rightarrow 0.$$

Le résultat annoncé s'en déduit, en comparant cette suite à la suite exacte scindée :

$$0 \rightarrow K(\psi) \xrightarrow{\alpha} K(\psi) \oplus K(\psi) \xrightarrow{\beta} K(\psi) \rightarrow 0,$$

où

$$\alpha(x) = (x, -x) \quad \text{et} \quad \beta(y, z) = y + z.$$

Nous allons donner une autre interprétation des groupes $K^{p,q}(\psi)$ qui nous sera très utile dans le paragraphe suivant et dans les applications.

Considérons la catégorie additive $\Delta^{p,q}(\psi)$ suivante : un objet est un triple $(E, \varepsilon^1, \varepsilon^2)$, où E est un objet de $\mathcal{C}^{p,q}$ et où ε^1 et ε^2 sont deux graduations ⁽⁸⁾ de E telles que $\psi(\varepsilon^1) = \psi(\varepsilon^2)$; un morphisme de source $(E, \varepsilon^1, \varepsilon^2)$ et de but (F, η^1, η^2) est un morphisme $f: E \rightarrow F$ de $\mathcal{C}^{p,q}$ -modules tel que $\eta^1.f = f.\varepsilon^1$ et que $\eta^2.f = f.\varepsilon^2$. Notons $\Gamma^{p,q}(\psi)$ l'ensemble des objets de $\Delta^{p,q}(\psi)$ et $M^{p,q}(\psi)$ l'ensemble de ses classes d'isomorphie. Un objet $(E, \varepsilon^1, \varepsilon^2)$ est dit *élémentaire* si $\varepsilon^1 = \varepsilon^2$. Deux objets $\sigma_0 = (E_0, \varepsilon_0^1, \varepsilon_0^2)$ et $\sigma_1 = (E_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ sont dits *homotopes* s'il existe un objet $(E, \varepsilon^1, \varepsilon^2)$ de $\Gamma^{p,q}(\psi[0, 1])$ dont les restrictions en $\{0\}$ et $\{1\}$ soient respectivement isomorphes à σ_0 et σ_1 . Par définition, $K'^{p,q}(\psi)$ est le monoïde quotient de $\Gamma^{p,q}(\psi)$ par la relation d'équivalence usuelle. Bien entendu deux triples isomorphes sont équivalents. Comme il est d'usage, on note $d(E, \varepsilon^1, \varepsilon^2)$ la classe du triple $(E, \varepsilon^1, \varepsilon^2)$ dans $K'^{p,q}(\psi)$.

Soit $d(E, \varepsilon^1, \varepsilon^2)$ un élément de $K'^{p,q}(\psi)$ et soit E^i , $i=1, 2$, le $\mathcal{C}^{p,q}$ -module E muni de la graduation ε^i . Soit $\alpha: E^1 \rightarrow E^2$ l'isomorphisme de $\mathcal{C}^{p,q}$ -modules égal à l'identité sur les objets de $\mathcal{C}$ sous-jacents. Alors la correspondance $d(E, \varepsilon^1, \varepsilon^2) \mapsto d(E^1, E^2, \alpha)$ définit un homomorphisme γ de $K'^{p,q}(\psi)$ dans $K^{p,q}(\psi)$.

PROPOSITION (2.1.12). — *L'homomorphisme γ de $K'^{p,q}(\psi)$ dans $K^{p,q}(\psi)$ défini ci-dessus est un isomorphisme. En particulier, $K'^{p,q}(\psi)$ est un groupe abélien.*

Démonstration. — On va définir un homomorphisme $\gamma': K^{p,q}(\psi) \rightarrow K'^{p,q}(\psi)$ inverse de γ . Soient $d(E, F, \alpha)$ un élément de $K^{p,q}(\psi)$ et E' (resp. F')

⁽⁸⁾ On appelle « graduation » de E un automorphisme involutif de E qui anticommute aux générateurs de l'algèbre $\mathcal{C}^{p,q}$ ou, si l'on préfère, une structure de $\mathcal{C}^{p,q+1}$ -module sur E étendant la structure de $\mathcal{C}^{p,q}$ -module initiale.

le $C^{p,q}$ -module sous-jacent à E (resp. F). Soit ε (resp. η) la graduation de E' (resp. F') et soient ε^i , $i = 1, 2$, les graduations de E' définies par $\varepsilon^1 = \varepsilon$ et par $\varepsilon^2 = \alpha^{-1} \cdot \eta \cdot \alpha$. On pose alors

$$\gamma'(d(E, F, \alpha)) = d(E', \varepsilon^1, \varepsilon^2).$$

On vérifie sans peine que γ' est inverse de γ .

Remarque. — Grâce à cet isomorphisme, ou bien directement, on démontre la formule

$$d(E, \varepsilon^1, \varepsilon^2) + d(E, \varepsilon^2, \varepsilon^3) = d(E, \varepsilon^1, \varepsilon^3).$$

En particulier, $d(E, \varepsilon^1, \varepsilon^2)$ est l'inverse de $d(E, \varepsilon^1, \varepsilon^2)$.

Notation. — En raison de l'isomorphisme précédent, on conviendra de noter $K^{p,q}(\psi)$ indifféremment le groupe $K^{p,q}(\psi)$ ou $K'^{p,q}(\psi)$.

LEMME (2.1.13). — Soit $d(E, \varepsilon^1, \varepsilon^2)$ un élément de $K^{p,q}(\psi)$. Pour que $d(E, \varepsilon^1, \varepsilon^2) = 0$, il faut et il suffit qu'il existe un $C^{p,q}$ -module T muni d'une graduation η [couple qu'on notera en abrégé (T, η)], tel que $\varepsilon^1 \oplus \eta$ soit homotope à $\varepsilon^2 \oplus \eta$ parmi les graduations de $E \oplus T$.

Démonstration. — Si $d(E, \varepsilon^1, \varepsilon^2) = 0$, il existe deux $C^{p,q}$ -modules gradués (T, η) et (T', η') et un isomorphisme $f: E \oplus T \rightarrow T'$ de $C^{p,q}$ -modules tels que $\varepsilon^1 \oplus \eta$ et $\varepsilon^2 \oplus \eta$ soient toutes deux homotopes à $f^{-1} \cdot \eta' \cdot f$. Donc $\varepsilon^1 \oplus \eta$ et $\varepsilon^2 \oplus \eta$ sont homotopes (l'image par ψ de cette homotopie étant constante). La réciproque est immédiate.

PROPOSITION (2.1.14). — Notons i l'homomorphisme évident de $M^{p,q}(\psi)$ dans $K^{p,q}(\psi)$. Soit G un groupe abélien et f un homomorphisme de $M^{p,q}(\psi)$ dans G qui jouit de la propriété suivante :

(H) $f(\{E, \varepsilon^1, \varepsilon^2\}) = 0$ s'il existe une application continue ε de $[0, 1]$ dans l'ensemble des graduations de E telle que $\varepsilon(0) = \varepsilon^1$, $\varepsilon(1) = \varepsilon^2$ et que $\psi(\varepsilon(t)) = \psi(\varepsilon^1)$. Il existe alors un homomorphisme $\tilde{f}$ de $K^{p,q}(\psi)$ dans G , et un seul, tel que $f = \tilde{f} \cdot i$.

Démonstration. — Évidente à partir du lemme précédent.

Remarque. — La proposition précédente permet ainsi de caractériser le groupe $K^{p,q}(\psi)$ à isomorphisme près.

2.2. Le théorème fondamental.

Soit W un fibré vectoriel réel de dimension finie, de base un espace compact X , muni d'une forme quadratique non dégénérée Q . Soit V un sous-fibré de W tel que la restriction de Q à V soit non dégénérée. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie de Banach et si Y est un sous-ensemble fermé de X ,

on désigne par $K^{W;V}(X, Y; \mathcal{C})$ [ou simplement par $K^{W;V}(X, Y)$ lorsqu'il n'y a pas de confusion possible] le groupe K de la grille carrée

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^{W;V}(X) & \longrightarrow & \mathcal{C}^V(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{C}^{W;V}(Y) & \longrightarrow & \mathcal{C}^V(Y) \end{array}$$

soit $E^{W;V}(X, Y)$ l'ensemble formé des triples (E, ω^1, ω^2) , où E est un objet de $\mathcal{C}$ et où ω^1 et ω^2 sont deux structures de $C(W)$ -modules sur E (considéré comme $\mathcal{C}$ -fibré trivial sur X) telles que $\omega^1|_Y = \omega^2|_Y$ et que $\omega^1|_V = \omega^2|_V$. Comme dans le paragraphe précédent, on démontre que le groupe $K^{W;V}(X, Y)$ est le quotient de $\mathcal{E}^{W;V}(X, Y)$ par la relation d'équivalence engendrée par l'homotopie et l'addition de triples élémentaires [i. e. de la forme (E, ω, ω)].

En particulier, soit $T^{p,q}$ le fibré trivial $X \times \mathbb{R}^{p+q}$, muni de la forme quadratique $-x_1^2 - \dots - x_p^2 + x_{p+1}^2 + \dots + x_{p+q}^2$, et soit $W = V \oplus T^{0,1}$. On note alors $K^V(X, Y; \mathcal{C})$ le groupe $K^{W;V}$ obtenu. Bien entendu, si $\mathcal{C}^V(X)$ désigne la catégorie graduée formée des $\mathcal{C}$ -fibrés gradués où opère le fibré en algèbres graduées $C(V)$, $K^V(X, Y; \mathcal{C})$ est aussi le groupe de Grothendieck du foncteur gradué $\mathcal{C}^V(X) \rightarrow \mathcal{C}^V|_{Y(1)}$. Dans la suite de ce chapitre, on s'intéressera exclusivement aux groupes K^V . On étudiera les groupes plus généraux $K^{W;V}$ dans le chapitre suivant⁽⁹⁾. Si $V = T^{p,q}$, on retrouve, bien entendu, les groupes $K^{p,q}(X, Y) = K^{p,q}(X, Y; \mathcal{C})$ définis dans le paragraphe précédent.

Soit $V = V' \oplus V''$ une décomposition de V en sous-fibrés orthogonaux pour Q , la restriction de Q à V' étant définie positive. La projection orthogonale de l'hémisphère supérieur $S^+(V' \oplus 1)$ sur $B(V')$ (1 désignant le fibré trivial $T^{0,1}$) est un homéomorphisme laissant invariants les points de $S(V')$. On identifiera désormais $S^+(V' \oplus 1)$ à $B(V')$ grâce à cet homéomorphisme. Soit t l'homomorphisme de $K^{V' \oplus V''}(X)$ dans $K^{\pi^* V''}(B(V'), S(V'))$ défini par la formule

$$t(d(E, \omega^1, \omega^2)) = d(\pi^* E, \varepsilon(\omega^1), \varepsilon(\omega^2)),$$

où

- a. $\pi : S^+(V' \oplus 1) \rightarrow X$ désigne la projection canonique;
- b. les structures de $C(V'' \oplus 1)$ -modules de $\pi^* E$ sont représentées par les applications continues

$$\varepsilon(\omega^i) : V'' \oplus 1 \rightarrow \text{End } \pi^* E \quad (i=1, 2),$$

⁽⁹⁾ En fait, malgré les apparences, les groupes K^V nous seront plus utiles que les groupes $K^{W;V}$ dans les applications (à l'exception du § 3.2).

qui sont définies au-dessus du point (ν', λ) de $S^+(V' \oplus \mathbf{1})$ par

$$\varepsilon(w^i)(\nu'', \mu) = w^i(0, \nu'', 0) + \mu w^i(\nu', 0, \lambda).$$

THÉORÈME FONDAMENTAL (2.2.1). — *L'homomorphisme*

$$t: K^{V' \oplus V''}(X) \rightarrow K^{\pi^* V''}(B(V'), S(V'))$$

est un isomorphisme.

Avant de commencer la démonstration, qui occupera tout le paragraphe, il est bon de faire les quelques remarques suivantes. Tout d'abord, ce théorème a comme conséquence le théorème de périodicité de Bott en K -théorie réelle. En effet, si l'on a $V'' = 0$, $V' = T^{0, s_p}$, l'homomorphisme t définit un isomorphisme de $K^{-s_p}(X) \approx K(X)$ sur $K(X \times D^{s_p}, X \times S^{s_p-1})$ [$\mathcal{C}$ étant par exemple la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie]. Dans le paragraphe suivant nous donnerons une description plus précise de cet isomorphisme ainsi que le lien entre le théorème (2.2.1) et les résultats d'Atiyah, Bott et Shapiro [6]. Dans le chapitre suivant, nous démontrerons des variantes et des généralisations de (2.2.1) qui auront de nombreuses applications, en théorie K_G et en théorie KR notamment.

Pour démontrer le théorème (2.2.1), plusieurs étapes vont être nécessaires. Nous supposons d'abord que X est réduit à un point ($\mathcal{C}$ étant quelconque) et nous raisonnerons par récurrence sur la dimension de V' . Ceci démontré, le théorème résultera d'un argument classique de suite exacte de Mayer-Vietoris. L'étape essentielle est la démonstration du théorème suivant :

THÉORÈME (2.2.2). — *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie de Banach. L'homomorphisme*

$$t: K^{p, q+1}(\mathcal{C}) \rightarrow K^{p, q}(D^1, S^0; \mathcal{C})$$

est un isomorphisme.

La démonstration va utiliser des techniques déjà éprouvées par Atiyah, Bott et Wood ([5], [25]). Elle diffère sensiblement de celle trouvée originellement par l'auteur (cf. [17]).

Explicitons l'homomorphisme t dans ce cas particulier en convenant d'identifier l'action de $C^{0,1}$ à la graduation définie par son générateur. Tout élément de $K^{p, q+1}(\mathcal{C})$ s'écrit alors sous la forme $d(E, \nu, \varepsilon_{q+1}, \varepsilon^1, \varepsilon^2)$: ν y représente l'action d'un vecteur générique de $\mathbf{R}^{p+q}$, ε_{q+1} la graduation de (E, ν) induite par l'action de $C^{0,1}$ et $\varepsilon^j, j = 1, 2$, deux graduations (indépendantes) de $(E, \nu, \varepsilon_{q+1})$. On a donc en résumé les relations

$$\begin{aligned} \nu^2 &= Q(\nu) \cdot \mathbf{1}, & (\varepsilon_{q+1})^2 &= \mathbf{1}, & (\varepsilon^j)^2 &= \mathbf{1}, \\ \nu \cdot \varepsilon_{q+1} &= -\varepsilon_{q+1} \cdot \nu, & \nu \cdot \varepsilon^j &= -\varepsilon^j \cdot \nu, & \varepsilon_{q+1} \cdot \varepsilon^j &= -\varepsilon^j \cdot \varepsilon_{q+1}. \end{aligned}$$

Considérons maintenant le $\mathcal{C}$ -fibré trivial $\pi^* E$, $\pi: D^1 \rightarrow P$, et munissons-le de la structure de $C^{p, q}$ -module $\pi^* \nu$. Vu l'identification faite plus haut,

on représente D^1 par le demi-cercle du plan complexe formé des points $e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Munissons π^*E des graduations ε^j définies au-dessus du point $e^{i\theta}$ par $\varepsilon_{q+1} \cos \theta + \varepsilon^j \sin \theta$. Avec des notations évidentes, on a ainsi la formule

$$t(d(E, \nu, \varepsilon_{q+1}, \varepsilon^1, \varepsilon^2)) = d(E, \nu, \varepsilon_{q+1} \cos \theta + \varepsilon^1 \sin \theta, \varepsilon_{q+1} \cos \theta + \varepsilon^2 \sin \theta).$$

LEMME (2.2.3). — *Tout élément de $K^{p,q}(D^1, S^0)$ s'écrit sous la forme*

$$d(E, \nu, \varepsilon_{q+1} \cos \theta + \varepsilon^1 \sin \theta, \varepsilon(\theta)),$$

où $(E, \nu, \varepsilon_{q+1}, \varepsilon^1)$ est un $C^{p,q+1}$ -module gradué et où $\varepsilon_{q+1} \cos \theta + \varepsilon^1 \sin \theta$ [resp. $\varepsilon(\theta)$] représente les graduations de $(E, \nu, \varepsilon_{q+1})$ au point $e^{i\theta}$. Pour que

$$d(E, \nu, \varepsilon_{q+1} \cos \theta + \varepsilon^1 \sin \theta, \varepsilon(\theta)) = 0,$$

il faut et il suffit qu'il existe un $C^{p,q+1}$ -module gradué $(F, \omega, \eta_{q+1}, \eta^1)$ tel que $\varepsilon(\theta) \oplus (\eta_{q+1} \cos \theta + \eta^1 \sin \theta)$ soit homotope à

$$(\varepsilon_{q+1} \cos \theta + \varepsilon^1 \sin \theta) \oplus (\eta_{q+1} \cos \theta + \eta^1 \sin \theta)$$

parmi les graduations de $(E \oplus F, \nu \oplus \omega, \varepsilon_{q+1} \oplus \eta_{q+1})$ (l'homotopie restreinte à S^0 étant constante).

Démonstration. — Puisque D^1 est contractile, on peut supposer que la première graduation $\varepsilon'(\theta)$ d'un élément $d(E, \nu, \varepsilon'(\theta), \varepsilon(\theta))$ de $K^{p,q}(D^1, S^0)$ est constante et égale à ε_{q+1} grâce à un isomorphisme convenable. On peut aussi supposer, quitte à ajouter un triple élémentaire, que $(E, \nu, \varepsilon_{q+1})$ est la restriction d'un $C^{p,q+1}$ -module gradué de graduation ε^1 (disons). La première assertion s'en déduit compte tenu de l'identité

$$\varepsilon_{q+1} \cos \theta + \varepsilon^1 \sin \theta = \zeta \cdot \varepsilon_{q+1} \cdot \zeta^{-1}, \quad \text{avec} \quad \zeta = \cos \frac{\theta}{2} + \varepsilon^1 \varepsilon_{q+1} \sin \frac{\theta}{2}.$$

La deuxième assertion est une conséquence immédiate de ce qui précède et du lemme (2.1.13).

Notation. — Pour alléger l'écriture, on notera désormais $(\nu, \varepsilon_{q+1}, \varepsilon^1)$ une structure de $C^{p,q+2}$ -module générique sur E, F , etc.

LEMME (2.2.4). — *Tout élément de $K^{p,q}(D^1, S^0)$ s'écrit sous la forme $d(E, \nu, \varepsilon_{q+1} \cos \theta + \varepsilon^1 \sin \theta, \alpha \cdot \varepsilon_{q+1} \cdot \alpha^{-1})$, où $\alpha = \alpha(\theta)$ est un automorphisme du $C^{p,q}$ -module (E, ν) dépendant continûment de θ et jouissant des propriétés suivantes :*

- (i) $\alpha(0) = 1$;
- (ii) $\varepsilon_{q+1} \cdot \alpha(\pi) = -\alpha(\pi) \cdot \varepsilon_{q+1}$.

Pour que $d(E, \nu, \varepsilon_{q+1} \cos \theta + \varepsilon^1 \sin \theta, \alpha \cdot \varepsilon_{q+1} \cdot \alpha^{-1}) = 0$, il faut et il suffit qu'il existe un $C^{p,q+1}$ -module gradué $(F, \nu, \varepsilon_{q+1}, \varepsilon^1)$ tel que $\alpha \oplus \zeta_F$ soit homotope à $\zeta_E \oplus \zeta_F$ parmi les automorphismes de $(E \oplus F)$ vérifiant (i) et (ii).

Démonstration. — Désignons par $GL^0(E)$ [resp. $\overline{GL}^0(E)$] le groupe des automorphismes α de (E, ν) appartenant à la composante neutre [resp. et tels que $\alpha(o) = 1$]; les objets de $\mathcal{C}$ sont toujours identifiés ici aux $\mathcal{C}$ -fibrés triviaux sur D^1 . Désignons de même par $GRAD^0(E)$ [resp. $\overline{GRAD}^0(E)$] l'ensemble des graduations ε de (E, ν) appartenant à la composante connexe de ε_{q+1} [resp. tels que $\varepsilon(o) = \varepsilon_{q+1}$]. L'application s définie par $s(\alpha) = \alpha \cdot \varepsilon_{q+1} \cdot \alpha^{-1}$ est une application continue de $GL^0(E)$ dans $GRAD^0(E)$ [resp. de $\overline{GL}^0(E)$ dans $\overline{GRAD}^0(E)$]. En fait, on voit aisément (cf. Wood [25]) que cette application est surjective et ouverte et que son noyau est le sous-groupe H^0 (resp. $\overline{H}^0$) formé des éléments α tels que $\alpha \cdot \varepsilon_{q+1} = \varepsilon_{q+1} \cdot \alpha$. Par passage au quotient, s induit donc un homéomorphisme de $GL^0(E)/H^0$ sur $GRAD^0(E)$ donc de $\overline{GL}^0(E)/\overline{H}^0$ sur $\overline{GRAD}^0(E)$. En particulier, s est une fibration de Serre de $\overline{GL}^0(E)$ sur $\overline{GRAD}^0(E)$. Avec les notations du lemme, on en déduit qu'il existe un automorphisme $\alpha(\theta)$ tel que $\alpha(o) = 1$ et tel que

$$\varepsilon(\theta) = \alpha(\theta) \cdot \varepsilon_{q+1} \cdot (\alpha(\theta))^{-1}.$$

On a, de plus, $-\varepsilon_{q+1} = \alpha(\pi) \cdot \varepsilon_{q+1} \cdot (\alpha(\pi))^{-1}$; donc α satisfait à (i) et (ii). La deuxième assertion du lemme résulte aussitôt du lemme (2.2.3) et de la fibration précédente [compte tenu que ζ satisfait à (i) et (ii)].

On a ainsi ramené le problème de la recherche de $\varepsilon(\theta)$ à la considération d'un isomorphisme $\alpha(\theta)$ satisfaisant à (i) et (ii), ce qui est relativement plus aisé. On va maintenant tâcher de « simplifier » $\alpha(\theta)$ de manière à obtenir un élément de la forme $\cos \frac{\theta}{2} + \varepsilon^2 \varepsilon_{q+1} \sin \frac{\theta}{2}$. Pour cela considérons dans la catégorie graduée $\hat{\mathcal{C}}^{p,q}$ la graduation canonique définie pour toute flèche f par $\bar{f} = \varepsilon_{q+1} \cdot f \cdot \varepsilon_{q+1}$. On a alors $\bar{\zeta} = \zeta^{-1} = \cos \frac{\theta}{2} - \varepsilon^1 \varepsilon_{q+1} \sin \frac{\theta}{2}$. Introduisons la variable $\varphi = \frac{\theta}{2}$ et posons $\zeta = \cos \varphi + \varepsilon^1 \varepsilon_{q+1} \sin \varphi$. Un automorphisme de (E, ν) paramétré par $e^{i\varphi} \in S^1$ et qu'on écrira $\alpha(\zeta)$ pour des raisons qui apparaîtront plus loin sera dit *permis* s'il satisfait aux trois conditions suivantes :

- (a) $\alpha(-\zeta) = -\alpha(\zeta)$;
- (b) $\overline{\alpha(\zeta)} = \alpha(\bar{\zeta})$;
- (c) $\alpha(\zeta) = 1$ pour $\varphi = 0$.

Si un automorphisme α , défini seulement pour $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, satisfait à (i) et (ii), il existe un seul automorphisme permis, qu'on notera encore α , qui prolonge α sur S^1 tout entier. Un automorphisme permis sera dit *laurentien*

(resp. *quasi-polynomial*, resp. *quasi-affine*) s'il s'écrit sous la forme

$$\sum_{n=-p}^{+p} a_{2n-1} \zeta^{2n-1} \left(\text{resp. } \sum_{n=0}^p a_{2n-1} \zeta^{2n-1}, \text{ resp. } a_{-1} \zeta^{-1} + a_1 \zeta \right).$$

On définit de manière évidente une homotopie laurentienne, quasi-polynomiale, quasi-affine entre morphismes laurentiens, quasi-polynomiaux, quasi-affines. Si α est un automorphisme vérifiant (a) et (b), son normalisé $\check{\alpha}$ est l'automorphisme $(\alpha(1))^{-1} \alpha(\zeta)$; $\check{\alpha}$ vérifie (a), (b) et (c). Si α est laurentien (resp. quasi-polynomial, resp. quasi-affine), $\check{\alpha}$ est laurentien (resp. quasi-polynomial, resp. quasi-affine).

Notation. — Pour alléger l'écriture, on écrira provisoirement $d(E, \varphi, \zeta, \alpha)$ l'élément $d(E, \varphi, \varepsilon_{q+1} \cos \theta + \varepsilon^1 \sin \theta, \alpha, \varepsilon_{q+1} \cdot \alpha^{-1})$.

Soit $\Gamma_L^{p,q}(D^1, S^0)$ [resp. $\Gamma_P^{p,q}(D^1, S^0)$, resp. $\Gamma_A^{p,q}(D^1, S^0)$] l'ensemble des quadruples $(E, \varphi, \zeta, \alpha)$, où α est un automorphisme permis laurentien (resp. quasi-polynomial, resp. quasi-affine). Introduisons dans les ensembles $\Gamma^{p,q}$ les relations d'équivalence suivantes :

$$(E, \varphi, \zeta_E, \alpha_E) \sim (F, \varphi, \zeta_F, \alpha_F)$$

$\Leftrightarrow$ il existe (G, φ, ζ_G) tel que $\alpha_E \oplus \zeta_F \oplus \zeta_G$ soit homotope à $\zeta_E \oplus \alpha_F \oplus \zeta_G$, l'homotopie étant laurentienne (resp. quasi-polynomiale, resp. quasi-affine). On note $K_L^{p,q}(D^1, S^0)$ [resp. $K_P^{p,q}(D^1, S^0)$, resp. $K_A^{p,q}(D^1, S^0)$] le monoïde quotient par cette relation d'équivalence et d_L (resp. d_P , resp. d_A) l'application canonique de l'ensemble $\Gamma^{p,q}$ dans le monoïde K .

On a une factorisation évidente de t :

$$K^{p,q+1}(\mathcal{C}) \xrightarrow{t_1} K_A^{p,q}(D^1, S^0) \xrightarrow{t_2} K_P^{p,q}(D^1, S^0) \xrightarrow{t_3} K_L^{p,q}(D^1, S^0) \xrightarrow{t_4} K^{p,q}(D^1, S^0).$$

Dans les lemmes qui suivent on va démontrer que les homomorphismes t_j sont surjectifs et de noyau réduit à 0. Il en résultera que les t_j sont des isomorphismes, d'où le théorème (2.2.2).

LEMME (2.2.5). — *L'homomorphisme t_1 est surjectif et $\text{Ker } t_1 = 0$.*

Démonstration. — Considérons un élément $d(E, \varphi, \zeta, \alpha)$ de $K^{p,q}(D^1, S^0)$. Dans cette expression α représente une application continue du cercle $e^{i\varphi}$ dans l'algèbre de Banach réelle $A = \text{End}((E, \varphi))$. La théorie des séries de Fourier nous apprend que α est la somme d'une série de la forme

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi,$$

où les coefficients α_n et β_n sont des éléments de A qui s'expriment par les intégrales

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \alpha(\zeta) \cos n\varphi \, d\varphi, \quad \beta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \alpha(\zeta) \sin n\varphi \, d\varphi.$$

En écrivant

$$\zeta^n = \cos n\varphi + \varepsilon^1 \varepsilon_{q+1} \sin n\varphi \quad \text{et} \quad \zeta^{-n} = \cos n\varphi - \varepsilon^1 \varepsilon_{q+1} \sin n\varphi,$$

on trouve finalement que α est la somme de la série convergente (au sens de Cesaro) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \zeta^n$, où les coefficients a_n sont des éléments de A définis par l'intégrale

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha(\zeta) \zeta^{-n} d\varphi$$

et satisfont aux relations : $a_n = 0$ pour n impair; $\bar{a}_n = a_n$. Posons

$$\sigma_n(\zeta) = \sum_{p=-n}^{+n} a_p \zeta^p \quad \text{et} \quad S_N(\zeta) = \frac{\sigma_0(\zeta) + \dots + \sigma_N(\zeta)}{N}.$$

Puisque l'ensemble A^* des éléments inversibles de A est un ouvert localement convexe, $u\check{S}_N(\zeta) + (1-u)\alpha(\zeta)$ est inversible pour N suffisamment grand et vérifie (a), (b) et (c), $\forall u \in [0, 1]$. On voit ainsi que

$$d(E, \varphi, \zeta, \alpha) = d(E, \varphi, \zeta, \check{S}_N),$$

ce qui démontre que t_1 est surjectif. L'injectivité de t_1 va résulter d'un argument analogue appliqué à la catégorie de Banach $\mathcal{C}([0, 1])$. En effet, supposons que $t_1(d(E, \varphi, \zeta, \alpha) = 0)$. Alors, d'après le lemme (2.2.4), il existe un $C^{p,q+1}$ -module gradué $(F, \varphi, \varepsilon_{q+1}, \varepsilon^1)$ tel que $\alpha \oplus \zeta_F$ et $\zeta_E \oplus \zeta_F$ soient homotopes parmi les automorphismes de $E \oplus F$ vérifiant (a), (b) et (c). Cette homotopie représente une application continue α du cercle dans l'algèbre de Banach $B([0, 1])$, avec $B = \text{End}(E \oplus F, \varphi)$. D'après la discussion ci-dessus, il existe une approximation laurentienne $\mathbf{S}$ de α telle que $u\mathbf{S} + (1-u)\alpha$ soit un élément de $B([0, 1])$, $\forall u \in [0, 1]$ vérifiant (a), (b) et (c). On obtient alors une homotopie laurentienne $\gamma(u)$ entre $\alpha \oplus \zeta_F$ et $\zeta_{E \oplus F}$ en posant

$$\begin{aligned} \gamma(u) &= 3u\mathbf{S}(0) + (1-3u)(\alpha \oplus \zeta_F) && \text{pour } 0 \leq u \leq \frac{1}{3}, \\ \gamma(u) &= \mathbf{S}(3u-1) && \text{pour } \frac{1}{3} \leq u \leq \frac{2}{3}, \\ \gamma(u) &= (3-3u)\mathbf{S}(1) + (3u-2)\zeta_{E \oplus F} && \text{pour } \frac{2}{3} \leq u \leq 1. \end{aligned}$$

LEMME (2.2.6). — L'homomorphisme t_2 est surjectif et $\text{Kert}_2 = 0$.

Démonstration. — Considérons un élément $x = d(E, \varphi, \zeta, \alpha)$ de $K_L^{p,q}(D^1, S^0)$, où $\alpha = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_{2n-1} \zeta^{2n-1}$. Alors $P = \alpha \cdot \zeta^{2p+1}$ est un polynome en ζ . Notons main-

tenant qu'on a la formule

$$d_L(E, \nu, \zeta, P\zeta^{-2p-1}) = d_L(E, \nu, \zeta, P\zeta^{-1}) + p d_L(E, \nu, \zeta, \zeta^{-1});$$

considérer le produit des matrices

$$\begin{pmatrix} P\zeta^{-2p+1} & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u \\ \sin u & \cos u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta^{-2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos u & \sin u \\ -\sin u & \cos u \end{pmatrix}$$

et raisonner par récurrence sur p . Donc t_2 est surjectif. Montrons maintenant que le noyau de t_2 est réduit à zéro. Supposons donc que

$$t_2(d_P(E, \nu, \zeta, P\zeta^{-1})) = 0.$$

D'après la discussion ci-dessus, appliquée à la catégorie de Banach $\mathcal{C}([0, 1])$, il existe n tel que $P\zeta^{2n+1}$ soit homotope de façon quasi-polynomiale à ζ^{2n+1} si l'on ajoute un $C^{p,q+1}$ -module gradué convenable. Remarquons maintenant que, quel que soit n , $P\zeta^{2n+1} \oplus \zeta^{-1}$ est homotope de façon quasi-polynomiale à $P\zeta^{2n-1} \oplus \zeta$: considérer le produit des matrices

$$\begin{pmatrix} P\zeta^{2n-1} & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u \\ \sin u & \cos u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos u & \sin u \\ -\sin u & \cos u \end{pmatrix}.$$

En raisonnant par récurrence sur n , on en déduit que $P\zeta^{-1} \oplus \zeta_{E^{n+1}}$ est homotope de façon quasi-polynomiale à $P\zeta^{2n+1} \oplus \zeta_{E^{n+1}}^{-1}$ et que de même $\zeta_E \oplus \zeta_{E^{n+1}}$ est homotope à $\zeta_E^{2n+1} \oplus \zeta_{E^{n+1}}^{-1}$.

C. Q. F. D.

LEMME (2.2.7). — *L'élément $d(E, \nu, \zeta_E, \zeta_E^{2r-1})$ est inversible dans $K_L^{p,q}(D^1, S^0)$ [resp. dans $K_A^{p,q}(D^1, S^0)$ si $p \geq 0$, resp. dans $K_A^{p,q}(D^1, S^0)$ si $p = 0$] et son inverse est $d(E^*, \nu, \zeta_{E^*}, \zeta_{E^*}^{2r-1})$, où E^* désigne le $C^{p,q}$ -module E muni de la graduation opposée à celle de E .*

Démonstration. — En effet,

$$d(E, \nu, \zeta_E, \zeta_E^{2r-1}) + d(E^*, \nu, \zeta_{E^*}, \zeta_{E^*}^{2r-1}) = d(E \oplus E^*, \nu, \zeta_{E \oplus E^*}, \eta),$$

où

$$\eta = \begin{pmatrix} \zeta_E^{2r-1} & 0 \\ 0 & \zeta_{E^*}^{2r-1} \end{pmatrix}.$$

Pour $u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, le morphisme défini par le produit des matrices

$$\begin{pmatrix} \cos u & -\sin u \\ \sin u & \cos u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_E & 0 \\ 0 & \zeta_{E^*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos u & \sin u \\ -\sin u & \cos u \end{pmatrix}$$

définit une homotopie de $\zeta_{E \oplus E^*}$ à $\zeta_{E \oplus E^*}^{-1}$. De plus, cette homotopie est quasi-affine de manière évidente. En écrivant $\zeta_{E \oplus E^*}^{2r-1} = \zeta_{E \oplus E^*} \zeta_{E \oplus E^*}^{2r-2}$ et en raisonnant par récurrence sur p , l'assertion en résulte aussitôt.

LEMME (2.2.8). — *L'homomorphisme t_3 est surjectif et $\text{Ker } t_3 = 0$.*

Démonstration. — Soit $x = d(E, \nu, \zeta, \alpha)$, avec

$$\alpha = a_{-1}\zeta^{-1} + a_1\zeta + \dots + a_{2n-1}\zeta^{2n-1},$$

un élément de $K_p^{p,q}(D^1, S^0)$. Considérons l'endomorphisme de $(E, \nu)^{n+1}$ défini par la matrice

$$L^n(\alpha) = \begin{pmatrix} a_{-1} & a_1 & . & \dots & a_{2n-1} \\ -\zeta^2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\zeta^2 & 1 & \dots & 0 \\ . & \dots & . & \dots & . \\ 0 & 0 & . & -\zeta^2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si l'on pose

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & \dots & 0 \\ \zeta^2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \zeta^4 & \zeta^2 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ \zeta^{2n} & \zeta^{2n-2} & . & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

on a l'identité

$$L^n(\alpha) \cdot \zeta^{-1} \cdot h = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha_1 & . & \dots & \alpha_n \\ 0 & \zeta^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ . & \dots & . & \dots & . \\ 0 & 0 & . & \dots & \zeta^{-1} \end{pmatrix},$$

avec

$$\alpha_j = \sum_{p \geq j} a_{2p-1} \zeta^{2p-2j-1}.$$

Elle montre en particulier que $L^n(\alpha)$ est inversible. On a donc

$$t_3(d_A(E, \nu, \zeta, \check{L}^n(\alpha) \cdot \zeta^{-1})) = d_p(E, \nu, \zeta, \alpha) + nd_p(E, \nu, \zeta, \zeta^{-1}).$$

D'après le lemme (2.2.7), on a par conséquent

$$d_p(E, \nu, \zeta, \alpha) = t_3(d_A(E, \nu, \zeta, \check{L}^n(\alpha) \cdot \zeta^{-1}) + nd_A(E^*, \nu, \zeta_{E^*}, \check{\zeta}_{E^*}^{-1})),$$

ce qui démontre la surjectivité de t_3 .

Considérons maintenant un élément

$$d_A(E, \nu, \zeta, \alpha) \in K_p^{p,q}(D^1, S^0), \quad \text{avec } \alpha = a_{-1}\zeta^{-1} + a_1\zeta$$

et supposons que $d_p(E, \nu, \zeta, \alpha) = 0$. Quitte à ajouter un objet élémentaire, il existe donc une homotopie quasi-polynomiale entre α et ζ , soit

$$\alpha_t(\zeta) = \sum_{s=0}^n a_{2s-1}(t) \zeta^{2s-1}, \quad t \in [0, 1].$$

Alors $\check{L}^n(\alpha_t) \cdot \zeta^{-1}$ est une homotopie quasi-affine qui va induire, de manière évidente une homotopie quasi-affine de $\alpha \oplus \zeta_{E^n}^{-1}$ à $\zeta_E \oplus \zeta_{E^n}^{-1}$ soit de $\alpha \oplus \zeta_{E^n}$ à $\zeta_E \oplus \zeta_{E^n}$. Par conséquent, $d_A(E, \nu, \zeta, \alpha) = 0$.

C. Q. F. D.

LEMME (2.2.9). — L'homomorphisme t_* est surjectif et $\text{Ker } t_* = 0$.

Démonstration. — Soit

$$d_A(E, \nu, \zeta, \alpha)^{-1} \in K_2^q(D^1, S^0), \quad \text{avec } \alpha = a_{-1}\zeta^{-1} + a_1\zeta.$$

En revenant aux coordonnées cartésiennes $x = \cos \varphi$, $y = \sin \varphi$, α s'écrit sous la forme $1x + gy$, avec $\bar{g} = -g$. Du fait que $\cos \varphi + g \sin \varphi$ est inversible quel que soit φ , on déduit que le spectre de g dans l'algèbre de Banach complexe $A \otimes \mathbb{C}$, avec $A = \text{End}((E, \nu))$, ne rencontre pas l'axe réel. Soit γ^+ (resp. γ^-) un chemin fermé différentiable entourant la partie du spectre d'ordonnée positive (resp. négative) choisis de telle sorte que γ^+ et γ^- soient symétriques par rapport à l'axe réel. Considérons les intégrales

$$e^+ = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma^+} (1.z - g)^{-1} dz, \quad e^- = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma^-} (1.z - g)^{-1} dz.$$

Alors e^+ et e^- sont deux projecteurs orthogonaux de somme l'identité. L'élément $\hat{g} = i(e^+ - e^-)$ est un automorphisme de (E, ν) de carré -1 et satisfait à $\hat{g} = -\hat{g}$.

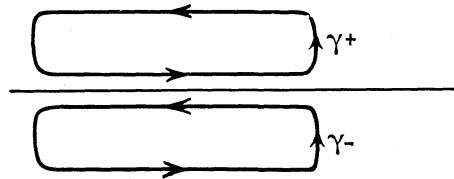


Fig. 2.

De plus, $(1-u)g + u\hat{g}$, $u \in [0, 1]$, est une homotopie de g à $\hat{g}$ parmi les automorphismes h de (E, ν) de spectre ne rencontrant pas l'axe réel et tels que $\varepsilon_{q+1}.h = -h.\varepsilon_{q+1}$. Si l'on pose $\varepsilon^2 = \hat{g}.\varepsilon_{q+1}$, on voit aussitôt que ε^2 est une graduation de $(E, \nu, \varepsilon_{q+1})$ et que

$$t_*(d(E, \nu, \varepsilon_{q+1}, \varepsilon^1, \varepsilon^2)) = d_A(E, \nu, \zeta, \alpha).$$

On démontre de même que t_* est injectif en remplaçant $\mathcal{C}$ par $\mathcal{C}([0, 1])$ dans l'argument précédent et en remarquant que $\hat{g} = g$ si g est de carré -1 . Ceci achève la démonstration du lemme (2.2.9), donc de (2.2.2).

Remarque. — On démontrerait de la même manière que

$$K^{\nu \oplus T}(X) \approx K^{\nu}(B(T), S(T))$$

lorsque T est un fibré trivial de rang un. En anticipant sur le paragraphe 3.3, remarquons qu'on a un isomorphisme analogue

$$KR_G^{\nu \oplus T}(X) \simeq KR_G^{\nu}(B(T), S(T))$$

si G opère trivialement sur T .

Avant de passer à la démonstration du théorème (2.2.1), il est bon de donner une forme équivalente de (2.2.2) qui nous sera utile dans le paragraphe suivant. On l'obtient en décrivant de manière explicite les isomorphismes $K \approx K'$ [cf. prop. (2.1.12)]. Soit donc $x = d(E, F, \alpha)$ un élément de $K^{p, q+1}(\mathcal{C})$, où E et F sont deux $C^{p, q+1}$ -modules gradués et où α est un isomorphisme non nécessairement de degré 0. Si l'on désigne de manière plus explicite par $(E, \nu, \varepsilon_{q+1}, \varepsilon^1)$ le $C^{p, q+1}$ -module gradué E , il correspond à x l'élément $d(E, \nu, \varepsilon_{q+1}, \varepsilon^1, \varepsilon^2)$ de $K'^{p, q+1}(\mathcal{C})$; ε^2 y désigne la graduation de F « transportée » sur E par α , i. e. $\alpha^{-1} \cdot \varepsilon_F \cdot \alpha$, où ε_F est la graduation de F . En appliquant (2.2.2), on trouve l'élément

$$d(E, \nu, \varepsilon_{q+1} \cos \theta + \varepsilon^1 \sin \theta, \varepsilon_{q+1} \cos \theta + \varepsilon^2 \sin \theta)$$

du groupe $K'^{p, q}(D^1, S^0)$; il s'agit d'interpréter cet élément comme un élément du groupe $K^{p, q}(D^1, S^0)$. Pour cela, considérons les isomorphismes de degré 0

$$f_i : (E, \nu, \varepsilon_{q+1}) \rightarrow (E, \nu, \varepsilon_{q+1} \cos \theta + \varepsilon^i \sin \theta) \quad (i = 1, 2)$$

définis par $f_i = \cos \frac{\theta}{2} + \varepsilon^i \varepsilon_{q+1} \sin \frac{\theta}{2}$. Alors

$$\begin{aligned} f_2^{-1} \cdot f_1 &= \left(\cos \frac{\theta}{2} - \varepsilon^2 \varepsilon_{q+1} \sin \frac{\theta}{2} \right) \left(\cos \frac{\theta}{2} + \varepsilon^1 \varepsilon_{q+1} \sin \frac{\theta}{2} \right) \\ &= \alpha^{-1} \left(\cos \frac{\theta}{2} - \varepsilon_F \varepsilon_{q+1} \sin \frac{\theta}{2} \right) \alpha \left(\cos \frac{\theta}{2} + \varepsilon^1 \varepsilon_{q+1} \sin \frac{\theta}{2} \right). \end{aligned}$$

Posons $\varepsilon_E = \varepsilon^1$; on a ainsi défini un homomorphisme ω de $K^{p, q+1}(\mathcal{C})$ dans $K^{p, q}(D^1, S^0; \mathcal{C})$ par la formule

$$\omega(d(E, F, \alpha)) = d(E', E', \alpha');$$

dans cette formule E' est le $C^{p, q}$ -module E muni de la graduation ε_{q+1} et α' est l'automorphisme de E' défini au-dessus du point e^{i_0} de D^1 par

$$\alpha'(\theta) = \alpha^{-1} \left(\cos \frac{\theta}{2} - \varepsilon_F \varepsilon_{q+1} \sin \frac{\theta}{2} \right) \alpha \left(\cos \frac{\theta}{2} + \varepsilon_E \varepsilon_{q+1} \sin \frac{\theta}{2} \right).$$

THÉORÈME (2.2.10). — *L'homomorphisme*

$$\omega : K^{p, q+1}(\mathcal{C}) \rightarrow K^{p, q}(D^1, S^0; \mathcal{C})$$

défini ci-dessus est un isomorphisme.

On va maintenant démontrer le théorème (2.2.1) dans le cas particulier où V' et V'' sont triviaux. Pour cela, on raisonnera par récurrence sur la dimension de V' , le théorème (2.2.2) étant précisément le premier pas de cette récurrence. Supposons donc le théorème (2.2.1) démontré pour $\dim V' < n$. En fait, on peut définir un homomorphisme ⁽¹⁰⁾

$$t : K^{V'} \oplus^{V''}(X, Y) \rightarrow K^{V''}(X \times B(V'), X \times S(V') \cup Y \times B(V'))$$

qui généralise l'homomorphisme t précédent pour $Y = \emptyset$ (on impose aux graduations d'être égales sur Y). Cet homomorphisme est aussi un isomorphisme pour $\dim V' < n$, comme cela résulte aussitôt de la proposition (1.3.14) [ou de la proposition (1.3.11) si X est un polyèdre et Y un sous-polyèdre]. Ceci dit, soit V' un espace vectoriel de dimension n ⁽¹⁰⁾. Soit $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ une base orthonormale de V' et soit V'_1 (resp. V'_2) le sous-espace engendré par $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$ (resp. ε_n). D'après l'hypothèse de récurrence, on a donc un isomorphisme

$$t: K^{V'_1 \oplus (V'_2 \oplus V'')} (X) \rightarrow K^{V'_2 \oplus V''} (S^+(V'_1 \oplus \mathbf{1}), S(V'_1))$$

qui est défini, avec des notations évidentes, par la formule

$$t(d(E, \nu'_1, \nu'_2, \nu'', \varepsilon^1, \varepsilon^2)) = d(E, \nu'_2, \nu'', \nu'_1 \cos \theta_1 + \varepsilon^1 \sin \theta_1, \nu'_1 \cos \theta_1 + \varepsilon^2 \sin \theta_1).$$

En appliquant de nouveau t , on obtient un élément de

$$K^{V''} (S^+(V'_1 \oplus \mathbf{1}) \times_X S^+(V'_2 \oplus \mathbf{1}), \quad S^+(V'_1 \oplus \mathbf{1}) \times_X S(V'_2) \cup S(V'_1) \times_X S^+(V'_2 \oplus \mathbf{1}))$$

qui s'écrit $d(E, \nu'', \tilde{\varepsilon}^1, \tilde{\varepsilon}^2)$, avec

$$\tilde{\varepsilon}^i = \nu'_2 \cos \theta_2 + (\nu'_1 \cos \theta_1 + \varepsilon^i \sin \theta_1) \sin \theta_2, \quad \theta_1, \theta_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Remarquons maintenant qu'on a un homéomorphisme relatif h de la paire figurant dans le groupe $K^{V''}$ ci-dessus dans la paire

$$(S^+(V'_1 \oplus V'_2 \oplus \mathbf{1}), S(V'_1 \oplus V'_2)).$$

Cet homéomorphisme est défini de la manière suivante : à un couple $(\nu_1 \cos \theta_1 + \varepsilon \sin \theta_1, \nu_2 \cos \theta_2 + \eta \sin \theta_2)$, où $\nu_1 \in S(V'_1)$, $\nu_2 \in S(V'_2)$ et où ε (resp. η) est le vecteur unité de la dernière coordonnée de $V'_1 \oplus \mathbf{1}$ (resp. $V'_2 \oplus \mathbf{1}$) on associe l'élément $(\nu_1 \cos \theta_1 + \zeta \sin \theta_1) \sin \theta_2 + \nu'_2 \cos \theta_2$, ζ étant le vecteur unité de la dernière coordonnée de $V' \oplus \mathbf{1} = V'_1 \oplus V'_2 \oplus \mathbf{1}$. L'assertion en résulte aussitôt en examinant les graduations en chaque point et en appliquant de nouveau la proposition (1.3.14).

Démonstration du théorème (2.2.1). — Soit $[T_i]$ un recouvrement fermé fini de X tel que les restrictions de V' et V'' à T_i soient isomorphes à des fibrés triviaux. En raisonnant par récurrence sur j , on est ramené à démontrer que si le théorème est vrai au-dessus de U_1 , U_2 et $U_1 \cap U_2$, il est vrai au-dessus de $U_1 \cup U_2$, avec $U_1 = \bigcup_{i < j} T_i$ et $U_2 = T_j$. Pour cela, considérons

la suite de Mayer-Vietoris (cf. Eilenberg-Steenrod [13] ou [24])

$$K^V_1(U_1) \oplus K^V_1(U_2) \rightarrow K^V_1(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\Delta} K^V(U_1 \cup U_2) \rightarrow K^V(U_1) \oplus K^V(U_2) \rightarrow K^V(U_1 \cup U_2),$$

⁽¹⁰⁾ On convient d'identifier les fibrés triviaux aux espaces vectoriels qui leur donnent naissance.

où l'on pose

$$K_1^V(A, B) = K^V(A \times D^1, A \times S^0 \cup B \times D^1).$$

L'homomorphisme Δ est défini comme le composé

$$K_1^V(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\partial} K^V(U_1, U_1 \cap U_2) \xleftarrow{\approx} K^V(U_1 \cup U_2, U_2) \rightarrow K^V(U_1 \cup U_2)$$

[cf. prop. (1.3.11)].

LEMME (2.2.11). — *La suite de Mayer-Vietoris définie ci-dessus est exacte.*

Démonstration. — C'est une conséquence formelle du théorème (1.3.9), de la proposition (1.3.11) et de la remarque précédant le théorème 2.2.10 (cf. [13] ou [24]).

D'autre part, on a également une suite exacte de Mayer-Vietoris (relative) à l'autre bout des homomorphismes t . D'après le lemme des cinq et la naturalité des homomorphismes t , le théorème va être conséquence du corollaire du lemme suivant qui exprime l'opérateur cobord de la suite exacte en termes d'homomorphismes induits.

LEMME (2.2.12). — *Pour tout couple (A, B) , $A \subset B$, le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} K^V(A \times D^1, A \times S^0) & \xrightarrow{\partial} & K^V(B, A) \\ \uparrow \approx & & \downarrow \approx \\ K^V(B \times \{0\} \cup A \times D^1, A \times \{1\} \cup B \times \{0\}) & \longrightarrow & K^V(B \times \{0\} \cup A \times D^1, A \times \{1\}) \end{array}$$

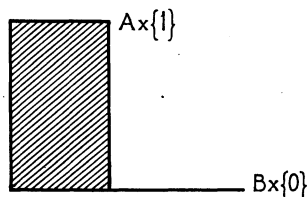


Fig. 3.

COROLLAIRE (2.2.13). — *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} K_1^V(U_1 \cap U_2) & \xrightarrow{\Delta} & K^V(U_1 \cup U_2) \\ \uparrow t & & \downarrow t \\ K_1^{V''}((B(V'), S(V'))|_{U_1 \cap U_2}) & \xrightarrow{\Delta} & K^{V''}(B(V'), S(V'))|_{U_1 \cup U_2} \end{array}$$

Une généralisation. — Soit $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur de Serre quasi-surjectif entre deux catégories de Banach. On définit le groupe $K^V(X, Y; \varphi)$ comme étant le groupe K de la grille « cubique » (fig. 4).

Il peut se décrire directement comme étant le groupe K construit à partir d'éléments $(E, \nu, \varepsilon^1, \varepsilon^2)$, où E est un objet de $\mathcal{C}(X)$, où $C(V)$ opère et où ε^1 et ε^2 sont deux graduations de (E, ν) telles que : a. $\varepsilon^1|_V = \varepsilon^2|_V$; b. $\varphi(\varepsilon^1) = \varphi(\varepsilon^2)$. On définit alors aisément un homomorphisme

$$t: K^V(X; \varphi) \rightarrow K^{V'}(B(V'), S(V'); \varphi).$$

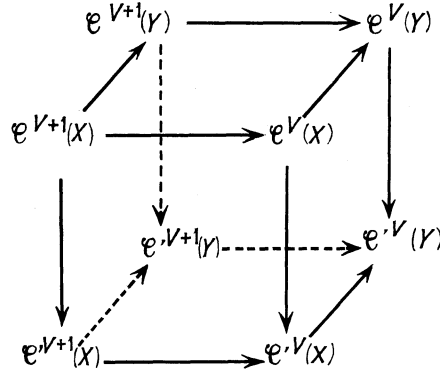


Fig. 4.

PROPOSITION (2.2.14). — *L'homomorphisme t défini ci-dessus est un isomorphisme.*

Démonstration. — Exercice laissé au lecteur (appliquer le lemme des cinq par exemple).

2.3. Les théorèmes de périodicité de Bott.

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories de Banach et soit $\varphi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur de Serre quasi-surjectif. Au paragraphe 1.3, avant l'énoncé du théorème 1.3.9, on a défini un homomorphisme

$$\partial: K^{p,q}(D^1, S^0; \mathcal{C}') \rightarrow K^{p,q}(\varphi).$$

Dans le paragraphe précédent [Théorème 2.2.10], on a défini un isomorphisme

$$\omega: K^{p,q+1}(\mathcal{C}') \rightarrow K^{p,q}(D^1, S^0; \mathcal{C}').$$

Le composé $\omega \cdot \partial$ est un opérateur « cobord »

$$\partial^{p,q+1}: K^{p,q+1}(\mathcal{C}') \rightarrow K^{p,q}(\varphi)$$

qui s'explicite ainsi. Soit $d(E', F', \alpha')$ un élément de $K^{p,q+1}(\mathcal{C}')$. Puisque $\varphi^{p,q+1}$ est quasi-surjectif, on peut supposer, en ajoutant au triple (E', F', α') un triple élémentaire, que $E' = \varphi^{p,q+1}(E)$. Soient $e_i, \varepsilon_j, i = 1, \dots, p$;

$j = 1, \dots, q+1$, les générateurs de l'algèbre de Clifford $C^{p,q+1}$ et soit ε (resp. γ) la graduation de E' (resp. F'). Considérons l'automorphisme de E' considéré comme $C^{p,q}$ -module (par restriction des scalaires) :

$$\beta_0 = \alpha^{1-q} \left(\cos \frac{\theta}{2} + \varepsilon_{q+1} \gamma \sin \frac{\theta}{2} \right) \alpha' \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \varepsilon_{q+1} \varepsilon \sin \frac{\theta}{2} \right),$$

où $\theta \in [0, \pi]$. Puisque $\varphi^{p,q}$ est un foncteur de Serre, il existe une application continue $\theta \mapsto \alpha_\theta$ de $[0, \pi]$ dans le groupe des automorphismes du $C^{p,q}$ -module E , telle que $\alpha_0 = \text{Id}$ et que $\varphi^{p,q}(\alpha_\theta) = \beta_\theta$. En considérant E comme un $C^{p,q}$ -module muni de la graduation ε_{q+1} , on a alors

$$\partial^{p,q+1}(d(E', F', \alpha')) = d(E, E, \alpha_\pi).$$

Pour $n > 0$, définissons maintenant ∂^{-n} comme étant $\partial^{0,n}$ et ∂^{n-1} comme étant le composé

$$K^{n-1,0}(\mathcal{C}') \xrightarrow{Z^*} K^{n,1}(\mathcal{C}') \xrightarrow{\partial^{n,1}} K^n(\varphi).$$

Les théorèmes (1.3.9) et (2.2.10) ont alors pour conséquence le théorème fondamental suivant :

THÉORÈME (2.3.1). — Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories de Banach et soit $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur de Serre quasi-surjectif. La suite

$$(1) \quad \dots \rightarrow K^{n-1}(\mathcal{C}) \rightarrow K^{n-1}(\mathcal{C}') \xrightarrow{\partial^{n-1}} K^n(\varphi) \rightarrow K^n(\mathcal{C}) \rightarrow K^n(\mathcal{C}') \rightarrow \dots,$$

où les homomorphismes autres que ∂^{n-1} sont déduits de la fonctorialité du groupe K , est une suite exacte.

Remarque 1. — Si le foncteur φ est seulement quasi-surjectif, on convient que $K^n(\varphi)$ représente le groupe K^n du « cylindre d'application » de φ . On pourra donc aussi écrire une suite exacte du type (1) dans ce cas un peu plus général ⁽¹⁾.

Remarque 2. — Fixons une catégorie de Banach $\mathcal{C}$. Pour toute paire (X, Y) , où X est compact et où Y est un sous-ensemble fermé, posons

$$h^n(X, Y) = K^n(\varphi),$$

où φ est le foncteur de Serre quasi-surjectif $\mathcal{C}(X) \rightarrow \mathcal{C}(Y)$ défini par la restriction à Y des $\mathcal{C}$ -fibrés sur X . Définissons ∂^{n-1} comme ci-dessus. D'après la proposition (1.3.11) et le théorème (2.3.1), on obtient ainsi une théorie de la cohomologie vérifiant les axiomes d'Eilenberg-Steenrod excepté l'axiome de dimension.

⁽¹⁾ Avec cette convention le groupe $K^0(\varphi)$ est donc isomorphe au groupe $K(\varphi)$ ordinaire défini avant l'énoncé de la proposition 1.3.5 (cf. la proposition 2.1.10 et la remarque 3 précédant la proposition 1.3.6).

La remarque précédente fait apparaître en particulier un isomorphisme $K(\mathcal{C}) \approx K(D^8, S^7; \mathcal{C})$ [ou $K(\mathcal{C}) \approx K(D^2; S^1, \mathcal{C})$ dans le cas complexe] obtenus par suspension et en appliquant la périodicité des groupes K^n qui résulte de leur *définition*. Cet isomorphisme est un isomorphisme de *périodicité de Bott* généralisé. Pour obtenir la périodicité de Bott classique, on choisit pour catégorie de Banach $\mathcal{C}$ la catégorie des fibrés vectoriels de dimension finie de base compacte X et l'on applique la proposition (1.2.20). Nous allons maintenant retrouver cette périodicité de

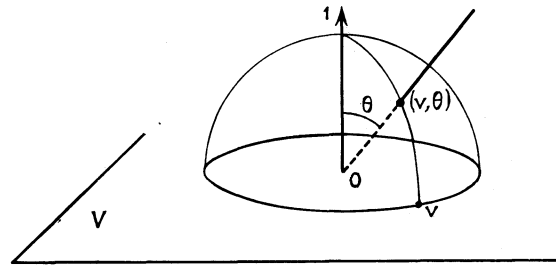


Fig. 5.

manière plus élémentaire et plus directe (i. e. sans faire appel à la suspension).

D'après les propositions 2.1.5, 2.1.7, 2.1.10 et le théorème 2.2.1, on a des isomorphismes successifs

$$K(\mathcal{C}) \xrightarrow{g'} K^0(\mathcal{C}) \xrightarrow{\beta} K^{0,8}(D^8, S^7; \mathcal{C}) \xrightarrow{t} K^0(D^8, S^7; \mathcal{C}) \xrightarrow{g} K(D^8, S^7; \mathcal{C})$$

dont nous rappelons la définition :

(i) $g'(E) = d(E, +1, -1);$

(ii) Le deuxième isomorphisme β est induit par l'équivalence des catégories graduées $\hat{\mathcal{C}}^0$ et $\hat{\mathcal{C}}^{0,8}$. Plus précisément, on a $\beta(E) = M \hat{\otimes} E$, où M est un $C^{0,8}$ -module irréductible. En fait, $M = \mathbf{R}^{16}$ est un module irréductible pour l'algèbre $C^{0,8} \approx \mathbf{R}(16)$ et la graduation de M est alors définie par $\varepsilon = \varepsilon_1 \dots \varepsilon_8$, ε_i désignant les générateurs de l'algèbre $C^{0,8}$.

(iii) L'isomorphisme $t: K^{0,8}(\mathcal{C}) \rightarrow K^0(D^8, S^7; \mathcal{C})$ a été décrit dans le paragraphe précédent. On a donc ainsi

$$(t \cdot \beta \cdot g')(E) = d(\pi_8^* E^{16}, \nu \sin \theta + \varepsilon \cos \theta, \nu \sin \theta - \varepsilon \cos \theta), \quad \pi_n: D^n \rightarrow P.$$

(iv) Il reste à expliciter g . Pour cela, notons qu'on a des isomorphismes de degré 0

$$\begin{aligned} f_1: (\pi_8^* E^{16}, \varepsilon) &\rightarrow (\pi_8^* E^{16}, \nu \sin \theta + \varepsilon \cos \theta), \\ f_2: (\pi_8^* E^{16}, -\varepsilon) &\rightarrow (\pi_8^* E^{16}, \nu \sin \theta - \varepsilon \cos \theta) \end{aligned}$$

définis respectivement par

$$f_1 = \cos \frac{\theta}{2} + \nu \varepsilon \sin \frac{\theta}{2} \quad \text{et} \quad f_2 = \cos \frac{\theta}{2} - \nu \varepsilon \sin \frac{\theta}{2}.$$

Si $F = F^0 \oplus F^1$ est la décomposition de $F = E^{16}$ par rapport à la graduation ε , on a donc en définitive [cf. prop. (2.1.10)] :

$$(t.\beta.g)(E) = d((\pi_s^* F, \varepsilon), (\pi_s^* F, -\varepsilon), f_2^{-1}.f_1)$$

et

$$(g.t.\beta.g')(E) = d(\pi_s^* F^0, \pi_s^* F^1, \alpha_{\mathbf{R}}(E)),$$

où $\alpha_{\mathbf{R}}(E)$ est l'isomorphisme de $\pi_s^* F^0|_{S^7}$ sur $\pi_s^* F^1|_{S^7}$ défini au-dessus du point ν de $S^7 \subset C^{0,8}$ par la multiplication par le nombre de Clifford correspondant (faire $\theta = \frac{\pi}{2}$). D'où le théorème :

THÉORÈME (2.3.2) (périodicité de Bott). — Soit $\mathcal{C}$ une catégorie de Banach réelle. L'homomorphisme

$$\beta_{\mathbf{R}} : K(\mathcal{C}) \rightarrow K(D^8, S^7; \mathcal{C})$$

induit par l'application qui, à un objet E de $\mathcal{C}$ associe l'élément

$$d(\pi_s^* F^0, \pi_s^* F^1, \alpha_{\mathbf{R}}(E)).$$

de $K(D^8, S^7; \mathcal{C})$ défini plus haut, est un isomorphisme.

Dans le cas où $\mathcal{C}$ est complexe, on a aussi une périodicité d'ordre 2. En appliquant la même méthode, on peut l'expliciter ainsi. Pour tout objet E de $\mathcal{C}$, désignons par $\alpha_{\mathbf{C}}(E)$ l'automorphisme de $\pi_2^* E|_{S^1}$ défini au-dessus de chaque point ν de S^1 par la multiplication par le nombre complexe de norme un associé à ν . On a alors le théorème :

THÉORÈME (2.3.3). — Soit $\mathcal{C}$ une catégorie de Banach complexe. L'homomorphisme

$$\beta_{\mathbf{C}} : K(\mathcal{C}) \rightarrow K(K^2, S^1; \mathcal{C})$$

défini par $\beta_{\mathbf{C}}(E) = d(\pi_2^* E, \pi_2^* E, \alpha_{\mathbf{C}}(E))$ est un isomorphisme.

Remarques. — Nous généraliserons ces résultats dans les chapitres suivants. Notons que les théorèmes (2.3.2) et (2.3.3) sont bien connus dans le cas particulier où $\mathcal{C}$ est la catégorie des fibrés vectoriels réels ou complexes de dimension finie sur un compact (cf. [6]). Le théorème (2.3.3) a aussi été démontré dans le cas où $\mathcal{C}$ est la catégorie des G -fibrés complexes sur un G -espace compact (cf. [8]). En théorie K_G réelle, le théorème (2.3.2) implique le résultat nouveau

$$K_G(X) \approx K_G(X \times D^8, X \times S^7)$$

quand G opère trivialement sur D^8 . Nous généraliserons ce résultat au paragraphe 3.5.

Il est d'usage d'écrire le théorème de périodicité de Bott réel en deux temps à l'aide des quaternions. Pour cela, on se sert du lemme suivant et de son corollaire dont les démonstrations sont évidentes :

LEMME (2.3.4). — *Le foncteur gradué de $(\hat{C}^{0,4})^0$ dans $\hat{C}^{0,4}$ défini par*

$$(E, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4; \varepsilon) \mapsto (E, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4; \eta\varepsilon),$$

avec $\eta = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4$ est une équivalence de catégorie de Banach graduées (ε désigne ici une graduation de E qui commute avec les générateurs ε_i de $C^{0,4}$).

COROLLAIRE (2.3.5). — *Les groupes $K(C^{0,4})$ et $K^{-4}(C)$ sont isomorphes.*

D'autre part, les catégories (non graduées) $C^{0,4}$ et $C^{2,0}$ sont équivalentes. On définit en effet une équivalence $q: C^{2,0} \rightarrow C^{0,4}$ de la manière suivante : si E est un objet de $C^{2,0}$ et si e_1 et e_2 désignent les générateurs de $C^{2,0}$, on pose $q(E) = E \oplus E$, les générateurs ε_i de $C^{0,4}$ opérant par les formules

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 0 & e_1 \\ -e_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 & e_2 \\ -e_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 & e_1 e_2 \\ -e_1 e_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient ainsi des isomorphismes

$$K(C^{2,0}) \rightarrow K(C^{0,4}) \rightarrow K^{0,4}(C) \rightarrow K^0(D^4, S^3; C) \rightarrow K(D^4, S^3; C)$$

dont le composé s'explicite ainsi : si E est un objet de $C^{2,0}$, désignons par $\alpha_{\mathbf{H}}(E)$ l'automorphisme de $\pi_i^* E|_S$ défini au-dessus de chaque point ν de S^3 par le quaternion de norme un correspondant. La correspondance $E \mapsto d(\pi_i^* E, \pi_i^* E, \alpha_{\mathbf{H}}(E))$ définit alors un homomorphisme $\beta_{\mathbf{H}}$ de $K(C^{2,0})$ dans $K(D^4, S^3; C)$. On obtient ainsi la proposition :

PROPOSITION (2.3.6). — *Soit C une catégorie de Banach réelle. L'homomorphisme $\beta_{\mathbf{H}}$ défini ci-dessus est un isomorphisme de $K(C^{2,0})$ sur $K(D^4, S^3; C)$.*

En composant de même les isomorphismes

$$K(C) \xrightarrow{\chi^4} K^{4,4}(C) \xrightarrow{t} K^{4,0}(D^4, S^3; C) \rightarrow K^0(D^4, S^3; C^{4,0}) \rightarrow K(D^4, S^3; C^{2,0}),$$

on démontre la proposition suivante :

PROPOSITION (2.3.7). — *Soit C une catégorie de Banach réelle. Soit*

$$\beta'_{\mathbf{H}}: K(C) \rightarrow K(D^4, S^3; C^{2,0})$$

l'homomorphisme défini par

$$\beta'_{\mathbf{H}}(E) = d(\pi_i^*(E \otimes \mathbf{H}), \pi_i^*(E \otimes \mathbf{H}), \alpha'_{\mathbf{H}}(E)),$$

où $\alpha'_H(E)$ est l'automorphisme de $\pi_4^*(E \otimes H)|_{S^3}$ égal au-dessus de chaque point ν de S^3 à la multiplication (à droite) par le quaternion de norme un associé. Alors β'_H est un isomorphisme.

Remarque. — Soit $\varphi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur de Serre quasi-surjectif (si φ n'est pas de Serre on le remplace par son cylindre d'application). En composant les isomorphismes

$$K(\varphi) \xrightarrow{\sim} K^0(\varphi) \xrightarrow{\sim} K^{0,8}(\varphi) \xrightarrow{\sim} K^0(D^8, S^7; \varphi) \xrightarrow{\sim} K(D^8, S^7; \varphi)$$

on démontre que $K(\varphi) \approx K(D^8, S^7; \varphi)$. Les propositions précédentes et celles qui vont suivre se généralisent de la même manière aux groupes « relatifs ». Nous en laissons le soin au lecteur.

Les théorèmes de périodicité de Bott s'expriment également en termes de groupes d'homotopie. Pour cela, on doit considérer des catégories de Banach de la forme $\mathcal{X}(A)$, A étant une algèbre de Banach. Désignons alors par $GL(A)$ la limite inductive des groupes $GL(A, n)$ suivant les inclusions évidentes $GL(A, n) \rightarrow GL(A, n+p)$. On démontre aisément que $GL(A)$ est séparé et que toute application continue $f: X \rightarrow GL(A)$ de source un compact se factorise à travers un $GL(A, p)$. En particulier, si $f: S^{n-1} \rightarrow GL(A)$ est une application continue qui se factorise à travers un $GL(A, p)$, elle définit un élément x de $K(D^n, S^{n-1}; \mathcal{X}(A))$, avec $x = d(\pi_n^* A^p, \pi_n^* A^p, f)$. La correspondance $f \mapsto x$ induit ainsi un homomorphisme de $\pi_{n-1}(GL(A))$ dans $K(D^n, S^{n-1}; \mathcal{X}(A))$.

PROPOSITION (2.3.8). — *Pour $n > 0$, l'homomorphisme*

$$h: \pi_{n-1}(GL(A)) \rightarrow K(D^n, S^{n-1}; \mathcal{X}(A))$$

défini ci-dessus est un isomorphisme.

Démonstration. — On définit un homomorphisme h' en sens inverse de la manière suivante. Tout élément de $K(D^n, S^{n-1}; \mathcal{X}(A))$ s'écrit $d(\pi_n^* E, \pi_n^* E, \alpha)$, où E est un objet de $\mathcal{X}(A)$; en ajoutant un objet élémentaire, on peut supposer que E est libre et égal à A^p . L'isomorphisme α définit alors de manière évidente une application continue $\tilde{\alpha}$ de la sphère S^{n-1} dans le groupe $GL(A, p)$, donc dans le groupe $GL(A)$; d'où l'homomorphisme en sens inverse.

COROLLAIRE (2.3.9) (Wood). — *Soit A une algèbre de Banach réelle (resp. complexe). Alors*

$$\pi_i(GL(A)) \approx \pi_{i+8}(GL(A)) \quad [\text{resp. } \pi_i(GL(A)) \approx \pi_{i+2}(GL(A))].$$

COROLLAIRE (2.3.10). — *Soit A une algèbre de Banach réelle (resp. complexe). Alors*

$$\pi_7(GL(A)) \approx K(A) \quad [\text{resp. } \pi_1(GL(A)) \approx K(A)].$$

En effet, $\pi_*(GL(A)) \approx K(D^s, S^s; \mathcal{T}(A)) \approx K(A)$. Le raisonnement est analogue dans le cas complexe.

Soient maintenant A et B deux algèbres de Banach et soit $\varphi : A \rightarrow B$ un homomorphisme continu. Alors le foncteur extension des scalaires $\varphi_* : \mathcal{T}(A) \rightarrow \mathcal{T}(B)$ défini par $\varphi_*(M) = B \otimes_A M$ est un foncteur linéaire continu quasi-surjectif de manière évidente. Considérons le cas particulier où B est le quotient de A par un idéal bilatère I fermé contenu dans le radical de A , φ étant la projection canonique.

PROPOSITION (2.3.11). — Si A est une algèbre commutative ou de dimension finie, la projection $A \rightarrow A/I$ induit un isomorphisme $K^n(A) \xrightarrow{\sim} K^n(A/I)$ quel que soit n .

Démonstration. — En raison de l'interprétation homotopique précédente, il suffit de montrer que cette projection induit une équivalence d'homotopie de $GL(A)$ sur $GL(A/I)$. Or la fibre de la fibration $GL(A, n) \rightarrow GL(A/I, n)$ est contractile; en effet, celle-ci est formée d'éléments de la forme $1 + m$, où m est une matrice $n \times n$ à coefficients dans I . D'après le lemme de Nakayama, la matrice $1 + tm$, $t \in [0, 1]$, est aussi inversible. Donc l'homotopie $t \mapsto 1 + tm = tu - t + 1$ définit une rétraction par déformation de la fibre sur la matrice identité.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE (2.3.12). — Soit A une algèbre de dimension finie. Alors $K^1(A) = K^5(A) = 0$.

Démonstration. — Si I est le radical de A , l'algèbre A/I est semi-simple, donc est somme directe d'algèbres de matrices sur $\mathbf{C}$, $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{H}$. D'autre part, on démontre aisément que le foncteur χ de $\mathcal{T}(A)$ dans $\mathcal{T}(A(n))$ défini par $\chi(a) = \underbrace{a \oplus \dots \oplus a}_n$ est une équivalence de catégories (A quelconque).

On est ainsi ramené au cas où $A = \mathbf{C}$, $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{H}$. Puisque $K^1(\mathbf{C}) = K^5(\mathbf{C})$ et que $K^1(\mathbf{R}) \approx K^5(\mathbf{H})$, $K^1(\mathbf{H}) \approx K^5(\mathbf{R})$, il suffit de prouver la nullité du groupe K^1 . Pour $A = \mathbf{C}$, c'est évident car

$$K^1(\mathbf{C}) \approx K^{-1}(\mathbf{C}) \approx \pi_0(GL(\mathbf{C})) = 0.$$

Pour $A = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{H}$, $K^1(A)$ est le groupe K du foncteur restriction des scalaires $\psi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$, où

$$\mathcal{C} = (\mathcal{T}(A))^{1,1} \sim \mathcal{T}(A) \quad \text{et où} \quad \mathcal{C}' = (\mathcal{T}(A))^{1,0} \sim \mathcal{T}(\mathbf{C}).$$

Considérons la suite exacte associée à ce foncteur :

$$K^{-1}(\mathcal{C}) \rightarrow K^{-1}(\mathcal{C}') \rightarrow K(\psi) \rightarrow K(\mathcal{C}) \xrightarrow{\psi^*} K(\mathcal{C}').$$

Dans cette suite, $K^{-1}(\mathcal{C}') \approx \pi_0(GL(\mathbf{C})) = 0$ et l'homomorphisme ψ^* est injectif de manière évidente. Donc $K(\psi) = 0$.

C. Q. F. D.

DÉFINITION (2.3.13). — Une catégorie de Banach $\mathcal{C}$ est dite de dimension finie si $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)$ est un espace vectoriel de dimension finie pour tout couple d'objets (M, N) de $\mathcal{C}$.

PROPOSITION (2.3.14). — Soit $\mathcal{C}$ une catégorie de Banach de dimension finie. Alors $K^1(\mathcal{C}) = K^5(\mathcal{C}) = 0$.

Démonstration. — La proposition résulte aussitôt du corollaire précédent et de la proposition (1.3.4).

PROPOSITION (2.3.15) (comparer avec [6]). — Soit $\mathcal{C}$ une catégorie de Banach de dimension finie. Le groupe $K^{p+1, q}(\mathcal{C})$ est alors isomorphe au conoyau de l'homomorphisme de restriction naturel

$$\psi^* : K(\mathcal{C}^{p, q+1}) \rightarrow K(\mathcal{C}^{p, q}).$$

Démonstration. — Considérons la suite exacte associée au foncteur restriction des scalaires

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{C}^{p, q+1} &\rightarrow \mathcal{C}^{p, q}, \\ K(\mathcal{C}^{p, q+1}) &\xrightarrow{\psi^*} K(\mathcal{C}^{p, q}) \rightarrow K^1(\psi) \rightarrow K^1(\mathcal{C}^{p, q+1}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

D'après la proposition précédente, le groupe $K^1(\mathcal{C}^{p, q+1})$ est nul. Le conoyau de ψ^* est donc isomorphe à

$$K^1(\psi) \approx K^1(D^8, S^7; \psi) \approx K(D^7; S^6; \psi) \approx K^{p+1, q}(\mathcal{C}).$$

C. Q. F. D.

Remarque. — Pour $n \geq 1$, on démontre aisément que $K^{-n}(\mathcal{C})$ est aussi isomorphe au conoyau de l'homomorphisme de restriction naturel $K(\mathcal{C}^{n, 0}) \rightarrow K(\mathcal{C}^{n-1, 0})$. En effet, la catégorie $\mathcal{C}^{0, n+2}$ est équivalente à la catégorie $\mathcal{C}^{n, 0}$ de manière compatible avec les foncteurs restrictions.

PROPOSITION (2.3.16) (Bott). — Les groupes

$$\pi_p(O) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ q}} \pi_p(O(q)) = \pi_p(O(n))$$

pour $n \geq p + 2$ ne dépendent que de la congruence de $p \bmod 8$. Les huit premiers groupes sont donnés par la table :

$p \dots \dots \dots$	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
$\pi_p(O) \dots \dots \dots$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}$

Démonstration. — La fibration $O(n-1) \rightarrow O(n) \rightarrow S^{n-1}$ montre que $\pi_p(O) = \pi_p(O(n))$ pour $n > p + 1$. D'autre part, puisque $O(n)$ est rétracte par déformation de $GL(\mathbb{R}, n)$,

$$\pi_p(O) \approx \pi_p(GL(\mathbb{R})) \approx K^{-p-1}(\mathbb{R}) = K^{0, p+1}(\mathbb{R}).$$

La proposition précédente ramène alors le calcul de $K^{0,p+1}(\mathbf{R})$ à un calcul purement algébrique (cf. [6]), d'où la table.

PROPOSITION (2.3.17) (Bott). — *Les groupes*

$$\pi_p(U) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ q}} \pi_p(U(q)) \approx \pi_p(U(n))$$

pour $n > \frac{p}{2}$ ne dépendent que de la congruence de $p \bmod 2$. On a $\pi_0(U) = 0$ et $\pi_1(U) \approx \mathbf{Z}$.

Démonstration. — Elle est analogue à la précédente. Le calcul des deux premiers groupes est cependant plus trivial car

$$\pi_1(U) \approx \pi_1(GL(\mathbf{C})) \approx K(\mathbf{C}) \approx \mathbf{Z}.$$

2.4. Structures multiplicatives.

Dans ce paragraphe, on se propose de démontrer quelques formules de multiplication qui seront utiles pour les applications. Malheureusement, la définition de structures multiplicatives « maniables » dans tous les cas reste encore à trouver (pour des travaux antérieurs sur ce sujet, voir [3], [6], [11]). En théorie KU « classique » par exemple, on ne dispose pas de « formule » simple exprimant le produit de deux éléments de $KU^1(X) \approx [X, GL(\mathbf{C})]$ comme un fibré vectoriel sur X , du moins pas à la connaissance de l'auteur ⁽¹²⁾.

Soient $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$ trois catégories additives. Un foncteur *bilinéaire* φ de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ dans $\mathcal{C}''$ est un foncteur qui possède les propriétés suivantes :

- (i) $\varphi(E_1 \oplus E_2, E') \approx \varphi(E_1, E') \oplus \varphi(E_2, E')$;
- (ii) $\varphi(E, E'_1 \oplus E'_2) \approx \varphi(E, E'_1) \oplus \varphi(E, E'_2)$;
- (iii) L'application de $\text{Hom}(E_1, E_2) \times \text{Hom}(E'_1, E'_2)$ dans $\text{Hom}(\varphi(E_1, E'_1), \varphi(E_2, E'_2))$ déduite de la fonctorialité de φ est bilinéaire.

Si $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$ sont trois catégories de Banach, on dit que φ est *bilinéaire continue* si l'application précédente est k -bilinéaire continue, ce que nous supposons désormais.

L'exemple le plus important que nous ayons en vue est celui où $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{C}'$, resp. $\mathcal{C}''$) est la catégorie des fibrés vectoriels de base un compact X (resp. Y , resp. $X \times Y$), φ étant alors défini par le produit tensoriel externe des fibrés. Mais il existe bien d'autres possibilités. Par exemple, si $\mathcal{C}$ est une catégorie

⁽¹²⁾ Voir cependant l'article de l'auteur « Algèbres de Clifford et opérateurs de Fredholm » (à paraître).

de Banach sur le corps $k = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, on a un foncteur bilinéaire continu φ de $\mathcal{C} \times \mathcal{T}(k)$ dans $\mathcal{C}$ qui est défini par la formule $\varphi((E, k^n)) = E^n$.

Pour plus de commodité, nous désignerons par $a \otimes a'$ l'objet ou le morphisme $\varphi(a, a')$.

Si X et Y sont deux espaces compacts, tout foncteur bilinéaire continu φ induit de manière évidente un foncteur bilinéaire continu

$$\varphi_{(X, Y)}: \mathbf{C}(X) \times \mathbf{C}'(Y) \rightarrow \mathbf{C}''(X \times Y)$$

par la formule

$$\varphi_{(X, Y)}((E, p), (E', p')) = (E \otimes E', p \otimes p')$$

(si $\mathcal{C} = \mathcal{C}' = \mathcal{C}'' = \mathcal{T}(k)$ et si φ est le produit tensoriel des espaces vectoriels, ceci n'est autre que le produit tensoriel ordinaire des fibrés). D'autre part, tout foncteur bilinéaire φ (non nécessairement continu) définit, de manière évidente, une application de $K(\mathcal{C}) \times K(\mathcal{C}')$ dans $K(\mathcal{C}'')$. Si φ est continu, la construction précédente permet de définir une application bilinéaire

$$\cup: K(X; \mathbf{C}) \times K(Y; \mathbf{C}') \rightarrow K(X \times Y; \mathbf{C}'')$$

En raison des isomorphismes entre les groupes K et les groupes K^0 , on en déduit une application de $K^0(X) \times K^0(Y)$ dans $K^0(X \times Y)$ ⁽¹³⁾ notée de la même manière. Puisque tout élément de $K^0(Z)$ peut s'écrire $d(G, \zeta, -\zeta)$ d'après les isomorphismes précédents, cette application est définie par

$$d(E, \varepsilon, -\varepsilon) \cup d(F, \eta, -\eta) = d(E \otimes F, \varepsilon \otimes \eta, -\varepsilon \otimes \eta).$$

PROPOSITION (2.4.1). — Soient X et Y deux espaces compacts et soient X' et Y' deux sous-ensembles fermés de X et Y respectivement. Il existe alors une application bilinéaire et une seule

$$\cup: K^0(X, X') \times K^0(Y, Y') \rightarrow K^0(X \times Y, X \times Y' \cup X' \times Y)$$

qui soit naturelle et qui coïncide avec l'application précédente, lorsque $X' = Y' = \emptyset$. Elle est donnée par la formule

$$d(E, \varepsilon^1, \varepsilon^2) \cup d(F, \eta^1, \eta^2) = d(E \otimes F, \zeta^1, \zeta^2),$$

avec

$$\begin{aligned} 2\zeta^1 &= (1 + \varepsilon^1) \otimes \eta^1 + (1 - \varepsilon^1) \otimes \eta^2, \\ 2\zeta^2 &= (1 + \varepsilon^2) \otimes \eta^1 + (1 - \varepsilon^2) \otimes \eta^2. \end{aligned}$$

Démonstration. — L'existence et l'unicité d'une telle application bilinéaire est classique (cf. [3], [7]) et résulte de la propriété d'excision. Pour démontrer

⁽¹³⁾ Les catégories $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$ seront sous-entendues lorsque nous emploierons cette notation.

la formule précédente, il suffit donc de vérifier les points suivants, ce qui est immédiat :

- (i) ζ^1 et ζ^2 sont des graduations de $E \otimes F$;
- (ii) Si $\varepsilon_x^1 = \varepsilon_x^2$ (resp. $\eta_y^1 = \eta_y^2$) en un point x de X (resp. y de Y), alors
 - $\xi_{x,y}^1 = \xi_{x,y}^2, \quad \forall y \in Y \quad (\text{resp. } \xi_{x,y}^1 = \xi_{x,p}^2, \quad \forall x \in X);$
- (iii) L'application naturelle ainsi définie par la formule est bilinéaire;
- (iv) Si $\varepsilon^1 = -\varepsilon^2 = \varepsilon$ et si $\eta^1 = -\eta^2 = \eta$,

$$\zeta^1 = -\zeta^2 = \varepsilon \otimes \eta.$$

Remarque. — On vérifie aisément que $d(E \otimes F, \zeta^1, \zeta^2) = d(E \otimes F, \xi^1, \xi^2)$, avec

$$\begin{aligned} 2\xi^1 &= \varepsilon^1 \otimes (1 + \eta^1) + \varepsilon^2 \otimes (1 - \eta^1), \\ 2\xi^2 &= \varepsilon^1 \otimes (1 + \eta^2) + \varepsilon^2 \otimes (1 - \eta^2) \end{aligned}$$

(on refait le raisonnement ci-dessus).

On a maintenant des isomorphismes canoniques t_n (pour toute catégorie de Banach $\mathcal{C}$) de $K^{0,n}(\mathcal{C})$ sur $K^0(D^n, S^{n-1}; \mathcal{C})$. On définit le « cup-produit » d'un élément x de $K^{0,n}(\mathcal{C})$ par un élément y de $K^{0,p}(\mathcal{C}')$ comme étant l'élément de $K^{0,n+p}(\mathcal{C}'')$ égal à $x \cup y = t_{n+p}^{-1}(t_n x \cup t_p y)$. D'après les considérations du paragraphe précédent, on voit aisément que l'isomorphisme de périodicité

$$K^0(X, Y) \approx K^0(X \times D^8, X \times S^7 \cup Y \times D^8)$$

est défini par le cup-produit par un générateur de $K^0(D^8, S^7) \approx \mathbf{Z}$ [voir aussi prop. (2.4.2)]. De plus le cup-produit précédent est compatible avec la périodicité $K^{0,n} \approx K^{0,n+8}$.

Comme il a été dit au début de ce paragraphe, le défaut de cette définition est de ne pas être assez explicite. On y remédie partiellement de la façon suivante. Définissons $T^{0,n}(\mathcal{C})$ comme étant (pour toute catégorie de Banach $\mathcal{C}$) le sous-groupe de $K^{0,n}(\mathcal{C})$ formé des éléments pouvant s'écrire $d(E, \omega, \eta, -\eta)$. On a alors la proposition :

PROPOSITION (2.4.2). — Soit $x = d(E, \nu, \varepsilon^1, \varepsilon^2)$ un élément de $K^{0,n}(\mathcal{C})$ et soit $y = d(F, \omega, \eta, -\eta)$ un élément de $T^{0,p}(\mathcal{C}')$. Alors

$$x \cup y = d(E \otimes F, \nu \otimes \eta, 1 \otimes \omega, \varepsilon^1 \otimes \eta, \varepsilon^2 \otimes \eta).$$

Démonstration. — Posons $V = \mathbf{R}^n, W = \mathbf{R}^p$; on a alors un homéomorphisme relatif h de la paire

$$(S^+(V \oplus 1) \times S^+(W \oplus 1), S^+(V \oplus 1) \times S(W) \cup S(V) \times S^+(W \oplus 1))$$

sur la paire $(S^+(V \oplus W \oplus 1), S(V \oplus W))$: à un couple

$$(\nu \cos \theta + \varepsilon \sin \theta, \omega \cos \alpha + \eta \sin \alpha), \quad \text{où } \nu \in S(V), \quad \omega \in S(W)$$

et où ε est le vecteur unité de la $(n+1)$ -coordonnée de $V \oplus \mathbf{I}$, η le vecteur unité de la $(p+1)$ -coordonnée de $W \oplus \mathbf{I}$, on associe l'élément $(\nu \cos \theta + \zeta \sin \theta) \sin \alpha + w \cos \alpha$, ζ étant le vecteur unité de la $(n+p+1)$ -coordonnée de $V \oplus W \oplus \mathbf{I}$ (θ et $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$). Démontrons maintenant l'identité annoncée. On a

$$\begin{aligned} t(d(E, \nu, \varepsilon^1, \varepsilon^2)) &= d(E, \nu \cos \theta + \varepsilon^1 \sin \theta, \nu \cos \theta + \varepsilon^2 \sin \theta), \\ t(d(F, w, \eta, -\eta)) &= d(F, w \cos \alpha + \eta \sin \alpha, w \cos \alpha - \eta \sin \alpha). \end{aligned}$$

D'après la proposition (2.4.1), $tx \cup y$ est donc égal à $d(E \otimes F, \zeta^1, \zeta^2)$, avec

$$\begin{aligned} \zeta^1 &= (\nu \cos \theta + \varepsilon^1 \sin \theta) \otimes \eta \sin \alpha + (\mathbf{I} \otimes w) \cos \alpha, \\ \zeta^2 &= (\nu \cos \theta + \varepsilon^2 \sin \theta) \otimes \eta \sin \alpha + (\mathbf{I} \otimes w) \cos \alpha. \end{aligned}$$

La proposition résulte maintenant de la définition explicite de l'homéomorphisme h donnée ci-dessus.

Remarque 1. — Si $x = d(E, \nu, \varepsilon, -\varepsilon) \in T^{0,n}(\mathcal{C})$ et si

$$y = d(F, w, \eta^1, \eta^2) \in K^{0,p}(\mathcal{C}'),$$

on vérifie de même que

$$x \cup y = d(E \otimes F, \nu \otimes \mathbf{I}, \varepsilon \otimes w, \varepsilon \otimes \eta^1, \varepsilon \otimes \eta^2).$$

Remarque 2. — Les considérations précédentes se généralisent sans difficulté aux groupes relatifs. Ainsi, on a une application explicite de

$$K^{0,n}(X, X'; \mathcal{C}) \times T^{0,p}(Y; \mathcal{C}') \quad \text{dans} \quad K^{0,n+p}(X \times Y, X' \times Y; \mathcal{C}'').$$

Bien entendu, pour que la proposition (2.4.2) ait un certain intérêt, il faut montrer que les groupes $T^{0,n}(\mathcal{C})$ ne diffèrent pas trop des groupes $K^{0,n}(\mathcal{C})$. C'est maintenant le but des considérations qui vont suivre.

En suivant Atiyah, Bott et Shapiro [6], désignons par $M^n(\mathcal{C})$ le groupe de Grothendieck de $\mathcal{C}^{0,n+1}$. Le foncteur restriction de $\mathcal{C}^{0,n+2}$ dans $\mathcal{C}^{0,n+1}$ induit un homomorphisme i_n de $M^{n+1}(\mathcal{C})$ dans $M^n(\mathcal{C})$. Posons.

$$A^n(\mathcal{C}) = \text{Coker } i_n.$$

On définit alors un homomorphisme α_n de $M^n(\mathcal{C})$ dans $K^{0,n}(\mathcal{C})$ en posant

$$\alpha_n((E, \nu, \varepsilon)) = d(E, \nu, \varepsilon, -\varepsilon)$$

[ε désignant ici la graduation du $\mathcal{C}^{0,n}$ -module (E, ν)]. L'image de cet homomorphisme est précisément le sous-groupe $T^{0,n}(\mathcal{C})$. D'autre part, α_n s'annule sur l'image de $M^{n+1}(\mathcal{C})$ dans $M^n(\mathcal{C})$ par i_n ; en effet, si η désigne une graduation de (E, ν, ε) , $\theta \mapsto (\varepsilon \cos \theta + \eta \sin \theta)$ est une homotopie entre ε

et $-\varepsilon$ parmi les graduations de (E, ν) . On obtient donc ainsi en définitive un homomorphisme de $A^n(\mathcal{C})$ dans $K^{0,n}(\mathcal{C})$ noté encore α_n .

PROPOSITION (2.4.3). — *Si n est congru à 0 mod 4 (resp. à 0 mod 2 dans le cas où $\mathcal{C}$ est complexe), l'homomorphisme α_n est bijectif. En particulier, $T^{0,n}(\mathcal{C}) = K^{0,n}(\mathcal{C})$.*

Démonstration. — [Voir aussi la démonstration du corollaire 3.1.14] Dans les cas envisagés, le groupe $K^{0,n}(\mathcal{C})$ est le groupe de Grothendieck de $\mathcal{C}^{0,n+2} \sim \mathcal{C}^{0,n}$. Puisque

$$\mathcal{C}^{0,n+1} \sim \mathcal{C}^{0,n+2} \times \mathcal{C}^{0,n+1},$$

on a une suite exacte

$$0 \rightarrow M^{n+1}(\mathcal{C}) \rightarrow M^n(\mathcal{C}) \xrightarrow{\beta_n} K^{0,n}(\mathcal{C}) \rightarrow 0.$$

Il suffit de vérifier que β_n coïncide avec α_n par passage au quotient [cf. prop. (2.1.7)].

COROLLAIRE (2.4.4). — *Si $n \equiv 0 \pmod{2}$, le groupe quotient $K^{0,n}(\mathcal{C})/T^{0,n}(\mathcal{C})$ est formé d'éléments d'ordre 2.*

En effet, si $x \in K^{0,n}(\mathcal{C})$, $2x$ est dans l'image de l'homomorphisme $K^{0,n}(\mathcal{C}^{1,0}) \rightarrow K^{0,n}(\mathcal{C})$ qui applique $T^{0,n}(\mathcal{C}^{1,0})$ dans $T^{0,n}(\mathcal{C})$. Or, $K^{0,n}(\mathcal{C}^{1,0}) = T^{0,n}(\mathcal{C}^{1,0})$ d'après la proposition précédente.

PROPOSITION (2.4.5). — *L'homomorphisme $\tilde{\alpha}_n$ est bijectif lorsque $\mathcal{C}$ est une catégorie de Banach de dimension finie.*

Démonstration. — D'après l'argument déjà éprouvé de passage à la limite inductive, il suffit de démontrer l'assertion pour $\mathcal{C} = \mathcal{X}(\mathbf{R})$, $\mathcal{X}(\mathbf{C})$ ou $\mathcal{X}(\mathbf{H})$. Dans ces cas particuliers, la vérification a été faite par Atiyah, Bott et Shapiro (cf. [6] ou [17]).

Remarque. — On voit aisément que $T^{0,n}(\mathcal{C}) \neq K^{0,n}(\mathcal{C})$ en général (considérer par exemple la catégorie des fibrés vectoriels complexes sur S^1).

Remarque générale sur le paragraphe 2.4. — Les structures multiplicatives qu'on vient d'établir pour les groupes $K^{0,n}$ s'étendent aisément aux groupes $K^{p,q}$ et même KR_c^K (cf § 3.3) pourvu qu'on admette les résultats du paragraphe 3.3. En effet, dans ce paragraphe, on démontrera que le groupe $K^{p,q}$ est isomorphe au groupe K d'un « espace de Thom » convenable. Ainsi, par exemple, si $T^{p,q}(\mathcal{C})$ désigne le sous-groupe de $K^{p,q}(\mathcal{C})$ formé des éléments pouvant s'écrire $d(E, \omega, \varepsilon, -\varepsilon)$, on a

$$K^{p,q} = T^{p,q} \quad \text{si } p - q \equiv 0 \pmod{4}$$

(resp. $\equiv 0 \pmod{2}$ dans le cas complexe). La proposition (2.4.2) s'étend de la même manière aux groupes $K^{p,q}$ et ceci nous sera utile dans le paragraphe 3.1 (pour démontrer la « multiplicativité » de la classe de Thom notamment).

CHAPITRE III.

APPLICATIONS.

3.1. Le « théorème de Thom » en K -théorie.

Soit V un fibré vectoriel réel de rang constant et de base un espace compact X . L'espace de Thom de V est le compactifié $\dot{V}$ de l'espace localement compact V . Dans ce paragraphe on se propose de calculer le groupe $K^*(\dot{V}, P)^{(14)}$ (P désignant le point base canonique de V) en fonction du groupe K^* de la base ([6], [23] voir pour des calculs antérieurs).

En cohomologie ordinaire, le groupe $H^*(\dot{V}, P)$ est isomorphisme naturellement à la cohomologie de la base à coefficients dans le système local défini par l'orientation des fibres (avec un décalage de degrés). En particulier, si le fibré est orientable, le système local est trivial et

$$H^i(X) \approx H^{i+n}(\dot{V}, P).$$

En K -théorie, l'analogue de la cohomologie à coefficients dans un système local va être fourni par les groupes K^W . De manière précise, $K^n(\dot{V}, P)$ est isomorphe au groupe $K^n(B(V), S(V))$, où $B(V)$ et $S(V)$ désignent respectivement les fibrés en boules et en sphères associés à une métrique riemannienne de V . Dans le paragraphe 2.2, on a établi un isomorphisme fondamental

$$t: K^W(X) \rightarrow K^n(B(V), S(V)), \quad \text{avec } W = V \oplus T^{n,0}.$$

Dans les pages suivantes nous montrerons que le groupe K^W ne dépend que des deux premières classes de Stiefel-Whitney de V . Ceci explique l'analogie avec la cohomologie à coefficients dans un système local (qui ne dépend que de la première classe de Stiefel-Whitney de V). L'introduction du groupe K^W , en dehors de toute considération esthétique, trouve là une de ses justifications.

PROPOSITION (3.1.4). — Soit V un fibré vectoriel de base compacte X et de groupe structural $O(p, q)$ et soit $\mathcal{C}$ une catégorie de Banach réelle. Si V est cliffordien (resp. spinorien), les catégories $\mathcal{C}^{p,q}(X)$ et $\mathcal{C}^V(X)$ [resp. les catégories graduées $\hat{\mathcal{C}}^{p,q}(X)$ et $\hat{\mathcal{C}}^V(X)$] sont équivalentes.

⁽¹⁴⁾ $K^* = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} K^n$.

Démonstration. — Raisonnons dans le cas cliffordien pour commencer. Soit P un fibré principal de groupe $\Gamma(p, q)$ tel que $V = P \times_{\Gamma(p, q)} \mathbf{R}^{p+q}$. Si E est un fibré sur X muni d'une structure de $C^{p, q}$ -module, alors $P \times_{\Gamma(p, q)} E$ est de manière évidente un $C(V)$ -module si l'on pose

$$(p, \lambda) \cdot (p, e) = (p, \lambda e), \quad \forall p \in P, \quad \lambda \in \mathbf{R}^{p+q}, \quad e \in E$$

[on a « tordu » la structure de $C^{p, q}$ -module de E ; cf. la remarque suivant la prop. (1.2.11)]. De plus, si f est un morphisme de $C^{p, q}$ -modules, $\text{Id}_P \times_{\Gamma(p, q)} f$ est un morphisme de $C(V)$ -modules. Ceci définit un foncteur u de $\mathcal{C}^{p, q}(X)$ dans $\mathcal{C}^V(X)$. Définissons maintenant un foncteur u' en sens inverse. Pour cela, posons $H = \Gamma(p, q)$ et considérons le fibré en groupes $\tilde{H} = P \times_H H$, H opérant sur H par la représentation adjointe : c'est le quotient de $P \times H$ par la relation d'équivalence

$$(p, h) \sim (p\alpha^{-1}, \alpha h \alpha^{-1}).$$

Ce fibré opère à droite sur P par la formule $p \cdot (p, h) = ph^{-1}$. Il opère à gauche sur F si F est un $C(V)$ -module [car $\tilde{H} \subset C(V) = P \times_H C^{p, q}$]. On pose alors $u'(F) = P \times_{\tilde{H}} F$: c'est le quotient de $P \times F$ par la relation d'équivalence

$$(p, f) \sim (ph, (p, h) \cdot f);$$

$u'(f)$ peut être muni d'une structure de $C^{p, q}$ -module si l'on pose

$$\lambda(p, f) = (p, (p, \lambda) \cdot f).$$

On pose de même $u'(f) = \text{Id}_P \times_{\tilde{H}} f$. On vérifie alors directement que

$$u' \cdot u \sim \text{Id} \quad \text{et que} \quad u \cdot u' \sim \text{Id}.$$

Dans le cas spinoriel, on recommence les raisonnements précédents mais en remarquant que si E est un objet gradué, $P \times_{\text{Spin}(p, q)} E$ peut être muni de la graduation induite par celle de E et que $u(f)$ est de degré 0 si f l'est.

C. Q. F. D.

PROPOSITION (3.1.2). — Soit V un fibré vectoriel réel de base compacte X de groupe structural $O(p, q)$ et soit $\mathcal{C}$ une catégorie de Banach complexe. Si V est u cliffordien (resp. u spinoriel), les catégories $\mathcal{C}^{p, q}(X)$ et $\mathcal{C}^V(X)$ [resp. les catégories graduées $\hat{\mathcal{C}}^{p, q}(X)$ et $\hat{\mathcal{C}}^V(X)$] sont équivalentes.

Démonstration. — Elle est analogue à la précédente : il suffit de remarquer que $\Gamma^u(p, q)$ est un sous-groupe de $(C^{p, q} \otimes \mathbf{C})^*$ de manière évidente et que, pour une catégorie de Banach complexe, les notions de $C^{p, q}$ -module et de $C^{p, q} \otimes \mathbf{C}$ -module coïncident.

COROLLAIRE (3.1.3). — Soit V un fibré spinoriel (resp. U spinoriel) de type (p, q) et soit $\mathcal{C}$ une catégorie de Banach réelle (resp. complexe). Le foncteur u induit alors un isomorphisme des groupes $K^{p,q}(X)$ et $K^r(X)$.

THÉOREME (3.1.4). — Soit $\mathcal{C}$ une catégorie de Banach réelle (resp. complexe) et soit V un fibré vectoriel réel de dimension n muni d'une structure spinorielle (resp. U spinorielle) de type $(0, n)$. L'homomorphisme de $K^{p,q}(X; \mathcal{C})$ dans $K^{p+n,q}(B(V), S(V); \mathcal{C})$ défini comme le composé

$$K^{p,q}(X) \xrightarrow{\gamma^n} K^{p+n,q+n}(X) \xrightarrow{u} K^{p+n,q \oplus p}(X) \xrightarrow{l} K^{p+n,q}(B(V), S(V))$$

est un isomorphisme (dit « de Thom »).

Démonstration. — Le théorème résulte immédiatement de ce qui précède et du théorème (2.1) (compte tenu que le groupe $K^w(X)$ est le groupe de Grothendieck de la catégorie graduée $\hat{\mathcal{C}}^w(X)$).

Considérons en particulier le cas où $p = q = 0$ et où $\mathcal{C}$ est la catégorie des espaces vectoriels réels (resp. complexes) de dimension finie. L'image de $1 \in K^0(X)$ dans $K^n(B(V), S(V))$ par cet homomorphisme est la classe de Thom U_r de V .

PROPOSITION (3.1.5). — La classe de Thom U_r dépend multiplicativement et fonctoriellement de V (vis-à-vis des morphismes cartésiens de fibrés). On a en particulier la relation

$$U_{r \oplus w} = U_r \cup U_w.$$

Enfin, l'isomorphisme de Thom (dans le cas d'une catégorie de Banach quelconque) est défini par le cup-produit par U_r .

Démonstration. — La classe U_r provient d'une classe U'_r de $K^{T^{n,0} \oplus V}(X)$ qui se décrit de la manière suivante : soit P le fibré principal de groupe $H = \text{Spin}(n, n)$ [resp. $\text{Spin}^U(n, n)$] associé à $V \oplus T^{n,0}$ et soit $M = \Lambda \mathbf{R}^n$ muni de sa structure de $C^{n,n}$ -module gradué canonique [cf. prop. (1.1.2)]. Désignons par ε la graduation de M . Alors $U_r = d(\tilde{M}, \tilde{\varepsilon}, -\tilde{\varepsilon})$, où

$$\tilde{M} = P \times_{\text{Spin}(n, n)} M \quad \text{et} \quad \tilde{\varepsilon} = \text{Id}_P \times_{\text{Spin}(n, n)} \varepsilon.$$

Si l'on pose de même $U_w = d(\tilde{N}, \tilde{\eta}, -\tilde{\eta})$, la même méthode que celle qui nous a servi à démontrer la proposition (2.4.2) nous apprend que $U_r \cup U_w = d(\tilde{M} \otimes \tilde{N}, \tilde{\varepsilon} \otimes \tilde{\eta}, -\tilde{\varepsilon} \otimes \tilde{\eta}) = d(\tilde{M} \otimes \tilde{N}, \tilde{\varepsilon} \otimes \tilde{\eta}, -\tilde{\varepsilon} \otimes \tilde{\eta})$. La proposition résulte alors de la proposition (2.4.2) et du fait que $\Lambda \mathbf{R}^{n+p} \simeq \Lambda \mathbf{R}^n \otimes \Lambda \mathbf{R}^p$ comme $C^{n+p, n+p}$ -modules gradués ⁽¹⁵⁾. La démons-

⁽¹⁵⁾ Dans $\mathbf{R}^{2n} = \mathbf{R}^n \oplus \mathbf{R}^n$ soit e_i^- (resp. e_i^+) la base canonique du premier (resp. second) facteur $\mathbf{R}^n$. En suivant Atiyah, Bott et Shapiro [6], un $C^{n,n}$ -module E est dit un α -module ($\alpha = \pm 1$) si le produit $e_1^+ e_1^- \dots e_n^+ e_n^-$ agit sur E^0 comme la multiplication par α . On voit alors aisément que l'équivalence γ de $\mathcal{C}^{p,p}$ dans $\mathcal{C}^{p+1, p+1}$ transforme un α -module en α -module. Il s'ensuit que $\Lambda \mathbf{R}^n$ doit ici être considéré comme un $+1$ -module, ce qui fixe sans ambiguïté le signe de U_r .

tration dans le cas complexe est la même à condition de remplacer Spin par Spin^U .

Supposons maintenant que la dimension de V soit un multiple $8p$ de 8. On a alors des isomorphismes

$$K(X) \xrightarrow{\beta} K^{0,8p}(X) \xrightarrow{t,u} K(B(V), S(V)),$$

β étant l'isomorphisme de périodicité. Le composé $\beta.t.u$ est égal au cup-produit par une classe fondamentale $u_r \in K(B(V), S(V))$. Si l'on regarde cette classe comme un élément de $K^V(X)$, on peut la définir simplement de la manière suivante : on choisit un $C^{0,8p}$ -module gradué irréductible L de graduation ζ . Alors, si P désigne le fibré principal de groupe $\text{Spin}(0, 8p)$ de V , on a

$$u_r = d(\tilde{L}, \tilde{\zeta}, -\tilde{\zeta}), \quad \text{avec} \quad \tilde{L} = P \times_{\text{Spin}(0,8p)} L, \quad \tilde{\zeta} = \text{Id}_P \times_{\text{Spin}(0,8p)} \zeta.$$

Il suffit de vérifier en effet que, dans l'équivalence

$$(\mathcal{X}(\mathbf{R}))^{0,8p} \rightarrow (\mathcal{X}(\mathbf{R}))^{8p,8p},$$

(L, ζ) a bien comme image (M, ε) . Or ceci est toujours vrai à condition de bien choisir le signe de ζ ⁽¹⁰⁾. Dans le cas complexe, on a bien sûr une discussion analogue en remplaçant Spin par Spin^U et 8 par 2. On a ainsi démontré la proposition suivante, due essentiellement à Atiyah, Bott et Shapiro [dans le cas où la catégorie de Banach de base est $\mathcal{X}(k)$] :

PROPOSITION (3.1.6). — *Soit V un fibré vectoriel réel de groupe $\text{Spin}(0, 8p)$ [resp. $\text{Spin}^U(0, 2p)$] et soit $\mathcal{C}$ une catégorie de Banach réelle (resp. complexe). Alors, le cup-produit par u_r définit un isomorphisme de $K(X; \mathcal{C})$ sur $K(B(V), S(V); \mathcal{C})$.*

Pour pouvoir appliquer le théorème (3.1.4) et la proposition (3.1.6), il nous faut des critères permettant d'affirmer qu'un fibré V peut être muni d'une structure spinorielle ou U spinorielle. On trouvera évidemment ces critères dans le paragraphe 1.1. Notons qu'un fibré complexe n'est pas spinoriel en général. Par contre, un fibré complexe est U spinoriel (cf. [6], p. 10); la classe u_r de la proposition (3.1.6) coïncide alors (au signe près) avec la classe définie par le complexe d'algèbre extérieure complexe de V (cf. [6], p. 14).

PROPOSITION (3.1.7). — *Soient V et V' deux fibrés de même rang tels que $\omega_i(V) = \omega_i(V')$, $i = 1, 2$. Alors les groupes $K^{p,q}(B(V), S(V); \mathcal{C})$ et $K^{p,q}(B(V'), S(V'); \mathcal{C})$ sont isomorphes.*

⁽¹⁰⁾ Explicitement, il faut choisir ζ de façon que le produit $e_1 \dots e_{8p}$ agisse par la multiplication par $+1$ sur la partie homogène de degré 0 de L .

La démonstration de la proposition repose sur le lemme suivant :

LEMME (3.1.8). — Avec les hypothèses de la proposition (1.3.7), il existe deux fibrés W et W' spinoriels de rang $8r$ tels que $V \oplus W$ et $V' \oplus W'$ soient isomorphes.

En effet, soit V_1 un supplémentaire de V tel que le rang de $V \oplus V_1$ soit multiple de 8. On pose alors

$$W = V' \oplus V_1 \quad \text{et} \quad W' = V \oplus V_1.$$

Démonstration de la proposition (3.1.7). — Grâce au théorème (2.1), on est ramené à démontrer que $K^V(X) \approx K^{V'}(X)$. Or, d'après le lemme précédent,

$$K^V(X) \approx K^{V \oplus T^{0,r}}(X) \approx K^{V \oplus W}(X)$$

et, de même,

$$K^{V'}(X) \approx K^{V' \oplus W'}(X).$$

C. Q. F. D.

Dans le cas où la catégorie de Banach $\mathcal{C}$ est complexe, on peut énoncer une proposition légèrement plus forte qui se démontre de la même manière.

PROPOSITION (3.1.9). — Soit $\mathcal{C}$ une catégorie de Banach complexe et soient V et V' deux fibrés vectoriels réels de même rang tels que

$$\omega_1(V) = \omega_1(V') \quad \text{et que} \quad \beta(\omega_2(V)) = \beta(\omega_2(V')),$$

où β désigne le Bockstein ⁽¹⁷⁾. Alors, les groupes $K^{p,q}(B(V), S(V); \mathcal{C})$ et $K^{p,q}(B(V'), S(V'); \mathcal{C})$ sont isomorphes.

Si V est un fibré orienté de rang n , non nécessairement spinoriel, on peut construire une nouvelle classe S_V de $K^n(B(V), S(V); \mathcal{R}(\mathbf{R}))$ de la manière suivante. Soit e_i^+ une base orthogonale d'une fibre V_x de V définissant l'orientation de V_x et soit de même e_i^- les sections orthonormales canoniques du fibré $T^{n,0}$. On voit aisément que le produit $e_1^+ e_1^- \dots e_n^+ e_n^-$ ne dépend pas du choix des e_i^+ et définit une section ε de carré 1 du fibré en algèbres $C(T^{n,0} \oplus V)$. En fait, cette section anticommute de manière évidente à l'action des vecteurs de $T^{n,0} \oplus V$ et induit donc une graduation η du fibré $N = C(T^{n,0} \oplus V)$, considéré comme module sur lui-même, définie par $\eta(x) = \varepsilon x$. Posons alors $S_V = d(N, \eta, -\eta)$.

PROPOSITION (3.1.10) — Si V est un fibré trivial de rang n , la classe S_V est égale à 2^n fois la classe de Thom U_V .

(17) i. e. l'opérateur cobord associé à la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}_2 \rightarrow 0.$$

Démonstration. — On doit montrer que $C^{n,n}$ muni de la graduation η est isomorphe à 2^n fois l'algèbre extérieure de $\mathbf{R}^n$ considéré comme $C^{n,n}$ -module gradué. Si on décompose $C^{n,n}$ en parties homogènes on voit aisément que

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$C^{n,n}$ étant identifié à $\mathbf{R}(2^n) \approx \mathbf{R}(2^{n-1})(2)$. Par conséquent, si

$$x = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

est un élément quelconque de $\mathbf{R}(2^n)$, A, B, C et D représentant des matrices $2^{n-1} \times 2^{n-1}$, on a

$$\eta(x) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Donc $C^{n,n} \approx \pm 2^n \wedge \mathbf{R}^n$ comme $C^{n,n}$ -module gradué. Avec la convention signalée en Note ⁽¹⁵⁾, il reste à vérifier que $C^{n,n}$ est bien un $(+1)$ -module, ce qui est immédiat.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE (3.1.14) (comparer avec Shih [23]). — Soit $\mathbf{A}$ un anneau sans torsion tel que 2 soit inversible et soit $\mathcal{C}$ une catégorie de Banach réelle. Le cup-produit par S_r induit alors un isomorphisme s de $K^{p,q}(X; \mathcal{C}) \otimes \mathbf{A}$ sur $K^{p+q}(B(V), S(V); \mathcal{C}) \otimes \mathbf{A}$.

Démonstration. — La proposition est vraie pour V trivial (donc spino-riel) puisque $S_r = 2^n U_r$ dans ce cas. Pour V non trivial, l'assertion résulte de manière évidente de l'argument de suite exacte de Mayer-Vietoris exposé au paragraphe 2.2.

Remarque. — Par souci de simplicité, nous n'avons pas parlé dans ce qui précède des groupes K^n et $K^{p,q}$ à coefficients dans un foncteur linéaire continu quasi-surjectif. Mais, bien entendu, les raisonnements que nous avons faits se transposent facilement à ce cadre un peu plus général.

Les groupes $K^{p,q}(\ ; \mathbf{Z}_r)$. — Il n'y a pas lieu ici de définir la K -théorie à coefficients dans un groupe abélien quelconque. Cependant, on peut définir pour tout espace compact X et tout sous-espace fermé Y , le groupe $K^{p,q}(X, Y; \mathbf{Z}_r)$ [resp. $K^n(X, Y; \mathbf{Z}_r)$] comme le groupe $K^{p+q}(X, Y; \varphi)$ [resp. $K^{n+1}(X, Y; \varphi)$], où φ est le foncteur quasi-surjectif de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$ défini par

$$\varphi(E) = \underbrace{E \oplus \dots \oplus E}_r$$

($\mathcal{C}$ étant une catégorie de Banach arbitraire). D'après le théorème (2.3.1), on a donc une suite exacte

$$K^n(X, Y) \xrightarrow{\times r} K^n(X, Y) \rightarrow K^n(X, Y; \mathbf{Z}_r) \rightarrow K^{n+1}(X, Y) \xrightarrow{\times r} K^{n+1}(X, Y).$$

PROPOSITION (3.1.11). — Soit x un élément de $K^n(X, Y; \mathbf{Z}_r)$. Alors $r^2 x = 0$.

Démonstration. — C'est une conséquence directe de la suite exacte précédente.

Remarque (Atiyah). — Il est faux en général que $rx = 0$ ⁽¹⁸⁾. Cependant, un calcul simple montre qu'il en est ainsi si la catégorie de Banach de base $\mathcal{C}$ est complexe ou si r est de la forme $4m$ ou $4m+1$ (cf. [17]).

Du point de vue des structures multiplicatives notons qu'en général, si φ est un foncteur linéaire continu quasi-surjectif de $\mathcal{C}'$ dans $\mathcal{C}''$, les foncteurs bilinéaires continus de $\mathcal{X}(k) \times \mathcal{C}'$ dans $\mathcal{C}'$ et de $\mathcal{X}(k) \times \mathcal{C}''$ dans $\mathcal{C}''$ induisent un homomorphisme bilinéaire de $K(\varphi) \times K(X; \mathcal{X}(k))$ dans $K(\varphi)$. On en déduit, par excision et en appliquant les isomorphismes t et la périodicité, une application bilinéaire de $K^{p,q}(X; \mathbf{Z}_r) \times K^{n,0}(B(V), S(V))$ dans $K^{p+n,q}(B(V), S(V); \mathbf{Z}_r)$ (dite encore « cup-produit »).

PROPOSITION (3.1.12). — Soit V un fibré réel orienté de rang n muni d'une forme quadratique définie positive. Le cup-produit par S_r induit alors un isomorphisme de $K^{p,q}(X; \mathbf{Z}_r)$ dans $K^{p+n,q}(B(V), S(V); \mathbf{Z}_r)$ lorsque r est un entier impair.

Démonstration. — Il suffit de démontrer l'assertion quand V est trivial d'après l'argument de Mayer-Vietoris déjà éprouvé. Or, dans ce cas, $S_r = 2^n U_r$ et l'assertion résulte alors du fait que r^2 et 2^n sont premiers entre eux.

Remarque. — Le cas où r est pair est plus délicat et son étude nécessite la cohomologie ordinaire. Il fera l'objet d'une publication ultérieure.

Pour conclure, nous allons rapidement faire le lien entre notre travail et celui d'Atiyah, Bott et Shapiro [6]. En suivant ces auteurs, désignons par $M(V)$ le groupe de Grothendieck de la catégorie des fibrés en $C(V)$ -modules gradués (les morphismes étant de degré 0) et par $A(V)$ le conoyau de l'homomorphisme de restriction naturel $M(V \oplus \mathbf{1}) \rightarrow M(V)$ ⁽¹⁹⁾ [où $A(V; \mathcal{C})$ si l'on veut spécifier la catégorie de Banach de base]. Soit ω_r l'homomorphisme de $M(V)$ dans $K''(X)$ défini par

$$\omega_r(E, \varepsilon) = d(E, \varepsilon, -\varepsilon),$$

⁽¹⁸⁾ Par exemple $K^{-1}(P; \mathbf{Z}_2) \approx \mathbf{Z}_2$ lorsque $\mathcal{C} = P(\mathbf{R})$.

⁽¹⁹⁾ Notons ici que la catégorie des $C(V, Q)$ -modules gradués est naturellement isomorphe à la catégorie des $C(V, -Q)$ -modules gradués car les fibrés en algèbres $C^0(V, Q)$ et $C^0(V, -Q)$ sont isomorphes par l'homomorphisme 0 défini au § 1.1.

où ε désigne la graduation. Alors ω_ν s'annule sur l'image de $M(V \oplus \mathbf{1})$ dans $M(V)$ et définit par passage au quotient un homomorphisme, noté encore ω_ν , de $A(V)$ dans $K^\nu(X)$. Soit maintenant

$$\chi_\nu: A(V) \rightarrow K(B(\mathbf{1}), S(V))$$

l'homomorphisme défini par la formule

$$\chi_\nu((E, \varepsilon) = d(E^0, E^1, \alpha),$$

où $E = E^0 \oplus E^1$ est la décomposition de E suivant la graduation ε et où α est l'isomorphisme défini au-dessus de chaque point ν de $S(V)$ par la multiplication par $\nu \in C(V)$.

PROPOSITION (3.1.13). — *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} A(V) & \xrightarrow{\omega_\nu} & K^\nu(X) \\ \chi_\nu \downarrow & & \downarrow t \\ K(B(V), S(V)) & \approx & K^0(B(V), S(V)) \end{array}$$

Démonstration. — Elle est calquée sur celle du théorème (2.3.2) : il suffit d'expliciter l'isomorphisme de $K^0(B(V), S(V))$ sur $K(B(V), S(V))$.

COROLLAIRE (3.1.14). — *L'homomorphisme χ_ν est un isomorphisme pour une catégorie de Banach réelle (resp. complexe) si V est orientable et si son rang est multiple de 4 (resp. de 2) [comparer avec la proposition (2.3.15)].*

Démonstration. — Raisonnons dans le cas réel pour fixer les idées. Puisque t est un isomorphisme (théorème 2.2.1), il suffit de montrer que ω_ν est un isomorphisme. Choisissons une orientation de V ; le fibré en algèbre $C(V)$ possède alors une section canonique $\varepsilon = e_1 \dots e_n$ défini par le produit de vecteurs de base orthonormaux induisant l'orientation donnée. De plus, si n est multiple de 4, cette section est de carré 1 et anticommute aux vecteurs de V . D'après un argument déjà éprouvé il en résulte que, pour un fibré W quelconque, le produit tensoriel gradué $C(V) \hat{\otimes} C(W)$ s'identifie au produit tensoriel non gradué $C(V) \otimes C(W)$.
Donc

$$C(V \oplus \mathbf{1}) \approx C(V) \oplus C(V) \quad \text{et} \quad C(V \oplus 2) \approx C(V) (2).$$

Le groupe $K^\nu(X)$ s'identifie donc au groupe de Grothendieck de la catégorie des $C(V)$ -modules [i. e. des $C(V \oplus 2)$ -modules]. L'assertion en résulte alors de manière évidente. Explicitement, l'application en sens inverse $\omega'_\nu: K^\nu(X) \rightarrow A(V)$ est définie par la formule

$$\omega'_\nu(d(E, \varepsilon^1, \varepsilon^2)) = (E^1, \eta^1) - (E^2, \eta^2),$$

où l'on pose $E^i = \text{Ker}((1 - \varepsilon^i \varepsilon)/2)$ et $\eta^i =$ restriction de la graduation ε à E^i .

(cf. [24] ou cor. 1.3.10) et une suite analogue avec les groupes K de fibrés projectifs. Comme l'homomorphisme p est naturel, le lemme des cinq permet de se ramener au cas où $W = V \oplus \mathbf{1}$. Mais on a alors le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & & K^{0,1}(P(V \oplus \mathbf{1}), P(V)) \\ & \nearrow p & \downarrow \approx \pi^* \\ K^{r \oplus 2; r \oplus 1}(X) & & \\ & \searrow \iota & \downarrow \approx \\ & & K^{0,1}(S^+(V \oplus \mathbf{1}), S(V)) \end{array}$$

où

$$\pi : S^+(V \oplus \mathbf{1}) \rightarrow P(V \oplus \mathbf{1}) = S(V \oplus \mathbf{1})/\mathbf{Z}_2$$

désigne la projection canonique.

Remarque. — Dans cette démonstration, nous avons admis implicitement que l'homomorphisme p était compatible avec l'isomorphisme de périodicité de Bott et avec l'opérateur cobord ∂ . Mais ceci résulte facilement du lemme (2.2.12).

COROLLAIRE (3.2.2). — *Le groupe $K^n(P(W), P(V))$ est isomorphe naturellement au groupe $K^{n+1}(\varphi)$, où*

$$\varphi : \mathcal{C}^{r \oplus 1}(X) \rightarrow \mathcal{C}^{r \oplus 1}(X)$$

est le foncteur restriction des scalaires.

Démonstration. — Le théorème (3.2.1) implique que $K(D^s, S^{s-1}; \varphi)$ est isomorphe au groupe

$$K(D^{s+1} \times P(W), D^{s+1} \times P(V) \cup S^s \times P(W));$$

le résultat s'en déduit en appliquant la périodicité de Bott.

COROLLAIRE (3.2.3). — *Soit $k = \mathbf{R}$. Les groupes $K^n(P(W), P(V))$ et $K^{n+4}(P(W \oplus 4), P(V \oplus 4))$ sont alors isomorphes. En particulier, les groupes $K^n(P(W), P(V))$ et $K^n(P(W \oplus 8), P(V \oplus 8))$ sont isomorphes. Soit $k = \mathbf{C}$; les groupes $K^n(P(W), P(V))$ et $K^n(P(W \oplus 2), P(V \oplus 2))$ sont isomorphes.*

Démonstration. — Raisonnons dans le cas réel pour fixer les idées. Puisque l'algèbre de Clifford $C^{0,4}$ est positive, le fibré en algèbres $C(W \oplus 4)$ est canoniquement isomorphe au fibré $C(W) \otimes C^{0,4}$, i. e. $C(W) \otimes \mathbf{H}(2)$. Le résultat annoncé s'en déduit en appliquant la proposition (2.3.6).

COROLLAIRE (3.2.4) (conséquence et généralisation du corollaire précédent). — *Soit $k = \mathbf{R}$ et soit T un fibré spinoriel de rang $4p$; les groupes $K^n(P(W), P(V))$ et $K^{n+4p}(P(W \oplus T), P(V \oplus T))$ sont alors isomorphes. Soit $k = \mathbf{C}$ et soit T un fibré v -spinoriel de rang pair; les groupes $K^n(P(W), P(V))$ et $K^n(P(W \oplus T), P(V \oplus T))$ sont isomorphes.*

Démonstration. — Puisque T est un fibré orienté de rang multiple de 4, on a

$$C(W \oplus T) \approx C(W) \hat{\otimes} C(T) \approx C(W) \otimes C(T).$$

L'assertion résulte alors du fait que les catégories $\mathcal{C}^T(X)$ et $\mathcal{C}^{0,4p}(X)$ sont deux catégories équivalentes [prop. (3.1.1)]. Le raisonnement dans le cas complexe est analogue.

Soient maintenant V et V' deux fibrés spinoriels. Alors $W = V \oplus V'$ est de manière naturelle un fibré spinoriel en raison du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Spin}(n) \times \text{Spin}(p) & \longrightarrow & \text{Spin}(n+p) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{o}(n) \times \mathfrak{o}(p) & \longrightarrow & \mathfrak{o}(n+p) \end{array}$$

On en déduit une équivalence de catégories

$$u : \mathcal{C}^{0,r+1}(X) \rightarrow \mathcal{C}^W(X)$$

compatible avec les foncteurs restriction, r étant le rang de W . D'où le théorème :

THÉORÈME (3.2.5). — Soit $k = \mathbf{R}$ (resp. $k = \mathbf{C}$) et soient V et V' deux fibrés spinoriels (resp. U -spinoriel). Alors $W = V \oplus V'$ est un fibré spinoriel (resp. U -spinoriel) et l'homomorphisme

$$p.u : K^{0,r+1;0,l+1}(X) \rightarrow K^{0,1}(P(W), P(V))$$

est un isomorphisme ⁽²⁰⁾. En particulier, le groupe $K^n(P(W), P(V); \mathcal{C})$ ne dépend que de n , X , $\mathcal{C}$ et des dimensions respectives de V et de W .

COROLLAIRE (3.2.6). — Soient V , V' , W , W' quatre fibrés vectoriels réels tels que

$$\begin{aligned} V \subset W, \quad V' \subset W', \quad \text{rg}(V) &= \text{rg}(V'), \\ \omega_1(V) = \omega_1(V'), \quad \omega_2(V) = \omega_2(V) &= \omega_2(V'), \quad \text{rg}(W) = \text{rg}(W'), \\ \omega_1(W) = \omega_1(W'), \quad \omega_2(W) &= \omega_2(W') \end{aligned}$$

(resp. les mêmes conditions en remplaçant ω_2 par W_3). Si $k = \mathbf{R}$ (resp. $k = \mathbf{C}$), les groupes $K^n(P(W), P(V))$ et $K^n(P(W'), P(V'))$ sont alors isomorphes.

La démonstration de ce corollaire est analogue à celle de la proposition (3.1.7) [appliquer le corollaire (3.2.4)].

COROLLAIRE (3.2.7). — Soit $k = \mathbf{R}$, $r = l + 8t$, $l \equiv 1$ ou $-1 \pmod{8}$ (resp. $l \equiv 3$ ou $-3 \pmod{8}$); si V et W sont des fibrés spinoriels, les groupes $K^n(P(W), P(V))$ et $K^n(X; \mathbf{Z}_{16^t})$ (resp. et $K^{n+4}(X; \mathbf{Z}_{16^t})$) sont isomorphes.

⁽²⁰⁾ On note $K^{p,q;p',q'}(X)$ le groupe $K^{Tp,q;Tp',q'}(X)$.

Soit $k = \mathbf{C}$, $r = l + 2t$, $l \equiv 1 \pmod{2}$; si V et W sont des fibrés U -spinoriels, les groupes $K^n(P(W), P(V))$ et $K^n(X; \mathbf{Z}_{2^t})$ sont isomorphes.

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate de la table de algèbres de Clifford et du fait que les algèbres $C^{p,q}$ sont centrales simples lorsque $p + q$ est pair.

Par souci de simplicité, nous n'avons considéré dans ce qui précède que des fibrés spinoriels au lieu de fibrés cliffordiens. Or, pour affirmer que les catégories $\mathcal{C}^W(X)$ et $\mathcal{C}^{0,r}(X)$ sont équivalentes, il suffit que le fibré W soit cliffordien [prop. (3.1.1)]. Pour étendre les résultats précédents au cas cliffordien, il nous faudrait définir un homomorphisme de $\Gamma(o, n) \times \Gamma(o, p)$ dans $\Gamma(o, n + p)$ compatible avec les projections sur les groupes orthogonaux. Or ceci est impossible en général (cf. § 1.1). Cependant, si n est multiple de 4, on peut définir un homomorphisme

$$\text{Spin}(o, n) \times \Gamma(o, p) \rightarrow \Gamma(o, n + p)$$

compatible avec les projections sur les groupes orthogonaux. En effet, si $\varepsilon = e_1 \dots e_n$, l'application α de $\mathbf{R}^p$ dans $C^{0,n+p}$ définie par $x \mapsto \varepsilon x$ induit un homomorphisme de $C^{0,p}$ dans $C^{0,n+p}$, donc de $\Gamma(o, p)$ dans $\Gamma(o, n + p)$, d'où l'homomorphisme cherché de manière évidente. On en déduit la proposition :

PROPOSITION (3.2.8). — Soit $k = \mathbf{R}$ (resp. $k = \mathbf{C}$). Soit V un fibré spinoriel (resp. U spinoriel) de rang $4p - 1$ (resp. $2p - 1$) et soit V' un fibré cliffordien (resp. U cliffordien). Alors $V \oplus 1$ est spinoriel (resp. U spinoriel) et $W \oplus 1 = V \oplus 1 \oplus V'$ est cliffordien (resp. U cliffordien). Le groupe $K^n(P(W), P(V))$ est donc, sous ces hypothèses, isomorphe au groupe $K^{n+1}(\varphi)$, où φ est le foncteur restriction

$$\mathcal{C}^{0,r+1}(X) \rightarrow \mathcal{C}^{0,l+1}(X),$$

r étant le rang de W et l celui de V .

PROPOSITION (3.2.9) (comparer avec [6]). — Soit $X = \text{Point}$ et soit $\mathcal{C}$ une catégorie de Banach de dimension finie. Le groupe $K(P(W), P(V))$ est alors isomorphe au conoyau de l'homomorphisme de restriction naturel $M_r \rightarrow M_l$, où M_n désigne le groupe de Grothendieck de $\mathcal{C}^{0,n+1}$.

Démonstration. — La proposition résulte de la suite exacte de cohomologie [th. (2.3.1)]

$$K(\mathcal{C}^{0,r+1}) \rightarrow K(\mathcal{C}^{0,l+1}) \rightarrow K^1(\varphi) \rightarrow K^1 \begin{pmatrix} \mathcal{C}^{0,l+1} \\ \parallel \\ 0 \end{pmatrix}$$

associé au foncteur restriction des scalaires $\varphi : \mathcal{C}^{0,r+1} \rightarrow \mathcal{C}^{0,l+1}$. On démontre de même la proposition suivante :

PROPOSITION (3.2.10). — Sous les hypothèses de la proposition précédente, le groupe $K^1(P(W), P(V))$ [resp. $K^{-1}(P(W), P(V))$] est isomorphe au noyau (resp. au conoyau) de l'homomorphisme de restriction naturel $M_r^2 \rightarrow M_l^2$ (resp. $M_r^{-1} \rightarrow M_l^{-1}$), où M_n^i désigne le groupe $K^i(\mathcal{C}^{0,n+1})$.

COROLLAIRE (3.2.11) (cf. [1], [3]). — Soit $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathbf{C})$ la catégorie des espaces vectoriels complexes de dimension finie. Si l'on désigne par P_{s-1} l'espace projectif réel de $\mathbf{R}_s$ ($s \geq 0$), les groupes $K(P_r, P_s)$ ($l \geq 0$) à coefficients dans $\mathcal{C}$ sont donnés par le tableau

$$\begin{array}{ll} K(P_{2n}, P_{2q}) = \mathbf{Z}_{2^{n-q}}, & K^1(P_{2n}, P_{2q}) = 0, \\ K(P_{2n}, P_{2q-1}) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}_{2^{n-q}}, & K^1(P_{2n}, P_{2q-1}) = 0, \\ K(P_{2n+1}, P_{2q}) = \mathbf{Z}_{2^{n-q}}, & K^1(P_{2n+1}, P_{2q}) = \mathbf{Z}, \\ KP_{2n+1}, P_{2q+1} = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}_{2^{n-q-1}}, & K^1(P_{2n+1}, P_{2q+1}) = \mathbf{Z}. \end{array}$$

En particulier, on a

$$\begin{array}{ll} K(P_{2n}) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}_{2^n}, & K^1(P_{2n}) = 0, \\ K(P_{2n+1}) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}_{2^n}, & K^1(P_{2n+1}) = \mathbf{Z}. \end{array}$$

COROLLAIRE (3.2.12) (cf. [1], [6], [17]). — Soit $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathbf{R})$ la catégorie des espaces vectoriels réels de dimension finie. Soit $b_{r,l}$ le nombre d'entiers m tels que $l < m \leq r$ et $m \equiv 0, 1, 2, 4 \pmod{8}$ et soit $a_{r,l} = 2^{b_{r,l}}$. Alors, si $l \geq 0$,

$$\begin{array}{ll} K(P_r, P_l) = \mathbf{Z}_{a_{r,l}}, & \text{si } l \not\equiv -1 \pmod{4}, \\ K(P_r, P_l) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}_{a_{r,l+1}}, & \text{si } l \equiv -1 \pmod{4}, \\ K^4(P_r, P_l) = K(P_{r+4}, P_{l+4}). \end{array}$$

Remarque. — En fait, les techniques employées ici permettent de calculer le groupe $K^n(P_r, P_l)$ quel que soit n (cf. [17]). Nous n'avons donné que les résultats les plus intéressants.

3.3. Théorie KR.

Récemment, Atiyah a introduit une nouvelle K -théorie notée KR [4]. Le but de ce paragraphe est de montrer comment cette théorie s'insère dans notre cadre général. En particulier, la relation avec les algèbres de Clifford est examinée de manière plus précise que dans [4]. Ceci nous permettra de retrouver plus loin les suites exactes d'Anderson sous une forme plus générale et plus utile.

Soient $\mathcal{C}$ une catégorie de Banach réelle, G un groupe compact augmenté (cf. § 1.2), X un G -espace compact et V un G -fibré sur X muni d'une forme quadratique définie positive invariante par G . On désigne par $\widehat{\mathcal{C}\mathcal{R}}_G^V(X)$ la catégorie de Banach réelle graduée formée des objets de $\mathcal{C}'(X)$ où opèrent le groupe G et le fibré en algèbres de Clifford graduées $C(V)$. On suppose

évidemment que les actions de G et de $C(V)$ sont compatibles entre elles en un sens qui a été précisé au paragraphe 1.2. Notons maintenant $KR_G^{\vee}(X)$ le groupe de Grothendieck gradué de $\widehat{CR}_G^{\vee}(X)$. Avec l'écriture d'usage, tout élément de $KR_G^{\vee}(X)$ se représente donc sous la forme $d(E, g, \nu, \varepsilon^1, \varepsilon^2)$, où (E, g, ν) est un objet de $\mathcal{C}'(X)$ où opère G et $C(V)$, ε^1 et ε^2 étant deux graduations de cet objet. Plus généralement, si Y est un sous-ensemble fermé de X invariant par G , on peut définir le groupe relatif $KR_G^{\vee}(X, Y)$ comme le groupe de Grothendieck du foncteur gradué de $\widehat{\mathcal{C}}\mathcal{R}_G^{\vee}(X)$ dans $\widehat{\mathcal{C}}\mathcal{R}_G^{\vee}(Y)$ défini par la restriction des fibrés. Dans l'écriture précédente, ceci revient à considérer des graduations ε^i , $i = 1, 2$, qui coïncident au-dessus de Y .

Supposons maintenant que le G -fibré V soit la somme de deux G -fibrés V' et V'' . Par les mêmes formules que celles du paragraphe 2.2, on définit un homomorphisme t de $KR_G^{\vee' \oplus \vee''}(X)$ dans $KR_G^{\vee'}(B(V''), S(V''))$.

CONJECTURE (3.3.1). — *L'homomorphisme*

$$t : KR_G^{\vee' \oplus \vee''}(X) \rightarrow KR_G^{\vee'}(B(V''), S(V''))$$

est un isomorphisme ⁽²¹⁾.

Dans ce paragraphe et les suivants, nous nous proposons de démontrer cette conjecture dans un certain nombre de cas particuliers importants. Tout d'abord, il est bon de remarquer qu'on obtient le théorème (2.1.1) comme cas particulier de cette conjecture en considérant $G = \mathbb{Z}_2$ opérant trivialement sur la base et sur V'' (mais non nécessairement sur V'), l'augmentation de $\mathbb{Z}_2$ étant l'augmentation identique. En effet, si η est une involution d'un fibré W induisant l'identité sur la base, posons $W^+ = \text{Ker}(\eta - 1)$, $W^- = \text{Ker}(\eta + 1)$. Si Q est une forme quadratique sur W définie positive invariante par η , Q s'écrit $Q^+ \oplus Q^-$. La catégorie $\widehat{\mathcal{C}}\mathcal{R}_{\mathbb{Z}_2}^{\vee}(X)$ est alors équivalente à la catégorie $\widehat{\mathcal{C}}\mathcal{R}^{\vee}(X)$, où $\tilde{W}$ est le fibré W muni de la forme quadratique $Q^+ \oplus (-Q^-)$. Il en résulte que $KR_{\mathbb{Z}_2}^{\vee}(X, Y)$ est isomorphe à $K^{\vee}(X, Y)$ de manière compatible avec l'homomorphisme t .

On obtient une forme équivalente de cette conjecture lorsque les fibrés V' et V'' sont « G -spinoriels » en un sens qui va être précisé; pour simplifier les raisonnements, nous supposons $V' = 0$ dans ce qui suit. Sur $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^p \oplus \mathbf{R}^q$ considérons l'involution définie par $(x, y) \mapsto (-x, y)$. Elle induit une involution de $C^n = C^{0,n}$ qu'on notera $-$ (celle-ci généralise

⁽²¹⁾ Cette conjecture est maintenant résolue. Une démonstration, utilisant les techniques développées ici, paraîtra prochainement (Note ajoutée à la correction des épreuves le 1^{er} février 1968).

l'involution définie au paragraphe 1.1 pour $q = 0$ seulement). On note également $-$ l'involution de

$$\text{Spin}^U(n) = \text{Spin}(n) \times_{\mathbb{Z}_2} U(1)$$

définie par $(x, \lambda) \mapsto (\bar{x}, \bar{\lambda})$. Le fibré V sera dit maintenant G - U spinoriel (relativement à l'involution $-$) s'il existe un fibré principal P sur X de groupe $H = \text{Spin}^U(n)$ jouissant des propriétés suivantes :

a. $V = P \times_H \mathbb{R}^n$;

b. G opère à gauche sur P de manière compatible avec la projection sur X ;

c. $\forall p \in P, \forall g \in G^0$ (resp. G^1), $\forall \alpha \in \text{Spin}^U(n)$, on a

$$g \cdot (p, \alpha) = (g \cdot p, \alpha) \quad [\text{resp. } g \cdot (p, \alpha) = (g \cdot p, \bar{\alpha})];$$

d. $\forall p \in P, \forall \lambda \in \mathbb{R}^n$, on a la formule

$$g \cdot (p, \lambda) = (g \cdot p, \lambda) \quad \text{si } g \in G^0 \quad \text{et} \quad g \cdot (p, \lambda) = (g \cdot p, \bar{\lambda}) \quad \text{si } g \in G^1.$$

Si V est un fibré G - U spinoriel, on définit un foncteur

$$-u : \hat{\mathcal{R}}_G^{p,q}(X) \rightarrow \hat{\mathcal{R}}_G^r(X)$$

par $u(E) = P \times_H E$, G et V opérant sur $u(E)$ par les formules

$$g \cdot (p, e) = (g \cdot p, g \cdot e) \quad \text{et} \quad (p, \lambda) \cdot (p, e) = (p, \lambda \cdot e).$$

PROPOSITION (3.3.2). — *Le foncteur u est une équivalence des catégories de Banach graduées $\hat{\mathcal{R}}_G^{p,q}(X)$ et $\hat{\mathcal{R}}_G^r(X)$.*

Démonstration. — C'est, à l'action de G près, la même démonstration que celle de la proposition (3.1.1).

COROLLAIRE (3.3.3). — *Si la conjecture (3.3.1) est vraie, $t.u$ est un isomorphisme de $KR_G^{p,q}(X)$ sur $KR_G(B(V), S(V))$.*

Supposons maintenant que V soit muni d'une structure complexe et que G opère sur V de manière compatible avec l'augmentation. Le fibré V peut être muni canoniquement d'une structure U spinorielle (cf. [6]) de telle sorte que si P désigne le fibré principal de groupe $\text{Spin}^U(2n)$ associé à V , G opère sur P de la manière qui a été décrite plus haut. L'involution de $\mathbb{R}^{2n}$ qu'il faut prendre est bien sûr celle définie par la conjugaison complexe de $\mathbb{C}^n \approx \mathbb{R}^{2n}$. Dans ce cas, la conjecture (3.3.1) est équivalente au fait que $t.u$ est un isomorphisme de $KR_G^{n,n}(X)$ sur $KR_G(B(V), S(V))$. Mais, d'après les considérations générales du paragraphe 2.1, les groupes $KR_G^{n,n}(X)$ et $KR_G(X)$ sont isomorphes. En utilisant l'homomorphisme explicite de $U(n)$ dans $\text{Spin}^U(2n)$ (cf. [6], p. 10), on voit aisément que le composé β des homomorphismes

$$KR_G(X) \xrightarrow{\approx} KR_G^{n,n}(X) \xrightarrow{u} KR_G^r(X) \xrightarrow{t} KR_G(B(V), S(V))$$

est défini par le cup-produit par l'élément u_ν de $KR(B(V), S(V); \mathfrak{T}(\mathbf{R}))$ induit par le complexe d'algèbre extérieure de V , où G opère de manière naturelle (cf. [5], § 2 et p. 14). Si V est un fibré de rang (complexe) 1, ce complexe se réduit à

$$0 \rightarrow \lambda^0 \pi^*(V) \xrightarrow{d} \lambda^1 \pi^* V \rightarrow 0,$$

$\pi : B(V) \rightarrow X$. L'élément de $KR_G(B(V), S(V))$ qu'il définit s'écrit $d(\lambda^0 \pi^* V, \lambda^1 \pi^* V, \alpha)$, où α est l'isomorphisme de $\lambda^0 \pi^* V = B(V) \times \mathbf{C}$ sur $\lambda^1 \pi^* V = \pi^* V$ défini au-dessus de chaque point ν de $S(V)$ par la multiplication par ν . On a donc la formule

$$\beta(E) = d(\pi^* E, \pi^* E \otimes_{\mathbf{C}} \pi^* V, \text{Id} \otimes \alpha).$$

THÉORÈME (3.3.4). — Soit V un fibré complexe de rang 1 où G opère de manière compatible avec l'augmentation. L'homomorphisme

$$\beta : KR_G(X) \rightarrow KR_G(B(V), S(V))$$

défini plus haut, est un isomorphisme.

Démonstration. — Le théorème (3.3.4) est, en fait, une version généralisée du théorème de périodicité d'Atiyah-Bott [5]. La démonstration d'Atiyah-Bott se transpose sans difficultés à ce cas plus général (voir aussi [8]). D'une manière précise, tout élément de $KR_G(B(V), S(V))$ s'écrit sous la forme $d(\pi^* E, \pi^* F, f)$, où E et F sont deux G -fibrés sur X et où $f : \pi^* E \rightarrow \pi^* F$ est un isomorphisme au-dessus de $S(V)$. Pour chaque point x de X , la fibre $S(V_x)$ est isomorphe à S^1 (par une carte de V) et si l'on transporte la mesure de Haar de S^1 sur $S(V_x)$ grâce à cet isomorphisme, on obtient une mesure μ_x sur $S(V_x)$ qui ne dépend pas du choix de cet isomorphisme et qui est invariante par G . Soit z (resp. z^{-1}) la section de $\pi^* V$ (resp. $\pi^* V^* = \pi^* V^{-1}$) au-dessus de $S(V)$ qui est définie comme le composé

$$S(V) \xrightarrow{\Delta} S(V) \times_X S(V) \rightarrow S(V) \times_X V,$$

où Δ désigne l'application diagonale. On note z^n (resp. z^{-n}) la section de $\pi^* V^n$ (resp. $\pi^* V^{-n}$) définie par le produit tensoriel n fois de z (resp. le produit tensoriel n fois de z^{-1}). On écrit maintenant un « développement en série de Fourier » de f de la manière suivante : si l'on désigne par a_n la section du fibré $\text{HOM}(E, F \otimes V^{-n})$ définie par l'intégrale

$$a_n(x) = \int_{S(V_x)} f_x z^{-n} d\mu_x,$$

$a_n z^n$ est de manière évidente une section du fibré $\text{HOM}(\pi^* E, \pi^* F)$ et la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ converge au sens de Césaro vers la section f . Le reste de la

démonstration est classique (cf. [5] ou [12]) en remarquant que a_n et z^n sont des sections invariantes par l'action de G .

Remarque. — Atiyah et Bott démontrent, en fait, le théorème (3.3.4) (pour $G = \mathbb{I}$) sous une forme légèrement différente en considérant le fibré projectif complexe de $V \oplus \mathbb{I}$, ⁽²²⁾ ce qui permet de préciser la structure de $KR_G(X)$ -module de $KR_G(P(V \oplus \mathbb{I}))$. Nous laissons au lecteur le soin de retrouver ce résultat en remarquant que $P(V \oplus \mathbb{I}) = S(V \oplus \mathbb{I})/S^1$ et en appliquant le théorème (3.2.4) pour le groupe $G \times S^1$.

THÉORÈME (3.3.6). — Soit V un fibré complexe où G opère de manière compatible avec l'augmentation. Désignons par $\pi: X \rightarrow X/G$ la projection canonique et supposons que tout point y de X/G possède un voisinage U tel que $V/\pi^{-1}(U)$ s'exprime comme une somme de G -fibrés de rang 1 (on dit dans ce cas que V est localement décomposable). Le cup-produit par U_V définit alors un isomorphisme de $KR_G(X)$ sur $KR_G(B(V), S(V))$.

Démonstration. — D'après la suite exacte de Mayer-Vietoris, il suffit de démontrer l'assertion si V est une somme de G -fibrés de rang 1, soit $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$. Pour cela, notons d'abord que

$$t_p: KR_G^{V_p'}(B(V_p''), S(V_p'')) \rightarrow KR_G^{V_{p-1}'}(B(V_{p-1}''), S(V_{p-1}''))$$

est un isomorphisme si l'on pose

$$V_i' = V_1 \oplus \dots \oplus V_i; \quad V_i'' = V_{i+1} \oplus \dots \oplus V_n.$$

En effet, on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} KR_G^{V_p'}(B(V_p''), S(V_p'')) & \xrightarrow{t_p} & KR_G^{V_{p-1}'}(B(V_{p-1}''), S(V_{p-1}'')) \\ \uparrow \approx & & \uparrow \approx \\ KR_G^{V_{p-1}, p-1} \oplus V_p(B(V_p''), S(V_p'')) & \xrightarrow{U} & KR_G^{V_{p-1}, p-1}(B(V_{p-1}''), S(V_{p-1}'')) \\ \uparrow \approx & & \uparrow \approx \\ KR_G^{V_p'}(B(V_p''), S(V_p'')) & \xrightarrow{\approx U''} & KR_G(B(V_{p-1}''), S(V_{p-1}'')). \end{array}$$

Il suffit de remarquer maintenant que l'homomorphisme t de $KR_G^V(X)$ dans $KR_G(B(V), S(V))$ est le composé $t_n \dots t_1$, par exemple en raisonnant par récurrence sur n [cf. démonstration du théorème (2.2.1)].

Remarque. — Le théorème précédent s'applique notamment lorsque G est un groupe abélien fini. Tout G -fibré complexe est alors localement décomposable.

THÉORÈME (3.3.7). — La conjecture (3.3.1) est vraie pour $G = \mathbb{Z}_2$ muni de l'augmentation identique (V étant un G -fibré réel quelconque).

⁽²²⁾ 1 désignant ici le fibré complexe trivial de rang un.

Démonstration. — D'après la suite exacte de Mayer-Vietoris, on est ramené au cas où $V = X \times (\mathbf{R}^p \oplus \mathbf{R}^q)$, l'involution τ sur V étant définie à partir de l'involution σ de X par la formule

$$\tau(x, e, f) = (\sigma x, -e, f).$$

Dans ce cas, le groupe $K^V(X)$ n'est autre que le groupe $KR^{p,q}(X)$. L'homomorphisme

$$t: KR^{p,q}(X) \rightarrow KR(X \times D^{p,q}, X \times S^{p,q}) \quad (23)$$

est alors défini par la formule

$$t(d(E, \nu, \varepsilon^1, \varepsilon^2)) = d(\pi^* E, \tilde{\nu} \cos \theta + \varepsilon^1 \sin \theta, \tilde{\nu} \cos \theta + \varepsilon^2 \sin \theta),$$

où $\nu = \nu_1 + \nu_2$ est un vecteur de $\mathbf{R}^p \oplus \mathbf{R}^q$ et où $\tilde{\nu}$ désigne $i\nu_1 + \nu_2$. On a maintenant deux diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} KR^{p,q}(X) & \xrightarrow{\approx} & KR^{p,q+s}(X) \\ \downarrow t & & \downarrow t \\ KR(X \times D^{p,q}, X \times S^{p,q}) & \xrightarrow[\approx]{\beta_{\mathbf{R}}} & KR(X \times D^{p,q+s}, X \times S^{p,q+s}) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} KR^{p,q}(X) & \xrightarrow[\approx]{\gamma} & KR^{p+1,q+1}(X) \\ \downarrow t & & \downarrow t \\ KR(X \times D^{p,q}, X \times S^{p,q}) & \xrightarrow[\approx]{\beta} & KR(X \times D^{p+1,q+1}, X \times S^{p+1,q+1}) \end{array}$$

où $\beta_{\mathbf{R}}$ désigne la périodicité de Bott ordinaire et où β est défini par le cup-produit par le générateur de $KR(D^{1,1}, S^{1,1}) \approx KR^{1,1}(P) \approx \mathbf{Z}$: cf. théorème (3.3.4) (la commutativité des deux diagrammes résulte des formules explicites de multiplication données au paragraphe 2.4). Grâce au premier diagramme, il suffit de démontrer le théorème pour $q \geq p$. On raisonne alors par récurrence sur p en utilisant la commutativité du second diagramme.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE (3.3.8). — Soit $V = V^- \oplus V^+$ un fibré vectoriel réel sur X muni d'une forme quadratique non dégénérée $Q = Q^- \oplus Q^+$, où Q^- (resp. Q^+) est définie négative (resp. définie positive). Munissons V de l'involution $(x, y) \mapsto (-x, y)$. L'homomorphisme

$$t: K^V(X) \rightarrow KR(B(V), S(V))$$

est un isomorphisme.

(23) En suivant Atiyah [4], on note $D^{p,q}$ (resp. $S^{p,q}$) la boule (resp. la sphère) de $\mathbf{R}^p \oplus \mathbf{R}^q$ muni de l'involution induite.

COROLLAIRE (3.3.9). — Avec les notations du corollaire précédent, supposons que V soit un fibré spinoriel (pour la forme quadratique Q). On a alors un isomorphisme u de $K^{p,q}(X)$ sur $K^r(X)$ ($p = \dim V^-$, $q = \dim V^+$) et $t.u$ est un isomorphisme de $K^{p,q}(X)$ sur $KR(B(V), S(V))$.

Remarque. — Bien entendu, on a un résultat analogue si l'on considère des groupes $KR \otimes A$, A étant un anneau sans torsion où 2 est inversible ou si l'on considère des groupes KR à coefficients dans $\mathbf{Z}_n$, n impair.

Les considérations du paragraphe 3.2 se généralisent sans peine en théorie KR . Ainsi, soit $W = W^- \oplus W^+$ un fibré vectoriel réel muni d'une forme quadratique non dégénérée $Q = Q^- \oplus Q^+$, avec $Q^- < 0$ et $Q^+ > 0$. Soit $V = V^- \oplus V^+$ un sous-fibré de W tel que $V^- \subset W^-$ et que $V^+ \subset W^+$. Soit $\mathcal{C}''(X)$ [resp. $\mathcal{C}'(X)$] la catégorie de Banach (non graduée) formée des $\mathcal{C}$ -fibrés où le fibré en algèbres de Clifford $C(W)$ [resp. $C(V)$] opère. Alors, en suivant le paragraphe 3.2, on définit le groupe $K^{W,r}(X)$ comme le groupe K du foncteur restriction $\mathcal{C}''(X) \rightarrow \mathcal{C}'(X)$. D'autre part, $P(W)$ [resp. $P(V)$] est un $\mathbf{Z}_2$ -espace de manière naturelle. Ceci permet de définir un homomorphisme

$$p : K^{W \oplus T^{0,1}; V \oplus T^{0,1}}(X) \rightarrow KR^{0,1}(P(W), P(V)),$$

lequel généralise l'homomorphisme p du paragraphe 3.2.

THÉORÈME (3.3.10). — L'homomorphisme p défini ci-dessus est un isomorphisme.

Démonstration. — C'est une conséquence du corollaire (3.3.8) de la même manière que le théorème (3.2.1) est une conséquence du théorème (2.2.1).

Remarque. — Si les fibrés V et W sont spinoriels (ou cliffordiens dans certains cas particuliers) on peut calculer $K^{W \oplus T^{0,1}; V \oplus T^{0,1}}(X)$ suivant une méthode déjà maintes fois éprouvée (cf. § 3.2). Nous laissons les détails au lecteur.

Pour conclure ce paragraphe, donnons une application numérique. Soit à calculer le groupe $KR(P_{r,l}, P_{r,l'})$, où $P_{n,p}$ désigne $S^{n,p}/\mathbf{Z}_2$ muni de l'involution induite. Alors, d'après le théorème précédent, ce groupe est isomorphe à $K^1(\varphi)$, où φ est le foncteur restriction des scalaires $\mathcal{C}^{r,l+1} \rightarrow \mathcal{C}^{r',l'+1}$, $\mathcal{C}$ désignant la catégorie de Banach de référence. Si $\mathcal{C} = \mathcal{X}(\mathbf{R})$, par exemple, la suite exacte de cohomologie :

$$\begin{array}{ccccccc} K(\mathcal{C}^{r,l+1}) & \rightarrow & K(\mathcal{C}^{r',l'+1}) & \rightarrow & K^1(\varphi) & \rightarrow & K^1(\mathcal{C}^{r,l+1}) \\ & & & & & & \parallel \\ & & & & & & 0 \end{array}$$

fournit le résultat suivant :

PROPOSITION (3.3.11). — Le groupe $KR(P_{r,l}, P_{r',l'})$ ($r' + l' > 0$) est isomorphe au groupe $\mathbf{Z}_q$ (resp. $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}_q$), avec

$$q = 2^{l'-r'} a_{l-r-1, l'-r'-1} \quad \text{si } l' - r' \not\equiv 0 \pmod{4} \quad (\text{resp. } \equiv 0 \pmod{4})$$

(pour $n < p$, on convient que $a_{n,p} = 16^{-s} a_{n+8s,p}$ lorsque s est suffisamment grand).

3.4. K-théorie réelle et K-théorie complexe.

Il y a quelques années, Anderson avait établi dans sa thèse l'existence de suites exactes fondamentales reliant la K-théorie réelle et la K-théorie complexe [2]. Malheureusement, la démonstration de l'exactitude de ces suites était longue et compliquée et se prêtait fort peu à une généralisation en K-théorie équivariante par exemple. Le but de ce paragraphe est de retrouver, en suivant la méthode d'Atiyah, les suites d'Anderson dans le cadre général des catégories de Banach (voir aussi [17] pour une autre démonstration d'esprit différent n'utilisant pas la théorie KR). Ceci nous permettra d'étendre le théorème de Segal $K_G^*(X)^\wedge \approx K^*(X_G)^\wedge$ en théorie K_G réelle. Nous verrons dans le paragraphe suivant comment ces suites exactes permettent de résoudre partiellement la conjecture (3.3.1), notamment pour des fibrés G -spinoriels.

Dans tout ce qui suit $\mathcal{C}$ désignera une catégorie de Banach réelle et $\mathcal{C}' = \mathcal{C}^{1,0}$, $\mathcal{C}'' = \mathcal{C}^{2,0}$, désigneront respectivement les catégories complexifiée et quaternionisée de $\mathcal{C}$. On note $KO^n(\mathcal{C})$ [resp. $KU^n(\mathcal{C})$, $Ksp^n(\mathcal{C})$] le groupe K^n de $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{C}'$, $\mathcal{C}''$). Si X est un espace compact on note aussi, par abus de langage, $KO^n(X)$ [resp. $KU^n(X)$, $Ksp^n(X)$] le groupe $KO^n(\mathcal{C}(X))$ [resp. $KU^n(\mathcal{C}(X))$, $Ksp^n(\mathcal{C}(X))$]. On définit aussi de manière évidente les groupes $KO^n(X, Y)$, $KO^n(\varphi)$, etc.

Considérons la suite exacte de cohomologie associée à la paire $(D^{q,0}, S^{q,0})$:

$$\begin{array}{ccccccc} KR^{n-1}(D^{q,0}) & \rightarrow & KR^{n-1}(S^{q,0}) & \rightarrow & KR^n(D^{q,0}, S^{q,0}) & \xrightarrow{\eta^q} & KR^n(D^{q,0}) \rightarrow \dots \\ \wr & & & & \uparrow \approx & & \\ K^{n-1}(\mathcal{C}) & & & & KR^{n+q}(\mathcal{C}) & & \end{array}$$

(les groupes KR étant pris à coefficients dans $\mathcal{C}$). Compte tenu de l'isomorphisme t [théorème (3.3.8)], le morphisme η^q n'est autre que l'homomorphisme induit par le foncteur gradué restriction des scalaires de $\hat{\mathcal{C}}^{n+q,0}$ dans $\hat{\mathcal{C}}^{n,0}$ (on suppose $n \geq 0$ pour fixer les idées).

LEMME (3.4.1). — Si $q \geq 3$, le morphisme η^q est nul.

Démonstration. — Avec des notations évidentes, on a

$$\eta^q(d(E, e_1, \dots, e_{n+q}; \varepsilon^1, \varepsilon^2) = d(E, e_1, \dots, e_n; \varepsilon^1, \varepsilon^2).$$

Mais, si $q \geq 3$, $e = e_{n+q-2} e_{n+q-1} e_{n+q}$ est une graduation de $(E, e_1, \dots, e_n)$ qui anticommute avec les graduations ε^1 et ε^2 . L'homotopie définie par $\varepsilon^1 \cos \theta + e \sin \theta$ pour $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ et par $-\varepsilon^2 \cos \theta + e \sin \theta$ pour $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ est une homotopie entre ε^1 et ε^2 .

C. Q. F. D.

Pour $q \geq 3$, on a donc, d'après le lemme précédent, une suite exacte :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow KR^{n-1}(D^{q,0}) & \rightarrow & KR^{n-1}(S^{q,0}) & \xrightarrow{\partial^{n-1}} & KR^n(D^{q,0}, S^{q,0}) & \rightarrow & 0 \\ & \cong & & & \approx \uparrow \iota & & \\ & & K^{n-1}(\mathcal{C}) & & K^{n+q}(\mathcal{C}) & & \end{array}$$

PROPOSITION (3.4.2). — *La suite exacte précédente se scinde canoniquement.*

COROLLAIRE (3.4.3). — *Si $q \geq 3$,*

$$KR^n(S^{q,0}) \approx K^n(\mathcal{C}) \oplus K^{n+q+1}(\mathcal{C}).$$

Démonstration. — On va définir un homomorphisme de $K^{n+q}(\mathcal{C})$ dans $KR^{n-1}(S^{q,0})$ inverse à droite de $t^{-1}\partial^{n-1}$. Pour cela, en raison du théorème (2.2.1), il suffit évidemment de définir un homomorphisme ∂' de $K^{n+q}(\mathcal{C})$ dans $KR^n(D^{0,1} \times S^{q,0}, S^{0,1} \times S^{q,0})$ inverse à droite de l'homomorphisme $t^{-1}\partial$, où

$$\partial : KR^n(D^{0,1} \times S^{q,0}, S^{0,1} \times S^{q,0}) \rightarrow KR^n(D^{q,0}, S^{q,0})$$

est l'opérateur cobord défini dans le théorème (1.3.9). Représentons $D^{0,1}$ comme le sous-ensemble du plan complexe formé des points $e^{i\theta}$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. On pose alors

$$\begin{aligned} y = \partial'(d(E, e_1, \dots, e_{n+q}; \varepsilon^1, \varepsilon^2)) &= d(\pi^*E, e_1, \dots, e_n; \eta^1, \eta^2), \\ \pi : D^{0,1} \times S^{q,0} &\rightarrow P, \end{aligned}$$

où η^j , $j = 1, 2$, est la graduation de π^*E définie au point (ν, θ) de $S^{q,0} \times D^{0,1}$ par

$$\begin{aligned} \eta^j &= e \sin \theta + \varepsilon^j \cos \theta & \text{pour } -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0, \\ \eta^j &= i\nu \sin \theta + \varepsilon^j \cos \theta & \text{pour } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Soit maintenant $f_j : (\pi^*E, e_1, \dots, e_n; \varepsilon^j) \rightarrow (\pi^*E, e_1, \dots, e_n; \eta^j)$ l'isomorphisme défini par

$$\begin{aligned} f_j &= \cos \frac{\theta}{2} + e \varepsilon^j \sin \frac{\theta}{2} & \text{pour } -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0, \\ f_j &= \cos \frac{\theta}{2} + i\nu \varepsilon^j \sin \frac{\theta}{2} & \text{pour } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

On a donc

$$y = d((F, \varepsilon^1), (F, \varepsilon^2), f),$$

où $F = (\pi^* E, e_1, \dots, e_n)$ et $f = f_2^{-1} \cdot f_1$. Paramétrons

$$B(V) \approx S^+(V \oplus 1) \quad (V = \mathbf{R}^{q,0})$$

comme il est d'usage :

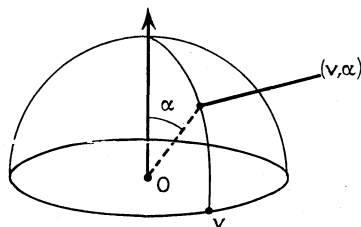


Fig. 6.

Soit $h(\alpha, \theta)$ une fonction numérique continue définie pour $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ telle que

- (i) $h(0, \theta) = 0$;
- (ii) $h\left(\frac{\pi}{2}, \theta\right) = \frac{\theta}{2}$;
- (iii) $h\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\alpha}{2}$;
- (iv) $h\left(\alpha, -\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\alpha}{2}$.

Une telle fonction existe toujours car $\mathbf{R}$ est contractile. L'isomorphisme f (qui dépend continûment de θ) se prolonge alors au-dessus de $D^{q,0} \times D^{0,1}$ en un isomorphisme (non gradué) de (F, ε^1) sur (F, ε^2) , noté encore f , défini au point $(\varphi, \alpha, \theta)$ par

$$\begin{aligned} f &= (\cos(h(\alpha, \theta)) - i\varphi \varepsilon^2 \sin(h(\alpha, \theta))) \\ &\quad \times (\cos(h(\alpha, \theta)) + i\varphi \varepsilon^1 \sin(h(\alpha, \theta))) \quad \text{si } h(\alpha, \theta) \geq 0, \\ f &= (\cos(h(\alpha, \theta)) - e \varepsilon^2 \sin(h(\alpha, \theta))) \\ &\quad \times (\cos(h(\alpha, \theta)) + e \varepsilon^1 \sin(h(\alpha, \theta))) \quad \text{si } h(\alpha, \theta) \leq 0. \end{aligned}$$

Les morphismes écrits sont continus car $\varphi \sin(h(\alpha, \theta)) \rightarrow 0$ quand $\alpha \rightarrow 0$ [pour $\alpha = 0$, on convient que $\varphi \sin(h(\alpha, \theta)) = 0$ bien que φ ne soit pas défini *a priori*]. D'après la définition de l'opérateur cobord ∂ [th. (1.3.9)], on a donc

$$\partial(y) = d((F, \varepsilon^1), (F, \varepsilon^2), g),$$

avec

$$g = \left(\cos \frac{\alpha}{2} - i\nu \varepsilon^2 \sin \frac{\alpha}{2} \right) \left(\cos \frac{\alpha}{2} + i\nu \varepsilon^1 \sin \frac{\alpha}{2} \right).$$

En faisant un calcul analogue à celui précédant l'énoncé du théorème (2.3.2), on voit alors que

$$\partial(\gamma) = t(d(E, e_1, \dots, e_{n+q}; \varepsilon^1, \varepsilon^2)).$$

C. Q. F. D.

La proposition précédente nous apprend en particulier que, parmi les groupes $KR^*(S^{q,0}; \mathcal{C})$, seuls ceux correspondant à $q < 3$ peuvent donner des invariants nouveaux de la catégorie $\mathcal{C}$. Pour $q=1$, on a, en fait, le lemme suivant :

LEMME (3.4.4) (Atiyah). — *Le groupe $KR^n(S^{1,0}; \mathcal{C})$ est isomorphe naturellement au groupe $KU^n(\mathcal{C})$.*

Démonstration. — Le $\mathbf{Z}_2$ -espace $S^{1,0}$ est un ensemble réduit à deux points $\{1\}$ et $\{-1\}$ muni de l'involution échangeant les deux points. Soit $\varphi: \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{CR}(S^{1,0})$ le foncteur défini par $\varphi(E) = F$, où F est le fibré sur $S^{1,0}$ égal à E au-dessus de $\{1\}$ et à $\bar{E}$ au-dessus de -1 , l'involution antilinéaire de F étant induite par le morphisme de E dans $\bar{E}$ égal à l'identité sur les objets de $\mathcal{C}$ sous-jacents. Le foncteur φ est une équivalence de catégories de Banach de manière évidente, ce qui établit l'assertion.

DÉFINITION (3.4.5). — *Si $\mathcal{C}$ est une catégorie de Banach réelle, on pose $KC^n(\mathcal{C}) = KR^n(S^{2,0}; \mathcal{C})$.*

Pour comparer $KC^n(\mathcal{C})$ aux autres invariants de la catégorie $\mathcal{C}$, l'idée naturelle (due à Atiyah) est de regarder la suite exacte de cohomologie associée à la paire $(S^{p,0}, S^{q,0})$:

$$KR^{n-1}(S^{p,0}) \rightarrow KR^{n-1}(S^{q,0}) \rightarrow KR^n(S^{p,0}, S^{q,0}) \rightarrow KR^n(S^{p,0}) \rightarrow KR^n(S^{q,0}).$$

LEMME (3.4.6) (Atiyah). — *Le $\mathbf{Z}_2$ -espace $S^{p,0}/S^{q,0}$ est isomorphe à*

$$S^{p-q,0} \times D^{q,0} / S^{p-q,0} \times S^{q,0}.$$

En particulier, on a des isomorphismes naturels

$$KR^n(S^{p,0}, S^{q,0}; \mathcal{C}) \approx KR^{n+q}(S^{p-q,0}; \mathcal{C}).$$

En effet, cet isomorphisme provient par compactification de l'homéomorphisme évident de $S^{p,0} - S^{q,0}$ sur $S^{p-q,0} \times \mathbf{R}^{q,0}$.

La suite exacte précédente devient donc

$$KR^{n-1}(S^{p,0}) \rightarrow KR^{n-1}(S^{q,0}) \rightarrow KR^{n+q}(S^{p-q,0}) \rightarrow KR^n(S^{p,0}) \rightarrow KR^n(S^{q,0}).$$

Les couples (p, q) intéressants sont les couples $(2, 1)$, $(3, 1)$ et $(3, 2)$. On obtient alors trois suites [les deux dernières en appliquant la proposition (3.4.2)] :

- (1) $\dots \rightarrow KU^{n-1}(\mathcal{C}) \rightarrow KU^{n-1}(C) \rightarrow KC^n(\mathcal{C}) \rightarrow KU^n(C) \rightarrow KU^n(\mathcal{C}) ;$
- (2) $\dots \rightarrow KC^{n+1}(\mathcal{C}) \rightarrow KO^n(C) \oplus Ksp^n(\mathcal{C}) \rightarrow KU^n(\mathcal{C}) \rightarrow KC^{n+2}(\mathcal{C}) \rightarrow \dots ;$
- (3) $\dots \rightarrow KC^{n-1}(\mathcal{C}) \rightarrow KU^n(\mathcal{C}) \rightarrow KO^n(C) \oplus Ksp^n(\mathcal{C}) \rightarrow KC^n(\mathcal{C}) \rightarrow \dots$

THÉORÈME (3.4.7). — Soit $\mathcal{C}$ une catégorie de Banach réelle. Les suites (1), (2) et (3) définies ci-dessus sont des suites exactes naturelles en $\mathcal{C}$.

Remarque 1. — La démonstration du théorème (3.4.7) donnée ci-dessus est directement inspirée de celle d'Atiyah [4]. Cependant, la proposition (3.4.2) n'est démontrée dans [4] que pour la catégorie $\mathcal{C}$ des fibrés vectoriels de dimension finie. D'autre part, avec certaines hypothèses restrictives sur $\mathcal{C}$, une deuxième démonstration du théorème (3.4.7) est donnée dans [17]. Elle est plus longue que celle-ci; mais les techniques employées (essentiellement la notion de « cône d'application d'une transformation cohomologique ») sont en un certain sens plus naturelles.

Remarque 2. — La forme qu'on a donnée au théorème (3.4.7) n'est pas la forme la plus générale. On peut remplacer la catégorie de Banach $\mathcal{C}$ par un foncteur linéaire continu quasi-surjectif entre deux catégories de Banach. On peut aussi remplacer les sphères $S^{r,0}$ par des produits $X \times S^{r,0}$, où X est un $\mathbf{Z}_2$ -espace compact quelconque.

Voyons maintenant, en suivant la méthode d'Anderson pour $X = \text{Point}$, comment on peut étendre le théorème de Segal en K -théorie réelle. Rappelons d'abord l'énoncé du théorème de Segal en K -théorie complexe (sous sa forme la plus simple). Soit X une variété différentielle compacte où opère différentiablement un groupe de Lie compact G . Alors, $\forall n, K_G^n(X)$ est un module de type fini sur $R(G) = K_G(\text{Point})$ qui est une $\mathbf{Z}$ -algèbre de type fini. Soit $I(G)$ l'idéal noyau de l'homomorphisme d'augmentation $\varepsilon : R(G) \rightarrow \mathbf{Z}$ qui associe à chaque représentation sa dimension. Soit maintenant $E(X)$ la catégorie des G -espaces compacts E au-dessus de X , G opérant librement sur E (on peut supposer que E est une variété). Si F est un G -fibré sur X , il définit, par image inverse, un G -fibré sur E . On en déduit un homomorphisme α de $K_G^*(X)$ dans $K_G^*(E) = K^*(E/G)$ ainsi qu'un homomorphisme $\alpha^\wedge$ de $K_G^*(X)^\wedge$ dans $\varinjlim_{E(X)} K_G^*(E)$ (les complétions sont prises suivant la topologie $I(G)$ -adique).

THÉORÈME (3.4.8) (Segal [8]). — L'homomorphisme $\alpha^\wedge$ est un isomorphisme de $K_G^*(X)^\wedge$ sur $\varinjlim_{E(X)} K_G^*(E)$ [expression qu'on notera par la

suite $K^*(X_G)$. De plus, $R^1 \varprojlim_{E(X)} K_G^*(E) = 0$. [Dans cet énoncé, la catégorie de Banach de base est évidemment $\mathcal{T}(\mathbb{C})$.]

Supposons maintenant que $\mathcal{C}$ soit la catégorie des espaces vectoriels réels de dimension finie. On désigne par $RO(G)$ et $RC(G)$ les sous-anneaux de $R(G)$ engendrés par les représentations réelles ou autoconjuguées de G . On désigne par $Rsp(G)$ le sous-groupe de $R(G)$ engendré par les représentations symplectiques de G . Posons

$$IO(G) = I(G) \cap RO(G), \quad IC(G) = I(G) \cap RC(G).$$

LEMME (3.4.9). — Soit B une $\mathbb{Z}$ -algèbre de type fini et soit g un groupe fini d'automorphismes de B . Soit $A = B^g$. Alors B et A sont des anneaux noethériens, B est un A -module de type fini et A une $\mathbb{Z}$ -algèbre de type fini.

Démonstration. — Atiyah-Hirzebruch ([7], p. 24).

COROLLAIRE (3.4.10). — $RC(G)$ est une $\mathbb{Z}$ -algèbre de type fini (donc est noethérien) et $R(G)$ est un $RC(G)$ -module de type fini.

Démonstration. — On fait opérer $g = \mathbb{Z}_2$ sur $B = R(G)$ par la conjugaison complexe.

LEMME (3.4.11). — Reprenons les notations du lemme (3.4.9). Soit b un idéal de B stable par g . Soit $a = b \cap A$. Alors les topologies a -adique et b -adique coïncident sur B .

Démonstration. — Atiyah-Hirzebruch ([7], p. 25).

COROLLAIRE (3.4.12). — Les topologies $IC(G)$ -adique et $I(G)$ -adique coïncident sur $R(G)$.

LEMME (3.4.13). — Soit $\rho \in RC(G)$; alors $\rho^2 \in RO(G)$.

Démonstration. — En effet, ρ s'écrit $\rho_1 + \rho_2$, où $\rho_1 \in RO(G)$ et $\rho_2 \in Rsp(G)$. Donc

$$\rho^2 = \rho_1^2 + (\rho_1 \rho_2 + \bar{\rho}_1 \bar{\rho}_2) + \rho_2^2$$

qui appartient à $RO(G)$.

Remarque. — Le fait que toute représentation autoconjuguée d'un groupe compact soit somme d'une représentation réelle et d'une représentation symplectique est un résultat élémentaire bien connu. On peut aussi le déduire de la suite (3) compte tenu que $KC_G(P) = RC(G)$ (voir plus loin) et que $R^1(G) = K_G^1(P) = 0$ [prop. (2.3.14)].

LEMME (3.4.14). — $RO(G)$ est une $\mathbb{Z}$ -algèbre de type fini (donc est noethérien). De plus, $RU(G)$, $RC(G)$ et $Rsp(G)$ sont des $RO(G)$ -modules de type fini.

Démonstration. — D'après le corollaire (3.4.10), il suffit de démontrer que $RO(G)$ est une $\mathbf{Z}$ -algèbre de type fini et que $RC(G)$ est un $RO(G)$ -module de type fini. Soient $x_1, \dots, x_n$ les générateurs de $RC(G)$ comme $\mathbf{Z}$ -algèbre. Soit R' la sous-algèbre de $RC(G)$ engendrée par les x_i^2 . D'après le lemme (3.4.13), on a $R' \subset RO(G) \subset RC(G)$. Puisque $x_i^2 \in R'$, les monômes $x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$ avec $m_i = 0$ ou 1 engendrent $RC(G)$ comme R' -algèbre. Donc $RC(G)$ est un R' -module de type fini. Du fait que R' est noethérien, il s'ensuit que $RO(G)$ est une $\mathbf{Z}$ -algèbre de type fini et que $RC(G)$ est un $RO(G)$ -module de type fini.

C. Q. F. D.

LEMME (3.4.15). — Soient $B = RC(G)$, $A = RO(G)$, $b = IC(G)$, $a = b \cap A = IO(G)$. Soit $b' = aB$ l'idéal de $RC(G)$ engendré par a . Il existe alors un entier n tel que $b^n \subset b' \subset b$.

Démonstration. — Dans un anneau noethérien, pour démontrer qu'une puissance d'un idéal b est contenue dans un idéal b' , il suffit de démontrer que tout idéal premier p qui contient b' contient aussi b . Or, si $x \in b$, $x^2 \in b \cap A = a \subset b' \cap p$; donc $x \in p$.

COROLLAIRE (3.4.16). — Les topologies $IO(G)$ -adique et $IC(G)$ -adique coïncident sur $RC(G)$. Les topologies $IO(G)$ -adique et $I(G)$ -adique coïncident sur $RU(G)$.

Soit maintenant X un G -espace compact. Supposons que, $\forall n$, $KU_G^n(X)$ soit un $R(G)$ -module de type fini. D'après les lemmes précédents, c'est un $RO(G)$ -module de type fini et les topologies $I(G)$ -adique et $IO(G)$ -adique coïncident sur $KU_G^n(X)$. La complétion de $KU_G^n(X)$ suivant les deux topologies sont donc canoniquement isomorphes.

LEMME (3.4.17). — Supposons que, $\forall n$, $KU_G^n(X)$ soit un $RO(G)$ -module de type fini. Il est alors de même de $KO_G^n(X)$ et de $KC_G^n(X)$.

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate des suites exactes (1), (2) et (3) et des propriétés élémentaires des modules de type fini sur un anneau noethérien.

LEMME (3.4.18). — Soit X_α un système inductif de G -espaces compacts tels que $KU_G^n(X_\alpha)$ soit pour tout n un $\mathbf{Z}$ -module de type fini. Supposons que $R^1 \lim_{\leftarrow} KU_G^n(X_\alpha) = 0$. Alors

$$R^1 \lim_{\leftarrow} KC_G^n(X_\alpha) = R^1 \lim_{\leftarrow} KO_G^n(X_\alpha) = 0.$$

Démonstration. — On a une suite exacte

$$KU_G^n(X_\alpha) \xrightarrow{r} KO_G^n(X_\alpha) \rightarrow A^n(X_\alpha) \rightarrow 0,$$

où r est la « réalification » et où $A^n(X_\alpha)$ est un groupe fini qui est une puissance de $\mathbf{Z}_2$; donc $R^1 \lim_{\rightarrow} A(X_\alpha) = 0$ et $R^1 \lim_{\rightarrow} KO_G^n(X_\alpha) = 0$. Le fait que $R^1 \lim_{\rightarrow} KC_G^n(X_\alpha) = 0$ est moins évident. Il faut d'abord remarquer que, dans la suite (1), l'homomorphisme de $KU^n(\mathcal{C})$ dans $KU^n(\mathcal{C})$ est $x \mapsto x - \bar{x}$. On doit donc vérifier que le système projectif $\text{Ker}(\psi_\alpha^n)$ avec $\psi_\alpha^n : KU_G^n(X_\alpha) \xrightarrow{x \mapsto x - \bar{x}} KU_G^n(X_\alpha)$ vérifie $R^1 \lim_{\leftarrow} \text{Ker} \psi_\alpha^n = 0$. Pour cela, considérons l'homomorphisme φ_α^n de $KU_G^n(X_\alpha)$ dans $KU_G^n(X_\alpha)$ défini par $\varphi_\alpha^n(x) = x + \bar{x}$. Alors $R^1 \lim_{\leftarrow} \text{Im} \varphi_\alpha^n = 0$ et l'on a la suite exacte :

$$0 \rightarrow \text{Im} \varphi_\alpha^n \rightarrow \text{Ker} \psi_\alpha^n \rightarrow B_\alpha^n \rightarrow 0,$$

où B_α^n est un groupe fini qui est une puissance de $\mathbf{Z}_2$. Donc $R^1 \lim_{\leftarrow} \text{Ker} \psi_\alpha^n = 0$.

C. Q. F. D.

Observons maintenant les deux faits suivants :

a. Si $A \rightarrow B \rightarrow C$ est une suite exacte de modules de type fini sur un anneau noethérien, la suite $A^\wedge \rightarrow B^\wedge \rightarrow C^\wedge$ obtenue par complétion suivant une topologie m -adique, est une suite exacte.

b. Si

$$\dots \rightarrow A_\alpha^{n-1} \rightarrow A_\alpha^n \rightarrow A_\alpha^{n+1} \rightarrow \dots$$

est une suite exacte infinie de systèmes projectifs de groupes abéliens telle que $R^1 \lim_{\leftarrow} A_\alpha^i = 0$, alors la suite

$$\dots \rightarrow A^{n-1} \rightarrow A^n \rightarrow A^{n+1} \rightarrow \dots,$$

avec $A^i = \lim_{\leftarrow} A_\alpha^i$, est une suite exacte.

En utilisant les lemmes précédents, on en déduit les suites exactes et les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{array}{ccccccccc} KU_G^*(X)^\wedge & \longrightarrow & KU_G^*(X)^\wedge & \longrightarrow & KC_G^*(X)^\wedge & \longrightarrow & KU_G^*(X)^\wedge & \longrightarrow & KU_G^*(X)^\wedge \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ KU^*(X_G) & \longrightarrow & KU^*(X_G) & \longrightarrow & KC^*(X_G) & \longrightarrow & KU^*(X_G) & \longrightarrow & KU^*(X_G) \\ KC_G^*(X)^\wedge & \longrightarrow & KU_G^*(X)^\wedge & \longrightarrow & KO_G^*(X)^\wedge \oplus Ksp_G^*(X)^\wedge & \longrightarrow & KC_G^*(X)^\wedge & \longrightarrow & KU_G^*(X)^\wedge \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ KC^*(X_G) & \longrightarrow & KU^*(X_G) & \longrightarrow & KO^*(X_G) \oplus Ksp^*(X_G) & \longrightarrow & KC^*(X_G) & \longrightarrow & KU^*(X_G) \end{array}$$

En appliquant deux fois le lemme des cinq, on obtient enfin le théorème que nous avions en vue :

THÉORÈME (3.4.19). — Soit X une G -variété différentielle compacte. Les homomorphismes canoniques $\alpha^\wedge$ de $KC_G^*(X)^\wedge$ dans $KC^*(X_G)$ et de $KO_G^*(X)^\wedge$ dans $KO^*(X_G)$ sont des isomorphismes. De plus,

$$R^1 \lim_{\substack{\leftarrow \\ E(\overline{V})}} KO_G^*(E) = R^1 \lim_{\substack{\leftarrow \\ E(\overline{X})}} KC_G^*(E) = 0$$

(la catégorie de Banach de base est la catégorie des espaces vectoriels réels de dimension finie).

Remarque. — Pour $X = P$, les groupes $KO_G^*(X)$ se calculent aisément. La catégorie $\mathcal{E}_G(P)$ est en effet une catégorie de dimension finie. En appliquant la proposition (2.3.15), on trouve ainsi les résultats d'Anderson :

$$\begin{aligned} KO^0(B_G) &= RO(G)^\wedge, & KO^4(B_G) &= Rsp(G)^\wedge, \\ KO^1(B_G) &= 0, & KO^5(B_G) &= 0, \\ KO^2(B_G) &= RU(G)^\wedge / RO(G)^\wedge, & KO^6(B_G) &= RU(G)^\wedge / Rsp(G)^\wedge, \\ KO^3(X_G) &= Rsp(G)^\wedge / RU(G)^\wedge, & KO^7(B_G) &= RO(G)^\wedge / RU(G)^\wedge. \end{aligned}$$

Pour conclure signalons qu'il existe bien d'autres suites exactes reliant les théories KU , KO et KC , mais nous n'aurons pas à nous en servir. Signalons cependant la proposition suivante :

PROPOSITION (3.4.20). — Soit $\mathcal{C}$ une catégorie de Banach réelle. On a alors les suites exactes naturelles en $\mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} KO^{n-1}(\mathcal{C}) \rightarrow KU^{n-1}(\mathcal{C}) \rightarrow KO^{n+1}(\mathcal{C}) \rightarrow KO^n(\mathcal{C}) \rightarrow KU^n(\mathcal{C}) & \quad (\text{Bott}), \\ KC^{n+1}(\mathcal{C}) \rightarrow KO^n(\mathcal{C}) \rightarrow KO^{n-2}(\mathcal{C}) \rightarrow KC^{n-2}(\mathcal{C}) \rightarrow KO^{n+1}(\mathcal{C}) & \quad (\text{Anderson}). \end{aligned}$$

Démonstration [4]. — On écrit la suite exacte de cohomologie de la paire $(D^{q,0}, S^{q,0})$ avec $q=1, 2$. Une deuxième démonstration, ne faisant pas appel à la théorie KR , est décrite dans [17].

3.5. Le « théorème de Thom » en K -théorie équivariante.

Dans les paragraphes précédents, la conjecture (3.3.1) a été vérifiée dans un certain nombre de cas particuliers intéressants [th. (2.2.1), (3.3.4), (3.3.7)]. Nous nous proposons d'allonger ici la liste de ces cas particuliers en utilisant notamment certains résultats obtenus par Atiyah et Segal [8].

Pour simplifier les raisonnements, nous supposons que le groupe augmenté de la conjecture (3.3.1) s'écrit $G \times \mathbb{Z}_2$ (en changeant légèrement les notations), l'augmentation étant définie par la projection sur le second facteur; nous supposons aussi $V' = 0$ ⁽²⁴⁾. On définit maintenant

⁽²⁴⁾ Comme on le voit aisément, toutes ces hypothèses ne restreignent pas, en fait, la généralité.

de manière évidente un autre homomorphisme t de $K_G^V(X; \mathcal{C})$ dans $K_G(B(V), S(V); \mathcal{C})$ (on n'a pas eu besoin de complexifier la catégorie de Banach $\mathcal{C}$ ni de considérer d'involution sur X).

CONJECTURE (3.5.1). — *L'homomorphisme de $K_G^V(X; \mathcal{C})$ dans $K_G(B(V), S(V); \mathcal{C})$ défini ci-dessus est un isomorphisme.*

PROPOSITION (3.5.2). — *La conjecture (3.3.1) pour le groupe augmenté $G \times \mathbb{Z}_2$ et la catégorie $\mathcal{C}$ est équivalente à la conjecture (3.5.1) pour le groupe G et la même catégorie $\mathcal{C}$.*

La démonstration va résulter des deux lemmes suivants :

LEMME (3.5.3). — *La conjecture (3.3.1) [resp. (3.5.1)] pour la catégorie de Banach $\mathcal{C}$ (G et V étant fixés) est équivalente à la même conjecture pour la catégorie complexifiée $\mathcal{C}'$.*

Démonstration. — Le lemme résulte directement du théorème (3.4.7) et de la proposition (3.4.20) (exprimés en termes de foncteurs linéaires continus au lieu de catégories) qui relient les K -théories réelle et complexe (appliquer le lemme des cinq deux fois).

LEMME (3.5.4). — *Pour tout $G \times \mathbb{Z}_2$ -fibré V sur le $G \times \mathbb{Z}_2$ -espace X , les catégories graduées $\mathcal{C}' \mathcal{R}_{G \times \mathbb{Z}_2}^V(X)$ et $\mathcal{C}' \mathcal{R}_G^V(X)$ sont équivalentes.*

Démonstration. — En effet, on a un isomorphisme f de $\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ sur $\mathbf{C} \oplus \mathbf{C}$ défini par $f(i \otimes 1) = (i, 1)$ et $f(1 \otimes i) = (i, -i)$. Grâce à cet isomorphisme, la première catégorie s'identifie à la catégorie des triples (E, F, α) , où E et F sont deux objets de $\mathcal{C}' \mathcal{R}_G^V(X)$ et où $\alpha : E \rightarrow \sigma^* F$ est un isomorphisme (σ désignant l'involution de X et de V associé à l'action de $\mathbb{Z}_2$) compatible avec l'action de G et de V . Un tel triple est évidemment isomorphe au triple $(E, \sigma^* \bar{E}, \text{Id})$. La correspondance $E \mapsto (E, \sigma^* \bar{E}, \text{Id})$ définit alors l'équivalence des catégories en question.

La proposition (3.5.2) est maintenant une simple conséquence du diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} K_G^V(X; \mathcal{C}') & \xrightarrow{\cong} & KR_{G \times \mathbb{Z}_2}^V(X; \mathcal{C}') \\ \downarrow & & \downarrow \\ K_G(B(V), S(V); \mathcal{C}') & \xrightarrow{\cong} & KR_{G \times \mathbb{Z}_2}(B(V), S(V); \mathcal{C}') \end{array}$$

Grâce à la proposition (3.5.2), nous allons pouvoir nous concentrer sur la conjecture (3.5.1) seulement. Nous laissons au lecteur le soin de transcrire les résultats que nous obtiendrons par la suite en théorie KR_G .

THÉORÈME (3.5.5). — *La conjecture (3.5.1) est vraie pour le groupe $G = \mathbf{Z}_2$ si l'ensemble des points fixes X_G de X par l'action de G est rétracte par déformation d'un voisinage de X_G .*

Démonstration. — D'après les hypothèses faites et d'après la suite exacte de Mayer-Vietoris, il suffit de démontrer le théorème pour $X = P$ ($\mathcal{C}$ étant une catégorie de Banach arbitraire). Pour cela, nous aurons besoin de trois lemmes :

LEMME (3.5.6). — *Soit η l'involution de V représentant l'action de $\mathbf{Z}_2$ sur V . Posons $V_1 = \text{Ker}(\mathbf{1} - \eta)$, $V_2 = \text{Ker}(\mathbf{1} + \eta)$. Le groupe $K_{\mathbf{Z}_2}^V(\mathcal{C})$ est alors isomorphe naturellement au groupe $K^{V_1}(\mathcal{C}^{V_2+1})$.*

Démonstration. — Le groupe $K_{\mathbf{Z}_2}^V(\mathcal{C})$ est le groupe K du foncteur restriction

$$\mathcal{C}_{\mathbf{Z}_2}^{V_1 \oplus V_2 \oplus 1} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathbf{Z}_2}^{V_1 \oplus V_2}.$$

Or la catégorie $\mathcal{C}_{\mathbf{Z}_2}^{V_1 \oplus V_2}$ est isomorphe naturellement à la catégorie $(\mathcal{C}^{V_2 \oplus 1})^{V_1}$: si $\varphi_1, \varphi_2, \varepsilon$ représentent l'action de $V_1, V_2, \mathbf{Z}_2$ sur un objet E de $\mathcal{C}$, $\varphi_1 \varepsilon$ représente une action de V_1 sur $(E, \varphi_2, \varepsilon) \in \text{Ob } \mathcal{C}^{V_2 \oplus 1}$. De même, $\mathcal{C}_{\mathbf{Z}_2}^{V_1 \oplus V_2 \oplus 1}$ est isomorphe à $(\mathcal{C}^{V_2 \oplus 1})^{V_1 \oplus 1}$, d'où le résultat annoncé.

LEMME (3.5.7). — *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} K_{\mathbf{Z}_2}^V(\mathcal{C}) & \longrightarrow & K^{V_1}(\mathcal{C}^{V_2 \oplus 1}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K_{\mathbf{Z}_2}^{V_2}(B(V_1), S(V_1)) & \longrightarrow & K(B(V_1), S(V_1); \mathcal{C}^{V_2+1}) \end{array}$$

COROLLAIRE (3.5.8). — *Il suffit de démontrer le théorème (3.5.5) pour $X = P$ et $V_1 = 0$ (appliquer l'excision).*

Considérons maintenant le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccccc} K_{\mathbf{Z}_2}^{-1}(B(V)) & \xrightarrow{\alpha} & K_{\mathbf{Z}_2}^{-1}(S(V)) & \xrightarrow{\beta} & K_{\mathbf{Z}_2}(B(V), S(V)) & \xrightarrow{\gamma} & K_{\mathbf{Z}_2}(B(V)) & \longrightarrow & K_{\mathbf{Z}_2}(S(V)) \\ \uparrow u \approx & & A & \uparrow p \approx & B & & \uparrow t & & C & \approx \uparrow u & D & \approx \uparrow p \\ K^{-1}(\mathcal{C}^{0,1}) & \xrightarrow{\alpha'} & K(\varphi) & \xrightarrow{\beta'} & K(\mathcal{C}^{V \oplus 1}) & \xrightarrow{\gamma'} & K(\mathcal{C}^{0,1}) & \longrightarrow & K^1(\varphi) \end{array}$$

Dans ce diagramme, φ est le foncteur restriction $\mathcal{C}^{V \oplus 1} \rightarrow \mathcal{C}^{0,1}$ et p est l'homomorphisme défini au paragraphe 3.2. L'isomorphisme u exprime que l'action de l'algèbre de Clifford $\mathcal{C}^{0,1}$ revient à la donnée de l'action du groupe $\mathbf{Z}_2$. De manière précise $u : K(\mathcal{C}^{0,1}) \rightarrow K_{\mathbf{Z}_2}(\mathcal{C})$ est défini par

$$u((E, \eta)) = E_0 - E_1, \quad \text{avec } E_0 = \text{Ker}(\mathbf{1} - \eta), \quad E_1 = \text{Ker}(\mathbf{1} + \eta),$$

$\mathbf{Z}_2$ opérant par l'identité (resp. par la multiplication par -1) sur E_0 (resp. E_1). En termes de graduations (i. e. en identifiant K à K^0) on a

la formule

$$u(d(E, \eta; \eta^1, \eta^2)) = d(E, \eta; \eta\eta^1, \eta\eta^2),$$

où η représente à la fois l'action de $\mathbf{Z}_2$ et l'action de $C^{0,1}$.

LEMME (3.5.9). — *Le diagramme ci-dessus est commutatif.*

Démonstration. — *a. Commutativité du carré A.* — Donnons-nous un élément $x = d((E, \eta), (E, \eta), f)$ de $K^{-1}(\mathcal{C}^{0,1}) \approx K(D^1, S^0; \mathcal{C}^{0,1})$. Alors $\alpha^1(x) = d(E, \eta, \nu^1, \nu^2)$, où (η, ν^1) est une structure de $C(V \oplus \mathbf{I})$ -module sur E et où $\nu^2 = f \cdot \nu^1 \cdot f^{-1}$. Avec les notations du paragraphe 3.2, on a donc

$$\begin{aligned} (p \cdot \alpha^1)(x) &= d(E, \eta, \eta; \tilde{\nu}^1, \tilde{\nu}^2) \\ &= d(E \oplus E, \eta \oplus \eta, \eta \oplus (-\eta); \tilde{\nu}^1 \oplus (-\tilde{\nu}^1), \tilde{\nu}^2 \oplus (-\tilde{\nu}^2)) \\ &\quad \begin{array}{cc} \nearrow & \nwarrow \\ \text{Action} & \text{Action} \\ \text{de } \mathbf{Z}_2 & \text{de } C^{0,1} \end{array} \\ &= d(E \oplus E, \eta \oplus \eta, \eta \oplus (-\eta); \varepsilon^1, \varepsilon^2), \end{aligned}$$

avec

$$\varepsilon^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \varepsilon^2 = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & f \\ f^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

L'image de $(p \cdot \alpha^1)(x)$ dans $K_{\mathbf{Z}_2}(D^1 \times S(V), S^0 \times S(V))$ est donc $d(F, F, g)$, avec

$$F = \text{Ker}(\eta \oplus (-\eta) : (E \oplus E, \eta \oplus \eta) \rightarrow (E \oplus E, \eta \oplus \eta)) \quad \text{et} \quad g = \varepsilon^2 \varepsilon^1|_F.$$

Mais, dans la décomposition $E_0 \oplus E_1$ de E relativement à la graduation η , f s'exprime sous la forme

$$f = \begin{pmatrix} f_0 & 0 \\ 0 & f_1 \end{pmatrix}.$$

Posons alors

$$\tilde{f} = \begin{pmatrix} f_0 & 0 \\ 0 & f_1^{-1} \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$(p \cdot \alpha^1)(x) = d((E, \eta), (E, \eta), \tilde{f}) = (\alpha \cdot u)(x).$$

b. Commutativité du carré B. — Soit $y = d(E, \eta, \nu^1, \nu^2)$ un élément de $K(\varphi)$. On a

$$\beta'(y) = d(E, \eta, \nu^1) - d(E, \eta, \nu^2)$$

avec des notations évidentes. Donc $(t\beta')(y)$ a comme image dans $K_{\mathbf{Z}_2}(B(V), S(V))$ l'élément

$$d(E_0, E_1, \tilde{\nu}^1) - d(E_0, E_1, \tilde{\nu}^2) = d(E_0, E_0, \tilde{\nu}^2 \tilde{\nu}^1).$$

D'autre part,

$$p(d(E, \eta, \nu^1, \nu^2)) = d(E, \eta, \eta; \tilde{\nu}^1, \tilde{\nu}^2)$$

(η représentant comme ci-dessus à la fois l'action de $\mathbf{Z}_2$ et celle de $C^{0,1}$). Soit D^1 l'ensemble des nombres complexes s'écrivant $e^{i\theta}$, avec $0 \leq \theta \leq \pi$. Alors l'image de l'élément précédent dans $K_{\mathbf{Z}_2}(D^1 \times S(V), S^0 \times S(V))$ s'écrit $d(E, \eta; \eta \cos \theta + \tilde{\nu}^1 \sin \theta, \eta \cos \theta + \tilde{\nu}^2 \sin \theta)$ avec les notations standard. On a maintenant des isomorphismes

$$f_i: (E, \eta) \rightarrow (E, \eta \cos \theta + \tilde{\nu}^i \sin \theta),$$

$i = 1, 2$, définis par $f_i = \cos \frac{\theta}{2} + \tilde{\nu}^i \eta \sin \frac{\theta}{2}$. On obtient donc en définitive un élément de $K_{\mathbf{Z}_2}(D^1 \times S(V), S^0 \times S(V))$ qui s'écrit $d(E_0, E_0, g)$, où g est la trace sur E_0 de l'isomorphisme $(f_2^{-1} \cdot f_1)|_{S^0 \times S(V)}$. En faisant $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ et en appliquant l'opérateur cobord, on obtient finalement $d(E_0, E_0, \tilde{\nu}^2 \cdot \tilde{\nu}^1)$.

c. *Commutativité de C* : Triviale.

d. *Commutativité de D*. — Elle résulte de la commutativité de A et de la périodicité de Bott.

C. Q. F. D.

Soit maintenant V un G -fibré quelconque. On dit que V est G -spinoriel s'il est de la forme $P \times_{\text{Spin}(n)} \mathbf{R}^n$, où P est un fibré principal où G opère (à gauche) de manière compatible avec l'action (à droite) de $\text{Spin}(n)$. On définit de la même manière les fibrés G^U -spinoriels en remplaçant le groupe $\text{Spin}(n)$ par le groupe $\text{Spin}^U(n)$. Supposons maintenant que la catégorie $\mathcal{C}$ soit réelle (resp. complexe) et que V soit G -spinoriel (resp. G^U -spinoriel). On définit alors un foncteur

$$u: \mathcal{C}_G^{0,n}(X) \rightarrow \mathcal{C}_G^U(X)$$

par la formule

$$u(E) = P \times_H E, \quad \text{où } V = P \times_H \mathbf{R}^n, \quad H = \text{Spin}(n) \text{ [resp. } \text{Spin}^U(n)\text{]}$$

PROPOSITION (3.5.10) [comparer avec la proposition (3.3.2)]. — *Le foncteur u est une équivalence de catégories graduées. En particulier, les groupes $K_G^U(X)$ et $K_G^{0,n}(X)$ sont isomorphes.*

Démonstration. — A l'action de G près, c'est la même démonstration que celle de la proposition (3.1.1).

Remarque. — Si W est un deuxième G -fibré quelconque, on montre de même que les groupes $K_G^{U \oplus W}(X)$ et $K_G^{T^{0,n} \oplus W}(X)$ sont isomorphes.

PROPOSITION (3.5.11). — *La conjecture (3.5.1) est vraie pour un G -fibré complexe V et pour une catégorie de Banach $\mathcal{C}$ (réelle ou complexe) de dimension finie.*

Démonstration. — D'après le théorème (3.4.7), il suffit de démontrer le théorème précédent pour $\mathcal{C} = \mathfrak{T}(\mathbf{C})$. Considérons la suite

$$K_G(X) \xrightarrow{\beta} K_G^{0,2p}(X) \xrightarrow{u} K'_G(X) \xrightarrow{t} (K_G(B(V), S(V)),$$

où $2p = \dim V$. Le morphisme u est bien défini car un G -fibré complexe est canoniquement G - U -spinoriel ([6], p. 10). D'autre part, $t.u.\beta$ est induit (au signe près) par le cup-produit par la classe de Thom

$$U_V \in K_G(B(V), S(V); \mathfrak{T}(\mathcal{C}))$$

définie à l'aide du complexe d'algèbre extérieure de V [8]. D'après Atiyah [8], $t.u.\beta$ est un isomorphisme; donc t l'est aussi.

THÉORÈME (3.5.12). — *La conjecture (3.5.1) est vraie pour un G -fibré U -spinoriel et pour une catégorie de Banach de dimension finie.*

Démonstration. — D'après le théorème (3.4.7), on peut supposer que $\mathcal{C} = \mathfrak{T}(\mathbf{C})$. Considérons alors la suite :

$$\begin{aligned} K_G^{r \oplus r \oplus r}(X) &\xrightarrow{t_1} K_G^{r \oplus r}(B(V), S(V)) \\ &\xrightarrow{t_2} K'_G(B(V \oplus V), S(V \oplus V)) \xrightarrow{t_3} K_G(B(V \oplus V \oplus V), S(V \oplus V \oplus V)). \end{aligned}$$

Puisque $V \oplus V$ est un G -fibré complexe de manière évidente, $t_3.t_2$ est un isomorphisme. Donc t_2 est injectif. D'autre part, $t_2.t_1$ est un homomorphisme de $K_G^{r \oplus r}(X)$ dans $K'_G(B(T), S(T))$, où $T = V \oplus V$ est un G -fibré complexe. En utilisant l'isomorphisme u , ce qui est légitime puisque V est G - U -spinoriel, on montre que $t_2.t_1$ est un isomorphisme en montrant que

$$t: K_G^{T \oplus T^{0,n}}(X) \rightarrow K_G^{T^{0,n}}(B(T), S(T))$$

est un isomorphisme. En effet, on a le diagramme commutatif où trois flèches sont des isomorphismes [cf propr. 3.5.11 et la remarque précédant le théorème 2.2.10]

$$\begin{array}{ccc} K_G^{T \oplus T^{0,n}}(X) & \xrightarrow{t} & K_G^{T^{0,n}}(B(T), S(T)) \\ \downarrow \iota \approx & & \downarrow \approx \iota \\ K_G^T(X \times D^n, X \times S^{n-1}) & \xrightarrow{\iota} & K_G(B(T) \times D^n, B(T) \times S^{n-1} \cup S(T) \times D^n) \end{array}$$

Des raisonnements précédents il résulte en particulier que t_1 est un isomorphisme; d'où, en remplaçant $V \oplus V$ par $T^{0,2n}$ et en appliquant la périodicité, le résultat annoncé.

Nous allons clore ce paragraphe par un exemple « concret » d'application du théorème de Thom en théorie K_G . Soit $\mathcal{C}$ la catégorie des espaces vectoriels réels de dimension finie et soit V un espace vectoriel de dimension $n = 4p$, où G opère. Supposons que (pour une certaine métrique)

la représentation de G dans $\mathcal{L}(V)$ se remonte dans le groupe spinoriel et que G opère librement sur la sphère $S(V)$. On a alors la suite exacte :

$$\begin{array}{ccccccc} K_G(B(V), S(V)) & \xrightarrow{\varphi} & K_G(B(V)) & \rightarrow & K_G(S(V)) & \rightarrow & K_G^1(B(V), S(V)) \\ \wr & & \wr & & \wr & & \wr \\ K_G^{0,p}(P) & & K_G(P) & & K(S(V)/G) & & K_G^{1,p}(P) \\ & & & & & & \parallel \\ & & & & & & 0 \end{array}$$

Il en résulte que tout fibré stable sur $S(V)/G$ est induit par une représentation de G . En particulier, si G est fini (il est alors nécessairement cyclique), on voit que tout fibré sur $S(V)/G$ est plat (i. e. est un fibré associé au revêtement universel de $S(V)/G$, du moins stablement ⁽²⁵⁾. Dans le cas où $p = 2q$ (G non nécessairement fini), on peut établir un résultat plus précis. L'homomorphisme φ est en effet un homomorphisme de $R_0(G)$ -module. L'anneau $K(S(V)/G)$ (pour le produit tensoriel des fibrés) est donc le quotient de $RO(G)$ par l'idéal principal engendré par $\varphi(1)$. Pour calculer $\varphi(1)$, on remarque que puisque la représentation de G se remonte dans le groupe $\text{Spin}(8q)$, G opère sur un $C^{0,8q}$ module gradué $M^0 \oplus M^1$ de manière compatible avec la graduation. L'élément $\varphi(1)$ est donc la différence des G -modules M^0 et M^1 .

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] J. F. ADAMS, *Vector fields on spheres* (Ann. Math., vol. 75, 1962, p. 603-632).
- [2] D. W. ANDERSON, *Thèse* (non publiée).
- [3] M. F. ATIYAH, *K-theory*, Notes par D. W. ANDERSON, Harvard, 1964.
- [4] M. F. ATIYAH, *K-theory and reality*.
- [5] M. F. ATIYAH et R. BOTT, *On the periodicity theorem for complex vector bundles* (Acta Math., vol. 112, 1964, p. 229-247).
- [6] M. F. ATIYAH, R. BOTT et A. SHAPIRO, *Clifford modules* (Topology, vol. 3, 1964, p. 3-38).
- [7] M. F. ATIYAH et F. HIRZEBRUCH, *Vector bundles and homogeneous spaces* (Proc. Symposium in Pure Math., vol. 3, American Mathematical Society, 1961).
- [8] M. F. ATIYAH et G. B. SEGAL, *Equivariant K-theory* (Lecture notes), Oxford, 1965.
- [9] H. BASS, *K-theory and stable algebra*, Publ. math. I. H. E. S., n° 22, 1964, p. 5-60.
- [10] N. BOURBAKI, *Algèbre*, livre II, chap. 9 : *Formes sesquilinéaires et formes quadratiques*, Actualités Sc. Ind., n° 1272.
- [11] H. CARTAN et L. SCHWARTZ, *Le théorème d'Atiyah-Singer*, Séminaire E. N. S., 1963-1964, exposés 3 et 15, Paris, 1964.
- [12] A. DOUADY, *Démonstration élémentaire d'un théorème de périodicité de Bott*, Séminaire Bourbaki, t. 16, 1963-1964, n° 259.
- [13] S. EILENBERG et N. STEENROD, *Foundations of algebraic topology*, Princeton University Press, 1952.
- [14] P. GABRIEL, *Des catégories abéliennes* (Bull. Soc. math. France, t. 90, 1962, p. 323-448).

⁽²⁵⁾ Cette interprétation a été suggérée à l'auteur par D. Lehmann.

- [15] P. S. GREEN, *A cohomology theory based upon self-conjugacies of complex vector bundles* (Bull. Amer. Math. Soc., vol. 70, 1964, p. 522).
- [16] E. HILLE et R. S. PHILIPS, *Functional analysis and semi-groups*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. XXXI, 1957.
- [17] M. KAROUBI, *Fondements de la K-théorie* (Notes de séminaire), Faculté des Sciences, Département de mathématique, Alger, 1966.
- [18] M. KAROUBI, *Cohomologie des catégories de Banach* (C. R. Acad. Sc., t. 263, série A, 1966, p. 275-278, 341-344 et 357-360).
- [19] E. R. LORCH, *Spectral theory*, Oxford University Press, 1962.
- [20] E. MICHAEL, *Convex structures and continuous selections* (Canad. J. Math., vol. 11, 1959, p. 571).
- [21] J. MILNOR, *Axiomatic homology theory* (Pac. J. Math., vol. 12, 1962, p. 337-341).
- [22] G. D. MOSTOW, *Cohomology of topological groups and solvmanifolds* (Ann. Math., vol. 73, 1961, p. 20-48).
- [23] W. SHIH, *Une remarque sur les classes de Thom* (C. R. Acad. Sc., t. 260, 1965, p. 6259-6262).
- [24] C. T. C. WALL, *On the exactness of interlocking sequences* (L'enseignement mathématique, t. 12, 1966, p. 95-100).
- [25] R. WOOD, *Banach algebras and Bott periodicity* (Topology, vol. 4, 1966, p. 371-389).

(Manuscrit reçu le 17 juillet 1967).



INDEX TERMINOLOGIQUE.

	Pages.		Pages.
Algèbre de Clifford.....	166	$\mathcal{E}(X), \mathcal{E}_G(X), \mathcal{E}\mathcal{R}(X), \mathcal{E}^F(X) \dots$	178, 210
AUT E.....	180	Famille continue de catégories de	
$\alpha u \mathcal{E}E$	184	Banach.....	181
$A(V)$	240	Famille de foncteurs linéaires con-	
β_R	224	tinus.....	198
β_C	224	Foncteur	
β_H	225	linéaire continu.....	178
β'_H	225	quasi-surjectif.....	179
Catégorie :		de Serre.....	179
complexifiée.....	184, 253	bilinéaire continu.....	229
de Banach.....	178	Graduation.....	207
de Banach graduée.....	201	Grille carrée.....	192
de Banach de dimension finie....	228	Groupe	
prébanachique.....	178	augmenté.....	184
pseudo-abélienne.....	177	de Clifford.....	168
quaternionisée.....	253	de Grothendieck 189, 191, 193, 203,	204
Cliffordien (fibré).....	175	symétrisé.....	189
U cliffordien (fibré).....	176	G -spinoriels (fibré).....	265
Cylindre d'application d'un foncteur.	188	G - U spinoriel (fibré).....	248, 265
$C^{p,q}$	171	g	203, 205
$\mathcal{C}$	177	$GL(A)$	226
$\tilde{\mathcal{C}}$	177	$\Gamma(Q), \tilde{\Gamma}(Q), \Gamma^0(Q)$	168
$\mathcal{C}^0$	202	$\Gamma(p, q), \tilde{\Gamma}(p, q), \Gamma^0(p, q)$	171
$\bar{\mathcal{C}}$	203	$\Gamma_{L,q}^p, \Gamma_{p,q}^p, \Gamma_{p,q}^q$	213
$\mathcal{C}^n, \hat{\mathcal{C}}^n$	202	Homomorphisme gauche.....	169
$\mathcal{C}^{p,q}$	200	Homotopes (foncteurs).....	188
$\hat{\mathcal{C}}^{p,q}$	202	Homotopes (triples).....	191, 205
$\mathcal{C}\mathcal{R}_G^F(X)$	185	HOM(E, E).....	181
$\mathcal{C}_T(X)$	179	$K(A)$	189
$\mathcal{C}(X)$	180	$K\mathcal{C}^n(\mathcal{C})$	256
$C(V), C(Q), C(V, Q), C^0(Q)$	166	$K(\mathcal{C})$	189
$\mathcal{C}_G^F(X)$	187	$K(\varphi)$	191
$\mathcal{C}^F(X)$	231	$\hat{K}(\mathcal{C})$	203
χ	200	$\hat{K}(\varphi)$	204
χ_F	241	$K_G(X)$	247
∂	194	$K_G(X)^\wedge$	253
$d(E, \varepsilon^1, \varepsilon^2)$	207	$K^n(\mathcal{C}), K^{p,q}(\mathcal{C})$	203
$d(E, F, \alpha)$	191, 193	$K^n(\psi), K^{p,q}(\psi)$	205
$\partial^{p,q+1}, \partial^n$	221	$K^n(X, Y), K^{p,q}(X, Y)$	205
$D^{p,q}$	251	$K'^{p,q}(\psi)$	207
Élémentaire (triple).....	191, 193	$K^{p,q;p',q'}(X)$	244
Équivalence (de catégories de		$K^{p,q}(\cdot; \mathbf{Z}_r)$	239
Banach).....	178	$K\mathcal{R}_G^F(X)$	247
END E.....	181	KO^n, KU^n, Ksp^n	253

	Pages.		Pages.
$K', K'', \dots$	209	$\text{Pin}'(V)$	185
$K(X), K(X, Y)$	189, 209	$\varphi^0, \bar{\varphi}$	204
$K(X_G)$	253	$\varphi^{p,q}$	204
Laurentien	212	Quasi-affine	213
$\mathcal{M}_\varphi$	188	Quasi-polynomial	213
$M^n(\mathcal{C})$	232	$\rho^{T,U}$	181
$M(V)$	240	$RO(G), RC(G)$	258
Négative (algèbre de Clifford)	171	Spinoriel (fibré)	174
Neutre (forme quadratique)	167	U spinoriel (fibré)	176
Norme spinorielle	168	$\text{Spin}(p, q)$	171
$\mathcal{O}$	203	$\text{Spin}^U(p, q)$	176
ω_V	241	$S^{p,q}$	251
$\mathcal{X}(A)$	178	$S^+(V \oplus 1)$	209
Périodicité de Bott	223, 224, 225, 228	S_V	238
Permis (automorphisme)	212	t	210
Pinoriel	174	$T^{p,q}(\mathcal{C})$	231
U pinoriel	176	$T^{p,q}$	209
Positive (algèbre de Clifford)	171	$\mathfrak{g}$	170
Principal (fibré en A -modules)	181	u	235
p	242	u_V	237
$\text{Pin}(p, q)$	171	U_V	236
$\text{Pin}^U(p, q)$	176	$\mathfrak{W}^l$	242
$\text{Pin}(V)$	185	${}^t x, x^*, \bar{x}$	167