ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

PAUL RÉMOND

Étude asymptotique de certaines partitions dans certains semi-groupes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 83, nº 4 (1966), p. 343-410
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1966_3_83_4_343_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
3e série, t. 83, 1966, p. 343 à 410.

ÉTUDE ASYMPTOTIQUE DE CERTAINES PARTITIONS DANS CERTAINS SEMI-GROUPES

PAR M. PAUL RÉMOND (*).

TABLE DES MATIÈRES.

(*) Thèse Sc. math., Paris, 1967.

INTRODUCTION.

H. Delange, puis E. Wirsing, ont étudié des propriétés asymptotiques des ensembles $\mathcal{E}(E)$; $\mathcal{E}(E)$ est l'ensemble des entiers dont tous les diviseurs premiers appartiennent à un ensemble E de nombres premiers; dans le cas le plus général on suppose que le nombre des éléments de E au plus égaux à x est équivalent, pour x infini, à $\mu \dfrac{x}{\operatorname{Log} x}$. On peut facilement généraliser les résultats obtenus par les auteurs cités en remplaçant $\mathcal{E}(E)$ par un semi-groupe commutatif (E) à factorisation unique dont E est l'ensemble des éléments premiers. Pour cela on définit sur ce semi-groupe une norme, c'est-à-dire une fonction complètement multiplicative à valeur réelle supérieure à 1 et l'on suppose que le nombre des éléments de E, de norme au plus égale à x, est équivalent, pour x infini, à $\mu \dfrac{x}{\operatorname{Log} x}$.

Nous avons été amené à considérer des semi-groupes normés (E) dans lesquels le nombre des éléments premiers de norme au plus égale à x admet, pour x infini, un équivalent de la forme

$$\mu \frac{x}{\operatorname{Log} x} (\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^r \qquad (\mu > 0,\ r \geqq 0),$$

de tels semi-groupes sont appelés Δ_r-semi-groupes; si (E) est un Δ_r-semi-groupe, on dit que E est un ensemble d'éléments premiers de degré r. Bien qu'inspirée des méthodes d'arithmétique analytique de H. Delange et E. Wirsing, l'étude des Δ_r-semi-groupes présente des difficultés nouvelles.

Notre but est l'étude asymptotique de certaines partitions dans les Δ_r-semi-groupes; cette étude conduit à effectuer des évaluations asymptotiques qui ont leur intérêt propre; c'est pourquoi ce travail a été divisé en deux parties, l'objet de la première partie étant ces évaluations asymptotiques.

La première partie comprend trois chapitres : dans le premier, on établit des résultats préliminaires; dans le second, on étudie certaines propriétés asymptotiques des Δ_r-semi-groupes; dans le troisième, on précise, pour des Δ_r-semi-groupes particuliers, l'étude faite dans le deuxième chapitre. Dans le troisième chapitre, on définit notamment les D_n-semi-groupes; si (E) est un D_n-semi-groupe, on dit que E est un H-ensemble d'éléments premiers.

Dans la seconde partie on envisage d'abord, dans un semi-groupe (E), une partition telle que les classes forment un groupe abélien fini, la multiplication des classes étant compatible avec celle des éléments du semi-groupe; ensuite on suppose que (E) est un Δ_r-semi-groupe et l'on impose aux ensembles d'éléments premiers contenus dans les classes de posséder un degré. Les classes réduites (mod k) de l'arithmétique, les classes des idéaux dans un corps de nombres algébriques, plus généralement les classes d'idéaux (mod un idéal F) introduites par Landau, nous fournissent des exemples de telles partitions dans des cas particuliers.

Cette seconde partie comprend quatre chapitres. Dans le premier chapitre, on montre qu'il y a égale répartition asymptotique des éléments de (E) entre les différentes classes.

La classe principale de la partition (classe unité du groupe) forme elle-même un semi-groupe. Dans le deuxième chapitre nous donnons un équivalent, pour x infini, du nombre des éléments de ce semi-groupe, de norme au plus égale à x, indécomposables dans ce semi-groupe.

Le semi-groupe précédent (classe principale) est à factorisation non unique. L'objet du troisième chapitre est une évaluation asymptotique de la valeur moyenne, prise sur les éléments de norme au plus égale à x, du nombre de factorisations d'un élément en éléments indécomposables : en se plaçant dans les hypothèses indiquées plus haut on obtient seulement un équivalent du logarithme de cette valeur moyenne; mais si l'on suppose que (E) est un D_n-semi-groupe et que les ensembles d'éléments premiers contenus dans les classes sont des H-ensembles, on obtient alors un équivalent de cette valeur moyenne.

Le quatrième chapitre traite de l'application aux idéaux de l'anneau des entiers d'un corps de nombres algébriques (idéaux du corps par abus de langage).

NOTE.

— Si un théorème concernant un ensemble (E) est une simple transposition d'un théorème déjà établi dans un ensemble $\mathcal{E}$(E), afin d'éviter des longueurs, nous ne donnerons pas la démonstration de ce théorème et nous renverrons le lecteur à celle faite pour l'ensemble $\mathcal{E}$(E).

— Les *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, t. 78, 1961, *Sur la distribution des entiers ayant certaines propriétés*, par H. Delange, seront désignées sous le nom d'*Annales*.

PREMIÈRE PARTIE.

ÉVALUATIONS ASYMPTOTIQUES DANS CERTAINS SEMI-GROUPES.

CHAPITRE 1.

S_1-Semi-groupes.

Ce chapitre a pour but d'établir des résultats préliminaires. La seule hypothèse faite sur E est celle de la définition 1.1.4.

Signalons que le théorème 1.1.10 est à la base de la démonstration du théorème 1.2.5 duquel découle le théorème d'équirépartition asymptotique. Le lemme 1.1.13 est essentiel pour l'établissement des évaluations asymptotiques du chapitre 2 de la première partie.

1.1.1. Définition. — (E) désigne un semi-groupe commutatif qui possède les propriétés suivantes :

1° Il existe dans le semi-groupe une infinité dénombrable ou un nombre fini d'éléments premiers P dont l'ensemble est noté E.

2° Tout élément A appartenant à (E), à l'exception de l'élément neutre e, s'exprime d'une manière et d'une seule sous la forme

$$A = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \ldots P_n^{\alpha_n},$$

$P_1, P_2, \ldots, P_n$ étant des éléments de E et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des entiers strictement positifs.

1.1.2. Norme. — Une norme est une application de (E) dans l'ensemble des réels positifs, qui à A appartenant à (E) fait correspondre le réel noté NA, et qui possède les propriétés suivantes :

1° $Ne = 1$;

$$\text{si} \quad A \neq e, \qquad NA > 1.$$

2° C'est une fonction complètement multiplicative :

$$N(AB) = NA.NB.$$

1.1.3. Notations. — s désignant la variable complexe, nous poserons

$$\sum_{P\in E}\frac{1}{(NP)^s}=\sum\frac{1}{(NP)^s}; \qquad \sum_{A\in(E)}\frac{1}{(NA)^s}=\sum\frac{1}{(NA)^s}.$$

Comme en arithmétique, la fonction Ω est définie par :

$$\text{si}\quad A=P_1^{\alpha_1}P_2^{\alpha_2}\ldots P_n^{\alpha_n},\qquad \Omega(A)=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n;\qquad \Omega(e)=0.$$

Utilisation des fonctions analytiques.

1.1.4. Définition. — Un S_1-semi-groupe est un semi-groupe normé (E) tel que la série $\sum\frac{1}{(NP)^s}$ converge pour $\mathcal{R}s>1$.

1.1.5. Lemme.

1° *Dans un* S_1-*semi-groupe la série* $\sum\frac{1}{(NA)^s}$ *converge pour* $\mathcal{R}s>1$.

2° *Si h est une fonction complètement multiplicative, non identiquement nulle, réelle ou complexe, définie sur un* S_1-*semi-groupe* (E), *qui vérifie* $|h(A)|\leqq 1$, *on a, pour* $\mathcal{R}s>1$:

$$\prod_P\frac{1}{1-\dfrac{h(P)}{(NP)^s}}=\sum_A\frac{h(A)}{(NA)^s}.$$

(Transposition du lemme 2 des *Annales*.)

1.1.6. Lemme. — (E) *désignant un* S_1-*semi-groupe, si f est une fonction réelle ou complexe définie sur* E, *qui vérifie* $|f(P)|\leqq 1$, *il existe une fonction* $G_f(s, z)$ *holomorphe pour* $\mathcal{R}s>\frac{1}{2}$ *et z complexe quelconque, telle qu'on ait pour* $\mathcal{R}s>1$ *et z quelconque :*

$$\prod_P\left[1+\frac{zf(P)}{(NP)^s}\right]=G_f(s, z)\exp\left[z\sum_P\frac{f(P)}{(NP)^s}\right],$$

$G_f(s, z)$ *est définie pour* $\mathcal{R}s>\frac{1}{2}$ *par*

$$G_f(s, z)=\prod_P\left[1+\frac{zf(P)}{(NP)^s}\right]\exp\left[-z\frac{f(P)}{(NP)^s}\right],$$

on a

$$G_f(s, 0)=1,\qquad G_f(s, z)\neq 0\quad \textit{pour } \mathcal{R}s>\frac{1}{2}\qquad \text{et}\qquad |z|\leqq\sqrt{\rho},$$

ρ *étant le minimum de la norme des éléments premiers* ($\rho>1$).

(Transposition du lemme 4 des *Annales*.)

1.1.7. Corollaire. — *Si h est une fonction complètement multiplicative, non identiquement nulle, à valeur réelle ou complexe, définie sur un* S_1*-semi-groupe, telle que* $|h(A)| \leq 1$, *on a :*

1° *pour* $\mathcal{R}s > 1$:

$$\sum_{A} \frac{h(A)}{(NA)^s} = g_h(s) \exp \sum_{P} \frac{h(P)}{(NP)^s},$$

$g_h(s)$ *holomorphe et* $g_h(s) \neq 0$ *pour* $\mathcal{R}s > \frac{1}{2}$;

2° *pour x infini :*

$$\prod_{NP \leq x} \frac{1}{1 - \frac{h(P)}{NP}} \sim g \exp \sum_{NP \leq x} \frac{h(P)}{NP}; \qquad g = g_h(1).$$

Démonstration.

1° En prenant $z = -1$ dans le lemme 1.1.6, on a

$$\prod_{P} \left[1 - \frac{h(P)}{(NP)^s}\right] = G_h(s, -1) \exp\left[-\sum_{P} \frac{h(P)}{(NP)^s}\right],$$

d'où, d'après le lemme 1.1.5 :

$$\sum_{A} \frac{h(A)}{(NA)^s} = \prod_{P} \frac{1}{1 - \frac{h(P)}{(NP)^s}} = \frac{1}{G_h(s, -1)} \exp \sum_{P} \frac{h(P)}{(NP)^s},$$

on pose $\frac{1}{G_h(s, -1)} = g_h(s)$ holomorphe pour $\mathcal{R}s > \frac{1}{2}$.

2° On a

$$g_h(s) = \prod_{P} \frac{e^{-\frac{h(P)}{(NP)^s}}}{1 - \frac{h(P)}{(NP)^s}},$$

d'où

$$g = g_h(1) = \prod_{P} \frac{e^{-\frac{h(P)}{NP}}}{1 - \frac{h(P)}{NP}};$$

soit

$$\lim_{x \to \infty} \prod_{NP \leq x} \frac{e^{-\frac{h(P)}{NP}}}{1 - \frac{h(P)}{NP}} = \lim_{x \to \infty} e^{-\sum_{NP \leq x} \frac{h(P)}{NP}} \prod_{NP \leq x} \frac{1}{1 - \frac{h(P)}{NP}} = g.$$

1.1.8. Corollaire. — (E) *étant un* S_1*-semi-groupe, on a, pour* $\mathcal{R}s > 1$ *et* $|z| \leq 1$:

$$\sum_{A} \frac{z^{\Omega(A)}}{(NA)^s} = \frac{1}{G(s, -z)} \exp\left[z \sum_{P} \frac{1}{(NP)^s}\right] \qquad (\textit{on pose } 0^{\Omega(e)} = 1),$$

$G(s, 0) = 1$, $G(s, -z) \neq 0$ *et holomorphe pour* $\mathcal{R}s > \frac{1}{2}$, $|z| < \sqrt{\rho}$.

Démonstration. — La fonction $z^{\Omega(A)}$ vérifie les conditions exigées dans le lemme 1.1.5 pour $h(A)$ si $|z| \leqq 1$, en effet :

$$|z^{\Omega(A)}| \leqq 1, \qquad z^{\Omega(A)} z^{\Omega(B)} = z^{\Omega(A)+\Omega(B)} = z^{\Omega(AB)}.$$

On a donc si $|z| \leqq 1$ et $\mathcal{R}s > 1$:

$$\prod \frac{1}{1 - \dfrac{z}{(NP)^s}} = \sum_A \frac{z^{\Omega(A)}}{(NA)^s},$$

en prenant $f(P) = 1$ dans le lemme 1.1.6 et en remplaçant z par $-z$, on a

$$\prod_P \left[1 - \frac{z}{(NP)^s}\right] = G(s, -z) \exp\left[-z \sum_P \frac{1}{(NP)^s}\right],$$

d'où le résultat énoncé.

1.1.9. Lemme. — *Soit un* S_1*-semi-groupe* (E) *et* $E_1, E_2, \ldots, E_h$ *des sous-ensembles de* E *qui déterminent une partition de* E.

Posons

$$\sum_{P_i \in E_i} \frac{1}{(NP_i)^s} = \psi_i(s) \qquad \textit{pour} \quad \mathcal{R}s > 1$$

et désignons par $\Omega_i(A)$ *le nombre des diviseurs premiers de l'élément* A *de* (E) *qui appartiennent à* E_i; *dans ces conditions on a, pour* $\mathcal{R}s > 1$:

$$\sum_{\substack{A \in E \\ \Omega_1(A) = q_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \Omega_h(A) = q_h}} \frac{1}{(NA)^s} = \sum_{\substack{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h \\ 0 \leqq \alpha_i \leqq q_i \\ i = 1, 2, \ldots, h}} \varphi_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_h}(s) \, [\psi_1(s)]^{\alpha_1} \ldots [\psi_h(s)]^{\alpha_h},$$

les fonctions $\varphi_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_h}(s)$ *étant holomorphes pour* $\mathcal{R}s \geqq 1$ *et*

$$\varphi_{q_1 q_2 \ldots q_h}(s) = \frac{1}{q_1! \ldots q_h!}.$$

Démonstration.

1° Nous utilisons une méthode de H. Delange; partons de la formule

$$(1) \quad \sum_{A \in (E)} \frac{z^{\Omega(A)}}{(NA)^s} = \frac{1}{G(s, -z)} e^{z\psi(s)}, \qquad \mathcal{R}s > 1, \qquad |z| \leqq 1, \qquad \psi(s) = \sum_{P \in E} \frac{1}{(NP)^s},$$

$\dfrac{1}{G(s, -z)}$, fonction holomorphe par rapport aux deux variables s et z pour $\mathcal{R}s > \frac{1}{2}$ et $|z| < \sqrt{\rho}$, $G(s, 0) = 1$.

La méthode consiste à développer les deux membres de (1) en série entière par rapport à la variable z pour $\mathcal{R}s > 1$, $|z| \leqq 1$ et à égaler les coefficients de z^q dans les deux membres.

Dans le premier membre ce coefficient est

$$\sum_{\substack{A \in E \\ \Omega(A)=q}} \frac{1}{(NA)^s}.$$

Soit $\dfrac{1}{G(s, -z)} = \sum_{n=0} u_n(s) z^n$, u_n holomorphe pour $\mathcal{R}s \geqq 1$, $u_0(s) = 1$. On a

$$\frac{1}{G(s, -z)} e^{z\psi(s)} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} u_n(s)\, z^n\right] \left\{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} [\psi(s)]^j\right\} = \sum_{q=0}^{\infty} z^q \sum_{j=0}^{q} \frac{1}{j!} u_{q-j}(s)\, [\psi(s)]^j;$$

donc

$$\sum_{\substack{A \in (E) \\ \Omega(A)=q}} \frac{1}{(NA)^s} = \sum_{j=0}^{q} \frac{1}{j!} u_{q-j}(s)\, [\psi(s)]^j.$$

2°

$$\sum_{\substack{A \in (E) \\ \Omega_i(A)=q_i \\ i=1,2,\dots,h}} \frac{1}{(NA)^s} = \sum_{\substack{A_i \in (E_i) \\ \Omega_i(A_i)=q_i \\ i=1,2,\dots,h}} \prod_{i=1}^{h} \frac{1}{(NA_i)^s} = \prod_{i=1}^{h} \sum_{\substack{A_i \in (E_i) \\ \Omega_i(A_i)=q_i}} \frac{1}{(NA_i)^s} = \prod_{i=1}^{h} \sum_{j=0}^{q_i} \frac{1}{j!} u_{q_i-j}^{(i)}(s)\, [\psi_i(s)]^j,$$

$u_{q_i-j}^{(i)}(s)$, dans laquelle i est un indice, est holomorphe pour $\mathcal{R}s \geqq 1$, et $u_0^{(i)}(s) = 1$.

On obtient ainsi

$$\sum_{\substack{A \in (E) \\ \Omega_i(A)=q_i \\ i=1,2,\dots,h}} \frac{1}{(NA)^s} = \sum_{\substack{\alpha_1 \alpha_2, \dots, \alpha_h \\ 0 \leqq \alpha_i \leqq q_i \\ i=1,2,\dots,h}} v_{\alpha_1 \alpha_2, \dots, \alpha_h}(s)\, [\psi_1(s)]^{\alpha_1} \dots [\psi_h(s)]^{\alpha_h},$$

où $v_{\alpha_1 \alpha_2, \dots, \alpha_h}(s)$ est holomorphe pour $\mathcal{R}s \geqq 1$ et $v_{q_1, q_2, \dots, q_h}(s) = \dfrac{1}{q_1! \dots q_h!}$.

Théorèmes d'approximations asymptotiques.

1.1.10. Théorème. — *Soit h une fonction complètement multiplicative, à valeur réelle ou complexe, définie sur un S_1-semi-groupe, qui vérifie $|h(A)| \leqq 1$; si pour x infini, on a :*

1°

$$\exp \sum_{NP \leqq x} \frac{\mathcal{R}[h(P)] - 1}{NP} = o(1);$$

2° *quel que soit $\lambda > 1$,*

$$\sum_{NA \leqq \frac{x}{\lambda}} \frac{1}{NA} \sim \sum_{NA \leqq x} \frac{1}{NA},$$

alors on a, pour x infini :

$$\left|\sum_{NA\leq x}\frac{h(A)}{NA}\right| = o\left[\sum_{NA\leq x}\frac{1}{NA}\right].$$

Démonstration. — Ce théorème est une adaptation d'un théorème de Wirsing [1]. Posons

$$\prod(x) = \prod_{NP\leq x}\frac{1}{1-\frac{1}{NP}} = \prod_{NP\leq x}\left(1+\frac{1}{NP}+\frac{1}{NP^2}+\ldots\right).$$

$$\prod_h(x) = \prod_{NP\leq x}\frac{1}{1-\frac{h(P)}{NP}} = \prod_{NP\leq x}\left[1+\frac{h(P)}{NP}+\frac{[h(P)]^2}{(NP)^2}+\ldots\right.$$

Remarquons que

$$\left|\frac{\exp\left[\sum_{NP\leq x}\frac{h(P)}{NP}\right]}{\exp\left[\sum_{NP\leq x}\frac{1}{NP}\right]}\right| = \left|\exp\left[\sum_{NP\leq x}\frac{h(P)-1}{NP}\right]\right| = \exp\left[\sum_{NP\leq x}\frac{\mathcal{R}[h(P)]-1}{NP}\right].$$

D'après le corollaire 1.1.7, 2° :

$$\exp\left[\sum_{NP\leq x}\frac{h(P)}{NP}\right]\sim\frac{1}{g_1}\prod_h(x) \qquad \text{et} \qquad \exp\left(\sum_{NP\leq x}\frac{1}{NP}\right)\sim\frac{1}{g}\prod(x),$$

la condition 1° est donc équivalente à

$$\left|\prod_h(x)\right| = o\left[\prod(x)\right],$$

donc : quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe X tel que

$$\left|\prod_h(X)\right| < \varepsilon\prod(X) \quad (1),$$

X étant fixé pour ε donné, soit E_1 l'ensemble des P de E de norme $\leq X$ et E_2 l'ensemble des P de E de norme $> X$: E est la réunion des ensembles disjoints E_1 et E_2.

On a

$$\prod_h(X) = \sum_{A_1\in(E_1)}\frac{h(A_1)}{NA_1} = \lim_{x\to\infty}\sum_{\substack{A_1\in(E_1)\\ NA_1\leq x}}\frac{h(A_1)}{NA_1}$$

et

$$\prod(X) = \sum_{A_1\in(E_1)}\frac{1}{NA_1} = \lim_{x\to\infty}\sum_{\substack{A_1\in(E_1)\\ NA_1\leq x}}\frac{1}{NA_1}.$$

---

(1) WIRSING, *Math. Annalen*, t. 143, 1961, p. 100.

Quel que soit $\varepsilon_1 > 0$, il existe $Y = Y(X, \varepsilon_1)$ tel que $x \geqq Y$ entraîne

$$\left|\sum_{\substack{A_1 \in (E_1) \\ NA_1 \leqq x}} \frac{h(A_1)}{NA_1}\right| < (1 + \varepsilon_1)\left|\prod_h(X)\right| \qquad \text{et} \qquad \prod(X) < (1 + \varepsilon_1) \sum_{\substack{A_1 \in (E_1) \\ NA_1 \leqq x}} \frac{1}{NA_1};$$

d'après (1) :

$$\left|\sum_{\substack{A_1 \in (E_1) \\ NA_1 \leqq x}} \frac{h(A_1)}{NA_1}\right| < \varepsilon(1 + \varepsilon_1)\prod(X) < \varepsilon(1 + \varepsilon_1)^2 \sum_{\substack{A_1 \in (E_1) \\ NA_1 \leqq x}} \frac{1}{NA_1}.$$

Y étant fixé, on a

$$\left|\sum_{NA \leqq x} \frac{h(A)}{NA}\right| = \left|\sum_{\substack{A_1, A_2 \\ A_1 \in (E_1) \\ A_2 \in (E_2) \\ NA_1 NA_2 \leqq x}} \frac{h(A_1)\,h(A_2)}{NA_1 NA_2}\right| = \left|\sum_{\substack{A_2 \in (E_2) \\ NA_2 \leqq x}} \frac{h(A_2)}{NA_2} \sum_{\substack{A_1 \in (E_1) \\ NA_1 \leqq \frac{x}{NA_2}}} \frac{h(A_1)}{NA_1}\right|$$

$$= \left|\sum_{\substack{A_2 \in (E_2) \\ NA_2 \leqq \frac{x}{Y}}} \frac{h(A_2)}{NA_2} \sum_{\substack{A_1 \in (E_1) \\ NA_1 \leqq \frac{x}{NA_2}}} \frac{h(A_1)}{NA_1} + \sum_{\substack{A_2 \in (E_2) \\ \frac{x}{Y} < NA_2 \leqq x}} \frac{h(A_2)}{NA_2} \sum_{\substack{A_1 \in (E_1) \\ NA_1 \leqq \frac{x}{NA_2}}} \frac{h(A_1)}{NA_1}\right|$$

et, par suite :

$$\left|\sum_{NA \leqq x} \frac{h(A)}{NA}\right| \leqq \sum_{\substack{A_2 \in (E_2) \\ NA_2 \leqq \frac{x}{Y}}} \frac{1}{NA_2}\left|\sum_{\substack{A_1 \in (E_1) \\ NA_1 \leqq \frac{x}{NA_2}}} \frac{h(A_1)}{NA_1}\right| + \sum_{\substack{A_2 \in (E_2) \\ \frac{x}{Y} < NA_2 \leqq x}} \frac{1}{NA_2} \sum_{\substack{A_1 \in (E_1) \\ NA_1 \leqq \frac{x}{NA_2}}} \frac{1}{NA_1}$$

$$\leqq \sum_{\substack{A_2 \in (E_2) \\ NA_2 \leqq x}} \frac{1}{NA_2}\, \varepsilon(1 + \varepsilon_1)^2 \sum_{\substack{A_1 \in (E_1) \\ NA_1 \leqq \frac{x}{NA_2}}} \frac{1}{NA_1} + \left(\sum_{\frac{x}{Y} < NA \leqq x} \frac{1}{NA}\right)\left(\sum_{NA \leqq Y} \frac{1}{NA}\right)$$

$$\left(\text{dans la 1}^{\text{ère}} \text{ partie, } \frac{x}{NA_2} \geqq Y\right)$$

$$\leqq \varepsilon(1 + \varepsilon_1)^2 \sum_{NA \leqq x} \frac{1}{NA} + o(1)\left(\sum_{NA \leqq x} \frac{1}{NA}\right)\left(\sum_{NA \leqq Y} \frac{1}{NA}\right)$$

$$= \left[\varepsilon(1 + \varepsilon_1)^2 + o(1) \sum_{NA \leqq Y} \frac{1}{NA}\right]\left(\sum_{NA \leqq x} \frac{1}{NA}\right).$$

Il résulte de là que

$$\varlimsup_{x \to \infty} \frac{\left|\sum\limits_{NA \leqq x} \frac{h(A)}{NA}\right|}{\sum\limits_{NA \leqq x} \frac{1}{NA}} \leqq \varepsilon(1 + \varepsilon_1)^2$$

quels que soient ε et $\varepsilon_1 > 0$, d'où

$$\varlimsup_{x \to \infty} \frac{\left|\sum\limits_{NA \leqq x} \frac{h(A)}{NA}\right|}{\sum\limits_{NA \leqq x} \frac{1}{NA}} = 0.$$

1.1.11. LEMME. — *Soit* F *un sous-ensemble d'un* S_1*-semi-groupe et* h *une fonction réelle positive définie sur* F; *si, pour* x *infini, on a*

$$\sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq x}} h(A) \operatorname{Log} NA = x\varphi(x)[1 + o(1)],$$

$\varphi(x)$ *étant définie, croissante et positive sur* $[a, +\infty[$, $a \geq 1$.

Alors, on a, pour x *infini :*

$$\sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq x}} h(A) \sim \frac{x\varphi(x)}{\operatorname{Log} x}.$$

Démonstration.

1° Soit

$$H(x) = \sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq x}} h(A);$$

on a

$$\sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq x}} h(A) \operatorname{Log} NA = \int_{1-}^{x} \operatorname{Log} t \, dH(t) = H(x) \operatorname{Log} x - \int_{1}^{x} \frac{H(t)}{t} dt,$$

d'où

$$H(x) \operatorname{Log} x = \sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq x}} h(A) \operatorname{Log} NA + \int_{1}^{x} \frac{H(t)}{t} dt. \tag{1}$$

2° ρ étant le minimum de la norme des éléments premiers :

$$\operatorname{Log} \rho \sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq x}} h(A) \leq \sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq x}} h(A) \operatorname{Log} NA,$$

et, par suite :

$$H(x) = O\left[\sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq x}} h(A) \operatorname{Log} NA\right] = x.O[\varphi(x)],$$

$$\frac{H(t)}{t} = O[\varphi(t)],$$

ce qui entraîne

$$\int_{1}^{x} \frac{H(t)}{t} dt = \int_{1}^{x} O[\varphi(t)] \, dt = O\left[\int_{1}^{x} \varphi(t) \, dt\right] = x.O[\varphi(x)].$$

(1) donne

$$H(x) \operatorname{Log} x = x.O[\varphi(x)] + x.O[\varphi(x)] = x.O[\varphi(x)],$$

$$\frac{H(x)}{x} = O\left[\frac{\varphi(x)}{\operatorname{Log} x}\right],$$

d'où

$$\int_1^x \frac{H(t)}{t}\,dt = \int_1^x O\left[\frac{\varphi(t)}{\operatorname{Log} t}\right]dt = O\left[\int_b^x \frac{\varphi(t)}{\operatorname{Log} t}\,dt\right] \qquad \text{avec} \quad b > a \geqq 1,$$

d'où

$$\int_1^x \frac{H(t)}{t}\,dt = \varphi(x).O\left[\int_b^x \frac{dt}{\operatorname{Log} t}\right] = \varphi(x).o(x) = x\varphi(x).o(1).$$

En portant à nouveau dans (1) : $H(x)\operatorname{Log} x \sim x\varphi(x)$.

1.1.12. Lemme. — *Soit g une fonction réelle ou complexe définie pour $x \geqq 1$, bornée sur tout intervalle fini et telle que, pour x infini : $g(x) = \alpha x + o(x)$.*

Soit, d'autre part, h une fonction réelle ou complexe, définie sur un sous-ensemble F *d'un* S_1*-semi-groupe, et non identiquement nulle. Posons*

$$H(x) = \sum_{\substack{A \in F \\ NA \in x}} \frac{|h(A)|}{NA},$$

et supposons que, quel que soit λ réel supérieur à 1, *on ait*

$$H(\lambda x) \sim H(x) \quad \textit{pour } x \textit{ infini.}$$

Alors, on a, pour x infini :

$$\sum_{\substack{A \in F \\ NA \leqq x}} h(A)\, g\left(\frac{x}{NA}\right) = \alpha x \sum_{\substack{A \in F \\ NA \leqq x}} \frac{h(A)}{NA} + o[xH(x)].$$

(Transposition d'un lemme de H. Delange, voir *Bull. Soc. roy. Sc. Liège*, nos 9-10, 1961, p. 407.)

1.1.13. Lemme. — *Soit :*

I. *Une fonction réelle $g(x)$ positive, définie et croissante pour $x \geqq 1$, telle que, pour x infini :*

$$g(x) \sim Kx\varphi(x),$$

K *étant une constante strictement positive, $\varphi(x)$ une fonction positive et croissante pour x assez grand.*

II. *Une fonction $h(x)$ positive pour x assez grand, qui vérifie, lorsque x tend vers l'infini :*

1° $h(x) \to \infty$,

2° $\dfrac{x}{h(x)} \to \infty$.

3° $\varphi[h(x)] \sim \varphi(x)$.

III. *Un sous-ensemble* F *d'un* S_1*-semi-groupe tel que*

$$\sum_{\substack{A\in F\\ NA\leq \frac{x}{h(x)}}} \frac{1}{NA} \sim \sum_{\substack{A\in F\\ NA\leq x}} \frac{1}{NA} \quad \textit{lorsque } x\to\infty.$$

Dans ces conditions on a, lorsque $x\to\infty$,

$$\sum_{\substack{A\in F\\ NA\leq x}} g\left(\frac{x}{NA}\right) \sim Kx\varphi(x) \sum_{\substack{A\in F\\ NA\leq x}} \frac{1}{NA}.$$

Démonstration.

1° Remarquons que la condition III entraîne pour x_0 constante >1 :

$$\sum_{\substack{A\in F\\ NA\leq \frac{x}{x_0}}} \frac{1}{NA} \sim \sum_{\substack{A\in F\\ NA\leq x}} \frac{1}{NA} \quad \text{lorsque } x\to\infty,$$

en effet, quel que soit x_0, pour x assez grand, on a

$$\frac{x}{h(x)} < \frac{x}{x_0} \quad \text{puisque } h(x)\to\infty,$$

d'où

$$\sum_{\substack{A\in F\\ NA\leq \frac{x}{h(x)}}} \frac{1}{NA} \leq \sum_{\substack{A\in F\\ NA\leq \frac{x}{x_0}}} \frac{1}{NA} \leq \sum_{\substack{A\in F\\ NA\leq x}} \frac{1}{NA}.$$

2° Soit $\varepsilon>0$, il existe $x_0>1$ tel que $x>x_0 \Rightarrow g(x)<(1+\varepsilon)Kx\varphi(x)$, et que $\varphi(x)$ soit croissante et positive sur $[x_0, +\infty[$; d'où

$$\sum_{\substack{A\in F\\ NA\leq x}} g\left(\frac{x}{NA}\right) = \sum_{\substack{A\in F\\ NA\leq \frac{x}{x_0}}} g\left(\frac{x}{NA}\right) + \sum_{\substack{A\in F\\ \frac{x}{x_0}<NA\leq x}} g\left(\frac{x}{NA}\right),$$

$$\sum_{\substack{A\in F\\ NA\leq x}} g\left(\frac{x}{NA}\right) < \sum_{\substack{A\in F\\ NA\leq \frac{x}{x_0}}} K\frac{x}{NA}\varphi\left(\frac{x}{NA}\right)(1+\varepsilon) + g(x_0) \sum_{\substack{A\in F\\ \frac{x}{x_0}<NA\leq x}} 1$$

$$< \sum_{\substack{A\in F\\ NA\leq \frac{x}{x_0}}} K\frac{x}{NA}\varphi(x)(1+\varepsilon) + g(x_0) \sum_{\substack{A\in F\\ \frac{x}{x_0}<NA\leq x}} \frac{x}{NA}.$$

On a donc, pour $x>x_0$,

$$\frac{\displaystyle\sum_{\substack{A\in F\\ NA\leq x}} g\left(\frac{x}{NA}\right)}{\displaystyle Kx\varphi(x)\sum_{\substack{A\in F\\ NA\leq x}}\left(\frac{1}{NA}\right)} < \frac{\displaystyle(1+\varepsilon)\sum_{\substack{A\in F\\ NA\leq \frac{x}{x_0}}} \frac{1}{NA}}{\displaystyle\sum_{\substack{A\in F\\ NA\leq x}} \frac{1}{NA}} + \frac{g(x_0)}{K\varphi(x)}\left(1 - \frac{\displaystyle\sum_{\substack{A\in F\\ NA\leq \frac{x}{x_0}}} \frac{1}{NA}}{\displaystyle\sum_{\substack{A\in F\\ NA\leq x}} \frac{1}{NA}}\right);$$

ε étant arbitraire, il résulte de là que

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{\sum\limits_{\substack{A\in F\\ NA\leq x}} g\left(\frac{x}{NA}\right)}{Kx\,\varphi(x)\sum\limits_{\substack{A\in F\\ NA\leq x}} \frac{1}{NA}} \leq 1.$$

3° Pour $x > x_1 > 1$, on a

$$\sum_{\substack{A\in F\\ NA\leq x}} g\left(\frac{x}{NA}\right) \geq \sum_{\substack{A\in F\\ NA\leq \frac{x}{h(x)}}} g\left(\frac{x}{NA}\right).$$

Étant donné $\varepsilon > 0$, si $x > x_2 > 1$, on a $g(x) > Kx\,\varphi(x)\,(1-\varepsilon)$ et $\varphi(x)$ croissante et positive sur $[x_2, +\infty[$.

Il existe $x_3 > 1$ tel que $x > x_3 \Rightarrow h(x) > x_2$.

Pour $x > \max(x_1, x_2, x_3) = x_4$ et $NA \leq \frac{x}{h(x)}$, on a

$$g\left(\frac{x}{NA}\right) > K\frac{x}{NA}\varphi\left(\frac{x}{NA}\right)(1-\varepsilon).$$

D'où pour $x > x_4$:

$$\sum_{\substack{A\in F\\ NA\leq x}} g\left(\frac{x}{NA}\right) \geq \sum_{\substack{A\in F\\ NA\leq \frac{x}{h(x)}}} g\left(\frac{x}{NA}\right) > Kx(1-\varepsilon) \sum_{\substack{A\in F\\ NA\leq \frac{x}{h(x)}}} \frac{1}{NA}\varphi\left(\frac{x}{NA}\right)$$

$$\geq (1-\varepsilon)\,Kx\varphi[h(x)] \sum_{\substack{A\in F\\ NA\leq \frac{x}{h(x)}}} \frac{1}{NA}.$$

Par suite,

$$\frac{\sum\limits_{\substack{A\in F\\ NA\leq x}} g\left(\frac{x}{NA}\right)}{Kx\,\varphi(x)\sum\limits_{\substack{A\in F\\ NA\leq x}} \frac{1}{NA}} > (1-\varepsilon)\frac{\varphi[h(x)]}{\varphi(x)} \frac{\sum\limits_{\substack{A\in F\\ NA\leq \frac{x}{h(x)}}} \frac{1}{NA}}{\sum\limits_{\substack{A\in F\\ NA\leq x}} \frac{1}{NA}};$$

ε étant arbitraire, il résulte de là que

$$\underline{\lim_{x\to\infty}} \frac{\sum\limits_{\substack{A\in F\\ NA\leq x}} g\left(\frac{x}{NA}\right)}{Kx\,\varphi(x)\sum\limits_{\substack{A\in F\\ NA\leq x}} \frac{1}{NA}} \geq 1.$$

1.1.14. Lemme. — *Soit* F *une partie d'un* S_1-*semi-groupe* (E) *et* h *une fonction positive complètement multiplicative définie sur* (E), *telle que* $h(A) \leqq 1$; *si* G *désigne l'ensemble des* B *appartenant à* (E) *tels qu'il existe* P *appartenant à* E *et* $k \geqq 2$ *tels que* $P^k B$ *appartienne à* F, *on a, pour* x *infini :*

$$\sum_{\substack{A \in F \\ NA \leqq x}} h(A) \operatorname{Log} NA = \sum_{\substack{P, B \\ P.B \in F \\ NP.NB \leqq F}} h(P)\, h(B) \operatorname{Log} NP + x.O\left[\sum_{\substack{B \in G \\ NB \leqq x}} \frac{h(B)}{NB}\right].$$

Démonstration.

1° $\operatorname{Log} NA = \sum\limits_{\substack{P, k, B \\ P^k B = A}} \operatorname{Log} NP$; en effet, si $A = P_1^{\alpha_1} \ldots P_n^{\alpha_n}$,

$$\sum_{\substack{P, k, B \\ P^k B = A}} \operatorname{Log} NP = \alpha_1 \operatorname{Log} NP_1 + \ldots + \alpha_n \operatorname{Log} NP_n = \operatorname{Log} NA;$$

d'où

$$\sum_{\substack{A \in F \\ NA \leqq x}} h(A) \operatorname{Log} NA = \sum_{\substack{P, k, B \\ P^k B \in F \\ (NP)^k NB \leqq x}} [h(P)]^k h(B) \operatorname{Log} NP$$

$$= \sum_{\substack{P, B \\ P, B \in F \\ NP.NB \leqq x}} h(P)\, h(B) \operatorname{Log} NP + \sum_{\substack{P, k, B \\ k \geqq 2 \\ P^k B \in F \\ (NP)^k NB \leqq x}} [h(P)]^k h(B) \operatorname{Log} NP.$$

2° Le second terme étant désigné par R, on a

$$R = \sum_{\substack{P, k \\ k \geqq 2 \\ \exists\, B \text{ tel que } P^k B \in F \\ (NP)^k NB \leqq x}} [h(P)]^k \operatorname{Log} NP \sum_{\substack{B \\ k \geqq 2 \\ P^k B \in F \\ NB \leqq \frac{x}{(NP)^k}}} h(B),$$

$$R \leqq \sum_{\substack{P, k \\ k \geqq 2}} \operatorname{Log} NP \sum_{\substack{B \\ B \in G \\ NB \leqq \frac{x}{(NP)^k}}} h(B) = \sum_{\substack{P, k \\ k \geqq 2}} H\left(\frac{x}{(NP)^k}\right) \operatorname{Log} NP,$$

en posant

$$H(x) = \sum_{\substack{B \in G \\ NB \leqq x}} h(B) \leqq x \sum_{\substack{B \in G \\ NB \leqq x}} \frac{h(B)}{NB}.$$

Ceci donne

$$R \leqq \sum_{\substack{P, k \\ k \geqq 2}} \frac{x \operatorname{Log} NP}{(NP)^k} \sum_{\substack{B \in G \\ NB \leqq \frac{x}{(NP)^k}}} \frac{h(B)}{NB}$$

$$\leqq x \left[\sum_{\substack{P, k \\ k \geqq 2}} \frac{\operatorname{Log} NP}{(NP)^k}\right] \left[\sum_{\substack{B \in G \\ NB \leqq x}} \frac{h(B)}{NB}\right] = x.O\left[\sum_{\substack{B \in G \\ NB \leqq x}} \frac{h(B)}{NB}\right],$$

car la série

$$\sum_{\substack{P,k\\ k\geqq 2}} \frac{\operatorname{Log} NP}{(NP)^k} = \sum_{P} \frac{\operatorname{Log} NP}{(NP)^2} \frac{1}{1-\frac{1}{NP}} \quad \text{converge}$$

$$\left[\frac{\operatorname{Log} NP}{(NP)^2} \frac{1}{1-\frac{1}{NP}} \sim \frac{\operatorname{Log} NP}{(NP)^2} < \frac{1}{(NP)^{\frac{3}{2}}} \text{ si } NP \to \infty\right].$$

CHAPITRE 2.

Δ_r-Semi-groupes.

Ici l'hypothèse faite sur E est formulée dans la définition qui suit, elle implique que (E) est un S_1-semi-groupe. Cette hypothèse ne suffit pas pour obtenir un équivalent, lorsque x est infiniment grand, du nombre $\nu(x)$ des éléments de (E) de norme au plus égale à x; la deuxième partie du théorème 1.2.3 donne seulement un équivalent de $\operatorname{Log}\frac{\nu(x)}{x}\cdot$ La première partie de ce théorème permet de démontrer le théorème 1.2.5 sans connaître explicitement un équivalent de $\nu(x)$; rappelons que le théorème d'équirépartition asymptotique (deuxième partie, chapitre 1) découle du théorème 1.2.5. Le théorème 1.2.6 sera utilisé dans l'évaluation asymptotique qui fait l'objet du chapitre 2 de la deuxième partie.

1.2.1. Définition. — On appelle Δ_r-semi-groupe un semi-groupe normé (E) dans lequel le nombre des éléments premiers $\nu_E(x)$, de norme au plus égale à x, est équivalent pour x infini à

$$\mu \frac{x(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^r}{\operatorname{Log} x},$$

r est un réel positif ou nul, μ est un réel strictement positif. Nous dirons alors que E est un ensemble d'éléments premiers de degré r.

Dans le cas où $r = 0$, on dit que E est un ensemble d'éléments premiers de densité strictement positive; μ est la densité de cet ensemble.

1.2.2. Propriétés préliminaires.

1.2.2.1. Un Δ_r-semi-groupe est un S_1-semi-groupe.

Démonstration. — Il faut montrer que $\sum \frac{1}{(NP)^s}$ converge pour $\mathcal{R}s > 1$,

$$\sum_{NP\leqq x} \frac{1}{(NP)^s} = \int_{1-}^{x} \frac{d\nu_E(t)}{t^s} = \frac{\nu_E(x)}{x^s} + s\int_{1}^{x} \frac{\nu_E(t)\,dt}{t^{s+1}},$$

$$\left|\frac{\nu_E(x)}{x^s}\right| = \frac{\nu_E(x)}{x^{\mathcal{R}s}} \sim \frac{\mu(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^r}{x^{\mathcal{R}s-1}\operatorname{Log} x} \to 0,$$

$$\left|\frac{\nu_E(t)}{t^{s+1}}\right| \sim \frac{\mu(\operatorname{Log}\operatorname{Log} t)^r}{t^{\mathcal{R}s}\operatorname{Log} t},$$

l'intégrale converge pour $\mathcal{R}s > 1$.

1.2.2.2.

$$\theta_E(x) = \sum_{\substack{P \in E \\ NP \leq x}} \operatorname{Log} NP \sim \mu x (\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^r \quad \text{pour } x \text{ infini.}$$

Démonstration.

$$\theta_E(x) = \int_{1-}^{x} \operatorname{Log} t \, d\nu_E(t) = \nu_E(x) \operatorname{Log} x - \int_{1}^{x} \nu_E(t) \frac{dt}{t},$$

$$\nu_E(x) \operatorname{Log} x \sim \mu x (\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^r,$$

$$\int_{1}^{x} \nu_E(t) \frac{dt}{t} \sim \int_{2}^{x} \mu (\operatorname{Log}\operatorname{Log} t)^r \frac{dt}{\operatorname{Log} t} = o\left[\int_{2}^{x} \mu (\operatorname{Log}\operatorname{Log} t)^r \, dt\right] = o\,[x \operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^r].$$

1.2.2.3. — Pour x infini :

$$\lambda_E(x) = \sum_{\substack{P \in E \\ NP \leq x}} \frac{1}{NP} \sim \frac{\mu}{r+1} (\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{r+1}.$$

Démonstration.

$$\lambda_E(x) = \int_{1-}^{x} \frac{d\nu_E(t)}{t} = \frac{\nu_E(x)}{x} + \int_{1}^{x} \nu_E(t) \frac{dt}{t^2},$$

$$\frac{\nu_E(x)}{x} \sim \mu \frac{(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^r}{\operatorname{Log} x} = o(1),$$

$$\int_{1}^{x} \nu_E(t) \frac{dt}{t^2} \sim \int_{2}^{x} \mu (\operatorname{Log}\operatorname{Log} t)^r \frac{dt}{t \operatorname{Log} t}$$

$$= \mu \int_{2}^{x} (\operatorname{Log}\operatorname{Log} t)^r \, d \operatorname{Log}\operatorname{Log} t \sim \frac{\mu}{r+1} (\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{r+1}.$$

1.2.2.4. — Soit F une partie d'un Δ_r-semi-groupe (E) et h une fonction positive, complètement multiplicative, définie sur (E), telle que $h(A) \leq 1$; si G désigne l'ensemble des B appartenant à (E) tels qu'il existe P appartenant à E et $k \geq 2$ tels que $P^k B$ appartienne à F; si, de plus, G est contenu dans un ensemble G_1 d'éléments de (E) qui vérifie, quel que soit $\lambda > 1$:

$$\sum_{\substack{B_1 \in G_1 \\ NB_1 \leq \frac{x}{\lambda}}} \frac{h(B_1)}{NB_1} \sim \sum_{\substack{B_1 \in G_1 \\ NB_1 \leq x}} \frac{h(B_1)}{NB_1} \quad \text{pour } x \text{ infini.}$$

Alors, on a, pour x infini :

$$\sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq x}} h(A) \operatorname{Log} NA = \sum_{\substack{P, B \\ P.B \in F \\ NP.NB \leq x}} h(P)\, h(B) \operatorname{Log} NP + x \,.\, o\left[\sum_{\substack{B_1 \in G_1 \\ NB_1 \leq x}} \frac{h(B_1)}{NB_1}\right].$$

Démonstration. — Il suffit de reprendre la démonstration du lemme 1.1.14 à partir de « le second membre étant désigné par R » :

$$R = \sum_{\substack{P,k,B\\ k\geqq 2\\ P^kB\in F\\ (NP)^k NB\leqq x}} [h(P)]^k h(B)\,\mathrm{Log}\,NP \leqq \sum_{\substack{P,k,B_1\\ k\geqq 2\\ B_1\in G_1\\ (NP)^k NB_1\leqq x\\ P\in E}} h(B_1)\,\mathrm{Log}\,NP,$$

$$R \leqq \sum_{\substack{B_1\in G_1\\ NB_1\leqq x}} h(B_1) \sum_{\substack{P,k\\ k\geqq 2\\ NP\leqq \left(\frac{x}{NB_1}\right)^{\frac{1}{k}}}} \mathrm{Log}\,NP,$$

mais

$$\sum_{\substack{P,k\\ k\geqq 2\\ NP\leqq \left(\frac{x}{NB_1}\right)^{\frac{1}{k}}}} \mathrm{Log}\,NP$$

$$= \sum_{NP\leqq \left(\frac{x}{NB_1}\right)^{\frac{1}{2}}} \mathrm{Log}\,NP \sum_{\substack{k\geqq 2\\ k\,\mathrm{Log}\,NP\leqq \mathrm{Log}\frac{x}{NB_1}}} 1 \leqq \sum_{NP\leqq \left(\frac{x}{NB_1}\right)^{\frac{1}{2}}} \mathrm{Log}\frac{x}{NB_1} \leqq \nu_E\left[\left(\frac{x}{NB_1}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\mathrm{Log}\frac{x}{NB_1}.$$

Soit

$$g(x) = \nu_E(\sqrt{x})\,\mathrm{Log}\,x \sim 2\mu\sqrt{x}\,(\mathrm{Log}\,\mathrm{Log}\,x)^r = o(x)\ ;$$

on a

$$R \leqq \sum_{\substack{B_1\in G_1\\ NB_1\leqq x}} h(B_1)\, g\left(\frac{x}{NB_1}\right) = x.o\left[\sum_{\substack{B_1\in G_1\\ NB_1\leqq x}} \frac{h(B_1)}{NB_1}\right]$$

d'après le lemme 1.1.12.

1.2.2.5.

$$\sum_{\substack{NA\leqq x\\ \Omega(A)=q}} \frac{1}{NA} \sim \left(\frac{\mu}{r+1}\right)^q \frac{1}{q!}(\mathrm{Log}\,\mathrm{Log}\,x)^{(r+1)q} \quad \text{pour } x \text{ infini.}$$

Démonstration. — Posons

$$\sigma_q(x) = \sum_{\substack{NA\leqq x\\ \Omega(A)=q}} \frac{1}{NA}, \qquad \sigma'_q(x) = \sum_{\substack{NA\leqq x\\ \Omega(A)=q\\ A\ \text{« quadratfrei »}}} \frac{1}{NA};$$

$$\sigma_1(x) = \sum_{NP\leqq x} \frac{1}{NP} \sim \frac{\mu}{r+1}(\mathrm{Log}\,\mathrm{Log}\,x)^{r+1}.$$

On a

(1) $$q\sigma_q(x) - O[\sigma_{q-2}(x)] \leqq \sigma_{q-1}(x)\,\sigma_1(x) \leqq q\sigma_q(x^2)\ ;$$

en effet :

1° Chaque terme de $\sigma_{q-1}(x)\,\sigma_1(x)$ est identique à un terme de $\sigma_q(x^2)$; il existe, dans $\sigma_{q-1}(x)\,\sigma_1(x)$, au plus q termes identiques à un terme déterminé si l'élément A correspondant de $\sigma_q(x^2)$ est quadratfrei et moins de q termes si A n'est pas quadratfréi; l'inégalité de droite en découle.

2° $\sigma_{q-1}(x)\,\sigma_1(x)$ contient tous les termes de $\sigma'_q(x)$ répétés q fois, donc

$$q\sigma'_q(x) \leqq \sigma_{q-1}(x)\,\sigma_1(x),$$

mais

$$\sigma'_q(x) = \sigma_q(x) - \sum_{\substack{\mathrm{NA}\leqq x \\ \Omega(\mathrm{A})=q \\ \text{A non quadratfrei}}} \frac{1}{\mathrm{NA}}$$

et

$$\sum_{\substack{\mathrm{NA}\leqq x \\ \Omega(\mathrm{A})=q \\ \text{A non quadratfrei}}} \frac{1}{\mathrm{NA}} \leqq \Bigl(\sum_{\mathrm{NP}\leqq x} \frac{1}{\mathrm{NP}^2}\Bigr)\Bigl(\sum_{\substack{\mathrm{NB}\leqq x \\ \Omega(\mathrm{B})=q-2}} \frac{1}{\mathrm{NB}}\Bigr) = \mathrm{O}\,[\sigma_{q-2}(x)]$$

puisque $\sum_{\mathrm{P}} \frac{1}{\mathrm{NP}^2}$ converge.

Raisonnons par récurrence, la formule à démontrer est vraie pour $q=1$, en la supposant vraie pour les entiers $\leqq q-1$, (1) donne

$$q\sigma_q(x) \leqq \left(\frac{\mu}{r+1}\right)^{q-1} \frac{1}{(q-1)!}\,(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{(r+1)(q-1)} \frac{\mu}{r+1}\,(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{r+1}[1+o(1)]$$
$$+\,\mathrm{O}\left((\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{(r+1)(q-2)}\right) = \left(\frac{\mu}{r+1}\right)^{q} \frac{1}{(q-1)!}\,(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{(r+1)q}[1+o(1)]$$

et $\sigma_{q-1}(\sqrt{x})\,\sigma_1(\sqrt{x}) \leqq q\sigma_q(x)$, soit

$$\left(\frac{\mu}{r+1}\right)^{q} \frac{1}{(q-1)!}\,(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{(r+1)q}[1+o(1)] \leqq q\sigma_q(x);$$

d'où

$$\left(\frac{\mu}{r+1}\right)^{q} \frac{1}{q!}\,(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{(r+1)q}[1+o(1)] \leqq \sigma_q(x) \leqq \left(\frac{\mu}{r+1}\right)^{q} \frac{1}{q!}\,(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{(r+1)q}[1+o(1)].$$

1.2.3. Théorème. — *Si $\nu(x)$ désigne le nombre des éléments, de norme au plus égale à x, d'un Δ_r-semi-groupe* (E), *lorsque x tend vers l'infini, on a*

1°
$$\nu(x) \sim \mu \frac{x}{\operatorname{Log} x}\,(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^r \sum_{\substack{\mathrm{A}\in(\mathrm{E}) \\ \mathrm{NA}\leqq x}} \frac{1}{\mathrm{NA}};$$

2° *si* $r>0$,

$$\nu(x) = x \exp\left\{\frac{\mu}{r+1}\,(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{r+1}[1+o(1)]\right\};$$

si $r=0$,

$$\nu(x) = x \exp\{[\mu - 1 + o(1)]\operatorname{Log}\operatorname{Log} x\}.$$

Démonstration de la première partie. — D'après le lemme 1.1.14 on a [on prend $h(A) = 1$] :

$$L(x) = \sum_{\substack{A \in (E) \\ NA \leq x}} \operatorname{Log} NA = \sum_{\substack{P, B \\ NP.NB \leq x \\ P \in E \\ B \in (E)}} \operatorname{Log} NP + x.O\left(\sum_{\substack{B \in (E) \\ NB \leq x}} \frac{1}{NB}\right).$$

Soit la fonction $k(x) = \dfrac{\operatorname{Log} x}{\operatorname{Log}\operatorname{Log} x} \to \infty$ si $x \to \infty$; $\dfrac{x}{k(x)} \to \infty$.

Posons

$$\theta(x) = \sum_{NP \leq x} \operatorname{Log} NP \sim \mu . x (\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^r.$$

On peut écrire

$$\sum_{\substack{P, B \\ NP.NB \leq x}} \operatorname{Log} NP = \sum_{NB \leq \frac{x}{k(x)}} \theta\left(\frac{x}{NB}\right) + \sum_{\frac{x}{k(x)} < NB \leq x} \theta\left(\frac{x}{NB}\right);$$

$$\sum_{\frac{x}{k(x)} < NB \leq x} \theta\left(\frac{x}{NB}\right) \leq \theta[k(x)] \sum_{\frac{x}{k(x)} < NB \leq x} \frac{1}{\operatorname{Log} NB} \operatorname{Log} NB \leq \theta[k(x)] \frac{1}{\operatorname{Log}\dfrac{x}{k(x)}} L(x)$$

$$\sim \mu \frac{\operatorname{Log} x}{\operatorname{Log}\operatorname{Log} x} (\operatorname{Log}\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^r \frac{1}{\operatorname{Log} x} L(x) = L(x).o(1);$$

donc

$$\begin{aligned} L(x) - L(x).o(1) &= \sum_{NB \leq \frac{x}{k(x)}} \theta\left(\frac{x}{NB}\right) + x.O\left(\sum_{NB \leq x} \frac{1}{NB}\right) \\ &= [1 + o(1)] \sum_{NB \leq \frac{x}{k(x)}} \mu \frac{x}{NB}\left(\operatorname{Log}\operatorname{Log}\frac{x}{NB}\right)^r + x.O\left(\sum_{NB \leq x} \frac{1}{NB}\right) \\ &\leq [1 + o(1)] \sum_{NB \leq x} \mu \frac{x}{NB} (\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^r + x.O\left(\sum_{NB \leq x} \frac{1}{NB}\right) \\ &= O(1)\, x (\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^r \sum_{NB \leq x} \frac{1}{NB}; \end{aligned}$$

donc il existe $M > 0$ et $x_0 > 0$ tels que $x > x_0$ entraîne

$$L(x) \leq M x (\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^r \sum_{NB \leq x} \frac{1}{NB};$$

en posant $\lambda(x) = \dfrac{L(x)}{x}$, on a

$$\underline{\lambda(x) \leq M (\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^r \sum_{NA \leq x} \frac{1}{NA}.} \tag{1}$$

Nous allons maintenant démontrer que la fonction

$$h(x) = \exp\left[(\operatorname{Log} x)^{1 - \frac{1}{(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{\frac{1}{2}}}}\right]$$

répond aux hypothèses du lemme 1.1.13 en prenant

$$g(x)=\theta(x)\sim \mu x\,(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^r,\qquad K=\mu,\qquad \varphi(x)=(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^r;$$

de là résultera que

$$\sum_{\substack{P,B\\ NP.NB\leq x}} \operatorname{Log} NP=\sum_{NB\leq x}\theta\left(\frac{x}{NB}\right)\sim \mu x\,(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^r\sum_{NA\leq x}\frac{1}{NA};$$

de plus, nous savons que l'existence de la fonction $h(x)$ entraîne

$$\sum_{NA\leq \frac{x}{\lambda}}\frac{1}{NA}\sim\sum_{NA\leq x}\frac{1}{NA}\quad \text{pour tout } \lambda>1;$$

la propriété 1.2.2.4 donne alors

$$L(x)\sim \mu x\,(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^r\sum_{NA\leq x}\frac{1}{NA},$$

et l'on obtiendra le résultat énoncé en appliquant le lemme 1.1.11.

Démontrons donc que $h(x)$ satisfait aux hypothèses du lemme 1.1.13.

1° $h(x)\to\infty$ évident.

2° $\dfrac{x}{h(x)}\to\infty$, en effet :

$$\operatorname{Log}\frac{x}{h(x)}=\operatorname{Log} x-(\operatorname{Log} x)^{1-\frac{1}{(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{\frac12}}}=(\operatorname{Log} x)\left[1-(\operatorname{Log} x)^{-\frac{1}{(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{\frac12}}}\right]$$

et

$$\operatorname{Log}\left[(\operatorname{Log} x)^{-\frac{1}{(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{\frac12}}}\right]=-(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{\frac12}\to-\infty.$$

3° $[\operatorname{Log}\operatorname{Log} h(x)]^r\sim(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^r$:

$$\operatorname{Log}\operatorname{Log} h(x)=\left[1-\frac{1}{(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{\frac12}}\right]\operatorname{Log}\operatorname{Log} x\sim\operatorname{Log}\operatorname{Log} x.$$

4° Reste à démontrer que

$$\sum_{NA\leq\frac{h(x)}{x}}\frac{1}{NA}\sim\sum_{NA\leq x}\frac{1}{NA},$$

c'est-à-dire que

$$0<\rho(x)=\frac{\displaystyle\sum_{\frac{x}{h(x)}<NA\leq x}\frac{1}{NA}}{\displaystyle\sum_{NA\leq x}\frac{1}{NA}}=o(1).$$

Montrons d'abord qu'on a

$$(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^\alpha - \left[\operatorname{Log}\operatorname{Log}\frac{x}{h(x)}\right]^\alpha = o(1) \qquad \text{si} \quad \alpha > 0;$$

$$\operatorname{Log}\operatorname{Log}\frac{x}{h(x)} = \operatorname{Log}\operatorname{Log} x + \operatorname{Log}\left[1 - (\operatorname{Log} x)^{-\frac{1}{(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{\frac{1}{2}}}}\right]$$

$$= \operatorname{Log}\operatorname{Log} x - (\operatorname{Log} x)^{-\frac{1}{(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{\frac{1}{2}}}}[1 + o(1)]$$

$$= (\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)\left[1 - \frac{1 + o(1)}{(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)(\operatorname{Log} x)^{\frac{1}{(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{\frac{1}{2}}}}}\right].$$

D'où

$$\left[\operatorname{Log}\operatorname{Log}\frac{x}{h(x)}\right]^\alpha = (\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^\alpha\left[1 - \frac{\alpha[1 + o(1)]}{(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)(\operatorname{Log} x)^{\frac{1}{(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{\frac{1}{2}}}}}\right]$$

$$= (\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^\alpha - \frac{\alpha(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{\alpha-1}}{(\operatorname{Log} x)^{\frac{1}{(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{\frac{1}{2}}}}}[1 + o(1)];$$

$\dfrac{(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{\alpha-1}}{(\operatorname{Log} x)^{\frac{1}{(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{\frac{1}{2}}}}} = o(1)$ car le logarithme de cette expression est égal à

$$(\alpha - 1)\operatorname{Log}\operatorname{Log}\operatorname{Log} x - (\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{\frac{1}{2}} \to -\infty.$$

Par ailleurs, on a

$$\sum_{\frac{x}{h(x)} < \mathrm{NA} \leq x} \frac{1}{\mathrm{NA}} = \sum_{\frac{x}{h(x)} < \mathrm{NA} \leq x} \frac{1}{\mathrm{NA}\log\mathrm{NA}}\operatorname{Log}\mathrm{NA} = \int_{\frac{x}{h(x)}}^{x} \frac{1}{t\operatorname{Log} t}\, d\mathrm{L}(t)$$

$$= \frac{\mathrm{L}(x)}{x\operatorname{Log} x} - \frac{\mathrm{L}\left[\frac{x}{h(x)}\right]}{\frac{x}{h(x)}\operatorname{Log}\frac{x}{h(x)}} + \int_{\frac{x}{h(x)}}^{x} \mathrm{L}(t)\left[\frac{1}{t^2\operatorname{Log} t} + \frac{1}{t^2(\operatorname{Log} t)^2}\right] dt$$

$$\leq \frac{\lambda(x)}{\operatorname{Log} x} + [1 + o(1)]\int_{\frac{x}{h(x)}}^{x} \lambda(t)\,\frac{dt}{t\operatorname{Log} t}.$$

En tenant compte de (1) :

$$\sum_{\frac{x}{h(x)} < \mathrm{NA} \leq x} \frac{1}{\mathrm{NA}} \leq \mathrm{M}\,\frac{(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^r}{\operatorname{Log} x}\sum_{\mathrm{NA} \leq x}\frac{1}{\mathrm{NA}} + [1 + o(1)]\,\mathrm{M}\int_{\frac{x}{h(x)}}^{x} (\operatorname{Log}\operatorname{Log} t)^r\left(\sum_{\mathrm{NA} \leq t}\frac{1}{\mathrm{NA}}\right)\frac{dt}{t\operatorname{Log} t}$$

$$\leq o(1)\sum_{\mathrm{NA} \leq x}\frac{1}{\mathrm{NA}} + [1 + o(1)]\,\mathrm{M}\left(\sum_{\mathrm{NA} \leq x}\frac{1}{\mathrm{NA}}\right)\int_{\frac{x}{h(x)}}^{x} (\operatorname{Log}\operatorname{Log} t)^r\,\frac{dt}{t\operatorname{Log} t};$$

donc

$$v(x) \leq o(1) + [1 + o(1)]\,\frac{\mathrm{M}}{r+1}\left\{(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{r+1} - \left[\operatorname{Log}\operatorname{Log}\frac{x}{h(x)}\right]^{r+1}\right\} = o(1) + o(1) = o(1).$$

Démonstration de la deuxième partie. — On a

$$\lambda(x) = \frac{L(x)}{x} = [1 + o(1)]\,\mu\,(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^r \sum_{NA \leq x} \frac{1}{NA} \to +\infty.$$

En utilisant un procédé de Wirsing, on peut écrire

$$\lambda(x) = [1 + o(1)]\,\mu\,(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^r \int_2^x \frac{1}{t \operatorname{Log} t}\, dL(t)$$

$$= [1 + o(1)]\,\mu\,(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^r \left\{ \frac{\lambda(x)}{\operatorname{Log} x} - O(1) + [1 + o(1)] \int_2^x \lambda(t)\, \frac{dt}{t \operatorname{Log} t} \right\}$$

$$\left\{ \text{l'intégrale } \int_2^x \lambda(t) \left[\frac{1}{t \operatorname{Log} t} + \frac{1}{t (\operatorname{Log} t)^2} \right] dt \text{ diverge} \right\},$$

$$\lambda(x) - \lambda(x) \,.\, o(1) = [1 + o(1)]\,\mu\,(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^r \int_2^x \lambda(t)\, \frac{dt}{t \operatorname{Log} t};$$

posons $X = \operatorname{Log}\operatorname{Log} x$, $u = \operatorname{Log}\operatorname{Log} t$, $\lambda(x) = \lambda_1(X)$, on a

$$\lambda_1(X) = [1 + o(1)]\,\mu X^r \int_{\operatorname{Log}\operatorname{Log} 2}^{X} \lambda_1(u)\, du = [1 + o(1)]\,\mu X^r \int_0^X \lambda_1(u)\, du,$$

en itérant :

$$\lambda_1(X) = [1 + o(1)]\,\mu X^r \int_0^X \mu u^r \left[\int_0^u \lambda_1(v)\, dv \right] du.$$

Soit

$$y(X) = \int_0^X \mu u^r \left[\int_0^u \lambda_1(v)\, dv \right] du,$$

la fonction y est dérivable comme intégrale d'une fonction continue.

$$y'(X) = \mu X^r \int_0^X \lambda_1(v)\, dv = [1 + o(1)]\,\lambda_1(X) = [1 + o(1)]\,\mu X^r y(X),$$

$$\frac{y'(X)}{y(X)} = [1 + o(1)]\,\mu X^r, \qquad \operatorname{Log} y(X) = [1 + o(1)]\,\mu \frac{X^{r+1}}{r+1},$$

$$\operatorname{Log} \lambda_1(X) = o(1) + \operatorname{Log}\mu + r \operatorname{Log} X + [1 + o(1)]\,\mu \frac{X^{r+1}}{r+1},$$

$$\operatorname{Log} \lambda_1(X) = [1 + o(1)]\,\mu \frac{X^{r+1}}{r+1},$$

$$\lambda_1(X) = \exp\left\{ [1 + o(1)]\,\mu \frac{X^{r+1}}{r+1} \right\}; \qquad \frac{L(X)}{x} = \lambda(x) = \exp\left\{ [1 + o(1)] \frac{\mu}{r+1} (\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{r+1} \right\};$$

d'après la première partie, $\nu(x) \sim \dfrac{L(x)}{\operatorname{Log} x}$, donc

$$\nu(x) = \frac{x}{\operatorname{Log} x} \exp\left\{ [1 + o(1)] \frac{\mu}{r+1} (\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{r+1} \right\},$$

d'où le résultat énoncé.

1.2.4. Remarque. — Pour $r=0$, on peut généraliser une formule de Wirsing :

$$\nu(x) \sim g \frac{e^{-c\mu}}{\Gamma(\mu)} \frac{x}{\operatorname{Log} x} \exp\left(\sum_{\substack{P \in E \\ NP \leq x}} \frac{1}{NP} \right),$$

c, constante d'Euler, $\operatorname{Log} g = \sum_{\substack{P,k \\ k>1}} \frac{1}{k\, NP^k}$.

Théorèmes sur la fonction Ω.

1.2.5. Théorème. — *Soit un* Δ_r*-semi-groupe* (E) *et* $E_1, E_2, \ldots, E_h$ *des ensembles d'éléments premiers, respectivement de degré* $r_1, r_2, \ldots, r_h$, *qui déterminent une partition de* E. *En désignant par* $\nu(x)$ *le nombre des éléments de* (E), *de norme au plus égale à* x, *et par* $\Omega_j(A)$ *le nombre des facteurs (distincts ou non) qui appartiennent à* E_j *dans la décomposition en facteurs premiers de l'élément* A *de* (E); *le nombre des* A *de* (E), *de norme au plus égale à* x, *qui vérifient :*

(I) $\Omega_1(A) \equiv a_1 \pmod{q_1}, \quad \Omega_2(A) \equiv a_2 \pmod{q_2}, \quad \ldots, \quad \Omega_h(A) \equiv a_h \pmod{q_h}$

(a_j, *entier quelconque*; q_j, *entier strictement positif*) *est équivalent, pour* x *infini, à*

$$\frac{\nu(x)}{q_1 q_2 \ldots q_h};$$

autrement dit, l'ensemble des A *de* (E) *qui vérifient* (I) *a pour densité* $\frac{1}{q_1 q_2 \ldots q_h}$ *par rapport à l'ensemble* (E).

Démonstration.

1° Soit $\nu_{E_j}(x) = \mu_j \frac{x}{\operatorname{Log} x} (\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{r_j} [1 + o(1)]$ le nombre des éléments de E_j de norme au plus égale à x et r le maximum des nombres $r_1, r_2, \ldots, r_h$; supposons que $r_1 = r_2 = \ldots = r_l = r$ et $r_j < r$ si $j > l$; le nombre des éléments de E, de norme au plus égale à x, est équivalent, pour x infini, à

$$(\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_l) \frac{x}{\operatorname{Log} x} (\operatorname{Log}\operatorname{Log} x^r);$$

rappelons que

$$\sum_{\substack{A \in (E) \\ NA \leq \frac{x}{\lambda}}} \frac{1}{NA} \sim \sum_{\substack{A \in (E) \\ NA \leq x}} \frac{1}{NA} \quad \text{pour tout } \lambda > 1 \quad \text{(p. 363)}. \tag{1}$$

2° Démontrons que

$$\sum_{\substack{A \in (E) \\ \Omega_j(A) \equiv a_j \pmod{q_j} \\ j=1,\ldots,h \\ NA \leq x}} \frac{1}{NA} \sim \frac{1}{q_1 q_2 \ldots q_h} \sum_{\substack{A \in (E) \\ NA \leq x}} \frac{1}{NA}.$$

En utilisant une méthode de H. Delange, posons

$$\gamma_j = e^{\frac{2\pi i}{q_j}} \qquad (j = 1, \ldots, h);$$

et considérons la fonction complètement multiplicative

$$f(\mathrm{A}) = \gamma_1^{k_1 \Omega_1(\mathrm{A})} \gamma_2^{k_2 \Omega_2(\mathrm{A})} \ldots \gamma_h^{k_h \Omega_h(\mathrm{A})},$$

$$k_j = 0, 1, \ldots, q_j - 1 \qquad (k_1, k_2, \ldots, k_h \text{ étant fixés}).$$

$$f(\mathrm{P}) = \gamma_j^{k_j} \quad \text{si} \quad \mathrm{P} \in \mathrm{E}_j$$

et

$$\sum_{\substack{\mathrm{P} \in \mathrm{E} \\ \mathrm{NP} \leqq x}} \frac{\mathcal{R}[f(\mathrm{P})] - 1}{\mathrm{NP}} = \sum_{1 \leqq j \leqq h} \sum_{\substack{\mathrm{P} \in \mathrm{E}_j \\ \mathrm{NP} \leqq x}} \frac{\mathcal{R}\gamma_j^{k_j} - 1}{\mathrm{NP}} = \sum_{1 \leqq j \leqq h} \sum_{\substack{\mathrm{P} \in \mathrm{E}_j \\ \mathrm{NP} \leqq x}} \left(\cos \frac{2k_j\pi}{q_j} - 1 \right) \frac{1}{\mathrm{NP}}$$

$$= \sum_{1 \leqq j \leqq h} \left(\cos \frac{2k_j\pi}{q_j} - 1 \right) \sum_{\substack{\mathrm{P} \in \mathrm{E}_j \\ \mathrm{NP} \leqq x}} \frac{1}{\mathrm{NP}};$$

mais

$$\cos \frac{2k_j\pi}{q_j} - 1 \begin{cases} = 0 & \text{si } k_j = 0, \\ < 0 & \text{si } k_j \neq 0; \end{cases}$$

donc :

si $x \to \infty$,

$$\sum_{\substack{\mathrm{P} \in \mathrm{E}_j \\ \mathrm{NP} \leqq x}} \frac{1}{\mathrm{NP}} \to +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{\mathrm{P} \in \mathrm{E} \\ \mathrm{NP} \leqq x}} \frac{\mathcal{R}[f(\mathrm{P})] - 1}{\mathrm{NP}} \to -\infty \quad \text{si l'un des } k_j \neq 0;$$

si tous les k_j sont nuls,

$$\sum_{\substack{\mathrm{P} \in \mathrm{E} \\ \mathrm{NP} \leqq x}} \frac{\mathcal{R}[f(\mathrm{P})] - 1}{\mathrm{NP}} = 0;$$

si l'un des $k_j \neq 0$,

$$\exp \sum_{\substack{\mathrm{P} \in \mathrm{E} \\ \mathrm{NP} \leqq x}} \frac{\mathcal{R}[f(\mathrm{P})] - 1}{\mathrm{NP}} = o(1);$$

en tenant compte de (1) on peut appliquer le théorème 1.1.10 :

$$\sum_{\substack{\mathrm{A} \in (\mathrm{E}) \\ \mathrm{NA} \leqq x}} \frac{f(\mathrm{A})}{\mathrm{NA}} = o\left(\sum_{\substack{\mathrm{A} \in (\mathrm{E}) \\ \mathrm{NA} \leqq x}} \frac{1}{\mathrm{NA}} \right) \quad \text{si l'un des } k_j \neq 0,$$

d'où

$$\sum_{\substack{\mathrm{A} \in (\mathrm{E}) \\ \mathrm{NA} \leqq x}} \frac{\gamma_1^{k_1[\Omega_1(\mathrm{A}) - a_1]} \ldots \gamma_h^{k_h[\Omega_h(\mathrm{A}) - a_h]}}{\mathrm{NA}} = o\left(\sum_{\substack{\mathrm{A} \in (\mathrm{E}) \\ \mathrm{NA} \leqq x}} \frac{1}{\mathrm{NA}} \right) \quad \text{si l'un des } k_j \neq 0.$$

Soit

$$\mathrm{X} = \sum_{\substack{k_1, k_2, \ldots, k_h \\ 0 \leqq k_j \leqq q_j - 1}} \sum_{\substack{\mathrm{A} \in (\mathrm{E}) \\ \mathrm{NA} \leqq x}} \frac{\gamma_1^{k_1[\Omega_1(\mathrm{A}) - a_1]} \ldots \gamma_h^{k_h[\Omega_h(\mathrm{A}) - a_h]}}{\mathrm{NA}} = \left(\sum_{\substack{\mathrm{A} \in (\mathrm{E}) \\ \mathrm{NA} \leqq x}} \frac{1}{\mathrm{NA}} \right) [1 + o(1)].$$

Par ailleurs :

$$X = \sum_{\substack{A \in (E) \\ NA \leq x}} \frac{1}{NA} \sum_{\substack{k_1, k_2, \ldots, k_h \\ 0 \leq k_j \leq q_j - 1}} \gamma_1^{k_1[\Omega_1(A) - a_1]} \cdots \gamma_h^{k_h[\Omega_h(A) - a_h]};$$

$$\sum_{\substack{k_1, k_2, \ldots, k_h \\ 0 \leq k_j \leq q_j - 1}} \gamma_1^{k_1[\Omega_1(A) - a_1]} \cdots \gamma_h^{k_h[\Omega_h(A) - a_h]} = \prod_{j=1}^{h} \sum_{0 \leq k_j \leq q_j - 1} \gamma_j^{k_j[\Omega_j(A) - a_j]}$$

$$= \begin{cases} q_1 q_2 \ldots q_h & \text{si} \quad \Omega_1(A) \equiv a_1 \pmod{q_1}, \quad \ldots, \quad \Omega_h(A) \equiv a_h \pmod{q_h} \\ = 0 & \text{dans l'hypothèse contraire,} \end{cases}$$

car

$$\sum_{0 \leq k_j \leq q_j - 1} \gamma_j^{k_j[\Omega_j(A) - a_j]} = \begin{cases} q_j & \text{si} \quad \gamma_j^{[\Omega_j(A) - a_j]} = 1, \\ 0 & \text{si} \quad \gamma_j^{[\Omega_j(A) - a_j]} \neq 1, \end{cases}$$

d'où

$$X = q_1 q_2 \ldots q_h \sum_{\substack{A \in (E) \\ \Omega_j(A) \equiv a_j \pmod{q_j} \\ j = 1, \ldots, h \\ NA \leq x}} \frac{1}{NA} \sim \sum_{\substack{A \in (E) \\ NA \leq x}} \frac{1}{NA}.$$

3° Soit F l'ensemble des A de (E), de norme au plus égale à x, qui vérifient les h relations

$$\Omega_j(A) \equiv a_j \pmod{q_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, h).$$

La propriété 1.2.2.4 des Δ_r-semi-groupes donne

$$\sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq x}} \operatorname{Log} NA = \sum_{\substack{P, B \\ P.B \in F \\ NP.NB \leq x}} \operatorname{Log} NP + x.o\left(\sum_{\substack{A \in (E) \\ NA \leq x}} \frac{1}{NA}\right).$$

En désignant par Y le premier terme du second membre :

$$Y = \sum_{i=1}^{h} \sum_{\substack{P_i, B \\ P_i \in E_i \\ \text{Condition C} \begin{cases} B \in (E) \\ \Omega_j(B) \equiv a_j \pmod{q_j} \text{ si } j \neq i, 1 \leq j \leq h \\ \Omega_i(B) \equiv a_i - 1 \pmod{q_i} \end{cases} \\ NP_i NB \leq x}} \operatorname{Log} NP_i,$$

d'après le 2° :

(2)
$$\sum_{\substack{B \\ \text{Condition C} \\ NB \leq x}} \frac{1}{NB} \sim \frac{1}{q_1 q_2 \ldots q_h} \sum_{\substack{A \in (E) \\ NA \leq x}} \frac{1}{NA}.$$

Soit

$$\theta_i(x) = \sum_{\substack{P_i \in E_i \\ NP_i \leq x}} \operatorname{Log} NP_i; \qquad Y = \sum_{i=1}^{h} \sum_{\substack{B \\ \text{Condition C} \\ NB \leq x}} \theta_i\left(\frac{x}{NB}\right),$$

avec $\theta_i(x) \sim \mu_i x (\operatorname{Log} \operatorname{Log} x)^{r_i}$.

La fonction $h(x) = \exp\left[(\operatorname{Log} x)^{1-\frac{1}{(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{\frac{1}{2}}}}\right]$, utilisée dans la démonstration du théorème 1.2.3, vérifie :

1° $h(x) \to \infty$;

2° $\dfrac{x}{h(x)} \to \infty$;

3° $\operatorname{Log}\operatorname{Log} h(x) \sim \operatorname{Log}\operatorname{Log} x \Rightarrow [\operatorname{Log}\operatorname{Log} h(x)]^{r_i} \sim (\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{r_i}$, quel que soit $r_i \geqq 0$;

4° $\displaystyle\sum_{\substack{A \in (E) \\ NA \leqq \frac{x}{h(x)}}} \frac{1}{NA} \sim \sum_{\substack{A \in (E) \\ NA \leqq x}} \frac{1}{NA}$; donc, d'après (2) :

$$\sum_{\substack{B \\ \text{Condition C} \\ NB \leqq \frac{h(x)}{x}}} \frac{1}{NB} \sim \sum_{\substack{B \\ \text{Condition C} \\ NB \leqq x}} \frac{1}{NB}.$$

Le lemme 1.1.13 donne

$$\sum_{\substack{B \\ \text{Condition C} \\ NB \leqq x}} 0_i\left(\frac{x}{NB}\right) \sim \mu_i x (\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{r_i} \sum_{\substack{B \\ \text{Condition C} \\ NB \leqq x}} \frac{1}{NB} \sim \frac{\mu_i}{q_1 q_2 \ldots q_h} x (\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{r_i} \sum_{\substack{A \in (E) \\ NA \leqq x}} \frac{1}{NA}.$$

$$Y \sim \frac{\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_l}{q_1 q_2 \ldots q_h} x (\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^r \sum_{\substack{A \in (E) \\ NA \leqq x}} \frac{1}{NA} \sim \sum_{\substack{A \in F \\ NA \leqq x}} \operatorname{Log} NA;$$

d'après le lemme 1.1.11, le nombre des éléments de F, de norme au plus égale à x, est équivalent à

$$\frac{\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_l}{q_1 q_2 \ldots q_h} \frac{x (\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^r}{\operatorname{Log} x} \sum_{\substack{A \in (E) \\ NA \leqq x}} \frac{1}{NA} \sim \frac{\nu(x)}{q_1 q_2 \ldots q_h}.$$

1.2.6. Théorème. — *Soit un Δ_r-semi-groupe* (E) *et* $E_1, E_2, \ldots, E_h$ *des ensembles d'éléments premiers, respectivement de degré* $r_1, r_2, \ldots, r_h$, *qui déterminent une partition de* E.

Soit, pour x infini, $[1 + o(1)]\mu_i \dfrac{x}{\operatorname{Log} x} (\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{r_i}$ *le nombre des éléments de* E_i, *de norme au plus égale à x,* $(i = 1, 2, \ldots, h)$; *et* $\Omega_i(A)$ *le nombre des facteurs (distincts ou non) qui appartiennent à* E_i *dans la décomposition en facteurs premiers de l'élément* A *de* (E).

Dans ces conditions, le nombre des A *de* (E), *de norme au plus égale à x, qui vérifient*

$$\Omega_1(A) = q_1, \qquad \Omega_2(A) = q_2, \quad \ldots, \qquad \Omega_h(A) = q_h$$

(*les q_i sont des entiers positifs ou nuls, non tous nuls*) *est équivalent, pour x infini, à*

$$\left(\frac{\mu_1}{r_1+1}\right)^{q_1}\cdots\left(\frac{\mu_h}{r_h+1}\right)^{q_h}\frac{(r_1+1)\,q_1+\ldots+(r_h+1)\,q_h}{q_1!\ldots q_h!}\,\frac{x}{\operatorname{Log} x}\,(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{(r_1+1)\,q_1+\ldots+(r_h+1)\,q_h-1}.$$

Démonstration.

1° Les notations sont les mêmes que dans le théorème 1.2.5. Soit F l'ensemble des A de (E) qui vérifient

$$\Omega_1(\mathrm{A})=q_1,\qquad\ldots,\qquad\Omega_h(\mathrm{A})=q_h;$$

démontrons que

$$\sum_{\substack{\mathrm{A}\in\mathrm{F}\\ \mathrm{NA}\leq x}}\frac{1}{\mathrm{NA}}\sim\left(\frac{\mu_1}{r_1+1}\right)^{q_1}\cdots\left(\frac{\mu_h}{r_h+1}\right)^{q_h}\frac{1}{q_1!\;q_2!\ldots q_h!}\,(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{(r_1+1)\,q_1+\ldots+(r_h+1)\,q_h}.$$

En effet, on a

$$\prod_{i=1}^{h}\sum_{\substack{\mathrm{A}_i\in(\mathrm{E}_i)\\ \Omega(\mathrm{A}_i)=q_i\\ \mathrm{NA}_i\leq x^{\frac{1}{h}}}}\frac{1}{\mathrm{NA}_i}\leq\sum_{\substack{\mathrm{A}\in\mathrm{F}\\ \mathrm{NA}\leq x}}\frac{1}{\mathrm{NA}}\leq\prod_{i=1}^{h}\sum_{\substack{\mathrm{A}_i\in(\mathrm{E}_i)\\ \Omega(\mathrm{A}_i)=q_i\\ \mathrm{NA}_i\leq x}}\frac{1}{\mathrm{NA}_i}.$$

D'après la propriété 1.2.2.5 des Δ_r-semi-groupes :

$$[1+o(1)]\prod_{i=1}^{h}\left(\frac{\mu_i}{r_i+1}\right)^{q_i}\frac{1}{q_i!}\left(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x^{\frac{1}{h}}\right)^{(r_i+1)\,q_i}$$
$$\leq\sum_{\substack{\mathrm{A}\in\mathrm{F}\\ \mathrm{NA}\leq x}}\frac{1}{\mathrm{NA}}\leq[1+o(1)]\prod_{i=1}^{h}\left(\frac{\mu_i}{r_i+1}\right)^{q_i}\frac{1}{q_i!}\,(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{(r_i+1)\,q_i}.$$

2° Le lemme 1.1.14 donne

$$\sum_{\substack{\mathrm{A}\in\mathrm{F}\\ \mathrm{NA}\leq x}}\operatorname{Log}\mathrm{NA}=\sum_{\substack{\mathrm{P},\,\mathrm{B}\\ \mathrm{P.B}\in\mathrm{F}\\ \mathrm{NP.NB}\leq x}}\operatorname{Log}\mathrm{NP}+x.\mathrm{O}\left(\sum_{\substack{\mathrm{B}\in\mathrm{G}\\ \mathrm{NB}\leq x}}\frac{1}{\mathrm{NB}}\right).$$

G est la réunion des ensembles disjoints $\mathrm{G}_{q'_1 q'_2\ldots q'_h}$ définis par

$$\mathrm{B}\in\mathrm{G}_{q'_1\ldots q'_h}\iff\left\{\begin{array}{l}\mathrm{B}\in(\mathrm{E})\\ \Omega_1(\mathrm{B})=q'_1\leq q_1\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \Omega_h(\mathrm{B})=q'_h\leq q_h\end{array}\right\}\text{ et }\qquad q'_1+q'_2+\ldots q'_h\leq q_1+q_2+\ldots+q_h-2,$$

d'où, d'après le 1° :

$$\sum_{\substack{\mathrm{B}\in\mathrm{G}_{q'_1\ldots q'_h}\\ \mathrm{NB}\leq x}}\frac{1}{\mathrm{NB}}\sim\mathrm{K}_{q'_1\ldots q'_h}\,(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{(r_1+1)\,q'_1+\ldots+(r_h+1)\,q'_h}$$
$$\leq\mathrm{K}_{q'_1\ldots q'_h}\,(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{r_1q_1+\ldots+r_hq_h+q_1+q_2+\ldots+q_h-2},$$

donc

$$\sum_{\substack{B \in G \\ NB \leq x}} \frac{1}{NB} = o\left[(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{(r_1+1)q_1+(r_2+1)q_2+\ldots+(r_h+1)q_h-1}\right].$$

3° Posons

$$\theta_i(x) = \sum_{\substack{P_i \in E_i \\ NP_i \leq x}} \operatorname{Log} NP_i \sim \mu_i x (\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{r_i}.$$

On a

$$\sum_{\substack{P,\, B \\ P.B \in F \\ NP.NB \leq x}} \operatorname{Log} NP = \sum_{i=1}^{h} \sum_{\substack{P_i,\, B \\ P_i \in E_i \\ \text{Condition C'} \begin{cases} B \in (E) \\ \Omega_i(B) = q_i - 1 \\ \Omega_j(B) = q_j \text{ si } j \neq i,\ 1 \leq j \leq h \end{cases} \\ NP_i NB \leq x}} \operatorname{Log} NP_i,$$

d'où

$$\sum_{\substack{P.B \in F \\ NP.NB \leq x}} \operatorname{Log} NP = \sum_{i=1}^{h} \sum_{\substack{B \\ \text{Condition C'} \\ NB \leq x}} \theta_i\left(\frac{x}{NB}\right).$$

Nous utilisons le lemme 1.1.13 en prenant $\varphi(x) = (\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{r_i}$, la fonction $h(x) = \sqrt{x}$ répond aux hypothèses :

1° $\sqrt{x} \to \infty$;

2° $\dfrac{x}{\sqrt{x}} \to \infty$;

3° $\left(\operatorname{Log}\operatorname{Log}\sqrt{x}\right)^{r_i} \sim (\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{r_i}$;

4° $\displaystyle\sum_{\substack{B \\ \text{Condition C'} \\ NB \leq \frac{x}{\sqrt{x}}}} \frac{1}{NB} \sim \sum_{\substack{B \\ \text{Condition C'} \\ NB \leq x}} \frac{1}{NB}$.

Le lemme 1.1.13 donne

$$\sum_{\substack{P.B \in F \\ NP.NB \leq x}} \operatorname{Log} NP = \sum_{i=1}^{h} [1 + o(1)]\, \mu_i x (\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{r_i} \sum_{\substack{B \\ \text{Condition C'} \\ NB \leq x}} \frac{1}{NB},$$

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{P.B \in F \\ NP.NB \leq x}} \operatorname{Log} NP = {} & [1 + o(1)] \\
& \times \sum_{i=1}^{h} \left[\mu_i x (\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{r_i} \left(\frac{\mu_1}{r_1+1}\right)^{q_1} \cdots \left(\frac{\mu_i}{r_i+1}\right)^{q_i-1} \cdots \left(\frac{\mu_h}{r_h+1}\right)^{q_h} \right. \\
& \left. \times \frac{1}{q_1! \ldots (q_i-1)! \ldots q_h!} (\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{(r_1+1)q_1+\ldots(r_i+1)(q_i-1)+\ldots+(r_h+1)q_h} \right] \\
= {} & [1 + o(1)] \left(\frac{\mu_1}{r_1+1}\right)^{q_1} \cdots \left(\frac{\mu_h}{r_h+1}\right)^{q_h} \frac{(r_1+1)q_1 + \ldots + (r_h+1)q_h}{q_1! \ldots q_h!} \\
& \times x (\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{(r_1+1)q_1+\ldots+(r_h+1)q_h-1},
\end{aligned}$$

et tenant compte du 2° :

$$\sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq x}} \operatorname{Log} NA \sim \sum_{\substack{P.B \in F \\ NP.NB \leq x}} \operatorname{Log} NP;$$

le lemme 1.1.11 donne le résultat énoncé.

CHAPITRE 3.

Δ_r-Semi-groupes particuliers.

Dans la définition 1.3.1 des Δ'_n-semi-groupes on considère un Δ_r-semi-groupe pour lequel $r = n$ est entier et l'on impose à la fonction de variable complexe $\psi(s) = \sum \frac{1}{(NP)^{s+1}}$ d'avoir un développement asymptotique d'une certaine forme. Ces conditions permettent, en utilisant un théorème taubérien d'Ingham dans le cas où $n \geqq 1$, et un théorème taubérien d'Hardy et Littlewood dans le cas particulier où $n = 0$, d'obtenir explicitement un équivalent du nombre $\nu(x)$ des éléments de (E) de norme au plus égale à x, lorsque x est infiniment grand.

Les hypothèses faites dans la définition 1.3.3 des D_n-semi-groupes portent uniquement sur $\psi(s)$, elles font intervenir des conditions d'holomorphie. Il découle d'un théorème de H. Delange qu'un D_n-semi-groupe est un Δ'_n-semi-groupe; d'ailleurs les D_n-semi-groupes généralisent les semi-groupes engendrés par des ensembles réguliers de nombres premiers qui ont été introduits et étudiés par H. Delange.

Les D_n-semi-groupes se sont introduits naturellement au cours de l'étude de la valeur moyenne d'une fonction arithmétique qui fait l'objet du chapitre 3 de la deuxième partie.

Δ'_n-Semi-groupes.

1.3.1. Définition. — n étant un entier positif ou nul, nous appelons Δ'_n-semi-groupe un Δ_n-semi-groupe tel que

$$\psi(s) = \sum_{P \in E} \frac{1}{(NP)^{s+1}} = \frac{\mu}{n+1}\left(\log\frac{1}{s}\right)^{n+1} + a_1\left(\log\frac{1}{s}\right)^{n} + \ldots + a_n \log\frac{1}{s} + a_{n+1} + o(1)$$

lorsque s tend vers zéro dans tout angle $|\theta| \leqq \theta_0 < \frac{\pi}{2}$, a_i réel quelconque $\left(\log\frac{1}{s}\text{ est pris avec sa détermination principale}\right)$.

(L'existence des Δ'_n-semi-groupes découle de celle des D_n-semi-groupes définis plus loin.)

Remarque. — On peut démontrer que pour tout Δ_n-semi-groupe, on a, lorsque s tend vers zéro dans tout angle $|\theta| \leqq \theta_0 < \frac{\pi}{2}$:

$$\psi(s) \sim \frac{\mu}{n+1}\left(\log\frac{1}{s}\right)^{n+1}.$$

1.3.2. Théorème. — *Si $\nu(x)$ désigne le nombre des éléments d'un Δ'_n-semi-groupe, de norme au plus égale à x, lorsque x tend vers l'infini, on a :*

1° *si* $n \geqq 1$,

$$\nu(x) \sim x \exp\{V(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x, \operatorname{Log}\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)\}$$

V *désignant un polynome à deux variables de degré* $n+1$, *le terme prépondérant de* V (Log Log x, Log Log Log x) *pour* x *infini est*

$$\frac{\mu}{n+1}(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{n+1};$$

2° *si* $n = 0$,

$$\nu(x) \sim \frac{g e^{a_1}}{\Gamma(\mu)} x (\operatorname{Log} x)^{\mu-1} = x e^{(\mu-1)\operatorname{Log}\operatorname{Log} x + \mathrm{Cte}}.$$

Démonstration de la première partie.

1.3.2.1. *Théorème taubérien d'Ingham* [2] :

I. Soit

$$(2) \qquad f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-us}\, dA(u), \qquad s = \sigma + it, \qquad A(0) = 0, \qquad \sigma > 0.$$

II. Soit deux fonctions $\varphi(s)$ et $\chi(s)$ et un domaine D du plan complexe tels que :

a. D contient l'intervalle $]0, h]$ de l'axe réel; $\varphi(s)$ et $\chi(s)$ sont holomorphes dans D; elles sont réelles et positives sur $]0, h]$;

b. $-\sigma\varphi'(0) \to +\infty$ en croissant quand $\sigma \to 0$ en décroissant;

c. $\dfrac{\dfrac{\delta(\sigma)}{\sigma}}{\dfrac{[\varphi''(\sigma)]^{\frac{1}{2}}}{-\varphi'(\sigma)}} \to +\infty$ quand $\sigma \to 0$, où $\delta(\sigma)$ est la distance du point σ au complémentaire de D $[0 < \sigma \leqq h,\ \delta(\sigma) \leqq \sigma]$;

d. $\varphi''(\sigma + z) = O[\varphi''(\sigma)]$; $\chi(\sigma + z) = O[\chi(\sigma)]$ uniformément pour $|z| < \delta(\sigma)$ quand $\sigma \to 0$.

III. Posons

$$f_0(s) = \chi(s)\, e^{\varphi(s)}; \qquad A_0(\omega) = \frac{\chi(\sigma)\, e^{\varphi(\sigma) + \omega\sigma}}{\{2\pi\sigma^2\varphi''(\sigma)\}^{\frac{1}{2}}},$$

---

[2] Ingham, *Ann. Math.*, t. 42, 1941.

où $\sigma = \sigma_\omega$ est la solution (qui existe et qui est unique lorsque ω est assez grand) de

$$-\varphi'(\sigma) = \omega.$$

THÉORÈME. — *Supposons que l'intégrale* (2) *converge pour* $\sigma > 0$ *et que :*

(i) $f(s) \sim f_0(s)$ *quand* $s \to 0$ *dans* D;

(ii) $f(s) = O[f_0(|s|)]$ *quand* $s \to 0$ *dans un angle fixé de la forme* $|t| \leqq \Delta.\sigma$, $0 < \Delta < \infty$;

(iii) $A(u)$ *est croissante pour* $u \geqq 0$.

Si ii *est vérifiée pour chaque* Δ *fixé, alors* $A(u) \sim A_0(u)$ *quand* $u \to \infty$.

1.3.2.2. *Vérification des conditions d'application.* — D'après le corollaire 1.1.7 et la définition 1.3.1, on a, lorsque $s \to 0$ dans tout angle $|\theta| \leqq \theta_0 < \frac{\pi}{2}$:

$$\sum_A \frac{1}{(NA)^{s+1}} \sim g \exp\left[\frac{\mu}{n+1}\left(\log\frac{1}{s}\right)^{n+1} + a_1\left(\log\frac{1}{s}\right)^n + \ldots + a_n \log\frac{1}{s} + a_{n+1}\right]$$

$$= \exp\sum_{k=0}^{n+1} a'_k \left(\log\frac{1}{s}\right)^{n+1-k} = f_0(s) \quad (a'_k \text{ constante réelle}) \qquad \text{et} \qquad a'_0 = \frac{\mu}{n+1}.$$

En utilisant le théorème d'Ingham, nous nous proposons d'abord d'évaluer

$$\sum_{NA \leqq x} \frac{1}{NA} = \lambda(x).$$

On a

$$\sum_A \frac{1}{(NA)^{s+1}} = \sum_A \frac{1}{(NA)^s}\,\frac{1}{NA} = \int_{1-}^{+\infty} \frac{1}{t^s}\, d\lambda(t),$$

posons $t = e^u$, $\lambda(e^u) = \beta(u)$ si $u > 0$, $\beta(0) = 0$;

$$\sum_A \frac{1}{(NA)^{s+1}} = \int_0^{+\infty} e^{-su}\, d\beta(u) \sim f_0(s).$$

Nous prendrons pour D l'intérieur de l'angle $|\theta| \leqq \frac{\pi}{4}$ limité par les bissectrices des axes, d'où $\delta(\sigma) = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$; nous poserons

$$\chi(s) = 1, \qquad \varphi(s) = \sum_{k=0}^{n+1} a'_k \left(\log\frac{1}{s}\right)^{n+1-k},$$

d'où

$$\varphi'(s) = -\frac{1}{s}\sum_{k=0}^{n+1}(n+1-k)\,a'_k\left(\log\frac{1}{s}\right)^{n-k} \sim -\frac{\mu}{s}\left(\log\frac{1}{s}\right)^n,$$

$$\varphi''(s) = \frac{1}{s^2}\sum_{k=0}^{n+1}(n+1-k)\,a'_k\left(\log\frac{1}{s}\right)^{n-k} + \frac{1}{s^2}\sum_{k=0}^{n+1}(n-k)\,(n+1-k)\,a'_k\left(\log\frac{1}{s}\right)^{n-k-1},$$

$\varphi''(s) \sim \frac{\mu}{s^2}\left(\log\frac{1}{s}\right)^n$; lorsque $s \to 0$ avec $\mathcal{R}s > 0$.

Vérifions maintenant les conditions d'application du théorème d'Ingham :

a. Évident.

b. $-\sigma\varphi'(\sigma) \sim \mu\left(\operatorname{Log}\frac{1}{\sigma}\right)^n \to \infty$ quand $\sigma \to 0$ car $n \geqq 1$; $-\sigma\varphi'(\sigma)$ est un polynome en $\log\frac{1}{\sigma}$ dont le terme de plus fort degré est $\mu\left(\operatorname{Log}\frac{1}{\sigma}\right)^n$, donc $-\sigma\varphi'(\sigma)$ croît lorsque σ décroît et tend vers zéro.

c. $$\frac{\dfrac{\delta(\sigma)}{\sigma}}{\dfrac{(\varphi''(\sigma))^{\frac{1}{2}}}{-\varphi'(\sigma)}} \sim \frac{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}{\dfrac{1}{\sqrt{\mu}\left(\operatorname{Log}\frac{1}{\sigma}\right)^{\frac{n}{2}}}} \to \infty.$$

d. $\big|\sigma - |z|\big| \leqq |\sigma + z| \leqq \sigma + |z|$; si $|z| < \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$, on a

$$\sigma\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \leqq |\sigma + z| \leqq \sigma\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right); \qquad \text{si } \sigma \to 0, \qquad \sigma + z \to 0.$$

Puisque $\varphi''(s) \sim \frac{\mu}{s^2}\left(\log\frac{1}{s}\right)^n$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$|s| < \varepsilon \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}\left|\frac{\mu}{s^2}\left(\log\frac{1}{s}\right)^n\right| < |\varphi''(s)| < 2\left|\frac{\mu}{s^2}\left(\log\frac{1}{s}\right)^n\right|.$$

Prenons $\sigma < \dfrac{\varepsilon}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}$, nous avons

$$|\varphi''(\sigma + z)| < 2\,\frac{\mu}{|\sigma + z|^2}\left|\log\frac{1}{\sigma + z}\right|^n.$$

$$|\varphi''(\sigma)| > \frac{1}{2}\,\frac{\mu}{\sigma^2}\left|\operatorname{Log}\frac{1}{\sigma}\right|^n,$$

d'où

$$\left|\frac{\varphi''(\sigma + z)}{\varphi''(\sigma)}\right| < 4\,\frac{\sigma^2}{|\sigma + z|^2}\left|\frac{\log\dfrac{1}{\sigma + z}}{\operatorname{Log}\dfrac{1}{\sigma}}\right|^n,$$

mais

$$\left|\log\frac{1}{\sigma+z}\right|^2=\left\{\operatorname{Log}\left|\frac{1}{\sigma+z}\right|\right\}^2+\left|\operatorname{Arg}\frac{1}{\sigma+z}\right|^2$$

$$\leqq\left[\operatorname{Log}\frac{1}{\sigma\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\right]^2+\frac{\pi^2}{4}\sim\left(\operatorname{Log}\frac{1}{\sigma}\right)^2<4\left(\operatorname{Log}\frac{1}{\sigma}\right)^2\qquad\text{si}\quad\sigma<\varepsilon_1,$$

de sorte que

$$\left|\log\frac{1}{\sigma+z}\right|<2\left(\operatorname{Log}\frac{1}{\sigma}\right)\qquad\text{si}\quad\sigma<\varepsilon_1.$$

Donc si $\sigma<\min\left(\frac{\varepsilon}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}},\varepsilon_1\right)$, on a

$$\left|\frac{\varphi''(\sigma+z)}{\varphi''(\sigma)}\right|<\frac{2^{n+2}}{\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}.$$

Les conditions (i) et (iii) sont vérifiées, reste à examiner (ii); comme $f(s)\sim f_0(s)$ lorsque $s\to 0$ dans tout angle $|\theta|\leqq\theta_0<\frac{\pi}{2}$, il suffit de montrer que :

$$\left|\frac{f_0(s)}{f_0(|s|)}\right|\text{ est bornée lorsque } s\to 0 \text{ dans dans tout angle } |\theta|\leqq\theta_0<\frac{\pi}{2}.$$

On a

$$\left|\frac{f_0(s)}{f_0(|s|)}\right|=\left|\exp\sum_{k=0}^{n+1}a'_k\left[\left(\log\frac{1}{s}\right)^{n+1-k}-\left(\operatorname{Log}\frac{1}{|s|}\right)^{n+1-k}\right]\right|$$

$$=\exp\sum_{k=0}^{n+1}a'_k\left[\mathcal{R}\left(\log\frac{1}{s}\right)^{n+1-k}-\left(\operatorname{Log}\frac{1}{|s|}\right)^{n+1-k}\right],$$

mais

$$\log\frac{1}{s}=\operatorname{Log}\frac{1}{|s|}+i\operatorname{Arg}\frac{1}{s},$$

d'où

$$\mathcal{R}\left(\log\frac{1}{s}\right)^j=\left(\operatorname{Log}\frac{1}{|s|}\right)^j-C_j^2\left(\operatorname{Arg}\frac{1}{s}\right)^2\left(\operatorname{Log}\frac{1}{|s|}\right)^{j-2}[1+o(1)]$$

(on prendra $C_0^2=C_1^2=0$),

$$\left|\frac{f_0(s)}{f_0(|s|)}\right|=\exp\left\{\sum_{k=0}^{n+1}-a'_kC_{n+1-k}^2\left(\operatorname{Arg}\frac{1}{s}\right)^2\left(\operatorname{Log}\frac{1}{|s|}\right)^{n-1-k}[1+o(1)]\right\}$$

$$=\exp\left\{-\left(\operatorname{Arg}\frac{1}{s}\right)^2\sum_{k=0}^{n+1}a'_kC_{n+1-k}^2\left(\operatorname{Log}\frac{1}{|s|}\right)^{n-1-k}[1+o(1)]\right\}.$$

On a donc

$$\left|\frac{f_0(s)}{f_0(|s|)}\right| = \exp\left\{-\left(\operatorname{Arg}\frac{1}{s}\right)^2 \frac{\mu}{n+1} C_{n+1}^2 \left(\operatorname{Log}\frac{1}{|s|}\right)^{n-1} [1+o(1)]\right\} \leq 1 \qquad \text{si} \quad |s| < |s_0|.$$

1.3.2.3. *Évaluation asymptotique de la racine unique de l'équation d'Ingham (qui tend vers zéro) lorsque* ω *tend vers l'infini.* — Cette équation s'écrit

$$-\varphi'(\sigma) = \frac{1}{\sigma}\sum_{k=0}^{n+1}(n+1-k)\, a'_k \left(\operatorname{Log}\frac{1}{\sigma}\right)^{n-k} = \omega.$$

Posons $\operatorname{Log}\frac{1}{\sigma} = x$; en prenant les logarithmes des deux membres et en changeant les notations :

$$x + \operatorname{Log}(b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n) = \operatorname{Log}\omega = v, \qquad b_0 = (n+1)\, a'_0 = \mu.$$

Soit N un entier ≥ 2 :

$$x + \operatorname{Log} b_0 x^n \left(1 + \frac{b_1}{b_0 x} + \ldots + \frac{b_n}{b_0 x^n}\right) = v;$$

on a, pour x infini :

$$(1) \qquad x + n\operatorname{Log}x + \operatorname{Log}\mu + \left(\sum_{j=1}^{N}\frac{C_j}{x^j}\right) + \frac{o(1)}{x^N} = v,$$

d'où $x \sim v$, posons

$$x = v + v_1, \qquad v_1 = o(v);$$

en portant dans (1) :

$$(2) \qquad n\operatorname{Log}(v+v_1) + \operatorname{Log}\mu + \left[\sum_{j=1}^{N}\frac{C_j}{(v+v_1)^j}\right] + \frac{o(1)}{v^N} = -v_1,$$

d'où $v_1 \sim -n\operatorname{Log}v$, donc $\frac{v_1^m}{v} \to 0$ quel que soit $m \geq 0$,

$$\operatorname{Log}(v+v_1) = \operatorname{Log}v + \operatorname{Log}\left(1+\frac{v_1}{v}\right) = \operatorname{Log}v + \left(\sum_{j=1}^{N+1} C'_j \frac{v_1^j}{v^j}\right) + \frac{o(1)}{v^N}\frac{v_1^{N+1}}{v},$$

$$\operatorname{Log}(v+v_1) = \operatorname{Log}v + \left(\sum_{j=1}^{N} C'_j \frac{v_1^j}{v^j}\right) + \frac{o(1)}{v^N};$$

par ailleurs :

$$\sum_{j=1}^{N}\frac{C_j}{(v+v_1)^j} = \sum_{j=1}^{N}\frac{C_j}{v^j}\left(1+\frac{v_1}{v}\right)^{-j} = \sum_{j=1}^{N}\frac{C_j}{v^j}\left[\left(\sum_{k=0}^{N-1} C''_{j,k}\frac{v_1^k}{v^k}\right) + \frac{o(1)}{v^{N-1}}\right]$$

$$= \left(\sum_{\substack{j=1,\ldots,N\\ k=0,\ldots,N-1}} \frac{C_j C''_{j,k} v_1^k}{v^{j+k}}\right) + \frac{o(1)}{v^N} = \left(\sum_{l=1}^{N}\frac{\sum_{j=1}^{l} C_j C''_{j,l-j} v_1^{l-j}}{v^l}\right) + \frac{o(1)}{v^N};$$

en portant dans (2) :

$$n \operatorname{Log} v + \operatorname{Log} \mu + \left(\sum_{l=1}^{N} \frac{n C'_l v_1^l + \sum_{j=1}^{l} C_j C''_{j,l-j} v_1^{l-j}}{v^l} \right) + \frac{o(1)}{v^N} = - v_1,$$

soit

$$(3) \qquad n \operatorname{Log} v + \operatorname{Log} \mu + \left[\sum_{l=1}^{N} \frac{Q_1^{(l)}(v_1)}{v^l} \right] + \frac{o(1)}{v_N} = - v_1,$$

$Q_1^{(l)}$ étant un polynome de degré $\leqq l$ ou identiquement nul.

De (3) on déduit

$$v_1 = - n \operatorname{Log} v - \operatorname{Log} \mu - v_2 \qquad \text{avec} \quad v_2 = o(1);$$

en portant dans (3) :

$$\left[\sum_{l=1}^{N} \frac{Q_1^{(l)}(- n \operatorname{Log} v - \operatorname{Log} \mu + v_2)}{v^l} \right] + \frac{o(1)}{v_N} = - v_2.$$

En développant suivant les puissances de v_2 :

$$(4) \qquad \left[\sum_{l=1}^{N} \frac{\sum_{j=0}^{l} Q_{2,l}^{(l-j)}(\operatorname{Log} v)\, v_2^j}{v^l} \right] + \frac{o(1)}{v_N} = - v_2,$$

$Q_{2,l}^{(l-j)}$ étant un polynome de degré $\leqq l - j$ ou identuqment nul.

De (4) on déduit

$$v_2 = \frac{- Q_{2,1}^{(1)}(\operatorname{Log} v) + v_3}{v} = \frac{- Q_{2,1}^{(1)}(\operatorname{Log} v)}{v} + \frac{v_3}{v}, \qquad \text{avec} \quad v_3 = o(1).$$

En portant dans (4) :

$$\left\{ \sum_{l=1}^{N} \sum_{j=0}^{l} \frac{Q_{2,l}^{(l-j)}(\operatorname{Log} v) \left[- Q_{2,1}^{(1)}(\operatorname{Log} v) + v_3 \right]^j}{v^{l+j}} \right\} + \frac{o(1)}{v^N} = \frac{Q_{2,1}^{(1)}(\operatorname{Log} v)}{v} - \frac{v_3}{v}.$$

En ordonnant suivant les puissances de $\frac{1}{v}$;

$$l + j = k, \qquad j = k - l \qquad \text{pour } k \text{ et } l \text{ fixés};$$

$$0 \leqq j \leqq l, \qquad 0 \leqq k - l \leqq l, \qquad \frac{k}{2} \leqq l \leqq k \qquad \text{pour } k \text{ fixé};$$

$$l \leqq k \leqq 2l, \qquad 1 \leqq k \leqq 2N;$$

donc

$$\left\{\sum_{k=1}^{N}\frac{\displaystyle\sum_{\frac{k}{2}\leq l\leq k} Q_{2,l}^{(2l-k)}(\operatorname{Log}\varphi)\left[-Q_{2,1}^{(1)}(\operatorname{Log}\varphi)+\varphi_3\right]^{k-l}}{\varphi^k}\right\}+\frac{o(1)}{\varphi^N}=\frac{Q_{2,1}^{(1)}(\operatorname{Log}\varphi)}{\varphi}-\frac{\varphi_3}{\varphi},$$

d'où

$$\left\{\sum_{k=2}^{N}\frac{\displaystyle\sum_{\frac{k}{2}\leq l\leq k} Q_{2,l}^{(2l-k)}(\operatorname{Log}\varphi)\left[-Q_{2,1}^{(1)}(\operatorname{Log}\varphi)+\varphi_3\right]^{k-l}}{\varphi^k}\right\}+\frac{o(1)}{\varphi^N}=-\frac{\varphi_3}{\varphi}.$$

En développant suivant les puissances de φ_3, le coefficient de φ_3^j pour k et l fixés est un polynome de degré d avec $d \leq 2l-k+k-l-j=l-j$, lorsque l varie, j étant fixé, on a $0\leq j\leq k-l$, $l\leq k-j$, donc $d\leq k-2j$; d'où

$$\left\{\sum_{k=2}^{N}\frac{\displaystyle\sum_{0\leq j\leq \frac{k}{2}} Q_{3,k}^{(k-2j)}(\operatorname{Log}\varphi)\,\varphi_3^j}{\varphi^k}\right\}+\frac{o(1)}{\varphi^N}=-\frac{\varphi_3}{\varphi}, \tag{5}$$

$Q_{3,k}^{(k-2j)}$ désignant un polynome de degré $\leq k-2j$ ou identiquement nul.

Démontrons par récurrence sur $m\,(m\geq 3)$ qu'il existe une suite φ_m et un ensemble de polynomes $Q_{m,l}^{(i)}\left[l\geq m-1,\ i=l-(m-1)j,\ 0\leq j\leq \frac{l}{m-1}\right]$ avec degré de $Q_{m,l}^{(i)}\leq i$ ou $Q_{m,l}^{(i)}$ identiquement nul, tels que, quel que soit $N\geq m-1$, on ait

$$\varphi_{m-1}=\frac{-Q_{m-1,m-2}^{(m-2)}(\operatorname{Log}\varphi)+\varphi_m}{\varphi}, \tag{6}$$

$$\varphi_m=o(1), \tag{7}$$

$$\left\{\sum_{l=m-1}^{N}\frac{\displaystyle\sum_{0\leq j\leq \frac{l}{m-1}} Q_{m,l}^{l-(m-1)j}(\operatorname{Log}\varphi)\,\varphi_m^j}{\varphi^l}\right\}+\frac{o(1)}{\varphi^N}=-\frac{\varphi_m}{\varphi^{m-2}}. \tag{8}$$

Nous supposons donc le résultat établi pour tous les entiers $\leq m$ avec $m\leq N$.

(8) entraîne

$$\begin{aligned}\frac{\varphi_m}{\varphi^{m-2}}&=\frac{-Q_{m,m-1}^{(m-1)}(\operatorname{Log}\varphi)-Q_{m,m-1}^{(0)}(\operatorname{Log}\varphi)\,\varphi_m}{\varphi^{m-1}}+\frac{o(1)}{\varphi^{m-1}}\\&=\frac{-Q_{m,m-1}^{(m-1)}(\operatorname{Log}\varphi)+\varphi_{m+1}}{\varphi^{m-1}}\qquad\text{avec}\quad \varphi_{m+1}=o(1),\end{aligned}$$

soit

$$v_m = \frac{-Q_{m,m-1}^{(m-1)}(\operatorname{Log} v) + v_{m+1}}{v},$$

$$v_{m+1} = o(1)$$

c'est-à-dire (6) et (7) dans lesquelles m est remplacé par $m+1$.

Portons dans (8) :

$$\left\{\sum_{l=m-1}^{N} \sum_{0 \leq j \leq \frac{l}{m-1}} \frac{Q_{m,l}^{[l-(m-1)j]}(\operatorname{Log} v)\left[-Q_{m,m-1}^{(m-1)}(\operatorname{Log} v) + v_{m+1}\right]^j}{v^{l+j}}\right\} + \frac{o(1)}{v^N}$$
$$= \frac{Q_{m,m-1}^{(m-1)}(\operatorname{Log} v) - v_{m+1}}{v^{m-1}};$$

ordonnons suivant les puissances de $\frac{1}{v}$; posons

$$l+j=k, \qquad j=k-l, \qquad 0 \leq j \leq \frac{l}{m-1} \qquad 0 \leq k-l \leq \frac{l}{m-1},$$
$$\frac{m-1}{m}k \leq l \leq k, \qquad m-1 \leq k \leq \frac{m}{m-1}N\ (>N);$$

d'où

$$\left\{\sum_{k=m-1}^{N} \frac{\displaystyle\sum_{\frac{m-1}{m}k \leq l \leq k} Q_{m,l}^{[l-(m-1)(k-l)]}(\operatorname{Log} v)\left[-Q_{m,m-1}^{(m-1)}(\operatorname{Log} v) + v_{m+1}\right]^{k-l}}{v^k}\right\} + \frac{o(1)}{v^N}$$
$$= \frac{Q_{m,m-1}^{(m-1)}(\operatorname{Log} v)}{v^{m-1}} - \frac{v_{m+1}}{v^{m-1}},$$

qui entraîne

$$\left\{\sum_{k=m}^{N} \frac{\displaystyle\sum_{\frac{m-1}{m}k \leq l \leq k} Q_{m,l}^{[l-(m-1)(k-l)]}(\operatorname{Log} v)\left[-Q_{m,m-1}^{(m-1)}(\operatorname{Log} v) + v_{m+1}\right]^{k-l}}{v^k}\right\} + \frac{o(1)}{v_N} = -\frac{v_{m+1}}{v^{m-1}}.$$

Nous développons le $\sum\limits_l$ suivant les puissances de v_{m+1}, le coefficient de v_{m+1}^j pour k et l fixés est un polynome de degré d, avec

$$d \leq l-(m-1)(k-l)+(m-1)(k-l-j) = l-(m-l)_j = l+j-mj;$$
$$0 \leq j \leq k-l; \qquad l+j \leq k; \qquad d \leq k-mj;$$

d'où

$$\left\{\sum_{k=m}^{N} \frac{\displaystyle\sum_{0 \leq j \leq \frac{k}{m}} Q_{m+1,k}^{(k-mj)}(\operatorname{Log} v)\, v_{m+1}^j}{v^k}\right\} + \frac{o(1)}{v^N} = -\frac{v_{m+1}}{v^{m-1}},$$

qui est la relation (8) dans laquelle m est remplacé par $m+1$.

Quel que soit l'entier m, on a donc

$$x = v - n \operatorname{Log} v - \operatorname{Log} \mu - \frac{Q_{2,1}^{(1)}(\operatorname{Log} v)}{v} - \frac{Q_{3,2}^{(2)}(\operatorname{Log} v)}{v^2} - \ldots - \frac{Q_{m+1,m}^{(m)}(\operatorname{Log} v) + o(1)}{v^m}.$$

En simplifiant les notations, on a :

Quel que soit l'entier m, il existe un développement asymptotique de x de la forme

$$x = v - n \operatorname{Log} v - \operatorname{Log} \mu + \frac{R_1(\operatorname{Log} v)}{v} + \frac{R_2(\operatorname{Log} v)}{v^2} + \ldots + \frac{R_m(\operatorname{Log} v) + o(1)}{v^m},$$

R_i étant un polynome de degré au plus égal à i ou identiquement nul.

1.3.2.4. *Démonstration du* 1°. — Le théorème d'Ingham donne

$$\beta(u) \sim \frac{\exp\left\{\left[\sum_{k=0}^{n+1} a'_k \left(\operatorname{Log} \frac{1}{\sigma}\right)^{n+1-k}\right] + u\sigma\right\}}{[2\pi\sigma^2 \varphi''(\sigma)]^{\frac{1}{2}}},$$

avec

$$\log \frac{1}{\sigma} = x, \qquad u = \omega, \qquad v = \operatorname{Log} u, \qquad \sigma u = \sigma\omega = \sum_{k=0}^{n+1} (n+1-k)\, a'_k \left(\operatorname{Log} \frac{1}{\sigma}\right)^{n-k},$$

donc

$\left[\sum_{k=0}^{n+1} a'_k \left(\operatorname{Log} \frac{1}{\sigma}\right)^{n+1-k}\right] + u\sigma$ est un polynome en x de degré $n+1$ dont le terme de plus fort degré est $\frac{\mu}{n+1}\, x^{n+1}$.

Quel que soit m, on a

$$x = \left[v + (-n \operatorname{Log} v - \operatorname{Log} \mu) + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{R_j(\operatorname{Log} v)}{v^j}\right] + \frac{o(1)}{v^{m-1}},$$

d'où

$$x^m = \left[v + (-n \operatorname{Log} v - \operatorname{Log} \mu) + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{R_j(\operatorname{Log} v)}{v^j}\right]^m + o(1);$$

en élevant le crochet à la puissance m, chaque terme est de la forme

$$a_{\alpha_1, \alpha_2 ; \beta_1, \ldots, \beta_{m-1}} \frac{v^{\alpha_1}(-n \operatorname{Log} v - \operatorname{Log} \mu)^{\alpha_2} [R_1(\operatorname{Log} v)]^{\beta_1} \ldots [R_{m-1}(\operatorname{Log} v)]^{\beta_{m-1}}}{v^{\beta_1 + 2\beta_2 + \ldots + (m-1)\beta_{m-1}}},$$

avec $\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \ldots + \beta_{m+1} = m$; si $\alpha_1 < \beta_1 + 2\beta_2 + \ldots + (m-1)\beta_{m-1}$, ce terme est égal à $o(1)$; si $\alpha_1 \geqq \beta_1 + 2\beta_2 + \ldots + (m-1)\beta_{m-1}$, ce terme est un polynome par rapport aux deux variables v et $\operatorname{Log} v$ de degré $\leqq \alpha_1 + \alpha_2 \leqq m$; en définitive $x^m = S_m(v, \operatorname{Log} v) + o(1)$; S_m étant un polynome à deux variables de degré m, le terme prépondérant de $S_m(v, \mathrm{Log}\, v)$, lorsque v est infini est v^m.

Donc

$$\left[\sum_{k=0}^{n+1} a'_k\left(\mathrm{Log}\,\frac{1}{\sigma}\right)^{n+1-k}\right] + u\sigma = S(v, \mathrm{Log}\, v) + o(1),$$

S polynome à deux variables de degré $n+1$, le terme prépondérant de $S(v, \mathrm{Log}\, v)$ est $\frac{\mu}{n+1} v^{n+1}$; donc

$$\beta(u) \sim \frac{\exp[S(v, \mathrm{Log}\, v]}{[2\pi\sigma^2\varphi''(\sigma)^{\frac{1}{2}}},$$

mais

$$\sigma^2\varphi''(\sigma) \sim \mu\left(\mathrm{Log}\,\frac{1}{\sigma}\right)^n \sim \mu v^n,$$

$$[2\pi\sigma^2\varphi''(\sigma)]^{\frac{1}{2}} \sim \sqrt{2\pi\mu}\, v^{\frac{n}{2}} = \exp\left[\frac{n}{2}\mathrm{Log}\, v + \mathrm{Log}\sqrt{2\pi\mu}\right],$$

donc

$$\beta(u) \sim \exp[W(v, \mathrm{Log}\, v)] = \exp[W(\mathrm{Log}\, u, \mathrm{Log}\,\mathrm{Log}\, u)]$$

et

$$\lambda(x) = \sum_{\mathrm{NA} \leq x} \frac{1}{\mathrm{NA}} \sim \exp[W(\mathrm{Log}\,\mathrm{Log}\, x, \mathrm{Log}\,\mathrm{Log}\,\mathrm{Log}\, x)],$$

avec W polynome à deux variables de degré $n+1$, terme prépondérant de W_1 ($\mathrm{Log}\,\mathrm{Log}\, x$, $\mathrm{Log}\,\mathrm{Log}\,\mathrm{Log}\, x$) pour x infini : $\frac{\mu}{n+1}(\mathrm{Log}\,\mathrm{Log}\, x)^{n+1}$.

Le théorème 1.2.3 donne

$$\begin{aligned}\nu(x) &\sim \mu\frac{x}{\mathrm{Log}\, x}(\mathrm{Log}\,\mathrm{Log}\, x)^n \exp[W(\mathrm{Log}\,\mathrm{Log}\, x, \mathrm{Log}\,\mathrm{Log}\,\mathrm{Log}\, x)] \\ &= x\exp[V(\mathrm{Log}\,\mathrm{Log}\, x, \mathrm{Log}\,\mathrm{Log}\,\mathrm{Log}\, x)].\end{aligned}$$

Démonstration de la deuxième partie.

1.3.2.5. *Théorème taubérien d'Hardy et Littlewood* (³). — Soit $L(x)$ une fonction positive continue pour $x > 0$ qui vérifie pour chaque $\lambda > 1$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{L(\lambda x)}{L(x)} = 1,$$

si

$$f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}F(t)\,dt \text{ converge pour } s \text{ réel} > 0 \text{ avec } F(t) > 0$$

(³) *Notes on the theory of series XI. On Tauberien theorems* [*Proc. London math. Soc.*, (2), 30, 1929, p. 23].

et si

$$f(s) \sim \frac{1}{s^{\tau}} \mathrm{L}\left(\frac{1}{s}\right) \text{ lorsque } s \to 0 \text{ par valeurs positives avec } \tau > 0,$$

on a, lorsque $x \to \infty$:

$$\int_0^x \mathrm{F}(t)\, dt \sim \frac{x^{\tau}}{\Gamma(1+\tau)} \mathrm{L}(x).$$

1.3.2.6. *Démonstration du 2°.* — Par hypothèse

$$\sum_{\mathrm{P} \in \mathrm{E}} \frac{1}{(\mathrm{NP})^{s+1}} = \mu \log \frac{1}{s} + a_1 + o(1),$$

donc

$$\sum_{\mathrm{A}} \frac{1}{(\mathrm{NA})^{s+1}} \sim g \exp \sum_{\mathrm{P}} \frac{1}{(\mathrm{NP})^{s+1}} \sim g\, e^{a_1} \left(\frac{1}{s}\right)^{\mu} \qquad \text{si} \quad s \to 0$$

par valeurs positives.

Posons $\nu(e^u) = \alpha(u)$, on a

$$\sum_{\mathrm{A}} \frac{1}{(\mathrm{NA})^{s+1}} = \int_{0_-}^{+\infty} e^{-(s+1)u}\, d\alpha(u) = (s+1) \int_0^{+\infty} e^{-su} \frac{\alpha(u)}{e^u}\, du$$

$$\sim \int_0^{+\infty} e^{-su} \frac{\alpha(u)}{e^u}\, du \sim g\, e^{a_1} \left(\frac{1}{s}\right)^{\mu};$$

nous prenons $\tau = \mu$, $\mathrm{L}(x) =$ fonction Cte $= ge^{a_1}$, $\mathrm{F}(u) = \frac{\alpha(u)}{e^u}$, le théorème donne

$$\int_0^x \frac{\alpha(u)}{e^u}\, du \sim \frac{x^{\mu}}{\Gamma(1+\mu)} g\, e_{a_1},$$

mais

$$\sum_{\mathrm{NA} \leq x} \frac{1}{\mathrm{NA}} = \int_{1_-}^{x} \frac{1}{t}\, d\nu(t) = \int_{0_-}^{\mathrm{Log}\, x} \frac{d\alpha(u)}{e^u}$$

$$= \frac{\alpha(\mathrm{Log}\, x)}{x} + \int_0^{\mathrm{Log}\, x} \frac{\alpha(u)}{e^u}\, du = \frac{\nu(x)}{x} + \int_0^{\mathrm{Log}\, x} \frac{\alpha(u)}{e^u}\, du$$

et

$$\nu(x) \sim \mu \frac{x}{\mathrm{Log}\, x} \sum_{\mathrm{NA} \leq x} \frac{1}{\mathrm{NA}}, \qquad \frac{\nu(x)}{x} = o\left(\sum_{\mathrm{NA} \leq x} \frac{1}{\mathrm{NA}}\right),$$

donc

$$\{1 - o(1)\} \sum_{\mathrm{NA} \leq x} \frac{1}{\mathrm{NA}} = \int_0^{\mathrm{Log}\, x} \frac{\alpha(u)}{e^u}\, du = \{1 + o(1)\} \frac{g\, e_{a_1}}{\Gamma(1+\mu)} (\mathrm{Log}\, x)^{\mu},$$

$$\sum_{\mathrm{NA} \leq x} \frac{1}{\mathrm{NA}} \sim \frac{g\, e^{a_1}}{\Gamma(1+\mu)} (\mathrm{Log}\, x)^{\mu};$$

de là on déduit

$$\nu(x) \sim \mu \frac{g\, e^{a_1}}{\Gamma(1+\mu)} \frac{x}{(\mathrm{Log}\, x)} (\mathrm{Log}\, x)^{\mu} = \frac{g\, e^{a_1}}{\Gamma(\mu)} x (\mathrm{Log}\, x)^{\mu-1}.$$

D_n-semi-groupes.

1.3.3. Définition. — n étant un entier supérieur ou égal à zéro, nous appelons D_n-semi-groupe un semi-groupe normé (E) tel que, pour $\mathcal{R}s > 0$:

$$\text{(H)}\quad \psi(s) = \sum_{P\in E} \frac{1}{(NP)^{s+1}} = a_0(s)\left(\log\frac{1}{s}\right)^{n+1} + a_1(s)\left(\log\frac{1}{s}\right)^{n} + \ldots + a_n(s)\log\frac{1}{s} + a_{n+1}(s),$$

avec les fonctions $a_i(s)$ holomorphes pour $\mathcal{R}s \geqq 0$, réelles pour s réel, et $a_0(0) > 0$.

(L'existence est démontrée dans le chapitre 3 de la 2e partie.)

1.3.4. Théorème taubérien. — *Soit* F *un sous-ensemble d'un semi-groupe normé et* $\nu(x)$ *le nombre des éléments de* F *de norme au plus égale à* x. *Si l'on a pour* $\mathcal{R}s > 1$:

$$\sum_{A\in F} \frac{1}{(NA)^s} = \sum_{j=0}^{q} a_j(s)\left(\log\frac{1}{s-1}\right)^{q-j} \quad (q \geqq 1).$$

avec les fonctions $a_j(s)$ *holomorphes pour* $\mathcal{R}s \geqq 1$ *et* $a_0(1) \neq 0$, *alors on a, pour* x *infini :*

$$\nu(x) \sim q\, a_0(1)\, \frac{x\,(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{q-1}}{\operatorname{Log} x},$$

(Transposition, dans un cas particulier, du théorème *b* des *Annales*.)

1.3.5. Corollaire. — *Un* D_n-*semi-groupe est un* Δ'_n-*semi-groupe pour lequel* $\mu = (n+1)\, a_0(0)$.

Démonstration. — 1° D'après le théorème précédent, le nombre des éléments de E, de norme au plus égale à x, est équivalent, pour x infini, à

$$(n+1)\, a_0(0)\, \frac{x\,(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{n}}{\operatorname{Log} x},$$

donc (E) est un Δ_n-semi-groupe.

2° Lorsque $s \to 0$,

$$a_i(s) = a_i(0) + s[a'_i(0) + o(1)].$$

Lorsque $s \to 0$ avec $\mathcal{R}s > 0$:

$$a_i(s)\left(\log\frac{1}{s}\right)^k = a_i(0)\left(\log\frac{1}{s}\right)^k + o(1),$$

donc

$$\psi(s) = a_0(0)\left(\log\frac{1}{s}\right)^{n+1} + a_1(0)\left(\log\frac{1}{s}\right)^{n} + \ldots + a_n(0)\log\frac{1}{s} + a_{n+1}(0) + o(1).$$

1.3.6. Définition. — Un ensemble d'éléments premiers E qui vérifie l'hypothèse H est, d'après le corollaire précédent, de degré n; nous dirons que E est un H-ensemble d'éléments premiers de degré n.

D-semi-groupes.

1.3.7. Définition. — 1° Nous dirons que le semi-groupe normé (E) est un D-semi-groupe si l'on a, pour $\mathcal{R}s > 1$:

$$\sum_{A \in (E)} \frac{1}{(NA)^s} = \frac{u(s)}{(s-1)^\mu},$$

avec $\mu > 0$, $u(s)$ holomorphe et $u(s) \neq 0$ pour $\mathcal{R}s \geqq 1$.

2° Nous dirons que l'ensemble d'éléments premiers E est régulier si l'on a pour $\mathcal{R}s > 1$:

$$\sum_{P \in E} \frac{1}{(NP)^s} = \mu \log \frac{1}{s-1} + a(s),$$

avec $\mu \geqq 0$, $a(s)$ holomorphe pour $\mathcal{R}s \geqq 1$ (définition de H. Delange). Si $\mu > 0$, E est un H-ensemble de degré zéro et de densité μ.

1.3.8. Théorème. — *Pour que le semi-groupe normé* (E) *soit un* D-*semi-groupe, il faut et il suffit que l'ensemble* E *soit régulier et de densité strictement positive. Puisqu'un ensemble régulier de densité strictement positive est un* H-*ensemble de degré zéro, un* D-*semi-groupe est un* D_0-*semi-groupe.*

Démonstration. — La condition nécessaire est une transposition de la démonstration de la page 27 (2-2) des *Annales* et la condition suffisante est immédiate d'après le corollaire 1.1.7 :

$$\sum_A \frac{1}{(NA)^s} = g(s) \exp\left[\sum_P \frac{1}{(NP)^s}\right]$$
$$= g(s)\, e^{\mu \log \frac{1}{s-1} + a(s)} = \frac{g(s)\, e^{a(s)}}{(s-1)^\mu} = \frac{u(s)}{(s-1)^\mu} \qquad \text{pour} \quad \mathcal{R}s > 1,$$

$g(s)$ holomorphe et $g(s) \neq 0$ pour $\mathcal{R}s > \frac{1}{2}$, donc $u(s)$ holomorphe et $u(s) \neq 0$ pour $\mathcal{R}s \geqq 1$.

DEUXIÈME PARTIE.

ÉTUDE ASYMPTOTIQUE DE CERTAINES PARTITIONS DANS LES Δ_r-SEMI-GROUPES.

CHAPITRE 1.

ÉQUIRÉPARTITION ASYMPTOTIQUE DANS CERTAINES PARTITIONS D'UN Δ_r-SEMI-GROUPE.

Après avoir défini les partitions $\mathcal{T}$, on caractérise les éléments d'une classe d'une telle partition; la technique utilisée est la représentation d'un grgupe abélien fini par l'une de ses bases.

On considère ensuite une partition $\mathcal{T}$ d'un Δ_r-semi-groupe et l'on suppose que, pour chaque classe, l'ensemble des éléments premiers qui appartiennent à cette classe possède un degré. On montre alors que, dans ces conditions, les nombres des éléments du semi-groupe, de norme au plus égale à x, respectivement contenus dans deux classes différentes, sont équivalents lorsque x tend vers l'infini; on dit qu'il y a équirépartition asymptotique des éléments du semi-groupe entre les classes.

2.1.1. DÉFINITION. — Une partition $\mathcal{T}$ d'un semi-groupe (E) est une partition qui possède les propriétés suivantes :

1° Le nombre des classes est fini et strictement supérieur à 1.

Il est défini dans l'ensemble des classes une loi de composition qui donne à cet ensemble une structure de groupe abélien fini. Cette loi sera notée multiplicativement.

2° La multiplication des classes est compatible avec celle des éléments de (E).

3° Quelle que soit la classe considérée, l'ensemble des éléments premiers qui appartiennent à cette classe n'est pas vide.

2.1.2. BASE DU GROUPE. — D'après la théorie des groupes abéliens finis, on sait qu'il existe des classes $B_1, B_2, \ldots, B_n$ telles que chaque classe s'exprime d'une manière et d'une seule sous la forme

$$B_1^{\alpha_1}.B_2^{\alpha_2}, \ldots, B_n^{\alpha_n}$$

avec

$$0 \leqq \alpha_1 < h_1, \qquad 0 \leqq \alpha_2 < h_2, \qquad \ldots, \qquad 0 \leqq \alpha_n < h_n,$$

$h_i (> 1)$ étant l'ordre du groupe cyclique engendré par B_i.

On dit que $B_1, B_2, \ldots, B_n$ forme une base du groupe; nous poserons

$$B(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = B_1^{\alpha_1} \ldots B_n^{\alpha_n}.$$

$\Omega_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}(A)$ est le nombre des facteurs (distincts ou non) qui appartiennent à $B(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ dans la décomposition de A en facteurs premiers. Lorsque A sera fixé, nous écrirons pour simplifier : $\Omega_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}$.

2.1.3. Théorème. — *Pour que* A *appartienne à la classe* $B(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, *il faut et il suffit que*

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} \sum \alpha_1 \Omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \equiv a_1 \pmod{h_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum \alpha_i \Omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_i \ldots \alpha_n} \equiv a_i \pmod{h_i}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum \alpha_n \Omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \equiv a_n \pmod{h_n}, \end{cases}$$

Les $\sum$ *sont étendus à tous les* α_i *avec* $0 \leqq \alpha_i < h_i$.

Nous désignerons par (I′) *le système homogène associé à* (I) :

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0.$$

Démonstration. — En effet, A étant fixé, la classe de A est

$$\prod_{\substack{\alpha_1, \ldots, \alpha_n \\ 0 \leqq \alpha_i < h_i \\ 1 \leqq i \leqq n}} (B_1^{\alpha_1} \ldots B_n^{\alpha_n})^{\Omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}} = \prod B_1^{\alpha_1 \Omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}} \ldots B_n^{\alpha_n \Omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}} = B_1^{\sum \alpha_1 \Omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}} \ldots B_i^{\sum \alpha_i \Omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}} \ldots B_n^{\sum \alpha_n \Omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}}.$$

Remarquons que les $\Omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(A)$ sont des entiers $\geqq 0$, s'ils sont tous nuls nous conviendrons que $A = e$.

Si $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$ la classe correspondante est la classe unité du groupe appelée classe principale.

2.1.4. Étude du système (I). — Les $\Omega_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}$ sont les inconnues, les $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont connus. L'inconnue $\Omega_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_j \ldots \alpha_n}$ dans laquelle $\alpha_j = \delta_{ij}$ figure dans la $i^{\text{ième}}$ équation avec le coefficient 1 et ne figure pas explicitement dans les autres; nous dirons que c'est une inconnue principale. Il y a n inconnues principales ($i = 1, 2, \ldots, n$); les autres inconnues sont les inconnues non principales.

Nous pouvons donner des valeurs entières arbitraires aux inconnues non principales et chacune des équations nous donnera les valeurs de l'inconnue principale correspondante.

Les solutions de (I) peuvent être définies modulo le p. p. c. multiple m de $h_1, h_2, \ldots, h_n$, leur nombre est alors fini. Toutes les solutions de (I) définies mod m peuvent s'obtenir en ajoutant une solution particulière de (I) définie mod m à toutes les solutions de (I') définies mod m. Le nombre des solutions de (I) définies mod m est égal au nombre des solutions de (I') définies mod m et ce nombre ne dépend pas des a_i; nous allons d'ailleurs l'évaluer.

Soit $h = h_1 h_2 \ldots h_n$ le nombre des classes.

Il y a n inconnues principales, donc $h - n$ non principales.

On peut donner à chaque inconnue non principale m valeurs distinctes (mod m), ce qui fait m^{h-n} possibilités.

Les inconnues non principales étant fixées, la $i^{\text{ième}}$ équation détermine l'inconnue principale correspondante (mod h_i), cette inconnue prend donc une seule valeur définie mod h_i, c'est-à-dire $\frac{m}{h_i}$ valeurs (mod m).

Le nombre des solutions de (I) définies mod m est donc

$$\frac{m}{h_1} \times \frac{m}{h_2} \times \ldots \times \frac{m}{h_n} \times m^{h-n} = \frac{m^h}{h}.$$

2.1.5. Construction des partitions $\mathcal{P}$ de (E). — Soit $h_1, \ldots, h_n$ des entiers > 1. Construisons une partition de E en $h = h_1 h_2 \ldots h_n$ ensembles non vides, soit $E(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ $(0 \leqq \alpha_i < h_i)$ l'un d'eux.

$\Omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(A)$ est le nombre des facteurs (distincts ou non) qui appartiennent à $E(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ dans la décomposition, en facteurs premiers, de l'élément A de (E).

L'ensemble des A de (E) dont les $\Omega(A)$ correspondants sont des solutions de (I) constitue la classe $B(a_1, a_2, \ldots, a_n)$; on vérifie que $E(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est contenu dans $B(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Chaque A de (E) appartient à une classe et une seule; en effet si A est connu, les $\Omega(A)$ sont connus, les premiers membres de (I) sont connus, donc les a et la classe sont connus; il y a bien partition de (E).

En désignant par $\gamma_h(a)$ le nombre tel que

$$\gamma_h(a) \equiv a \pmod{h}, \qquad 0 \leqq \gamma_h(a) < h,$$

la loi de composition du groupe est définie par

$$B(a_1, a_2, \ldots, a_n)\, B(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n) = B[\gamma_{h_1}(a_1 + a'_1), \ldots, \gamma_{h_n}(a_n + a'_n)].$$

Il en résulte qu'en posant $B_i = B(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_n)$ avec $a_j = \delta_{ij}$, on a

$$B(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = B_1^{\alpha_1} \ldots B_n^{\alpha_n}.$$

Montrons que la loi de composition du groupe est compatible avec la multiplication des éléments de (E) :

$$A \in B(a_1, \ldots, a_n) \quad \Rightarrow \quad (\mathrm{I}) \sum \alpha_i \Omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(A) \equiv a_i \pmod{h_i},$$

$$A' \in B(a'_1, \ldots, a'_n) \quad \Rightarrow \quad \sum \alpha_i \Omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(A') \equiv a'_i \pmod{h_i}$$

d'où

$$\sum \alpha_i [\Omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(A) + \Omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(A')] \equiv a_i + a'_i) \qquad (\operatorname{mod} h_i),$$

$$\sum \alpha_i \Omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(A.A') \equiv \eta_{h_i}(a_i + a'_i) \qquad (\operatorname{mod} h_i),$$

ce qui montre que

$$AA' \in B[\eta_{h_1}(a_1 + a'_1), \ldots, \eta_{h_n}(a_n + a'_n)] = B(a_1, \ldots, a_n)\, B(a'_n, \ldots, a'_n).$$

2.1.6. Simplifications des notations. — Les $h = h_1 \ldots h_n$ classes sont désignées par $C_0, C_1, \ldots, C_{h-1}$; C_0 est la classe principale.

$\Omega_i(A)$ est le nombre des facteurs (distincts ou non) qui appartiennent à C_i dans la décomposition de A en facteurs premiers.

E_i est l'ensemble des éléments premiers qui appartiennent à C_i.

2.1.7. Théorème I. — *Soit une partition* $\mathfrak{T}$ *d'un* Δ_r*-semi-groupe* (E). *Si, quelle que soit la classe de la partition, l'ensemble des éléments premiers qui appartiennent à cette classe possède un degré, il y a équirépartition asymptotique des éléments de* (E) *entre les classes; c'est-à-dire que les nombres des éléments, de norme au plus égale à x, respectivement contenus dans les classes, sont équivalents lorsque x tend vers l'infini.*

Démonstration. — Pour que A appartienne à C_i, il faut et il suffit que les $\Omega(A)$ correspondants soient solution de (I). Pour i fixé, les seconds membres de (I) sont connus et dépendent de i; chaque solution de (I) s'écrit alors avec les nouvelles notations :

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} \Omega_0(A) \equiv \beta_{0,j} & (\operatorname{mod} m), \\ \Omega_1(A) \equiv \beta_{1,j} & (\operatorname{mod} m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Omega_{h-1}(A) \equiv \beta_{h-1,j} & (\operatorname{mod} m) \end{cases}$$

$$\left(j = 1, 2, \ldots, \frac{m^h}{h} \text{ puisqu'il y a } \frac{m^h}{h} \text{ solutions définies mod } m \text{ quelle que soit } C_i\right).$$

A deux solutions différentes définies mod m de (I) correspondent deux ensembles disjoints de A.

Si $\nu(x)$ désigne le nombre des éléments de (E) de norme au plus égale à x, le nombre des éléments de C_i de norme au plus égale à x correspondant à la solution (II) est équivalent pour x infini à $\frac{\nu(x)}{m^h}$ d'après le théorème 1.2.5.

Le nombre des A de (E), de norme au plus égale à x, qui appartiennent à C_i est donc équivalent à

$$\frac{\nu(x)}{m^h}\frac{m^h}{h} = \frac{\nu(x)}{h}.$$

CHAPITRE 2.

Éléments de la classe principale, indécomposables en produits d'éléments de cette classe, dans certaines partitions $\mathcal{T}$ d'un Δ_r-semi-groupe.

La classe principale d'une partition $\mathcal{T}$ d'un Δ_r-semi-groupe forme elle-même un semi-groupe. Il existe dans ce semi-groupe, en plus des éléments premiers, des éléments non premiers qui sont indécomposables dans ce semi-groupe; c'est-à-dire qui ne sont pas le produit de deux éléments de ce semi-groupe (tous deux différents de l'élément unité). Le théorème II (2.2.5), qui est le théorème principal de ce chapitre, donne un équivalent, pour x infini, du nombre des éléments précédents, de norme au plus égale à x; les hypothèses sont les mêmes que celles faites dans le théorème I d'équirépartition asymptotique.

En cours d'étude il s'est introduit un entier t lié à un groupe abélien fini, t est égal à l'ordre du groupe dans le cas où le groupe est cyclique. Dans le cas où le groupe n'est pas cyclique, pour obtenir un minorant de t, nous avons établi une relation d'inégalité dans les groupes abéliens finis (théorème 2.2.11).

Signalons aussi une application à l'arithmétique : le théorème 2.2.9.

2.2.1. Recherche des éléments de C_0 indécomposables dans C_0. — La classe principale C_0 est stable pour la multiplication; elle forme un semi-groupe. Il existe des éléments de C_0 différents de e et non premiers qui ne sont pas le produit de deux éléments de C_0 différents de e; soit E'_0 l'ensemble de ces éléments. L'ensemble des éléments de C_0, indécomposables dans C_0, se compose de e, de E'_0 et de l'ensemble E_0 des éléments premiers de C_0.

Reprenons les notations simplifiées du paragraphe 2.1.6, les classes sont désignées par $C_0, C_1, \ldots, C_{h-1}$ et les $\Omega(A)$ correspondants par $\Omega_0, \Omega_1, \ldots, \Omega_{h-1}$.

Si un élément A de C_0 est divisible par un élément A' de C_0 avec $A' \neq A$ et $A' \neq e$, on a

$$\Omega_0(A') \leqq \Omega_0(A), \qquad \Omega_1(A') \leqq \Omega_1(A), \qquad \ldots, \qquad \Omega_{h-1}(A') \leqq \Omega_{h-1}(A),$$
$$A' \neq A, \qquad A' \neq e;$$

il existe donc une solution $\Omega' = (\Omega'_0, \ldots, \Omega'_{h-1})$ de (I') différente de la solution nulle et de la solution $\Omega(A) = [\Omega_0(A), \ldots, \Omega_{h-1}(A)]$ telle que

$$\Omega'_0 \leqq \Omega_0(A), \qquad \ldots, \qquad \Omega'_{h-1} \leqq \Omega_{h-1}(A); \tag{1}$$

réciproquement, s'il existe une solution de (I') qui satisfait à la condition (1), qui est différente de la solution triviale zéro et différente de $\Omega(A)$, l'élément A' obtenu en faisant le produit de Ω'_0 facteurs premiers pris parmi les $\Omega_0(A)$ facteurs premiers de A qui appartiennent à C_0, ..., de Ω'_{h-1} facteurs premiers pris parmi les $\Omega_{h-1}(A)$ facteurs premiers de A qui appartiennent à C_{h-1}, est différent de A et de e et divise A.

2.2.2. RELATION D'ORDRE NON TOTALE DANS LES SOLUTIONS DE (I'). — Soit deux solutions de (I') :

$$\Omega = (\Omega_0, \ldots, \Omega_{h-1}), \qquad \Omega' = (\Omega'_0, \ldots, \Omega'_{h-1});$$
$$\Omega' \leqq \Omega \quad (\Omega' \text{ inférieure à } \Omega) \Leftrightarrow \Omega'_0 \leqq \Omega_0, \quad \ldots, \quad \Omega'_{h-1} \leqq \Omega_{h-1}.$$

Une solution est positive si elle est supérieure à la solution triviale; strictement positive si elle est positive et différente de zéro. Nous dirons qu'une solution est minimale si elle est strictement positive et s'il n'existe pas de solution strictement positive qui lui soit strictement inférieure (c'est-à-dire inférieure et différente).

2.2.3. LEMME. — *Pour qu'un élément* A *de* C_0 *appartienne à* E'_0 *il faut et il suffit que* $\Omega_0(A) = 0$ *et que la solution* $\Omega = (0, \Omega_1, \ldots, \Omega_{h-1})$ *de* (I') *associé à* A *soit une solution minimale de* (I').

Démonstration. — Si l'on remarque qu'un élément de E'_0 n'a aucun facteur premier appartenant à E_0, donc que $\Omega_0(A) = 0$, le lemme est la conséquence immédiate de la conclusion du 2.2.1 et de la définition 2.2.2.

2.2.4. PROPOSITION. — *Il existe des solutions minimales de* (I') *avec* $\Omega_0 = 0$. *Le nombre des solutions minimales de* (I') *est fini.*

Si m_i *est l'ordre du groupe cyclique engendré par* C_i, *la solution* $(0, \Omega_1, \ldots, \Omega_j, \ldots, \Omega_{h-1})$ *avec* $\Omega_j = m_i \delta_{ij}$ *est minimale car le produit de* m_i *facteurs premiers appartenant à* C_i *appartient à* C_0 *et le produit de moins de* m_i *facteurs n'appartient pas à* C_0.

Pour que la solution de (I') :

$$(\Omega_0, \Omega_1, \ldots, \Omega_{h-1}), \qquad \Omega_i \equiv \beta_{ij} \pmod{m}, \qquad 0 \leqq \beta_{ij} < m, \qquad 1 \leqq i \leqq \frac{m^h}{h},$$

soit minimale il est nécessaire et non suffisant que

$$\Omega_i = \beta_{ij} \quad \text{si} \quad \beta_{ij} \neq 0; \qquad \Omega_i = 0 \quad \textit{ou} \quad \Omega_i = m \quad \textit{si} \quad \beta_{ij} = 0;$$

il en résulte que le nombre des solutions minimales est fini.

2.2.5. THÉORÈME II. — *Soit* C_0 *la classe principale d'une partition* $\mathfrak{T}$ *d'un* Δ_r*-semi-groupe* (E); $\eta(x)$ *et* $\eta_1(x)$ *respectivement le nombre des éléments non premiers de* C_0 *et le nombre des éléments de* C_0 (*premiers ou non*), *de norme* *au plus égale à x, indécomposables en un produit de deux éléments de* C_0 (*tous deux différents de l'élément unité*).

Si, quelle que soit la classe de la partition, l'ensemble des éléments premiers qui appartiennent à cette classe possède un degré.

1° *On a, pour x infini :*

$$\eta(x) \sim K \frac{x(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{T-1}}{\operatorname{Log} x}$$

avec K *constante strictement positive,* T *réel supérieur ou égal à* 2. (*Si les degrés des ensembles d'éléments premiers contenus dans les classes autres que* C_0 *sont entiers,* T *est entier.*)

2° *En désignant, pour x infini, par*

$$[1 + o(1)]\mu_0 \frac{x}{\operatorname{Log} x} \operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{r_0},$$

le nombre des éléments premiers de C_0 *de norme au plus égale à x, on a, pour x infini :*

$$\eta_1(x) \sim K \frac{x(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{T-1}}{\operatorname{Log} x} \qquad si \quad T - 1 > r_0;$$

(*Ceci a lieu, en particulier, si tous les ensembles d'éléments premiers contenus dans les classes sont de même degré.*)

$$\eta_1(x) \sim (K + \mu_0) \frac{x(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{T-1}}{\operatorname{Log} x} \qquad si \quad T - 1 = r_0;$$

$$\eta_1(x) \sim \mu_0 \frac{x(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{r_0}}{\operatorname{Log} x} \qquad si \quad T - 1 < r_0.$$

Si les ensembles d'éléments premiers contenus dans les classes autres que C_0 *sont de même degré q,* $t = \dfrac{T}{q+1}$ *est un entier supérieur ou égal à* 2 *qui ne dépend que du groupe de composition des classes.*

Démonstration. — Le nombre des A de norme au plus égale à x qui appartiennent à E'_0 est égal à la somme des nombres des A, de norme au plus égale à x, qui correspondent à chaque solution minimale de (I′) pour laquelle $\Omega_0 = 0$.

Soit $\Omega_0 = 0, \Omega_1, \ldots, \Omega_{h-1}$ une telle solution, d'après le théorème 1.2.6 le nombre des A, de norme au plus égale à x, qui correspondent à cette solution est équivalent à

$$\left(\frac{\mu_1}{r_1+1}\right)^{\Omega_1} \cdots \left(\frac{\mu_{h-1}}{r_{h-1}+1}\right)^{\Omega_{h-1}} \frac{(r_1+1)\Omega_1 + \ldots + (r_{h-1}+1)\Omega_{h-1}}{\Omega_1! \ldots \Omega_{h-i}!}$$
$$\times \frac{x}{\operatorname{Log} x} (\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{(r_1+1)\Omega_1 + \ldots + (r_{h-1}+1)\Omega_{h-1} - 1}.$$

Soit T le maximum de $(r_1+1)\Omega_1+\ldots+(r_{h-1}+1)\Omega_{h-1}$ lorsque $\Omega=(0, \Omega_1, \ldots, \Omega_{h-1})$ décrit l'ensemble des solutions minimales de (I') avec $\Omega_0=0$ et

$$K=T \times \sum_{\substack{\Omega_1, \ldots, \Omega_{h-1} \\ (0, \Omega_1, \ldots, \Omega_{h-1}) \text{ est solution minimale de (I')} \\ (r_1+1)\Omega_1+\ldots+(r_{h-1}+1)\Omega_{h-1}=T}} \left(\frac{\mu_1}{r_1+1}\right)^{\Omega_1}\cdots\left(\frac{\mu_{h-1}}{r_{h-1}+1}\right)^{\Omega_{h-1}} \frac{1}{\Omega_1!\ldots\Omega_{h-1}!}.$$

On a

$$\eta(x)\sim K\frac{x(\operatorname{Log}\operatorname{Log}x)^{T-1}}{\operatorname{Log}x},$$

$$T\geqq\max(r_i+1)m_i\geqq 2 \qquad (i=1, 2, \ldots, h-1).$$

Si $r_1, r_2, \ldots, r_{h-1}$ sont entiers, T est entier.

Le nombre des éléments de E'_0 est prépondérant devant celui des éléments de E_0 si et seulement si $T-1>r_0$.

Si $r_1=r_2=\ldots=r_{h-1}=q$,

$$T=\max(q+1)(\Omega_1+\ldots+\Omega_{h-1})=(q+1)t \qquad \text{avec} \quad t=\max(\Omega_1+\Omega_2+\ldots+\Omega_{h-1}),$$

t est un entier $\geqq 2$ qui ne dépend que du groupe de composition des classes. Si $r_0=r_1=r_2\ldots=r_{h-1}$, $T-1>r_0$ puisque $T\geqq 2(r_0+1)>r_0+1$.

Propriétés du nombre t.

2.2.6. Lemme. — *Si le nombre des diviseurs premiers d'un élément* A *est supérieur au nombre h des classes,* A *est divisible par un élément de la classe principale différent de e et de* A.

Soit

$$A=P_1P_2\ldots P_k \qquad \textit{avec} \quad k>h,$$

$P_1, P_2, \ldots, P_k$ *étant tous les diviseurs premiers de* A *distincts ou non. Soit les diviseurs de* A, *différents de* A *et différents entre eux :*

$$D_1=P_1, \qquad D_2=P_1P_2, \qquad \ldots, \qquad D_{k-1}=P_1P_2\ldots P_{k-1}.$$

Si deux de ces diviseurs appartiennent à la même classe, A *est divisible par un élément de la classe principale différent de e et de* A.

En effet : $D_i \mid D_j$ *si* $i<j$, $\frac{D_j}{D_i}$ *est un diviseur de* A *et*

$$\textit{Classe de } \frac{D_j}{D_i}=\frac{\textit{Classe de } D_j}{\textit{Classe de } D_i}=C_0$$

si classe de $D_j=$ *classe de* D_i.

Si tous ces diviseurs appartiennent à des classes différentes, il y en a au moins un qui appartient à la classe principale puisque leur nombre $k-1\geqq h$ *nombre des classes.*

Par ailleurs nous avons vu que les solutions $(0, \Omega_1, \ldots, \Omega_j, \ldots, \Omega_{h-1})$ avec $\Omega_j = m_i \delta_{ij}$ sont minimales (proposition 2.2.4). On sait que le maximum de m_i est le plus petit commun multiple m de $h_1, h_2, \ldots, h_n$. $t = \max(\Omega_1 + \ldots + \Omega_{h-1})$ pris sur les solutions minimales $(0, \Omega_1, \ldots, \Omega_{h-1})$ de (I′), donc

$$m \leq t \leq h.$$

2.2.7. Théorème. — *Pour que $t = h$ il faut et il suffit que le groupe des classes soit cyclique.*

Démonstration. — Si le groupe est cyclique, $m = h \Rightarrow t = h$.

Réciproquement supposons que $t = h$, il existe un élément A de E'_0 dont la décomposition contient h facteurs premiers, soit P_1 et P_2 deux de ces facteurs premiers et $P_1, P_2, \ldots, P_h$ l'ensemble de tous les diviseurs premiers de A; $C_1, C_2, \ldots, C_h$ les classes correspondantes. Les classes : $C_1, C_1C_2, C_1C_2C_3, \ldots, C_1C_2C_3\ldots C_{h-1}$ sont $h-1$ classes différentes deux à deux et différentes de C_0 d'après le raisonnement fait plus haut; elles représentent donc toutes les classes du groupe différentes de C_0. L'une de ces classes est égale à C_2, cette classe n'est pas $C_1C_2\ldots C_i$ car alors on aurait $C_1C_3C_4\ldots C_i = C_0$; donc $C_1 = C_2$. Deux diviseurs premiers quelconques de A appartiennent à la même classe : $C_1 = C_2 = \ldots = C_h$.

Les classes du groupe sont : $C_0, C_1, C_1^2, \ldots, C_1^{h-1}$; le groupe est cyclique.

De plus nous voyons que les solutions minimales : $(\Omega_0, \Omega_1, \ldots, \Omega_j, \ldots, \Omega_{h-1})$ pour lesquelles $\Omega_1 + \ldots + \Omega_{h-1} = t = h = m$, $\Omega_0 = 0$, sont de la forme $\Omega_j = h\delta_{ij}$, C_i étant une classe d'ordre h, c'est-à-dire une classe qui engendre le groupe.

2.2.8. *Détermination de* K *lorsque les ensembles d'éléments premiers contenus dans les classes autres que la principale sont de même degré q et que le groupe des classes est cyclique.*

Le nombre des classes d'ordre h est $\varphi(h)$, chacune d'elles engendre le groupe (φ, indicatrice d'Euler). On peut supposer que ces classes qui engendrent le groupe sont $C_1, C_2, \ldots, C_{\varphi(h)}$; on a

$$K = T \sum_{1 \leq i \leq \varphi(h)} \left(\frac{\mu_i}{q+1}\right)^h \frac{1}{h!} = h(q+1)\frac{1}{h!}\,\frac{\mu_1^h + \mu_2^h + \ldots + \mu_{\varphi(h)}^h}{(q+1)^h},$$

$$K = \frac{\mu_1^h + \mu_2^h + \ldots + \mu_{\varphi(h)}^h}{(h-1)!\,(q+1)^{h-1}}; \qquad T = h(q+1).$$

Dans le cas particulier où $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_{\varphi(h)} = \mu$, on a

$$K = \frac{\varphi(h)\,\mu^h}{(h-1)!\,(q+1)^{h-1}}.$$

2.2.9. Théorème. — *Si $k = 2, 4, p^\alpha, 2p^\alpha$ (p premier > 2); le nombre des entiers naturels au plus égaux à x, qui sont congrus à* 1 (mod k) *et qui* *ne sont pas le produit de deux nombres congrus à* 1 (mod k) (*tous deux différents de* 1) *est équivalent, pour x infini à*

$$\frac{\varphi[\varphi(k)]}{[\varphi(k)]^{\varphi(k)}[\varphi(k)-1]!}\,\frac{x(\operatorname{Log}\operatorname{Log}x)^{\varphi(k)-1}}{\operatorname{Log}x} \qquad (\varphi,\ \textit{fonction d'Euler}).$$

Démonstration. — E est l'ensemble des nombres premiers moins l'ensemble des diviseurs premiers de k; $\mathfrak{P}$ est la partition déterminée par les classes réduites (mod k). Le nombre des classes est $h=\varphi(k)$;

$$r_1=\ldots=r_{h-1}=q=0, \qquad \mu=\frac{1}{\varphi(k)}$$

Le groupe est cyclique si et seulement si k admet une racine primitive, c'est-à-dire $k=2,\ 4,\ p^\alpha,\ 2p^\alpha$.

La dernière formule du 2.2.8 donne le résultat énoncé.

2.2.10. Solution minimale attachée a une base. — Soit une base quelconque $B_1, B_2, \ldots, B_n$; $h_1, \ldots, h_n$ les ordres des éléments B_1, $B_2, \ldots, B_n$.

Soit A un élément obtenu en faisant le produit de h_1-1 facteurs premiers appartenant à B_1, h_2-1 facteurs premiers appartenant à B_2, ..., h_n-1 facteurs premiers appartenant à B_n et d'un facteur premier appartenant à $B_1B_2\ldots B_n$:

La classe de A est

$$B_1^{h_1-1}\ldots B_n^{h_n-1}.B_1\ldots B_n=B_1^{h_1}\ldots B_n^{h_n}=C_0.$$

A appartenant à E'_0, montrons qu'il n'est divisible par aucun élément de C_0 différent de e et de A; en effet la classe d'un diviseur A′ de A différent de e et de A est :

soit

$$B_1^{\alpha_1}\ldots B_n^{\alpha_n} \qquad (0\leqq\alpha_i\leqq h_i-1 \text{ avec l'un des } \alpha_i\neq 0);$$

cette classe est différente de C_0;

soit

$$B_1\ldots B_n\neq C_0;$$

soit

$$B_1^{\alpha_1}\ldots B_n^{\alpha_n}.B_1\ldots B_n=B_1^{\alpha_1+1}\ldots B_n^{\alpha_n+1} \qquad (1\leqq\alpha_i+1\leqq h_i \text{ avec l'un des } \alpha_i+1\neq h_i),$$

cette classe est différente de C_0.

La solution minimale $[\Omega_0=0,\ \Omega_1(A),\ \ldots,\ \Omega_h(A)]$ est déterminée par la donnée de la base.

On a

$$\Omega_1(A)+\ldots+\Omega_h(A)=h_1+h_2+\ldots+h_n-n+1;$$

il en résulte que

$$t > h_1 + h_2 + \ldots + h_n - n;$$

donc

$$t > \max[h_1 + h_2 + \ldots + h_n - n]$$

lorsque $[B_1, B_2, \ldots, B_n]$ décrit l'ensemble des bases.

2.2.11. Théorème. — *Soit* G *un groupe abélien fini et* $t_1, t_2, \ldots, t_l$ *ses coefficients de torsion (facteurs invariants).*

Quelle que soit la décomposition de G *en un produit direct de n groupes cycliques d'ordre* $h_1, h_2, \ldots, h_n$ *(autrement dit, quelle que soit la base* B_1, $B_2, \ldots, B_n$ *de* G, *l'ordre du groupe cyclique engendré par* B_i *étant* h_i*), on a*

$$t_1 + t_2 + \ldots + t_l - l \geqq h_1 + h_2 + \ldots + h_n - n.$$

Démonstration.

2.2.11.1. Définition. — Une M-matrice est une (m, l) matrice réelle (a_{ij}) telle que $a_{ij} \geqq 0$ quels que soient i et j; $a_{ij} \geqq a_{i,j+1}$ quels que soient i et $j = 1, \ldots, l-1$ si $l > 1$.

Une M'-matrice est une M-matrice dans laquelle $a_{ij} \geqq 1$ quels que soient i et j.

Si $A = (a_{ij})$, est une (m, l) matrice quelconque; on pose

$$\begin{aligned}\theta(A) &= a_{11}a_{21}\ldots a_{m1} + a_{12}a_{22}\ldots a_{m2} + a_{1l}a_{2l}\ldots a_{ml}\\ &= \text{somme des produits des éléments des colonnes de A.}\end{aligned}$$

2.2.11.2. Lemme. — *Si* A *est une* M*-matrice et* B *une matrice déduite de* A *en effectuant des permutations sur les éléments des lignes, chaque permutation portant sur les éléments d'une même ligne, on a*

$$\theta(A) \geqq \theta(B).$$

Démonstration.

1° Remarquons que

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1 \geqq \alpha_2\\ \beta_1 \geqq \beta_2\end{array}\right\} \to \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 \geqq \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1,$$

en effet

$$(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2) \geqq 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 \geqq \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1.$$

2° Désignons par $T_{i,j-1}$ l'application qui, à la matrice A, fait correspondre la matrice $T_{i,j-1}(A)$ obtenue en transposant dans A l'élément a_{ij} avec l'élément $a_{i,j-1}$ $(j \geqq 2)$.

Posons $\Phi_{i,j-1} = T_{i,j-1} \circ \ldots \circ T_{2,j-1} \circ T_{i,j-1}$ (produit de composition). Soit les matrices

$$A_1 = \Phi_{i,j-1}(A), \qquad A_2 = \Phi_{i,j-2}(A_1), \qquad \ldots, \qquad A_p = \Phi_{i,j-p}(A_{p-1}).$$

Montrons que si A est une M matrice, on a

$$\theta(A) \geqq \theta(A_p),$$

$\theta(A_1)$ est obtenu en remplaçant dans $\theta(A)$:

$$(a_{1,\,j-1}a_{2,\,j-1}\ldots a_{i,\,j-1})(a_{i+1,\,j-1}a_{i+2,\,j-1}\ldots a_{m,\,j-1}) + (a_{1j}a_{2j}\ldots a_{ij})(a_{i+1,\,j}a_{i+2,\,j}\ldots a_{mj})$$

par

$$(a_{1j}a_{2j}\ldots a_{ij})(a_{i+1,\,j-1}a_{i+2,\,j-1}\ldots a_{m,\,j-1}) + (a_{1,\,j-1}\ldots a_{1,\,j-1}\ldots a_{i,\,j-1})(a_{i+1,\,j}a_{i+2,\,j}\ldots a_{mj}).$$

Comme

$$a_{1,\,j-1}a_{2,\,j-1}\ldots a_{i,\,j-1} \geqq a_{1j}a_{2j}\ldots a_{ij}$$

et

$$a_{i+1,\,j-1}a_{i+2,\,j-1}\ldots a_{m,\,j-1} \geqq a_{i+1,\,j}a_{i+2,\,j}\ldots a_{mj},$$

le 1° montre que $\theta(A) \geqq \theta(A_1)$.

La matrice obtenue en supprimant de A_1 les colonnes de rang supérieur ou égal à j est une M-matrice, le raisonnement précédent montre que $\theta(A_1) \geqq \theta(A_2)$; en définitive :

$$\theta(A) \geqq \theta(A_1) \geqq \ldots \geqq \theta(A_p).$$

3° La proposition est vraie pour une (m, l)M-matrice, supposons-la vraie pour toutes les (m, k) M-matrices avec $k \leqq l-1$ et démontrons qu'elle est vraie pour une (m, l) M-matrice.

Soit $A = (a_{ij})$ une (m, l) M-matrice et $B = (a'_{ij})$ une matrice obtenue à partir de A par des permutations sur les éléments des lignes de A (chaque permutation portant sur les éléments d'une même ligne).

Soit

$$a'_{11} = a_{1k_1}, \qquad a'_{21} = a_{2k_2}, \qquad \ldots, \qquad a'_{m1} = a_{mk_m}.$$

On peut toujours, en écrivant les lignes de B dans un ordre convenable, et celles de A dans le même ordre [ce qui ne change pas $\theta(A)$ et $\theta(B)$], supposer que

$$k_1 \geqq k_2 \geqq \ldots \geqq k_m.$$

Plus précisément soit

$$\begin{aligned} k_1 = k_2 = \ldots = k_{i_1} > k_{i_1+1} = k_{i_1+2} = \ldots \\ = k_{i_2} > \ldots > k_{i_{p-1}} > k_{i_{p-1}+1} = k_{i_{p-1}+2} = \ldots = k_{i_p}, \qquad i_p = m. \end{aligned}$$

Posons

$$\Psi_{ijk} = \Phi_{ik} \circ \Phi_{i,\,k+1} \circ \ldots \circ \Phi_{i,\,j-2} \circ \Phi_{i,\,j-1} \qquad (k \leqq j-1).$$

Soit les matrices

$$C_1 = \Psi_{i_1 k_{i_1} k_{i_2}}(A), \qquad C_2 = \Psi_{i_2 k_{i_2} k_{i_3}}(C_1), \qquad \ldots, \qquad C_{p-1} = \Psi_{i_{p-1} k_{i_{p-1}} k_{i_p}}(C_{p-2}).$$

D'après le 2°, on a

$$\theta(A) \geqq \theta(C_1) \geqq \ldots \geqq \theta(C_{p-1}).$$

La $(k_m)^{\text{ième}}$ colonne de C_{p-1} est identique à la première colonne de B. Soit D la matrice obtenue en supprimant de C_{p-1} la $(k_m)^{\text{ième}}$ colonne et E la matrice obtenue en supprimant de B la première colonne. D est une $(m, l-1)$ M-matrice, E est déduite de D par permutation sur les éléments des lignes (chaque permutation portant sur les éléments d'une même ligne), donc, par hypothèse $\theta(D) \geqq \theta(E)$, d'où

$$\begin{aligned}\theta(A) \geqq \theta(C_{p-1}) &= \theta[(k_m)^{\text{ième}} \text{ colonne de } C_{p-1}] + \theta(D)\\ &\geqq \theta(1^{\text{ère}} \text{ colonne de } B) + \theta(E) = \theta(B).\end{aligned}$$

2.2.11.3. Lemme. — *Soit* A *une* (m, l) M'*-matrice*, R *le produit de ses éléments. Quelle que soit la décomposition de* $R = h_1 h_2 \ldots h_n$ *en un produit de n facteurs possédant les propriétés suivantes :*

1° *Chaque facteur* h_i *est le produit d'éléments de* A.

2° *Deux éléments de* A *contenus dans* h_i *n'appartiennent pas à la même ligne de* A.

3° *Les n ensembles formés par les éléments de* A *respectivement contenus dans* $h_1, h_2, \ldots, h_n$ *réalisent une partition dans l'ensemble des éléments de* A.

On a

$$\theta(A) - l \geqq h_1 + h_2 + \ldots + h_n - n.$$

Démonstration. — Considérons la (m, ml)matrice A_1 obtenue en bordant A à droite par des colonnes dont tous les éléments sont égaux à 1, A_1 est une M'-matrice, donc une M-matrice. Soit B_1 une matrice obtenue à partir de A_1 par des permutations sur les éléments des lignes (chaque permutation portant sur les éléments d'une même ligne), soit n le nombre des colonnes de B_1 contenant des images qui sont des éléments de A et $h_1, h_2, \ldots, h_n$ les produits respectifs des éléments de ces colonnes, on a

$$R = h_1 h_2 \ldots h_n$$

et les h_i répondent aux conditions de l'énoncé.

Réciproquement soit $R = h_1 h_2 \ldots h_n$, les h_i répondant aux conditions de l'énoncé, on a $n \leqq ml$.

Soit une (m, ml) matrice B_1 dont n des colonnes $j_1, j_2, \ldots, j_n$ sont formées de la manière suivante : la colonne j_k contient les éléments de A appartenant au produit h_k, chacun d'eux occupant la ligne dont le rang est égal à celui de la ligne qu'il a dans A; les éléments de j_k autres que les précédents sont égaux à 1; les éléments des $ml - n$ colonnes autres que $j_1, j_2, \ldots, j_n$ sont égaux à 1. Dans ces conditions, B_1 peut être obtenue à partir de A_1 par des permutations sur les éléments des lignes (chaque permutation portant sur les éléments d'une même ligne).

D'après le lemme précédent :

$$\theta(A_1) \geqq \theta(B_1),$$

soit

$$\theta(A) + ml - l \geqq h_1 + h_2 + \ldots + h_n + ml - n,$$

soit

$$\theta(A) - l \geqq h_1 + h_2 + \ldots + h_n - n.$$

2.2.11.4. *Démonstration du théorème* 2.2.11. — On peut obtenir les coefficients de torsion de la manière suivante ([4]) :

On décompose les h_i en facteurs premiers, soit

$$h_i = \prod_{p \in E_i} p^{\alpha_p},$$

E_i étant un ensemble fini de nombres premiers.

Soit A la M′-matrice définie, à l'ordre des lignes près, par les conditions suivantes :

1° Tous les nombres p^{α_p} (diviseurs élémentaires) provenant des décompositions en facteurs premiers de $h_1, h_2, \ldots, h_n$ sont des éléments de A, chacun d'eux figure dans A le même nombre de fois que dans l'ensemble des décompositions en facteurs premiers de $h_1, h_2, \ldots, h_n$; les éléments de A, autres que les nombres précédents, sont égaux à 1.

2° Les éléments de chaque ligne de A différents de 1 sont les puissances d'un même nombre premier, les puissances de ce nombre premier figurent dans une ligne et une seule.

3° Il existe au moins une ligne A dont tous les éléments sont différents de 1; il n'existe aucune ligne de A dont tous les éléments sont égaux à 1.

Alors, t_j est le produit des éléments de la $j^{\text{ième}}$ colonne de A. Soit ν le nombre des éléments de A égaux à 1, R le produit de tous les éléments de A (R est l'ordre du groupe G), on peut écrire

$$R = h_1 h_2 \ldots h_n h_{n+1} \ldots h_{n+\nu}, \qquad \text{avec} \quad h_{n+1} = h_{n+2} = \ldots = h_{n+\nu} = 1;$$

les h_i répondent aux conditions du lemme 2.2.11.3; d'où

$$\theta(A) - l \geqq h_1 + h_2 + \ldots + h_n + \nu - (n + \nu),$$

soit

$$t_1 + t_2 + \ldots t_l - l \geqq h_1 + h_2 + \ldots + h_n - n.$$

([4]) *Voir*, par exemple, Bourbaki, XIV, Livre II, p. 99.

2.2.12. Corollaire. — *Si le groupe des classes n'est pas cyclique, on a*

$$t_1 + t_2 + \ldots + t_l - l < t < h.$$

Démonstration. — Conséquence immédiate des paragraphes 2.2.7, 2.2.10 et du théorème précédent.

Remarque. — Quel que soit le groupe, on a

$$t_1 + t_2 + \ldots + t_l - l < t \leq h.$$

Si le groupe est cyclique, il existe un seul coefficient de torsion $t_1 = h$, d'où

$$h - 1 < t \leq h, \qquad \text{on retrouve} \quad t = h.$$

CHAPITRE 3.

Factorisation dans la classe principale de certaines partitions $\mathcal{P}$ d'un Δ_r-semi-groupe.

Les éléments indécomposables dans la classe principale C_0 d'une partition $\mathcal{P}$ d'un Δ_r-semi-groupe, dont nous avons donné, sous les hypothèses du théorème d'équirépartition asymptotique, une évaluation dans le chapitre précédent, forment un système de générateurs de C_0. Cette classe est un semi-groupe à factorisation non unique. Le but de ce chapitre est d'obtenir une évaluation asymptotique de la valeur moyenne du nombre de factorisations d'un élément de C_0, cette valeur moyenne étant prise sur l'ensemble des éléments de C_0 de norme au plus égale à x. Rappelons, en le précisant, ce qui a été dit dans l'introduction : en se plaçant dans les hypothèses du théorème d'équirépartition asymptotique, on obtient seulement un équivalent du logarithme de cette valeur moyenne; mais si l'on suppose que (E) est un D_n-semi-groupe et que, pour chaque classe de la partition, l'ensemble des éléments premiers qui appartiennent à cette classe est un H-ensemble, alors on obtient un équivalent de cette valeur moyenne.

Par ailleurs signalons les paragraphes 2.3.4 et 2.3.5 qui établissent l'existence des D_n-semi-groupes; celle des Δ'_n-semi-groupes en découle; l'existence des Δ_r-semi-groupes (r réel ≥ 0) ne pose pas de problème sérieux. Les paragraphes 2.3.4 et 2.3.5 montrent également comment les D_n-semi-groupes se sont introduits naturellement en cours d'étude.

2.3.1. Éléments indécomposables d'un sous-semi-groupe S d'un S_1-semi-groupe (E). — Nous supposons que S est différent du sous-semi-groupe réduit à l'élément e et que e appartient à S (on l'ajoutera si cela est nécessaire).

B appartenant à S est indécomposable dans S si

$$\left.\begin{array}{r} B = B_1 B_2 \\ B_1 \text{ et } B_2 \in S \end{array}\right\} \Rightarrow B_1 \text{ ou } B_2 = e.$$

Soit a le minimum de la norme des éléments de S différents de e; a existe puisque le nombre des éléments de (E) de norme au plus égale à x est fini, de plus $a > 1$.

Si B' est un élément de norme a, B' est indécomposable; sinon on aurait

$$B' = B'_1 B'_2, \qquad \text{d'où} \qquad NB'_1 < a.$$

L'ensemble des éléments indécomposables de S comprend donc des éléments différents de e, nous désignerons par F l'ensemble de ces éléments et par Q l'élément générique de cet ensemble. Tout élément B de S, à l'exception de e, peut se mettre sous la forme

$$B = Q_1^{\alpha_1} \ldots Q_n^{\alpha_n} \qquad (Q_i \in F,\ \alpha_i \text{ entier} \geq 1);$$

en effet, si B est indécomposable il est bien de la forme indiquée; si $B = B_1 B_2$,

$$NB_1 \leq \frac{NB}{a}, \qquad NB_2 \leq \frac{NB}{a}, \qquad a > 1;$$

dans le produit $B_1 B_2$ on remplace s'il y a lieu chaque facteur décomposable par sa décomposition, on recommence cette opération pour le produit ainsi obtenu...; après un nombre fini de ces opérations on obtient la forme indiquée car, s'il en était autrement, il existerait dans S des éléments de norme arbitairement petite.

S n'est pas en général à factorisation unique.

2.3.2. Semi-groupe normé (F') associé a S. — Soit un semi-groupe (F') tel que cardinal de F = cardinal de F', établissons une bijection de F sur F' qui, à Q appartenant à F, fait correspondre P appartenant à F', normons (F') en prenant NP = NQ. (F') est dit associé à S.

2.3.3. Lemme. — *Si* $\mathcal{N}(B)$ *désigne le nombre de factorisations d'un élément* B *appartenant à* S *en éléments indécomposables de* S, *le nombre des éléments du semi-groupe normé* (F') *associé à* S, *de norme au plus égale à* x, *est égal à*

$$\sum_{\substack{B \in S \\ NB \leq x}} \mathcal{N}(B).$$

Démonstration. — Nous prendrons conventionnellement $\mathcal{N}(e) = 1$.

Considérons l'application f de (F') sur S définie par

$$e' \in (F') \rightarrow e \in S \quad [e', \text{ élément neutre de } (F')]$$
$$A = P_1^{\alpha_1} \ldots P_n^{\alpha_n} \in (F') \rightarrow B = Q_1^{\alpha_1} \ldots Q_n^{\alpha_n} \in S,$$

P_i et Q_i désignant deux éléments correspondants dans la bijection du 2.3.2; donc $NQ_i = NP_i$ et $NB = NA$.

S'il existe $A' \neq A$ tel que $f(A') = B$, on a

$$B = Q_1'^{\alpha_1'} Q_2'^{\alpha_2'} \ldots Q_{n'}'^{\alpha_{n'}'} \quad \text{en posant} \quad A' = P_1'^{\alpha_1'} \ldots P_{n'}'^{\alpha_{n'}'}, \tag{2}$$

et (2) est une deuxième décomposition de B en produits d'éléments de F; réciproquement, étant donné deux décompositions différentes de B en produit d'éléments de F, il existe deux A différents tels que $f(A) = B$.

L'image réciproque de B par f est un ensemble de $\mathfrak{N}(B)$ éléments de (F') qui ont même norme que B; d'où le théorème.

2.3.4. Lemme. — *Soit une partition $\mathfrak{P}$ d'un Δ_r-semi-groupe* (E).

1° *Si, quelle que soit la classe de la partition, l'ensemble des éléments premiers qui appartiennent à cette classe possède un degré, le semi-groupe normé* (F') *associé à la classe principale est un Δ_q-semi-groupe.*

2° *Dans le cas particulier où* (E) *est un D_n-semi-groupe, si, quelle que soit la classe de la partition, l'ensemble des éléments premiers qui appartiennent à cette classe est un* H-*ensemble*, (F') *est un D_m-semi-groupe.*

Démonstration.

1° Ici F est la réunion de E_0 et E_0'.

Puisqu'il existe une bijection conservant la norme de F' sur F, le nombre des éléments de F' de norme au plus égale à x est égal à celui de F. En se reportant au 2.2.5 (théorème II), on voit que ce nombre est $\eta_1(x) - 1$ (-1 provient de l'élément neutre), d'où la proposition énoncée.

2° Soit $E'_{\Omega_1 \Omega_2 \ldots \Omega_{h-1}}$ l'ensemble des éléments de E_0' qui correspond à la solution minimale (o, Ω_1, ..., Ω_{h-1}, posons

$$\sum_{P \in E_i} \frac{1}{(NP)^{s+1}} = \Psi_i(s) = a_{0i}(s) \left(\log \frac{1}{s}\right)^{n_i+1} + a_{1,i}(s) \left(\log \frac{1}{s}\right)^{n_i} + \ldots a_{n_i+1,i}(s) \quad \text{pour} \quad \mathcal{R}s > 0.$$

Les notations sont les mêmes que dans le chapitre 2 de la deuxième partie, E_i est l'ensemble des éléments premiers qui appartiennent à C_i; $a_{ji}(s)$ holomorphe pour $\mathcal{R}s \geqq 0$, réelle pour s réel, $\mu_i = (n_i + 1) a_{0i}(0)$.

On a

$$\sum_{Q \in E'_{\Omega_1 \Omega_2 \ldots \Omega_{h-1}}} \frac{1}{(NQ)^{s+1}} = \sum_{\substack{A \in E \\ \left\{\begin{smallmatrix} \Omega_0(A) = 0 \\ \Omega_1(A) = \Omega_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \Omega_{h-1}(A) = \Omega_{h-1} \end{smallmatrix}\right.}} \frac{1}{(NA)^{s+1}}$$

$$= \sum_{\substack{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{h-1} \\ 0 \leq \alpha_i \leq \Omega_i \\ i = 1, 2, \ldots, h-1}} v_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{h-1}}(s) [\psi_1(s)]^{\alpha_1} \ldots [\psi_{h-1}(s)]^{\alpha_{h-1}} \qquad (\text{pour } \mathcal{R}s > 0),$$

avec $v_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{h-1}}(s)$ holomorphe pour $\mathcal{R}s \geq 0$ et $v_{\Omega_1 \Omega_2 \ldots \Omega_{h-1}}(s) = \frac{1}{\Omega_1 ! \ldots \Omega_{h-1}}!$ d'après le lemme 1.1.9.

$\psi_i(s)^{\alpha_i}$ est un polynome en $\log \frac{1}{s}$ dont les coefficients sont des fonctions holomorphes de s pour $\mathcal{R}s \geq 0$, réelles pour s réel; il en est de même de chaque terme du $\sum$ et du $\sum$; dans le $\sum$ le coefficient du terme de plus fort degré est la fonction

$$v_{\Omega_1 \ldots \Omega_{h-1}}(s) [a_{01}(s)]^{\Omega_1} [a_{02}(s)]^{\Omega_2} \ldots [a_{0,h-1}(s)]^{\Omega_{h-1}}$$
$$= [a_{01}(s)]^{\Omega_1} [a_{02}(s)]^{\Omega_2} \ldots [a_{0,h-1}(s)]^{\Omega_{h-1}} \frac{1}{\Omega_1 ! \ldots \Omega_{h-1} !},$$

pour $s = 0$, cette fonction prend la valeur

$$\left(\frac{\mu_1}{n_1 + 1}\right)^{\Omega_1} \ldots \left(\frac{\mu_{h-1}}{n_{h-1} + 1}\right)^{\Omega_{h-1}} \frac{1}{\Omega_1 ! \ldots \Omega_{h-1} !};$$

donc $E'_{\Omega_1 \ldots \Omega_{h-1}}$ est un H-ensemble.

Puisqu'il existe une bijection conservant la norme de F' sur la réunion des $E'_{\Omega_1 \ldots \Omega_{h-1}}$ et de E_0, F' est un H-ensemble d'éléments premiers (tous les ensembles qui composent la réunion sont disjoints).

2.3.5. Existence des D_n-semi-groupes. — On sait que les ensembles réguliers de densité strictement positive existent, ces ensembles sont des H-ensembles de degré zéro. Si chaque ensemble E_i est un H-ensemble d'éléments premiers de degré zéro et si le groupe des classes est cyclique, F' est un H-ensemble de degré $h - 1$.

2.3.6. Théorème III. — *Soit* C_0 *la classe principale d'une partition* $\mathfrak{P}$ *d'un* Δ_r*-semi-groupe* (E). *Tout élément* B *de* C_0 *est factorisable en éléments de* C_0 *indécomposables dans* C_0. *Nous désignerons par* $\mathcal{N}(B)$ *le nombre de factorisations de* B *et par* $\mathcal{M}(x)$ *la valeur moyenne de la fonction* $B \to \mathcal{N}(B)$, *prise sur les éléments de* C_0 *de norme au plus égale à* x.

1° *Si, quelle que soit la classe de la partition, l'ensemble des éléments premiers qui appartiennent à cette classe possède un degré, on a, lorsque x tend vers l'infini :*

$$\mathfrak{M}(x) = \exp\left\{[1 + o(1)]\frac{K}{T}(\operatorname{Log}\operatorname{Log}x)^{T}\right\}.$$

2° *Dans le cas particulier où* (E) *est un* D_n*-semi-groupe, si, quelle que soit la classe de la partition, l'ensemble des éléments premiers qui appartiennent à cette classe est un* H*-ensemble, on a, lorsque x tend vers l'infini :*

$$\mathfrak{M}(x) \sim \exp[V(\operatorname{Log}\operatorname{Log}x, \operatorname{Log}\operatorname{Log}\operatorname{Log}x)],$$

V *étant un polynome à deux variables, le terme prépondérant de* $V(\operatorname{Log}\operatorname{Log}x, \operatorname{Log}\operatorname{Log}\operatorname{Log}x)$, *pour x infini, est*

$$\frac{K}{T}(\operatorname{Log}\operatorname{Log}x)^{T}.$$

De plus, n_0 étant le degré de l'ensemble d'éléments premiers contenus dans C_0 *:*

$$si\ T \geqq n_0 : \quad degré\ de\ V = T.$$

(*Ceci a lieu, en particulier, si tous les ensembles d'éléments premiers contenus dans les classes sont de même degré.*)

$$si\ T < n_0 : \quad T \leqq degré\ de\ V \leqq n_0.$$

Démonstration.

1° Si $T - 1 \geqq r_0$, le résultat est une conséquence immédiate du théorème 1.2.3; ce théorème ne permet pas de conclure si $T - 1 < r_0$; la démonstration suivante s'applique dans tous les cas.

Soit $\nu(x)$ le nombre des éléments de (E) de norme au plus égale à x et $\nu_1(x)$ le nombre des éléments de (F′) de norme au plus égale à x.

Soit G la réunion des ensembles disjoints $E_1, E_2, \ldots, E_{h-1}$; E est la réunion des ensembles disjoints E_0 et G.

Utilisons la fonction $h(x) = \exp\left[(\operatorname{Log}x)^{1 - \frac{1}{(\operatorname{Log}\operatorname{Log}x)^{\frac{1}{2}}}}\right]$ qui vérifie

$$\sum_{NA \leqq \frac{x}{h(x)}} \frac{1}{NA} \sim \sum_{NA \leqq x} \frac{1}{NA} \quad\Rightarrow\quad \operatorname{Log}\sum_{NA \leqq \frac{x}{h(x)}} \frac{1}{NA} = \left(\operatorname{Log}\sum_{NA \leqq x} \frac{1}{NA}\right) + o(1)$$

pour tout Δ_r-semi-groupe, de plus $\operatorname{Log}\operatorname{Log}h(x) \sim \operatorname{Log}\operatorname{Log}x$.

On a

$$\left(\sum_{\substack{A_0 \in (E_0) \\ NA_0 \leqq \frac{x}{h(x)}}} \frac{1}{NA_0}\right)\left(\sum_{\substack{B' \in (G) \\ NB' \leqq h(x)}} \frac{1}{NB'}\right) \leqq \sum_{\substack{A \in (E) \\ NA \leqq x}} \frac{1}{NA} \leqq \left(\sum_{\substack{A_0 \in (E_0) \\ NA_0 \leqq x}} \frac{1}{NA_0}\right)\left(\sum_{\substack{B' \in (G) \\ NB' \leqq x}} \frac{1}{NB'}\right),$$

d'où

$$o(1) + \operatorname{Log} \sum_{\substack{A_0 \in (E_0) \\ NA_0 \leq x}} \frac{1}{NA_0} + \operatorname{Log} \sum_{\substack{B' \in (G) \\ NB' \leq h(x)}} \frac{1}{NB'} \leq \operatorname{Log} \sum_{\substack{A \in (E) \\ NA \leq x}} \frac{1}{NA} \leq \operatorname{Log} \sum_{\substack{A_0 \in (E_0) \\ NA_0 \leq x}} \frac{1}{NA_0} + \operatorname{Log} \sum_{\substack{B' \in (G) \\ NB' \leq x}} \frac{1}{NB'}.$$

Si r' est le maximum des degrés $r_1, r_2, \ldots, r_{h-1}$ de $E_1, E_2, \ldots, E_{h-1}$:

$$\operatorname{Log} \sum_{\substack{B' \in (G) \\ NB' \leq x}} \frac{1}{NB'} = \frac{\mu'}{r'+1} (\operatorname{Log} \operatorname{Log} x)^{r'+1} [1 + o(1)]$$

d'après le théorème 1.2.3, donc

$$\operatorname{Log} \sum_{\substack{B' \in (G) \\ NB' \leq h(x)}} \frac{1}{NB'} = \frac{\mu'}{r'+1} [\operatorname{Log} \operatorname{Log} h(x)]^{r'+1} [1 + o(1)] = \frac{\mu'}{r'+1} [\operatorname{Log} \operatorname{Log} x]^{r'+1} [1 + o(1)],$$

d'où

$$\operatorname{Log} \sum_{\substack{A \in (E) \\ NA \leq x}} \frac{1}{NA} = \operatorname{Log} \sum_{\substack{A_0 \in (E_0) \\ NA_0 \leq x}} \frac{1}{NA_0} + \frac{\mu'}{r'+1} (\operatorname{Log} \operatorname{Log} x)^{r'+1} [1 + o(1)].$$

Puisqu'il existe une bijection conservant la norme de F' sur la réunion de E_0 et de E'_0, on a donc, d'après le raisonnement précédent :

$$\operatorname{Log} \sum_{\substack{A' \in (F') \\ NA' \leq x}} \frac{1}{NA'} = \operatorname{Log} \sum_{\substack{A_0 \in (E_0) \\ NA_0 \leq x}} \frac{1}{NA_0} + \frac{K}{T} (\operatorname{Log} \operatorname{Log} x)^{T} [1 + o(1)].$$

Le nombre des éléments de la classe principale de norme au plus égale à x est équivalent à $\frac{\nu(x)}{h}$ d'après le théorème I d'équirépartition asymptotique; d'où

$$\mathfrak{M}(x) \sim h \frac{\nu_1(x)}{\nu(x)} \sim K_1 (\operatorname{Log} \operatorname{Log} x)^{T-1-r} \frac{\displaystyle\sum_{\substack{A' \in (F') \\ NA' \leq x}} \frac{1}{NA'}}{\displaystyle\sum_{\substack{A \in (E) \\ NA \leq x}} \frac{1}{NA}},$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Log} \mathfrak{M}(x) = {} & o(1) + (T - 1 - r) \operatorname{Log} \operatorname{Log} \operatorname{Log} x + \operatorname{Log} \sum_{\substack{A' \in (F') \\ NA' \leq x}} \frac{1}{NA'} - \operatorname{Log} \sum_{\substack{A \in (E) \\ NA \leq x}} \frac{1}{NA} \\ = {} & o(1) + (T - 1 - r) \operatorname{Log} \operatorname{Log} \operatorname{Log} x + \frac{K}{T} (\operatorname{Log} \operatorname{Log} x)^{T} [1 + o(1)] \\ & - \frac{\mu'}{r'+1} (\operatorname{Log} \operatorname{Log} x)^{r'+1} [1 + o(1), \end{aligned}$$

mais

$$T = \max [(r_1 + 1) \Omega_1 + \ldots + (r_{h-1} + 1) \Omega_{h-1}] \geq 2(r' + 1) > r' + 1$$
(le maximum est pris sur les solutions minimales),

donc

$$\operatorname{Log} \mathfrak{M}(x) = \frac{K}{T} (\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{T} [1 + o(1)].$$

2° D'après le théorème 1.3.2 :

$$\nu_1(x) = x \exp[V_1(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x, \operatorname{Log}\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)],$$
$$\nu\ (x) = x \exp[V_2(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x, \operatorname{Log}\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)];$$

donc

$$\mathfrak{M}(x) = \frac{h\,\nu_1(x)}{\nu(x)} = \exp[V(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x, \operatorname{Log}\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)].$$

$n_0, n_1, \ldots, n_{h-1}$ étant les degrés de $E_0, E_1, \ldots, E_{h-1}$, on a

$$\text{degré de } V_1 = \begin{cases} T & \text{si } T - 1 > n_0, & \text{terme prépondérant : } \dfrac{K}{T}(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{T}, \\ T & \text{si } T - 1 = n_0, & \text{»} \quad \text{»} \quad \dfrac{K + \mu_0}{T}(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{T}, \\ n_0 + 1 & \text{si } T - 1 < n_0, & \text{»} \quad \text{»} \quad \dfrac{\mu_0}{n_0 + 1}(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{n_0+1}; \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \text{degré de } V_2 = n + 1,\ \text{terme prépondérant} = \\ \quad (\text{sauf dans le cas où } n = 0 \text{ et } \mu = 1) \end{array} \begin{cases} \dfrac{\mu}{n+1}(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{n+1} & \text{si } n > 0, \\ (\mu - 1)\operatorname{Log}\operatorname{Log} x & \text{si } n = 0 \text{ et } \mu \neq 1, \end{cases}$$

si $n = 0$ et $\mu = 1$, $V_2 = \text{Cte}$.

a. Si $T - 1 > n_0$,

$$T - 1 > n = \max(n_0, \ldots, n_{h-1}),$$

degré de $V = T$, terme prépondérant $\frac{K}{T}(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{T}$.

b. Si $T - 1 = n_0 > n' = \max(n_1, \ldots, n_{h-1})$,

$$n = T - 1, \qquad \mu = \mu_0,$$

degré de $V = T$, terme prépondérant $\frac{K}{T}(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{T}$.

c. Si $T - 1 < n_0$, $n = n_0$, $\mu = \mu_0$,

$$\text{degré } V \leqq n_0 + 1\,;$$

mais, d'après la première partie, le terme prépondérant est encore $\frac{K}{T}(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{T}$; donc

$$T \leqq \text{degré } V \leqq n_0 + 1.$$

L'ensemble des termes de degré $n_0 + 1$ dans V_1 et V_2 est

$$\frac{\mu_0}{n_0 + 1}(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x - n_0 \operatorname{Log}\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^{n_0+1} \qquad (\textit{voir } 1.2.3.4),$$

donc

$$T \leqq \text{degré de } V \leqq n_0;$$

si $T = n_0$,

$$\text{degré de } V = T;$$

si $T < n_0$,

$$T \leqq \text{degré de } V \leqq n_0.$$

Le fait que le terme prépondérant de V est encore $\frac{K}{T}(\operatorname{Log}\operatorname{Log} x)^T$ peut être montré sans utiliser la première partie en remontant à la détermination des polynomes V_1 et V_2.

CHAPITRE 4.

Applications aux idéaux dans les corps de nombres algébriques.

Les théorèmes établis dans ce travail s'appliquent à certains ensembles d'idéaux dans les corps de nombres algébriques, on retrouve ainsi des propriétés connues et l'on en obtient de nouvelles; en particulier les théorèmes II et III donnent des résultats nouveaux.

2.4.1. Notations. — E est l'ensemble des idéaux premiers de l'anneau des entiers du corps $K(\theta)$ (idéaux du corps par abus de langage). (E) est l'ensemble des idéaux privé de l'idéal zéro.

2.4.2. Théorème. — *L'ensemble des idéaux d'un corps de nombres algébriques (privé de l'idéal zéro) est un* D-*semi-groupe.*

Démonstration. — On sait que la fonction $\sum_{A \in (E)} \frac{1}{(NA)^s}$ définie pour $\mathcal{R}s > 1$ est prolongeable analytiquement dans tout le plan par la fonction $\zeta_K(s)$ de Dedekind.

1° $\zeta_K(s)$ est méromorphe avec le seul pôle simple $s = 1$ et le résidu λh;

2° $\zeta_K(s)$ n'admet pas de zéro pour $\mathcal{R}s \geqq 1$; donc pour $\mathcal{R}s > 1$:

$$\sum_{A \in (E)} \frac{1}{(NA)^s} = \frac{u(s)}{s-1} \qquad \text{avec } u(s) \text{ holomorphe et } u(s) \neq 0 \text{ pour } \mathcal{R}s \geqq 1.$$

On a $u(1) = \lambda h$. (E) est un D-semi-groupe avec $\mu = 1$.

2.4.3. Corollaire (*Résultats connus*).

1° *Le nombre des idéaux d'un corps de nombres algébriques, de norme au plus égale à x, est équivalent, pour x infini, à*

$$\lambda h x.$$

2° ([5]) *Le nombre des idéaux premiers d'un corps de nombres algébriques, de norme au plus égale à x, est équivalent, pour x infini, à*

$$\frac{x}{\operatorname{Log} x}.$$

Démonstration. — Conséquence des paragraphes 1.3.8 et 1.3.2 :

$$u(1) = \lambda h = g(1)\,e^{a(1)} = g e^{a_1}.$$

2.4.4. Les relations d'équivalence entre idéaux, mod un idéal, de Landau ([6]).

2.4.4.1. *Définition des relations d'équivalence.* — Pour ces définitions, nous renverrons le lecteur à l'article de Landau. Rappelons toutefois les trois points suivants :

1° Toutes ces relations sont définies dans l'ensemble des idéaux premiers avec un idéal donné F, c'est-à-dire dans le semi-groupe $(E^\star)$, $E^\star$ étant la différence entre l'ensemble E des idéaux premiers du corps et l'ensemble des idéaux premiers qui divisent F.

2° Landau distingue trois sortes d'équivalence : sens strict, sens large, sens le plus large.

3° L'équivalence au sens ordinaire est identique à l'équivalence mod l'idéal unité au sens le plus large.

2.4.4.2. *Propriétés algébriques des relations d'équivalence de Landau.*

1° Si le nombre des classes est strictement supérieur à 1, ces classes (sens strict, sens large ou sens le plus large) déterminent une partition $\mathfrak{T}$ de $(E^\star)$.

2° Chaque classe (mod F) sens large est la réunion d'un même nombre de classes (mod F) sens strict; chaque classe (mod F) sens le plus large est la réunion d'un même nombre de classes (mod F) sens large.

2.4.4.3. *Propriétés analytiques des relations de Landau.* — Soit χ_0, χ_1, ..., χ_{h-1} les caractères du groupe abélien des classes, χ_0 caractère principal;

si A n'appartient pas à $(E^\star)$ on pose $\chi_j(A) = 0$;

si A appartient à $(E^\star)$ on pose $\chi_j(A) = \chi_j$ (classe de A).

([5]) Landau, 1903.

([6]) Landau, *Math. Z.*, 1918, p. 52-154.

A chaque caractère χ_j correspond une fonction $\zeta_j(s)$ telle que pour $\mathcal{R}s > 1$, on ait

$$\sum_{A \in (E)} \frac{\chi_j(A)}{(NA)^s} = \zeta_j(s),$$

avec :

a. si $j \neq 0$, $\zeta_j(s)$ fonction entière et $\zeta_j(s) \neq 0$ pour $\mathcal{R}s \geq 1$;

b. si $j = 0$,

$$\zeta_0(s) = \frac{u(s)}{s-1},$$

avec $u(s)$ fonction entière et $u(s) \neq 0$ pour $\mathcal{R}s \geq 1$. Des propriétés précédentes on déduit le théorème :

2.4.5. Théorème. — *Quelle que soit la classe de la partition déterminée par une relation d'équivalence* (mod F) *de Landau* (*sens strict, sens large, sens le plus large et en particulier sens ordinaire*), *l'ensemble des idéaux premiers qui appartiennent à cette classe est un ensemble régulier de densité strictement positive. Le semi-groupe* (E^*) *des idéaux premiers avec* F *est un* D-*semi-groupe. Si le nombre des classes est strictement supérieur à* 1, *ces classes déterminent une partition* $\mathfrak{P}$ *de ce semi-groupe; de plus, les ensembles réguliers d'idéaux premiers contenus dans les classes ont même densité.*

(Transposition de la démonstration des *Annales*, p. 38, 39 et 40.)

2.4.6. Conséquences. — L'équirépartition asymptotique des idéaux entre les classes d'équivalence (mod F) de Landau est donc un cas particulier du théorème I.

Les théorèmes II et III donnent des résultats nouveaux. Afin d'éviter des longueurs, citons seulement ces résultats dans le cas des classes au sens ordinaire, c'est-à-dire au sens le plus large de Landau (mod l'idéal unité).

2.4.7. Corollaire. — *Dans un corps de nombres algébriques dans lequel l'anneau des entiers n'est pas principal* (*nombre des classes d'idéaux strictement supérieur à* 1), *le nombre d'idéaux principaux, de norme au plus égale à x, qui sont indécomposables en un produit de deux idéaux principaux* (*tous deux différents de l'idéal unité*) *est équivalent, pour x infini, à*

$$K \frac{x (\operatorname{Log} \operatorname{Log} x)^{t-1}}{\operatorname{Log} x};$$

K *et t dépendent du corps, t est un entier strictement supérieur à* 1.

Tout idéal principal B *est factorisable de* $\mathfrak{N}(B)$ *manières différentes en un produit d'idéaux principaux indécomposables* (*en produit d'idéaux prin-*

cipaux). *La valeur moyenne de la fonction* $B \to \mathfrak{N}(B)$, *prise sur l'ensemble des idéaux principaux de norme au plus égale à* x, *est équivalente, pour* x *infini, à*

$$\exp[V(\operatorname{Log}\operatorname{Log}x, \operatorname{Log}\operatorname{Log}\operatorname{Log}x)];$$

V *étant un polynome à deux variables de degré* t, *le terme prépondérant de* $V(\operatorname{Log}\operatorname{Log}x, \operatorname{Log}\operatorname{Log}\operatorname{Log}x)$, *pour* x *infini, est*

$$\frac{K}{t}(\operatorname{Log}\operatorname{Log}x)^t,$$

BIBLIOGRAPHIE SPÉCIALISÉE.

DELANGE, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 3e série, t. 73, 1956.
DELANGE, *Bull. Soc. Roy. Sciences Liège*, 1961.
INGHAM, *Ann. Math.*, vol. 42, 1941.
WIRSING, *Arch. Math.*, vol. VII, 1956.
WIRSING, *Math. Annalen*, vol. 143, 1961, p. 75-102.