ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

CHRISTIAN COATMÉLEC

Approximation et interpolation des fonctions différentiables de plusieurs variables

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 83, nº 4 (1966), p. 271-341
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1966_3_83_4_271_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
3e série, t. 83, 1966, p. 271 à 341.

APPROXIMATION ET INTERPOLATION

DES

FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES DE PLUSIEURS VARIABLES

PAR M. CHRISTIAN COATMÉLEC.

INTRODUCTION.

Ce travail est une contribution à l'approximation et à l'interpolation des fonctions de plusieurs variables. Nous nous sommes efforcé de donner des procédés explicites d'approximation et nous avons réalisé, au moins dans le cas de fonctions définies sur une partie de $\mathbf{R}^2$, des expériences numériques dont nous donnons un aperçu en (IV.3), (IV.4) et (IV.5). Ces résultats numériques sont développés dans (Coatmélec et Houssais [1]). Un problème assez général, qui demande naturellement à être précisé, est le suivant : étant donnée une fonction f définie sur un pavé de $\mathbf{R}^n$ et contenue dans un espace fonctionnel A il s'agit de réaliser une approximation de f sur ce pavé, par une fonction $P[f]$ appartenant à un espace donné B, en n'utilisant que les renseignements qu'on possède, pour f, sur un fermé F de $\mathbf{R}^n$.

Le théorème du prolongement de Whitney (Whitney [1], Glaeser [1], Schwartz [1], Malgrange [1]) résout un problème très important de ce type. Nous utiliserons ce théorème plusieurs fois. Il ne semble pas que ce théorème de prolongement, dont l'importance en mathématiques pures n'a fait que croître, ait attiré suffisamment l'attention des usagers de l'analyse numérique. Cela tient au fait que les démonstrations connues sont présentées sans souci de constructivité. Nous avons fait un premier pas pour construire des majorations et des algorithmes utilisables. Notons pour l'instant que le théorème de Whitney permet de définir correctement une fonction m fois continûment différentiable dans un fermé de $\mathbf{R}^n$.

Dans le chapitre I, après avoir précisé des notations et définitions, nous démontrons une généralisation de l'inégalité de Markoff dans le cas d'un convexe d'intérieur non vide de $\mathbf{R}^n$. Cette inégalité nous servira souvent : elle n'est pas une généralisation triviale de l'inégalité classique pour une variable sauf si l'on considère un parallélotope rectangle de $\mathbf{R}^n$. Des constantes de majoration sont précisées pour quelques convexes de forme particulière dans $\mathbf{R}^n$. Nous définissons ensuite, sur l'espace $W^m(E)$ des champs tayloriens définis sur un compact E de $\mathbf{R}^n$, une norme uniformément équivalente à la norme quotient [$W^m(E)$ est isomorphe au quotient de l'espace $\mathcal{C}^m(C)$, des fonctions m-fois continûment dérivables sur un cube C contenant E, par l'idéal $\mathcal{J}^m(E)$ des fonctions m-plates sur E]. Nous précisons les constantes d'équivalence de cette norme, avec d'autres utilisées par Whitney et Glaeser, et montrons l'équivalence entre un théorème de Whitney et un théorème de Dubovitsky.

Dans le chapitre II, nous démontrons tout d'abord quelques résultats qui concernent l'approximation au sens de la norme

$$\|f\|_C^m = \max_{0 \leq k \leq m} \left(\max_{M \in C} \left| \frac{\partial^K f}{\partial X^K}(M) \right| \right).$$

Cette $\mathcal{C}^m$-approximation de f par des polynomes d'interpolation nous permet, dans (II.2), de donner un théorème concernant la recherche systématique de formules d'approximation pour $\frac{\partial^K f}{\partial X^K}(M)$ au point M en fonction des valeurs de f sur un système de points « voisins » de M. Dans (II.3), au lieu de prendre un point de vue local, nous traitons de la $\mathcal{C}^m$-approximation, sur un compact C, par des polynomes d'interpolation : nous formons une suite $\{L_N[f]\}$ de polynomes de degrés N et nous insistons sur l'ordre infinitésimal de convergence. En particulier, nous démontrons que si k et p sont entiers positifs quelconques et $f \in \mathcal{C}^\infty(C)$. On a

$$\lim_{N \to +\infty} \|f - L_N[f]\|_C^k N^p = 0.$$

Le paragraphe (II.4) étudie un problème différent : il ne concerne plus l'approximation par des opérateurs linéaires d'interpolation mais par des opérateurs linéaires positifs. Nous généralisons à $\mathbf{R}^n$ un théorème, dû à Korovkin dans le cas où $n = 1$. Nous précisons des conditions nécessaires et suffisantes très utilisables pour le cas où le domaine de définition est un simplexe de $\mathbf{R}^n$. La conséquence immédiate est alors une généralisation des polynomes de Bernstein à un simplexe de $\mathbf{R}^n$. Cette généralisation est sans doute connue mais les méthodes exposées nous précisent immédiatement des bornes d'erreur qui coïncident dans le cas où $n = 1$ avec les bornes d'erreur classiques.

Le chapitre III est consacré à l'exploitation de la donnée d'un champ taylorien d'ordre m sur un ensemble E de points arbitrairement répartis dans $\mathbf{R}^n$. Il est facile de construire et d'expliciter une fraction rationnelle Q_N définie par

$$Q_N(M) = \sum_1^N s_i(M)\, T_{A_i}(M),$$

où les s_i ne dépendent que des points A_i, qui résout le théorème de Whitney dans le cas d'un ensemble fini de points. Malheureusement sans même parler des difficultés numériques, ce procédé est en général divergent comme le montre l'exemple de Runge (Montel [1], p. 55). Nous avons alors pensé à introduire des « pseudos-splines » analogues aux splines de Schoenberg. Nous définissons une fonction, polynomiale sur chaque simplexe d'un recouvrement simplicial de l'enveloppe convexe de E, et de degré pas trop élevé. Aux points de E la fonction ainsi définie est m fois continûment dérivable et induit sur E le champ donné. Nous donnons des théorèmes de convergence qui sont néanmoins insuffisants pour construire effectivement un prolongement lorsque E est un compact quelconque de $\mathbf{R}^n$.

Dans le chapitre IV nous étudions la convergence d'une méthode fondamentale en analyse numérique : l'extrapolation à la limite. Nous nous bornons dans (IV.1) à l'énoncé et à la démonstration des deux théorèmes principaux que nous avons obtenus. Une étude plus vaste sera faite dans (Coatmélec [2]). Les deux théorèmes démontrés dans (IV.1) suffisent pour expliquer l'efficacité d'une méthode que Laurent, dans (Laurent [1]), a appliquée systématiquement à de nombreux problèmes d'analyse numérique. La fin du chapitre IV indique quelques résultats numériques relatifs à l'ensemble de ce travail et une application à l'intégration dans $\mathbf{R}^n$ lorsque les points sont irrégulièrement répartis.

CHAPITRE I.

Majorations relatives au théorème du prolongement de Whitney.

(I.1) Énoncé de quelques définitions. — $\mathbf{R}^n$ sera rapporté :

a. à une base orthonormée $(\vec{E}_1, \ldots, \vec{E}_n)$ de sommet O : les coordonnées de M seront $(X_1, \ldots, X_n)$;

b. à une base normée quelconque $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ de sommet A : les coordonnées de M seront $(u_1, \ldots, u_n)$;

c. à un simplexe de $\mathbf{R}^n$, c'est-à-dire à $(n+1)$ points $A_1, \ldots, A_{n+1}$ non coplanaires et alors M sera défini par ses coordonnées barycentriques relativement aux A_i : $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$, avec $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1$. Nous dirons que M est dans le simplexe $S(A_1, \ldots, A_{n+1})$ si l'on a : $0 \leqq x_i \leqq 1$ pour $i = 1, 2, \ldots, n+1$.

La distance de deux points M_1 et M_2 de $\mathbf{R}^n$ sera toujours la distance euclidienne notée M_1M_2.

Si E désigne un compact dans $\mathbf{R}^n$ nous poserons avec k_i entier $\geqq 0$ et pour f k-fois différentiable continûment dans un ouvert E_1 de $\mathbf{R}^n$ contenant E :

$$\frac{\partial^{\mathrm{K}} f}{\partial \mathrm{X}^{\mathrm{K}}} = \frac{\partial^{k_1+k_2+\ldots+k_n} f}{\partial \mathrm{X}_1^{k_1} \ldots \partial \mathrm{X}_n^{k_n}} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathrm{K} = (k_1, k_2, \ldots, k_n), \\ k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n, \end{cases}$$

$$\|f\|_{\mathrm{E}} = \max_{\mathrm{M} \in \mathrm{E}} |f(\mathrm{M})| \quad \text{et} \quad \|f\|_{\mathrm{E}}^k = \max_{0 \leqq i \leqq k} \left\| \frac{\partial^{\mathrm{I}} f}{\partial \mathrm{X}^{\mathrm{I}}} \right\|_{\mathrm{E}},$$

$$\mathrm{M}_k(f, \mathrm{E}) = \max_{k_1+\ldots+k_n=k} \left\| \frac{\partial^{\mathrm{K}} f}{\partial \mathrm{X}^{\mathrm{K}}} \right\|_{\mathrm{E}}.$$

Pour $f \in \mathcal{C}^m(E_1)$ et $A \in E_1$ nous appellerons $T_A[f]$ le polynome de Taylor de f en A. C'est un élément, pour A fixé, d'un espace vectoriel à $m_1 = \binom{m+n}{n}$ dimensions, défini par exemple par les données des m_1 valeurs réelles $\frac{\partial^{\mathrm{K}} f}{\partial \mathrm{X}^{\mathrm{K}}}(\mathrm{A})$, où K est un multi-indice prenant toutes les valeurs possibles telles que $0 \leqq k \leqq m$. La valeur en $\mathrm{M} \in \mathbf{R}^n$ de $T_A[f]$ sera notée $T_A[f](\mathrm{M})$. Une fonction $f \in \mathcal{C}^m(E_1)$ induit sur E le champ de polynomes défini par $A \to T_A[f]$. Ce champ est appelé le champ taylorien associé à f sur E.

Réciproquement, étant donné sur E un champ (de polynomes de degrés $\leqq m$) défini par $A \to T_A$, les conditions auxquelles doit satisfaire ce champ pour qu'il soit la restriction à E du champ taylorien associé à une fonction $f \in \mathcal{C}^m(E_1)$, où E_1 est un ouvert contenant E, ont été données par Whitney : Whitney [1] et sont rappelées en I.4.3.

(I.2) Modules de continuité. — Dans ce paragraphe nous généralisons à $\mathbf{R}^n$ une définition de De la Vallée-Poussin [1] et un théorème de Steckin et Efimov [1] pour introduire naturellement le module concave de continuité utilisé par Glaeser dans (Glaeser [1]).

(I.2.1) *Module de continuité d'une fonction f uniformément continue sur un convexe* C *de* $\mathbf{R}^n$. — Si f est uniformément continue sur C nous poserons

$$\omega(f, \delta) = \sup_{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2 \leqq \delta} |f(\mathrm{M}_1) - f(\mathrm{M}_2)|, \qquad \text{avec} \quad \mathrm{M}_1 \in \mathrm{C} \quad \text{et} \quad \mathrm{M}_2 \in \mathrm{C}.$$

La fonction $\omega(f, .)$ de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}^+$ définie ainsi est le module de continuité de f sur C.

Les propriétés suivantes sont vérifiées par $\omega(f, .)$:

(I.2.1.1) $\omega(f, 0) = 0$;

(I.2.1.2) $\omega(f, .)$ est non décroissante;

(I.2.1.3) $\omega(f, .)$ est continue à l'origine;

(I.2.1.4) $\omega(f, \delta_1 + \delta_2) \leqq \omega(f, \delta_1) + \omega(f, \delta_2)$ pour $\delta_1 \geqq 0$ et $\delta_2 \geqq 0$.

La continuité de $\omega(f, .)$ sur $[0, +\infty[$ en résulte. Pour démontrer (I.2.1.4) on utilise la convexité de C.

De plus, on a

(I.2.1.5) $\omega(f, N\delta) \leqq N\omega(f, \delta)$ pour N entier $\geqq 0$ et $\delta \geqq 0$;
$\omega(f, \lambda\delta) \leqq (\lambda + 1)\,\omega(f, \delta)$ pour δ et $\lambda \geqq 0$.

(I.2.2) *Module de continuité.* — Soit ω fonction de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}^+$ satisfaisant à :

(I.2.2.1) $\omega(0) = 0$;

(I.2.2.2) pour h et δ positifs quelconques :

$$0 \leqq \omega(\delta + h) - \omega(\delta) \leqq \omega(h).$$

Nous dirons que ω est un module de continuité et nous désignerons par $H(a, \omega, C)$ l'ensemble des f uniformément continues sur C telles que

$$\omega(f, \delta) \leqq a\,\omega(\delta).$$

(I.2.3) *Module concave de continuité.* — Soit $\hat{\omega}$ une fonction de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}^+$ telle que :

(I.2.3.1) $\hat{\omega}(0) = 0$;

(I.2.3.2) $\hat{\omega}$ est non décroissante;

(I.2.3.3) $\hat{\omega}$ est concave;

(I.2.3.4) $\hat{\omega}$ est continue à l'origine.

Nous dirons que $\hat{\omega}$ est un module concave de continuité.

Le théorème de Steckin (Efimov [1]) s'énonce ainsi :

Si ω est un module de continuité défini sur un segment $[0, d]$ de R^+ comme on l'a fait en (I.2.2), *alors il existe un module concave $\hat{\omega}$ de continuité défini sur $[0, d]$ tel que :*

(I.2.3.5) $\omega(\delta) \leqq \hat{\omega}(\delta) \leqq 2\omega(\delta)$.

La constante 2 ne peut être remplacée par $2 - \varepsilon$, avec $\varepsilon > 0$.

(I.2.4) *k-module de continuité de f sur* C. — Pour C convexe de $\mathbf{R}^n$ et $f \in \mathcal{C}^k(C_1)$ nous poserons (avec $M_1 \in C$ et $M_2 \in C$)

$$\omega(f, C, k, \delta) = \max_{k_1 + \ldots + k_n = k} \left(\max_{M_1 M_2 \leqq \delta} \left| \frac{\partial^K f}{\partial X^K}(M_1) - \frac{\partial^K f}{\partial X^K}(M_2) \right| \right)$$

et s'il n'y a pas d'ambiguïté :

$$\omega(f, k, \delta) = \omega(f, C, k, \delta).$$

Nous avons $\omega(f, 0, \delta) = \omega(f, \delta)$.

Par (I.2.3.5) nous pouvons toujours associer à $\omega(f, C, k, .)$ un k-module *concave* de continuité $\hat{\omega}(f, C, k, .) \leqq 2\omega(f, C, k, .)$.

(I.3) Inégalités de Markoff dans $\mathbf{R}^n$. — Soit $C = [a, b]$ dans R^1 et soit P un polynome (une variable X) de degré $\leqq N$. Nous connaissons l'inégalité de A. A. Markoff (A. A. Markoff [1])

$$\left\| \frac{dP}{dX} \right\|_C \leqq \frac{2N^2}{b-a} \| P \|_C.$$

Cette inégalité se généralise immédiatement à un parallélotope *rectangle* $\mathcal{P}_R$ lorsque $\mathcal{P}_R$ a ses côtés parallèles aux vecteurs $(\vec{E}_1, \ldots, \vec{E}_n)$ de la base canonique de $\mathbf{R}^n$. Soit, en effet, $(h_1, \ldots, h_n)$ les longueurs des côtés de $\mathcal{P}_R$. Pour $M \in \mathcal{P}_R$ on a

$$\left| \frac{\partial P}{\partial X_i}(M) \right| \leqq \frac{2N^2}{h_i} \| P \|_{\mathcal{P}_R}$$

et donc

$$\left\| \frac{\partial P}{\partial X_i} \right\|_{\mathcal{P}_R} \leqq \frac{2N^2}{h_i} \| P \|_{\mathcal{P}_R}$$

De proche en proche on en déduit

$$\left\| \frac{\partial^K P}{\partial X^K} \right\|_{\mathcal{P}_R} \leqq \frac{2^k N^2 (N-1)^2 \ldots (N-k+1)^2}{h_1^{k_1} \ldots h_n^{k_n}} \| P \|_{\mathcal{P}_R}. \tag{I.3.0}$$

Nous proposons d'étendre les résultats à d'autres convexes compacts de $\mathbf{R}^n$.

Sans chercher à savoir si les constantes introduites sont les plus petites (ou les plus grandes) possibles nous nous sommes attaché à mettre en évidence, au second membre des inégalités, non seulement une fonction du degré du polynome, mais aussi des expressions de nature géométrique.

De telles inégalités sont utiles lorsqu'on veut effectuer des approximations mettant en œuvre des polynomes de degré de plus en plus élevé définis sur des découpages, d'une partie de $\mathbf{R}^n$, en morceaux variables de plus en plus petits.

(I.3.1) *Inégalité pour un parallélotope quelconque* $\mathcal{P}$. — Soit un parallélotope $\mathcal{P}$ quelconque défini par les vecteurs $(\overrightarrow{I_{n+1} I_1}, \overrightarrow{I_{n+1} I_2}, \ldots, \overrightarrow{I_{n+1} I_n})$ dans $\mathbf{R}^n$. Soient $h_1, \ldots, h_n$ les n hauteurs de $\mathcal{P}$. Considérons une base

normée $M(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ de sommet M à côtés parallèles aux côtés de $\mathcal{T}$ et soient $\alpha_{1i}, \ldots, \alpha_{ni}$ les composantes de $\vec{E}_i$ sur cette base normée.

Après avoir calculé α_{pi}, rapport, de deux déterminants, dont le numérateur est inférieur à l'aire d'une face du parallélotope construit sur $M(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ et le dénominateur est égal (au signe près) au volume de ce parallélotope, on en déduit

$$|\alpha_{pi}| \leq \frac{1}{\lambda_p},$$

où λ_p est la hauteur, du parallélotope construit sur $M(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$, relative à la face non parallèle à $\vec{e}_p$.

De plus, $\frac{h_p}{\lambda_p} = \frac{I_{n+1} I_p}{1}$ et donc :

$$|\alpha_{pi}| \leq \frac{I_{n+1} I_p}{h_p} \tag{I.3.1.1}$$

qui est indépendant de i.

On en déduit le Théorème :

(I.3.1.2) *Si $\mathcal{T}$ dans $\mathbf{R}_n$ a pour hauteur $h_1, \ldots, h_n$, alors*

$$\left\| \frac{\partial P}{\partial X} \right\|_{\mathcal{T}} \leq 2 \left(\frac{1}{h_1} + \ldots + \frac{1}{h_n} \right) N^2 \| P \|_{\mathcal{T}}.$$

En effet, si $u_1, \ldots, u_n$ désignent les coordonnées par rapport aux $\vec{e}$ on a

$$\left| \frac{\partial P}{\partial X_i}(M) \right| \leq |\alpha_{1i}| . \left| \frac{\partial P}{\partial u_1}(M) \right| + \ldots + |\alpha_{ni}| . \left| \frac{\partial P}{\partial u_n}(M) \right|$$

et

$$\left\| \frac{\partial P}{\partial X_i} \right\|_{\mathcal{T}} \leq 2 N^2 \| P \|_{\mathcal{T}} \left(\frac{|\alpha_{1i}|}{I_{n+1} I_1} + \ldots + \frac{|\alpha_{ni}|}{I_{n+1} I_n} \right)$$

qui, par (I.3.1.1), donne l'inégalité (I.3.1.2).

Remarque. — Si $h = \inf_i h_i$ on a

$$\left\| \frac{\partial P}{\partial X} \right\|_{\mathcal{T}} \leq \frac{2 n N^2}{h} \| P \|_{\mathcal{T}}. \tag{I.3.1.3}$$

Lorsque $\mathcal{T}$ est rectangle, on peut améliorer légèrement en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $\frac{|\alpha_{1i}|}{I_{n+1} I_1} + \ldots + \frac{|\alpha_{ni}|}{I_{n+1} I_n}$,

$$\left\| \frac{\partial P}{\partial X} \right\|_{\mathcal{T}_R} \leq 2 N^2 \sqrt{\frac{1}{h_1^2} + \ldots + \frac{1}{h_n^2}} \| P \|_{\mathcal{T}_R} \tag{I.3.1.4}$$

et

$$\left\| \frac{\partial P}{\partial X} \right\|_{\mathcal{T}_R} \leq \frac{2\sqrt{n} N^2}{h} \| P \|_{\mathcal{T}_R}. \tag{I.3.1.5}$$

(I.3.2) *Inégalité pour une boule de* $\mathbf{R}_n$. — Soit C une boule de $\mathbf{R}_n$, R son rayon. Tout point M de C est contenu dans un hypercube $\mathcal{P}_M \subset C$ de côté $h = \frac{2R}{\sqrt{n}}$, on a donc

$$\left|\frac{\partial P}{\partial X}(M)\right| \leq \frac{N^2 n}{R} \| P \|_{\mathcal{P}_M}$$

et donc

$$\left\|\frac{\partial P}{\partial X}\right\|_C \leq \frac{N^2 n}{R} \| P \|_C. \tag{I.3.2.1}$$

(I.3.3) *Inégalité relative à un simplexe.* — Soit C un simplexe de sommets $A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}$ et de hauteurs respectives $h_1, \ldots, h_n, h_{n+1}$. Recouvrons C par $(n+1)$ parallélotopes $\mathcal{P}_i$ définis pour $i = 1$ à n comme $\mathcal{P}_{n+1}$: $\mathcal{P}_{n+1}$ est le parallélotope de sommet A_{n+1} et défini par les vecteurs $\left(\frac{\overrightarrow{A_{n+1}A_1}}{2}, \ldots, \frac{\overrightarrow{A_{n+1}A_n}}{2}\right)$.

Les hauteurs de $\mathcal{P}_{n+1}$ sont $\frac{h_1}{2}, \ldots, \frac{h_n}{2}$ et l'on a pour $M \in \mathcal{P}_{n+1}$

$$\left|\frac{\partial P}{\partial X}(M)\right| \leq 4\left(\frac{1}{h_1} + \ldots + \frac{1}{h_n}\right) N^2 \| P \|_C.$$

En raisonnant de même dans les $\mathcal{P}_i$ on a finalement

$$\left\|\frac{\partial P}{\partial X}\right\|_C \leq 4\left(\frac{1}{h_1} + \ldots + \frac{1}{h_n} + \frac{1}{h_{n+1}}\right) N^2 \| P \|_C \tag{I.3.3.1}$$

et si $h = \inf_i h_i$:

$$\left\|\frac{\partial P}{\partial X}\right\|_C \leq \frac{4(n+1)}{h} N^2 \| P \|_C. \tag{I.3.3.2}$$

Si l'on désigne par r le rayon de la sphère inscrite dans C :

$$\left\|\frac{\partial P}{\partial X}\right\| \leq \frac{4}{r} N^2 \| P \|_C, \quad \text{car} \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{h_1} + \ldots + \frac{1}{h_{n+1}}. \tag{I.3.3.3}$$

Remarque. — Si C est équilatéral il résulte de (I.3.3.3) que si R désigne le rayon de la sphère circonscrite à C :

$$\left\|\frac{\partial P}{\partial X}\right\| \leq \frac{4 n N^2}{R} \| P \|_C = \frac{4(n+1)}{h} N^2 \| P \|_C.$$

(I.3.4) *Cas où* C *est un convexe compact quelconque.* — Soit C un convexe compact dans $\mathbf{R}^n$ et FR(C) sa frontière. Soit Π_∞ l'ensemble des polynomes (de degrés non bornés). Si N(P) désigne le degré d'un polynome $P \in \Pi_\infty$ nous appellerons *épaisseur* de C le nombre

$$G(C) = \inf_{P \in \Pi_\infty} \frac{2[N(P)]^2 \| P \|_C}{\left\|\frac{\partial P}{\partial X}\right\|_C}.$$

Nous démontrons au théorème (I.3.4.1) que si C a un intérieur non vide, alors $G(C) > 0$ et nous donnons des minorations positives de $G(C)$.

Soit $T(M)$ l'ensemble des bases normées $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$, en général non orthogonales, de sommet $M \in C$ et $\mathfrak{T}(M) \in T(M)$. Les droites définissant $\mathfrak{T}(M)$ découpent sur C des longueurs $l_1, \ldots, l_n$.

Soit $\vec{E}$ une direction donnée.

Posons

$$\frac{1}{g_E(C)} = \sup_{M \in C}\left(\inf_{\mathfrak{T}(M) \in T(M)}\left(\frac{|\alpha_1|}{l_1} + \ldots + \frac{|\alpha_n|}{l_n}\right)\right),$$

où $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ sont les composantes de $\vec{E}$ sur $\mathfrak{T}(M)$.

Soit $g(C) = \inf_E g_E(C)$.

(I.3.4.1) Théorème. — *Si* C *possède un intérieur non vide, alors*

$$\left\|\frac{\partial P}{\partial X}\right\|_C \leqq \frac{2N^2}{g(C)} \|P\|_C \qquad \text{et} \qquad G(C) \geqq g(C) > 0.$$

Démonstration. — En opérant comme en (I.3.1.2), on a

$$\left\|\frac{\partial P}{\partial X}\right\|_C \leqq \frac{2N^2}{g(C)} \|P\|_C \qquad \text{et donc} \qquad G(C) \geqq g(C),$$

et si $g = g(C) \leqq 1$, alors

$$\|P\|_C^k \leqq \frac{2^k N^2 \ldots (N-k+1)^2}{g^k} \|P\|_C^0.$$

$G(C)$ et $g(C)$ sont assez difficiles à calculer dans le cas général. Nous allons minorer $g(C)$ par ce que nous appellerons « rondeur » de C, et montrer que cette rondeur est strictement positive si et seulement si C n'est pas contenu dans un hyperplan (de dimension $\leqq n-1$) dans $\mathbf{R}^n$.

On vérifie d'abord la

Proposition. — *Pour qu'un convexe* C *de* $\mathbf{R}^n$ *soit contenu dans une variété affine de dimension* $\leqq n-1$, *il faut et il suffit qu'il existe* M, *dans* C, *tel que tous les simplexes, de* $\mathbf{R}^n$, *qui contiennent* M *et qui ont leurs sommets sur* F R(C) *frontière de* C, *aient un rayon de sphère inscrite nul.*

Supposons maintenant que, quel que soit $M \in C$ il existe $r_0 > 0$ tel que un simplexe $S_0(M)$ de sommets sur F R(C) et contenant M ait un rayon de sphère inscrite égal à r_0. Il faut et il suffit pour cela que C possède un point intérieur.

Soit $\Sigma_0(M)$ l'ensemble des simplexes qui ont leurs sommets sur F R(C), qui contiennent M et qui ont un rayon de sphère inscrite $\geqq r_0$. Le rayon de sphère inscrite de $S(M) \in \Sigma_0(M)$ est une fonction continue, sur une

partie fermée de $(\mathrm{F\,R}(\mathrm{C}))^{n+1}$, et atteint donc son maximum $\rho(\mathrm{M})$ pour un simplexe de $\Sigma_0(\mathrm{M})$.

Si C_1 est un convexe contenu dans C, on a : $g(\mathrm{C}_1) \leqq g(\mathrm{C})$. Par (I.3.3) on a donc

$$\inf_{\mathfrak{T}(\mathrm{M}) \in \mathrm{T}(\mathrm{M})} \left(\frac{|\alpha_1|}{l_1} + \ldots + \frac{|\alpha_n|}{l_n} \right) \leqq \frac{2}{\rho(\mathrm{M})}.$$

Soit $r(\mathrm{C}) = \inf_{\mathrm{M} \in \mathrm{C}} \frac{\rho(\mathrm{M})}{2}$. C'est ce que nous appellerons *rondeur* de C.

Nous avons donc $g(\mathrm{C}) \geqq r(\mathrm{C})$.

Supposons que $r(\mathrm{C}) = 0$: C étant compact il existe alors $\mathrm{M} \in \mathrm{C}$ tel que $\rho(\mathrm{M}) = 0$ et tous les simplexes ayant leurs sommets sur $\mathrm{F\,R}(\mathrm{C})$ et contenant M sont dégénérés, C est donc dans une variété affine de dimension $\leqq n-1$ et l'on a alors $\mathrm{F\,R}(\mathrm{C}) = \mathrm{C}$. Il en résulte que (I.3.4.1) est vérifié et donc que

$$\left\| \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{X}} \right\|_{\mathrm{C}} \leqq \frac{2\,\mathrm{N}^2}{r(\mathrm{C})} \| \mathrm{P} \|_{\mathrm{C}}. \tag{I.3.4.2}$$

Remarque. — Soit $(\vec{\mathrm{E}}_1, \ldots, \vec{\mathrm{E}}_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$ et X_i les coordonnées : en posant $g_{\mathrm{E}_i}(\mathrm{C}) = g_i$ on a

$$\left\| \frac{\partial^{\mathrm{K}} \mathrm{P}}{\partial \mathrm{X}^{\mathrm{K}}} \right\| \leqq \frac{2^k \mathrm{N}^2 (\mathrm{N}-1)^2 \ldots (\mathrm{N}-k+1)^2}{g_1^{k_1} \ldots g_n^{k_n}} \| \mathrm{P} \|_{\mathrm{C}}. \tag{I.3.4.3}$$

Dans $\mathbf{R}_1$, A. A. Markoff obtenait trivialement une inégalité de ce type comme corollaire de l'inégalité concernant $\| \mathrm{P}' \|$. En utilisant une inégalité due à W. A. Markoff (W. A. Markoff [1]) nous obtenons une inégalité plus fine :

$$\left\| \frac{\partial^{\mathrm{K}} \mathrm{P}}{\partial \mathrm{X}^{\mathrm{K}}} \right\| \leqq \frac{2^k \mathrm{N}^2 (\mathrm{N}^2 - 1^2) \ldots (\mathrm{N}^2 - (k-1)^2)}{g_1^{k_1} \ldots g_n^{k_n}\, 1.3 \ldots (2k_1 - 1) \ldots 1.3 \ldots (2k_n - 1)} \| \mathrm{P} \|_{\mathrm{C}}. \tag{I.3.4.4}$$

(I.4) Rappels de résultats concernant les théorèmes de prolongement de Whitney. — Soit E un compact de $\mathbf{R}^n$, C un hypercube de $\mathbf{R}^n$ contenant E. Définissons par $\mathrm{A} \to \mathrm{T}_{\mathrm{A}}$ un champ de polynomes de degrés $\leqq m$, champ défini sur E. Posons

$$\mathfrak{T}_1(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{T}, m) = \sup_{\mathrm{M} \in \mathrm{R}^n} \frac{|\mathrm{T}_{\mathrm{B}}(\mathrm{M}) - \mathrm{T}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})|}{(\mathrm{AM} + \mathrm{BM})^m} \tag{I.4.1}$$

pour A et B dans E,

$$\mathfrak{T}_2(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{T}, m) = \sup_{0 \leqq k \leqq m} \frac{\left| \frac{\partial^{\mathrm{K}} \mathrm{T}_{\mathrm{B}}}{\partial \mathrm{X}^{\mathrm{K}}}(\mathrm{A}) - \frac{\partial^{\mathrm{K}} \mathrm{T}_{\mathrm{A}}}{\partial \mathrm{X}^{\mathrm{K}}}(\mathrm{A}) \right|}{\mathrm{AB}^{m-k}} \tag{I.4.2}$$

pour A et B dans E.

Le Théorème du prolongement de Whitney s'énonce :

Pour que le champ donné $A \to T_A$ *défini sur* E *soit la restriction à* E *du champ taylorien d'ordre m associé à une fonction* $f \in \mathcal{C}^m(C)$ *il faut et il suffit qu'il existe un module de continuité* concave $\hat{\omega}$ *tel que*

$$\text{(I.4.3)} \qquad \forall A \in E, \quad \forall B \in E : \quad \mathfrak{T}_2(A, B, T, m) \leqq \hat{\omega}(AB).$$

La construction de f est donnée dans (Whitney [1]). Whitney donne, dans (Whitney [3]), des majorations pour $\|f\|_C^m$. Ces majorations dépendent de la forme de E. Dans cet article il n'existe pas de majoration pour le m-module de continuité.

Dans (Glaeser [1]) le théorème de Whitney est démontré en remplaçant $\mathfrak{T}_2$ par $\mathfrak{T}_1$ et les majorations suivantes, indépendantes de la forme de E sont démontrées : d étant le diamètre de C, il existe Γ_1 et Γ_2 tels que

$$\text{(I.4.4)} \qquad \left\| \frac{\partial^K f}{\partial X^K} \right\|_C \leqq e^d \|f\|_E^m + \Gamma_1(m, n, d)\, d^{m-k}\, \hat{\omega}(d) ;$$

$$\text{(I.4.5)} \qquad \omega(f, C, m, .) \leqq \Gamma_2(m, n, d)\, \hat{\omega}(.) ;$$

Étant donné un champ T satisfaisant à (I.4.3), nous dirons que c'est un champ taylorien et Whitney a montré qu'on peut choisir un prolongement $f(T)$ analytique dans C — E : mais un tel prolongement n'est pas obtenu en général par un opérateur linéaire continu de prolongement. Au contraire, pour m fini toujours, la méthode indiquée plus haut fournit une fonction f définie par un opérateur linéaire continu de prolongement : nous dirons « prolongateur » et f est dans $\mathcal{C}^\infty(C - E)$. Par contre, f est en général seulement m fois continûment dérivable sur C même si T est le champ induit sur E par une fonction $g \in \mathcal{C}^{m+k}(E_1)$, avec $k \geqq 1$. Il n'y a exception que si E est fini.

Si $W^m(E)$ désigne l'espace des champs tayloriens d'ordre $\leqq m$ définis sur E, $W^m(E)$ est isomorphe au quotient de l'ensemble $\mathcal{C}^m(C)$ par l'idéal fermé des fonctions de $\mathcal{C}^m(C)$ qui sont m-plates en tout point de E. Sur $W^m(E)$ la norme $\|f\|_E^m$ est bien moins importante que la norme suivante introduite par Glaeser :

$$|||f|||_E^m = \max\Big(\|f\|_E^m, \max_{A \in E, B \in E} \mathfrak{T}_1(A, B, T, m)\Big).$$

Pour la norme $|||\,.\,|||_E^m$ l'espace $W^m(E)$ est complet alors qu'il ne l'est pas en général pour la norme $\|\,.\,\|_E^m$. Cette remarque nous laisse prévoir une certaine complication dans les majorations que nous donnerons.

(I.5) Notion de couvercle. — Lorsqu'un ensemble $\mathfrak{A}$ n'est pas convexe et varie nous serons amenés à lui associer un couvercle $C(\mathfrak{A})$.

(I.5.1) *Les* U-*couvercles*. — Si E est une partie compacte de $\mathbf{R}^n$ désignons par $d(E)$ le diamètre de E. Lorsque E est de plus convexe son épaisseur sera notée $G(E)$.

Soit U un sous-ensemble de l'ensemble V des parties compactes de $\mathbf{R}^n$ et C une application, de U dans V, telle que, quelle que soit $\mathfrak{A} \in U$:

(I.5.1.1) $C(\mathfrak{A})$ est un convexe, d'intérieur non vide, contenant $\mathfrak{A}$;

(I.5.1.2) Il existe $K_1(n)$ tel que $d(C(\mathfrak{A})) \leqq K_1(n)\, d(\mathfrak{A})$;

(I.5.1.3) Il existe $K_2(n) > 0$ tel que $G(C(\mathfrak{A})) \geqq K_2(n)\, d(\mathfrak{A})$.

Définition. — *Si ces trois conditions sont satisfaites nous dirons que* $C(\mathfrak{A})$ *est un* U-*couvercle pour* $\mathfrak{A}$ *ou plus brièvement un couvercle s'il n'y a pas ambiguïté sur* U.

Exemples et contre-exemples :

— Soit U = V, l'enveloppe convexe n'est pas un U-couvercle. La boule de rayon minimal contenant $\mathfrak{A}$ (cette boule existe et est unique, C est donc défini) est un U-couvercle, on peut prendre $K_1(n) = 2$ et $K_2(n) = \frac{1}{n}$. Pour une évaluation plus précise de K_1, *cf.* (Favard [3]).

— Soit U l'ensemble des parties de $\mathbf{R}^n$ obtenues à partir d'une partie compacte $\mathfrak{A}_0$ (non située dans une variété affine de dimension $\leqq n-1$) par le groupe T des transformations affines inversibles. L'enveloppe convexe n'est pas un U-couvercle car (I.5.1.3) n'est pas satisfait. Au contraire, si nous prenons l'exemple précédent en remplaçant T par le groupe des similitudes, alors l'enveloppe convexe est un couvercle. On peut prendre

$$K_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad K_2 = \frac{G(C(\mathfrak{A}_0))}{d(\mathfrak{A}_0)}.$$

La boule de rayon minimal est aussi dans ce cas un U-couvercle.

— Soit U l'ensemble des segments AB de $\mathbf{R}^n$, nous serons amenés à considérer le couvercle « boulique » de AB : c'est la boule de diamètre AB. On peut alors prendre $K_1(n) = 1$ et $K_2(n) = \frac{1}{n}$. Nous pouvons aussi à tout élément de U associer son couvercle cubique orienté : c'est l'hypercube, à côtés parallèles à $(\vec{E}_1, \ldots, \vec{E}_n)$, dont le centre est le milieu du segment AB et dont la longueur des côtés est égale à AB. On peut alors prendre

$$K_1(n) = \sqrt{n} \qquad \text{et} \qquad K_2(n) = 1.$$

(I.5.2) *Les T. U-couvercles.* — U ayant été défini comme en (I.5.1) et conservant les notations de ce paragraphe, considérons une famille T d'applications θ de $\mathbf{R}^n$ dans lui-même. Nous supposerons que, quel que soit $\theta \in T$:

(I.5.2.1) $\mathfrak{A} \in U$ entraîne $\theta(\mathfrak{A}) \in U$;

(I.5.2.2) $C(\theta(\mathfrak{A})) = \theta(C(\mathfrak{A}))$.

DÉFINITION. — *Si* C *et* T *satisfont à* (I.5.1.1), (I.5.1.2), (I.5.1.3), (I.5.2.1) *et* (I.5.2.2) *nous dirons que* $C(\mathfrak{A})$ *est un « T. U-couvercle ».*

Exemples et contre-exemples :

— Si $U = V$, la boule de rayon minimal contenant $\mathfrak{A}$ est un « T. U-couvercle » si T est un sous-ensemble du groupe des similitudes, mais n'en est pas un si T est le groupe des transformations affines inversibles.

— Si U est l'ensemble des parties de $\mathbf{R}^n$ obtenues à partir d'une partie compacte $\mathfrak{A}_0$ par les similitudes T (de rapport > 0), la boule de rayon minimal contenant $\mathfrak{A}$ est un « T. U-couvercle ».

Remarque. — Nous pouvons nous donner d'abord une partie compacte $\mathfrak{A}_0$ et un convexe de forme quelconque d'intérieur non vide et contenant $\mathfrak{A}_0$: $C(\mathfrak{A}_0)$; soit ensuite T une famille de similitudes, nous pouvons définir U comme l'ensemble des transformés de $\mathfrak{A}_0$ et définir C enfin comme l'application qui, à $\mathfrak{A} = \theta(\mathfrak{A}_0)$, associe $C(\mathfrak{A}) = \theta(C(\mathfrak{A}_0))$. Nous aurons alors un « T. U-couvercle ».

I.6. DÉFINITION DE $\mathfrak{T}_3$. INÉGALITÉS D'ÉQUIVALENCE SUR LES $\mathfrak{T}_i$. — Dans le paragraphe (I.4) nous avons défini $\mathfrak{T}_1$ et $\mathfrak{T}_2$ et

$$|||f|||_E^m = \max\left[\|f\|_E^m, \max_{A \in E,\, B \in E} \mathfrak{T}_1[A, B, T, m]\right].$$

La norme $|||\cdot|||$ qui rend $W^m(E)$ complet est uniformément équivalente à la norme quotient. Cette propriété est encore vérifiée en remplaçant $\mathfrak{T}_1$ par $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_2$ a l'inconvénient de mettre en évidence des polynomes et leurs dérivées jusqu'à l'ordre m. $\mathfrak{T}_1$ a l'avantage de ne plus introduire les dérivées partielles, mais utilise le sup d'une fraction rationnelle sur $\mathbf{R}^n$. Nous allons définir $\mathfrak{T}_3$ qui ne fera intervenir que les valeurs de polynomes sur des couvercles (qu'on peut choisir cubiques).

Remarque. — Il est naturellement intéressant de savoir calculer la norme quotient. Ce problème difficile dans $\mathbf{R}^n$ est résolu dans (Favard [2]) et dans (Glaeser [2]) lorsque $n = 1$.

Soit U l'ensemble des segments AB, où A et B sont dans un compact E. Considérons les couvercles associés à tous les segments AB par une application C de U dans V. Nous pouvons prendre *par exemple* les couvercles bouliques ou les couvercles cubiques orientés définis à la fin de (I.5.1). *Nous supposerons* $d(E) \leq 1$.

Posons

$$\mathfrak{T}_3(A, B, T, m) = \sup_{M \in C(AB)} \frac{|T_A(M) - T_B(M)|}{AB^m} = \frac{\|T_A - T_B\|_{C(AB)}}{AB^m}. \tag{I.6.1}$$

(I.6.2) Proposition. — T *étant défini sur* E *et* K_1 *et* K_2 *désignant les constantes intervenant en* (I.5.1.2) *et* (I.5.1.3) *dans la définition des couvercles, alors :*

$$\mathfrak{C}_1(A, B, T, m) \leqq e\,\mathfrak{C}_2(A, B, T, m) \leqq \frac{e.2^m (m!)^2}{K_2^m}\mathfrak{C}_3(A, B, T, m)$$
$$\leqq \frac{e.2^{2m}(m!)^2 K_1^m}{K_2^m}\mathfrak{C}_1(A, B, T, m).$$

Démonstration. — Par application de la formule de Taylor pour un polynome :

$$\frac{|T_A(M) - T_B(M)|}{(AM + BM)^m} \leqq \frac{1}{(AM + BM)^m}\left(AB^m + \frac{AB^{m-1}AM}{1!} + \ldots + \frac{AM^m}{m!}\right)\mathfrak{C}_2(A, B, T, m)$$

et

$$\mathfrak{C}_1(A, B, T, m) \leqq \left(1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{m!}\right)\mathfrak{C}_2(A, B, T, m) \leqq e\,\mathfrak{C}_2(A, B, T, m).$$

D'autre part, par l'inégalité de Markoff généralisée,

$$\mathfrak{C}_2(A, B, T, m) \leqq \sup_{\mu \in C(AB)} |T_A(\mu) - T_B(\mu)| \frac{2^m}{AB^m}(m!)^2 \frac{1}{K_2^m}$$

et

$$\mathfrak{C}_2(A, B, T, m) \leqq \frac{2^m (m!)^2}{K_2^m}\mathfrak{C}_3(A, B, T, m);$$
$$\mathfrak{C}_3(A, B, T, m) \leqq \sup_{\mu \in C(AB)} \frac{(A\mu + B\mu)^m}{AB^m} \sup_{\mu \in C(AB)} \frac{|T_A(\mu) - T_B(\mu)|}{(A\mu + B\mu)^m},$$
$$\mathfrak{C}_3(A, B, T, m) \leqq 2^m \mathfrak{C}_1(A, B, T, m) K_1^m.$$

La proposition en résulte. Rappelons que pour les couvercles bouliques : $K_1 = 1$ et $K_2 = \frac{1}{n}$, pour les couvercles cubiques orientés : $K_1 = \sqrt{n}$ et $K_2 = 1$.

Le théorème de Whitney peut donc s'énoncer comme en (I.4.3) mais en remplaçant $\mathfrak{C}_2$ par $\mathfrak{C}_1$ ou $\mathfrak{C}_3$. On peut de même, dans la définition de la norme $|||\,.\,|||_E^m$ qui rend $W^m(E)$ complet, remplacer $\mathfrak{C}_1$ par $\mathfrak{C}_2$ ou $\mathfrak{C}_3$. Nous donnerons dans le chapitre IV un algorithme assurant le calcul approché de $\|P_N\|_C$, où P_N est un polynome et indiquerons l'erreur commise. Lorsqu'on utilise un tel algorithme le choix de $\mathfrak{C}_3$ (au lieu de $\mathfrak{C}_1$ ou $\mathfrak{C}_2$) se révèle avantageux.

(I.7) Un nouvel énoncé du théorème de Whitney. — Si f est m fois continûment différentiable dans un ouvert de $\mathbf{R}^n$, contenant E, il existe $\omega(f, m, .)$ tel que

$$|f(M) - T_A[f](M)| \leqq \frac{AM^m}{m!}\omega(f, m, AM),$$

ce qui entraîne que si A et B sont dans E, alors :

$$|T_A[f](M) - T_B[f](M)| \leq \frac{1}{m!}(AM^m \omega(f, m, AM) + BM^m \omega(f, m, BM)),$$

Réciproquement, nous avons le :

THÉORÈME. — *Si, étant donné un champ* T *sur* E, *il existe un module de continuité* $\hat{\omega}$ *concave tel que*

$$(1.7.1) \qquad |T_A(M) - T_B(M)| \leq \frac{1}{m!}(AM^m \hat{\omega}(AM) + BM^m \hat{\omega}(BM))$$

soit vraie quels que soient $A \in E$, $B \in E$, $M \in C(AB)$, *alors les conclusions du théorème de Whitney sont vérifiées.*

Cette condition semble bien plus faible que les conditions sur $\mathfrak{T}_i$, en fait il n'en est rien : si (1.7.1) est vérifiée, alors, pour tout $\mu \in C(AB)$, on a : $A\mu \leq K_1 AB$ et il en est de même pour $B\mu$. En utilisant une propriété de $\hat{\omega}$ on en déduit

$$\frac{|T_A(\mu) - T_B(\mu)|}{AB^m} \leq \frac{2K_1^{(m+1)}}{m!}\hat{\omega}(AB)$$

et

$$\mathfrak{T}_3(A, B, T, m) \leq \frac{2K_1^{(m+1)}}{m!}\hat{\omega}(AB) = \hat{\omega}_1(AB),$$

Remarque. — Une conséquence immédiate de ce théorème est la proposition suivante énoncée sans démonstration dans Dubovitsky [1] :

Étant donné un champ T défini sur E, s'il existe une fonction φ (non nécessairement continue) définie sur un cube C contenant E et s'il existe un module de continuité ω tel que

$$|T_A(M) - \varphi(M)| \leq AM^m \omega(AM) \quad \text{pour tout } A \in E \quad \text{et} \quad \text{tout } M \in C,$$

alors le champ T défini sur E est un champ taylorien.

(1.8) DÉFINITION. — Dans la suite nous dirons qu'une fonction f est m fois continûment dérivable sur un *fermé* F de $\mathbf{R}^n$ si l'on peut prolonger f en une fonction m fois continûment dérivable dans un ouvert de $\mathbf{R}^n$ contenant F.

Dans $\mathbf{R}^n$ pour $n \geq 2$, le problème est posé de savoir à quelles conditions, portant sur les *valeurs de f sur* F, une fonction f est m fois continûment dérivable sur F. Ce problème est résolu pour $n = 1$ dans (Whitney [2]) et dans (Merrien [1]).

CHAPITRE II.

Interpolation et approximation par polynomes. Convergence pour la norme $\| \cdot \|_E^k$.

(II.1) L'interpolation dans $\mathbf{R}^n$. — Un polynome homogène de degré N à n variables contient $\binom{N+n-1}{N}$ termes et, par conséquent, le polynome le plus général de degré N à n variables contient $\binom{N+n}{N}$ termes. Posons $N_1 = \binom{N+n}{N}$. Étant donnés N_1 points A_i dans $\mathbf{R}^n$, appelons $\mathfrak{A}$ l'ensemble de ces N_1 points. Posons $d(\mathfrak{A}) = \sup_{1 \leq i < j \leq N_1} A_i A_j$, diamètre de $\mathfrak{A}$ et, étant donnés deux ensembles de N_1 points $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$, soit :

$d(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \inf_{\sigma}\left(\sup_i A_i B_{\sigma(i)}\right)$ en désignant par σ une permutation des N_1 premiers entiers.

Si les N_1 points A_i ne sont pas sur une même hypersurface algébrique de degré N dans $\mathbf{R}^n$, alors le problème classique de l'interpolation, par un polynome de degré N, d'une fonction f définie sur $\mathfrak{A}$ possède une solution unique. Nous dirons alors que $\mathfrak{A}$ est unisolvent. Le polynome d'interpolation $\mathfrak{P}_{\mathfrak{A}}[f]$ est défini par la relation

$$\det \begin{vmatrix} 1 & X_{11} & \dots & X_{n1} & \dots & X_{11}^n & \dots & X_{n1}^n & f(A_1) \\ \cdot & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots \\ 1 & X_{1N_1} & \dots & X_{nN_1} & \dots & X_{1N_1}^n & \dots & X_{nN_1}^n & f(A_{N_1}) \\ 1 & X_1 & \dots & X_n & \dots & X_1^n & \dots & X_n^n & \mathfrak{P}_{\mathfrak{A}}[f](M) \end{vmatrix} = 0.$$

Ce polynome peut s'écrire :

$$\mathfrak{P}_{\mathfrak{A}}[f](M) = \sum_{i=1}^{N_1} f(A_i)\, Q_i(\mathfrak{A}, M)$$

où les polynomes $Q_i(\mathfrak{A}, .)$ ne dépendent pas de f.

Soit C un compact de $\mathbf{R}^n$ ayant pour diamètre $d(\mathfrak{A}) = d$ et contenant $\mathfrak{A}$. L'opérateur qui à $f \in \mathcal{C}(C)$ fait correspondre $\mathfrak{P}_{\mathfrak{A}}[f]$ est un opérateur linéaire qui conserve les polynomes de degré $\leq N$. En prenant comme norme sur $\mathcal{C}(C)$ la norme $\| \cdot \|_C$ définie en (I.1) la norme de l'opérateur $\mathfrak{P}_{\mathfrak{A}}$ est

$$\| \mathfrak{P}_{\mathfrak{A}} \|_C = \max_{M \in C} \sum_{i=1}^{N_1} | Q_i(\mathfrak{A}, M) |. \tag{II.1.1}$$

(II.1.2) Théorème. — $\| \mathfrak{P}_{\mathfrak{A}} \|_C$ *est invariant lorsqu'on fait subir à* $\mathfrak{A}$ *et à* C *la même transformation affine inversible quelconque.*

Démonstration. — Soit θ une transformation affine inversible :

$$\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}_1 \quad \text{et} \quad C \xrightarrow{\theta} C_1.$$

Par la transformation θ, le système unisolvent $\mathfrak{A}$ donne un système unisolvent $\mathfrak{A}_1$. Considérons la fonction $Q_i(\mathfrak{A}_1, .) \circ \theta$: c'est un polynome de degré N qui vaut 1 en A_i et 0 en A_j pour $j \neq i$. On a donc

$$Q_i(\mathfrak{A}_1, .) \circ \theta = Q_i(\mathfrak{A}, .)$$

et donc pour tout $M \in C$:

$$\sum_{i=1}^{N_1} | Q_i(\mathfrak{A}, M) | = \sum_{i=1}^{N_1} | (Q_i(\mathfrak{A}_1, .) \circ \theta)(M) | = \sum_{i=1}^{N_1} | Q_i(\mathfrak{A}_1, M_1) |.$$

Dans la suite nous prendrons, sauf précision contraire, pour C un convexe de $\mathbf{R}^n$ contenant $\mathfrak{A}$. Nous supposerons que le diamètre de C est $\leqq 1$. Considérons alors l'ensemble Π_N des polynomes de degré $\leqq N$. Si nous désignons par $E(f, m, N, C)$ ou $E(f, N, C)$ si $m = 0$ la distance de f à Π_N pour la norme $\| . \|_C^m$ nous avons le théorème d'approximation suivant :

THÉORÈME. — *$\mathfrak{A}$ et C d'épaisseur g étant fixés et posant*

$$\varphi(N, m) = N^2 (N-1)^2 \ldots (N-m+1)^2$$

nous avons pour $m \leqq N$

$$\text{(II.1.3)} \qquad \| f - \mathfrak{P}_{\mathfrak{A}}[f] \|_C^m \leqq E(f, m, N, C) \left[1 + \frac{2^m}{g^m} \varphi(N, m) \| \mathfrak{P}_{\mathfrak{A}} \|_C \right].$$

Démonstration. — $\mathfrak{A}$ étant fixé, l'opérateur $\mathfrak{P}_{\mathfrak{A}}$ est un opérateur linéaire qui conserve les polynomes de degré $\leqq N$. Puisque Π_N est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathcal{C}(C)$ il existe dans Π_N un polynome $P_N[f]$ tel que

$$\| f - P_N[f] \|_C^m = \inf_{Q \in \Pi_N} \| f - Q \|_C^m = E(f, m, N, C).$$

Nous avons alors

$$\| f - \mathfrak{P}_{\mathfrak{A}}[f] \|_C^m \leqq \| f - P_N[f] \|_C^m + \| P_N[f] - \mathfrak{P}_{\mathfrak{A}}[f] \|_C^m.$$

Par (I.3.4.3) on a

$$\left\| \frac{\partial^K P_N}{\partial X^K} \right\|_C^0 \leqq \frac{2^k \varphi(N, k)}{g^k} \| P_N \|_C^0.$$

Si $g \leqq 1$, on a donc

$$\| P_N \|_C^m \leqq \frac{2^m \varphi(N, m)}{g^m} \| P_N \|_C^0$$

et

$$\begin{aligned} \| f - \mathfrak{P}_{\mathfrak{A}}[f] \|_C^m &\leqq E(f, m, N, C) + \frac{2^m}{g^m} \varphi(N, m) \| P_N[f] - \mathfrak{P}_{\mathfrak{A}}[f] \|_C^0 \\ &\leqq E(f, m, N, C) + \frac{2^m}{g^m} \varphi(N, m) \| \mathfrak{P}_{\mathfrak{A}}[f - P_N[f] \|_C^0 \\ &\leqq E(f, m, N, C) \left[1 + \frac{2^m}{g^m} \varphi(N, m) \| \mathfrak{P}_{\mathfrak{A}} \|_C \right]. \end{aligned}$$

Nous allons utiliser ce théorème pour obtenir des théorèmes d'approximation dans $\mathbf{R}^n$. Nous nous restreindrons à un sous-espace à préciser de $\mathcal{C}(C)$ pour indiquer des procédés d'approximation à convergence relativement rapide. Pour cela il nous faut préciser, pour une classe suffisamment restreinte, la quantité $E(f, m, N, C)$. Ce sera l'objet du paragraphe (II.3). La quantité $\|\mathcal{P}_{\mathfrak{A}}\|_C$ ne dépend que de la disposition des points A_i. En (II.4), nous ne restreindrons pas $\mathcal{C}(C)$, mais en revanche nous obtiendrons des procédés d'approximation à convergence relativement lente même lorsque f est analytique.

Donnons tout d'abord une remarque de caractère négatif. Considérons une suite $\{\mathfrak{A}_{N_1}\}$ de systèmes unisolvents contenus dans C. Les $\mathfrak{A}_{N_1}$ sont indépendants les uns des autres mais chaque ensemble $\mathfrak{A}_{N_1}$ possède exactement $N_1 = \binom{N+n}{n}$ points de C. On peut alors se demander s'il existe une suite $\{\mathfrak{A}_{N_1}\}$ telle que

$$\text{(II.1.4)} \qquad \varliminf_{N_1 \to +\infty} \|\mathcal{P}_{\mathfrak{A}_{N_1}}\|_C < +\infty.$$

S'il en était ainsi, de la suite définie par $u_{N_1} = \|\mathcal{P}_{\mathfrak{A}_{N_1}}\|_C$ on pourrait extraire une sous-suite $\{u_{N_p}\}$ convergente et de limite $l < +\infty$. Par application de (II.1.3) et compte tenu du fait que $\lim_{N \to +\infty} E(f, o, N, C) = o$ d'après le théorème de Weierstrass, on aurait

$$\forall f \in \mathcal{C}(C) : \quad \lim_{N_p \to +\infty} \|f - \mathcal{P}_{\mathfrak{A}_{N_p}}\|_C = o.$$

Mais déjà dans $\mathbf{R}^1$, comme l'a montré Faber (Faber [1]), ce dernier résultat est faux. Nous renoncerons donc dans $\mathbf{R}^n$ à essayer de former une suite de systèmes unisolvents et une suite de polynomes d'interpolation convergeant uniformément vers f pour tout $f \in \mathcal{C}(C)$.

(II.2) Approximation des valeurs, en un point M fixe, d'une fonction et de ses dérivées partielles. — Dans tout le paragraphe M est fixé.

Il est classique de réaliser une approximation de chaque forme linéaire L_K, définie par $f \rightsquigarrow L_K[f] = \frac{\partial^K f}{\partial X^K}(M)$, lorsqu'on connaît les valeurs de f aux sommets d'un quadrillage (en général défini par un n-pas $h = (h_1, \ldots, h_n)$ destiné à tendre vers zéro). De telles approximations sont ainsi utilisées dans le traitement numérique des équations aux dérivées partielles où l'on remplace les opérateurs différentiels par des opérateurs aux différences. Les obtentions d'une part, les démonstrations de la convergence d'autre part, sont parfois assez différentes lorsqu'on passe d'un L_K à un autre. Nous allons montrer comment on peut obtenir *simultanément* des approximations de chaque L_K pour $k = 1$ à m. La démonstration de la conver-

gence indiquera en même temps l'ordre de cette convergence. De plus, les points utilisés pour définir une forme linéaire approchée de L_K seront beaucoup moins « particuliers » que les points du réseau régulier rectangle traditionnel.

Soit $\mathfrak{A}_0$ un système unisolvent contenant $m_1 = \binom{m+n}{n}$ points et $C(\mathfrak{A}_0)$ un convexe compact contenant $\mathfrak{A}_0$ et M.

Soit T une suite de transformations affines inversibles θ_i telles que, si $C_i = \theta_i(C_0)$, alors il existe H_1 tel que : pour tout entier i :

(II.2.1) $M \in C_i$;

(II.2.2) $d(C_i) = d_i \leqq H_1\, G(C_i) = H_1\, g_i$;

(II.2.3) $\lim\limits_{i \to +\infty} d_i = 0$.

(II.2.4) Définition. — *Si les trois conditions précédentes sont satisfaites nous dirons que* $\mathfrak{A}_i = \theta_i(\mathfrak{A}_0)$ *tend régulièrement vers* M *lorsque i tend vers* $+\infty$.

Si U désigne l'ensemble des $\mathfrak{A}_i$ nous avons défini une famille de T. U-couvercles entourant M.

(II.2.5) Théorème. — *Si f est m-fois continûment dérivable dans un voisinage ouvert de* M *et si* $\mathfrak{A}_i$ *tend régulièrement vers* M *lorsque i tend vers* $+\infty$, *alors il existe* H *tel que pour* $k \leqq m$:

$$\left| \frac{\partial^K \mathfrak{P}_{\mathfrak{A}_i}[f]}{\partial X^K}(M) - \frac{\partial^K f}{\partial X^K}(M) \right| \leqq H g_i^{m-k}\, \omega(f, m, g_i).$$

Démonstration. — Soit $T_M[f]$ le polynome de Taylor de degré m au point M et $\mathfrak{P}_{\mathfrak{A}_i}[f]$ le polynome d'interpolation de degré m sur $\mathfrak{A}_i$

$$\| f - \mathfrak{P}_{\mathfrak{A}_i}[f] \|_{C_i}^k \leqq \| f - T_M[f] \|_{C_i}^k + \| \mathfrak{P}_{\mathfrak{A}_i}[f] - T_M[f] \|_{C_i}^k.$$

Par (I.3.4.3) le dernier terme est majoré par

$$\frac{2^k}{g_i^k}\, \varphi(m, k)\, \| \mathfrak{P}_{\mathfrak{A}_i}[f] - T_M[f] \|_{C_i}^0.$$

D'autre part,

$$\| \mathfrak{P}_{\mathfrak{A}_i}[f] - T_M[f] \|_{C_i}^0 \leqq \| \mathfrak{P}_{\mathfrak{A}_i} \|_{C_i} \| f - T_M[f] \|_{C_i}^0.$$

Par (II.1.2) : $\| \mathfrak{P}_{\mathfrak{A}_i} \|_{C_i} = \| \mathfrak{P}_{\mathfrak{A}_0} \|_{C_0}$ est constant. De plus,

$$\| f - T_M[f] \|_{C_i}^k \leqq d_i^{m-k}\, \omega(f, m, d_i) \quad (\text{pour } d_i \leqq 1).$$

Par (II.2.2) : $d_i \leqq H_1\, g_i$.

On a donc

$$\|f - \mathcal{P}_{\mathfrak{A}_i}[f]\|_{C_i}^k \leq (1 + 2^k \varphi(m, k) H_1^k \|\mathcal{P}_{\mathfrak{A}_0}\|_{C_0}) H_1^{m-k}(1 + H_1) g_i^{m-k} \omega(f, m, g_i)$$

et la conclusion suit.

Nous utiliserons ce théorème au chapitre IV. Signalons dès maintenant qu'on obtient des $\mathfrak{A}_i$ tendant régulièrement vers M en faisant subir à $\mathfrak{A}_0$ et son couvercle $C(\mathfrak{A}_0)$ des transformations $\theta_i = R_i \circ H_i$, où H_i désigne une homothétie de centre M, de rapport r_i tendant vers zéro lorsque i tend vers $+\infty$, et R_i désigne une rotation arbitraire autour d'un axe (variable avec i comme l'angle de rotation) passant par M. Dans ce cas, M est invariant par toutes les transformations θ_i. Examinons le cas particulier où $\theta_i = H_i$.

(II.2.6) Proposition. — *Si, quel que soit i, θ_i est une homothétie de centre* M *et de rapport r_i $(\lim_{i \to +\infty} r_i = 0)$, alors en posant $A_j^i = \theta_i(A_j)$ le coefficient de $f(A_j^i)$ dans l'approximation de $L_K[f]$ est de la forme $\frac{1}{(r_i)^k}\lambda_j$, où λ_j ne dépend pas de i.*

En effet, en opérant comme en (II.1.2), nous posons

$$L_K^i[f] = \sum_{j=1}^{m_1} f(A_j^i) \frac{\partial^K}{\partial X^K} (Q_j(\mathfrak{A}_i, .) \circ \theta_i)(M).$$

Comme θ_i est une homothétie de centre M et comme M est invariant,

$$L_K^i[f] = \sum_{j=1}^{m_1} f(A_j^i) \frac{1}{(r_i)^k} \frac{\partial^K Q_j(\mathfrak{A}_0, M)}{\partial X^K}.$$

L'intérêt de ce résultat du point de vue calcul est évident : en changeant de valeur de i les seuls calculs nouveaux à exécuter sont ceux de $(r_i)^k$ et des m_1 valeurs $f(A_j^i)$.

(II.2.7) Définition. — *Soit f une fonction k fois continûment dérivable dans un voisinage de* M. *Appelons covecteur dérivée $k^{\text{ième}}$ en* M *le covecteur* $D^k[f](M)$, *élément de* $\mathcal{L}\left(\overset{k}{\odot}\mathbf{R}^n, \mathbf{R}\right)$, *de composantes* $\left(\ldots, \frac{\partial^K f}{\partial X^K}(M), \ldots\right)$ *où* K *est un multi-indice prenant toutes les valeurs possibles telles que $k_1 + \ldots + k_n = k$.*

La notion de différence divisée est classique pour les fonctions d'une variable : on peut déffnir la $k^{\text{ième}}$ différence divisée sur $[x_0, \ldots, x_k]$ par récurrence par

$$\Delta^k([x_0, \ldots, x_k], f) = \frac{\Delta^{k-1}([x_0, \ldots, x_{k-1}], f) - \Delta^{k-1}([x_1, \ldots, x_k], f)}{x_0 - x_k}.$$

Cette définition ne s'étend pas aux fonctions de plusieurs variables. La définition suivante, au contraire, est valable pour les fonctions de plusieurs variables :

On appelle covecteur « différence divisée » d'ordre k relatif au système unisolvent $\mathfrak{A}$ $\left[\text{contenant } \binom{k+n}{n} \text{ points}\right]$ le covecteur

$$\Delta^k(\mathfrak{A}, f) = \left(\ldots, \frac{\partial^K \mathcal{P}_{\mathfrak{A}}[f]}{\partial X^K}(M), \ldots\right),$$

où $\mathcal{P}_{\mathfrak{A}}$ est l'opérateur d'interpolation de Lagrange sur $\mathfrak{A}$ et où K prend toutes les valeurs telles que $k_1 + \ldots + k_n = k$.

Chaque composante de $\Delta^k(\mathfrak{A}, f)$ est indépendante de M puisque $\mathcal{P}_{\mathfrak{A}}[f]$ a pour degré k. Le théorème (II.2.5) entraîne alors :

(II.2.8) Théorème. — *Si les systèmes unisolvents $\mathfrak{A}_i$ tendent régulièrement vers* M *alors, pour chaque entier* $k = 1, \ldots, m$,

$$\lim_{i \to +\infty} \Delta^k(\mathfrak{A}_i, f) = D^k[f](M).$$

Remarque. — Nous donnons dans le chapitre IV une famille remarquable de systèmes unisolvents et les approximations correspondantes.

(II.3) Approximation, par des opérateurs d'interpolation et pour la norme $\| \quad \|_C^m$, des fonctions de classe $\mathcal{C}^m$.

(II.3.0) *Remarques préliminaires.* — Soit C un hypercube de $\mathbf{R}^n$, d la longueur de ses côtés supposés parallèles aux axes. Soit $\mathring{C}$ l'intérieur de C. Dans tout le paragraphe nous serons amenés à considérer des suites d'opérateurs $\{P_N\}$ satisfaisant aux conditions :

(II.3.0.1) P_N opérant sur $\mathcal{C}^m(C)$ est linéaire;

(II.3.0.2) P_N est un projecteur sur un sous-espace π_N de l'espace des polynomes de degrés $\leqq N$.

Soit U_m l'ensemble des suites $\{P_N\}$ satisfaisant aux conditions (II.3.0.1) et (II.3.0.2).

Lorsqu'on ne recherche qu'un théorème de densité il n'est sans doute pas difficile théoriquement de trouver une suite $\{P_N\} \in U_m$ telle que, en posant

$$\rho_N(m, f) = \| f - P_N[f] \|_C^m, \qquad \lim_{N \to +\infty} \rho_N(m, f) = 0.$$

La suite $\{P_N\}$ réalise la conclusion du théorème de Weierstrass pour la norme $\| \, . \, \|_C^m$. Considérons simplement le cas où $n = 1$, $C = [a, b]$ de $\mathbf{R}$ et $m = 0$. Les opérateurs classiques, tels que $\lim_{N \to +\infty} \rho_N(0, f) = 0$, s'ils entraînent la conclusion du théorème de Weierstrass ordinaire, ne sont

pas satisfaisants car, en général, lorsqu'on les applique à une fonction de classe $\mathcal{C}^m$ très simple ($x \rightsquigarrow x^2$ par exemple) ils donnent une décroissance de ρ_N (en fonction de N) qui n'est pas très forte. Dans (Golomb [1], p. 248) le théorème suivant est démontré : si L_N est, pour tout N, un opérateur positif et si $\{L_N\} \in U_0$, alors en désignant par e_0 la fonction $x \rightsquigarrow 1$ et par u_t la fonction $x \rightsquigarrow (t-x)^2$, on a

— ou bien

$$\overline{\lim_{N \to +\infty}} N \| L_N[e_0] - e_0 \|_C^0 > 0 ;$$

— ou bien

$$\overline{\lim_{N \to +\infty}} N^2 L_N[u_t](t) > 0.$$

Les opérateurs linéaires positifs qui donnent une démonstration constructive du théorème de Weierstrass ne donnent jamais lieu à une précision meilleure que $\frac{K}{N^2}$ même lorsqu'on restreint $\mathcal{C}^0(C)$ à la classe des polynomes du 2e degré.

D'autre part, les opérateurs d'interpolation ne réalisent jamais le théorème de Weierstrass sur $\mathcal{C}^0(C)$ lorsque $n = 1$. Ceci résulte du théorème de Faber (Faber [1]). Plus exactement par (Golomb [1], p. 253), il existe $K_1 > 0$ tel que, pour tout P_N satisfaisant à (II.3.0.2) et (II.3.0.1), avec $m = 0$, on a

$$\| P_N \| \geqq K_1 \operatorname{Log} N.$$

En revanche, lorsqu'on applique une suite $\{P_N\}$ d'opérateurs d'interpolation à une fonction de classe $\mathcal{C}^m$ on peut, par un choix convenable des nœuds d'interpolation, obtenir une décroissance *très* rapide de $\rho_N(m, f)$. C'est ce que nous démontrons dans ce paragraphe. Le choix des nœuds a été fait en remarquant que la suite $\{L_N\}$ qui lui est associée satisfait à $\| L_N \|^0 \sim K_2 \operatorname{Log} N$ et qu'on ne peut faire mieux que $K_1 \operatorname{Log} N$. Les calculs ont été développés en utilisant ces nœuds particuliers obtenus à partir des zéros des polynomes de Tchebichef. La démonstration serait inchangée en les remplaçant par des nœuds « normalement » distribués au sens de (Golomb [1], p. 210), mais au lieu de contenir, au numérateur des majorations, un terme en $(\operatorname{Log} N)^n$ nous obtiendrions un terme $N^{\frac{n}{2}}$.

Le théorème (II.3.1) suivant est une généralisation à $\mathbf{R}^n$ du lemme (II.3.2). Cette généralisation peut, du point de vue qualitatif, être considérée comme un cas particulier d'un théorème de Dieudonné (Dieudonné [1]). Nous avons développé les produits tensoriels pour obtenir une majoration relativement fine de $\| f - L_N[f] \|_C^0$: c'est le résultat quantitatif.

L'opérateur L_N peut être utilisé pour obtenir *séparément* des approximations de f, $\frac{\partial f}{\partial X}, \cdots, \frac{\partial^K f}{\partial X^K}$. Nous dirons que L_N appliqué à chacune de ces fonctions donne des approximations séparées de f et de ses dérivées.

Nous obtenons en (II.3.6) des résultats positifs qui, même dans le cas de $\mathbf{R}^1$, nous semblent nouveaux. La méthode utilisée s'applique évidemment à $\mathbf{R}^1$ mais n'est pas une généralisation d'une méthode applicable à $\mathbf{R}^1$. Ces résultats sont relatifs à l'approximation de f au sens de la norme $\| \, . \, \|_C^k$, c'est-à-dire à l'approximation *simultanée* de f et ses dérivées : si f est suffisamment dérivable $\frac{\partial^K L_N[f]}{\partial X^K}$ converge vers $\frac{\partial^K f}{\partial X^K}$ uniformément sur C et nous préciserons l'ordre infinitésimal de décroissance vers zéro de $\|f - L_N[f]\|_C^k$ lorsque N tend vers $+\infty$.

Les résultats qui suivent sont intéressants par le fait que $\|f - L_N[f]\|_C^k$ décroît plus vite que $\frac{1}{N^p}$ lorsque f est suffisamment dérivable (p est un entier positif convenablement choisi).

(II.3.1) Théorème. — *Pour tout entier* $N \geqq (2m-2)n$ *nous allons définir un opérateur linéaire* L_N *opérant sur* $\mathcal{C}^m(\mathring{C})$ *tel que :*

(a_1) $L_N[f]$ *est un polynome de degré* $\leqq N$ *ne faisant intervenir que les valeurs de* f *dans* $\mathring{C}$;

(a_2) *Si* $f \in \mathcal{C}^m(C)$ *possède des dérivées d'ordre* m *bornées dans* C *par* M_m *il existe* K_1, K_2 *et* K_3 *ne dépendant que de* n *et* m *tels que*

$$\|f - L_N[f]\|_C \leqq K_1 \left(K_2 + \frac{4}{\pi} \operatorname{Log} N\right)^n d^m \frac{M_m(f, C)}{N^m}$$

ou

$$\|f - L_N[f]\|_C \leqq K_3 (\operatorname{Log} N)^n d^m \frac{M_m(f, C)}{N^m}.$$

Nous démontrerons auparavant le lemme :

(II.3.2) Lemme. — *Étant donnés* $q+1$ *points*

$$x_i = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} \cos \frac{2i-1}{2q+2}\pi \quad (\textit{pour } i = 1 \text{ à } q+1)$$

de $\mathbf{R}$, *si* L_q *désigne l'opérateur linéaire qui, à* $f \in \mathcal{C}^m[a, b]$, *associe son polynome de Lagrange de degré* $\leqq q$ *relatif aux points* x_i *on a* (*avec* $M_m[f] = \sup_{x \in [a, b]} |f^{(m)}(x)|$ *et pour* $q \geqq 2m-3$)

$$\text{(II.3.2.1)} \quad \|f - L_q[f]\|_{[a, b]} \leqq \left(9 + \frac{4}{\pi} \operatorname{Log}(q+1)\right) \frac{M_m[f]}{2^m} (b-a)^m \frac{\pi^m}{(1+q)^m}.$$

Démonstration du lemme. — Dans $\mathbf{R}$, L_q conserve les polynomes de degré $\leqq q$ et donc

$$\| f - L_q[f] \|_{[a,b]} \leqq E(f, 0, q, [a, b]) [1 + \| L_q \|_{[a,b]}].$$

Comme $\| L_q \|_{[a,b]}$ est invariant par déplacement et homothétie en utilisant une inégalité de Bernstein (Bernstein [1]) et (Golomb [1], p. 204), on a

$$\| L_q \|_{[a,b]} = \| L_q \|_{[-1,+1]} \leqq 8 + \frac{4}{\pi} \operatorname{Log}(q+1).$$

D'autre part, pour $q \geqq 2m - 3$ on a, en utilisant un résultat de Golomb (Golomb [1], p. 129), une majoraton fine de $E(f, 0, q, [a, b])$:

$$\text{(II.3.2.2)} \qquad E(f, 0, q, [a, b]) \leqq \frac{\pi^m}{(1+q)^m} M_m(f, [a, b]) \left(\frac{b-a}{2}\right)^m.$$

Nous obtenons cette inégalité après des simplifications de calcul dans le passage de la meilleure approximation par polynomes trigonométriques à l'approximation par polynomes ordinaires. Nous savons que (Achieser [1] et Favard [1]) les résultats obtenus dans la théorie de l'approximation par des polynomes trigonométriques ne sauraient être améliorés en ce qui concerne l'ordre de grandeur de la meilleure approximation. L'inégalité précédente ne saurait donc être notablement améliorée.

Démonstration du théorème. — Soit $q =$ partie entière de $\frac{N}{n}$. Découpons C par $q + 1$ hyperplans parallèles à $OX_2, \ldots, OX_n$ et d'abscisses

$$X_{1i} = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} \cos \frac{2i-1}{2q+2} \pi, \qquad \text{avec} \quad a = \inf_{M \in C} X_1(M) \quad \text{et} \quad b = \sup_{M \in C} X_1(M)$$

Opérons de la même façon pour chaque coordonnée et posons

$$L_{i_k}(X_k) = \frac{\prod_{j \neq i_k} (X_k - X_{kj})}{\prod_{j \neq i_k} (X_{ki_k} - X_{kj})}.$$

Soit l'opérateur L_N défini par $L_N = L_q \otimes L_q \otimes \ldots \otimes L_q = \overset{n}{\bigotimes} L_q$:

$$\text{(II.3.2.3)} \quad L_N[f](M) = \sum_{i_1=1}^{q+1} L_{i_1}(X_1) \left(\sum_{i_2=1}^{q+1} L_{i_2}(X_2) \right) \left(\ldots \left(\sum_{i_n=1}^{q+1} L_{i_n}(X_n) f(X_{1i_1}, \ldots, X_{ni_n}) \right) \ldots \right).$$

En utilisant l'identité $\sum_{i_k=1}^{q+1} L_{i_k}(X_k) \equiv 1$ et le fait que

$$\begin{aligned} & f(X_1, \ldots, X_n) - f(X_{1i_1}, \ldots, X_{ni_n}) \\ & \quad = f(X_1, X_2, \ldots, X_n) - f(X_{1i_1}, X_2, \ldots, X_n) + f(X_{1i_1}, X_2, \ldots, X_n) - \ldots \\ & \qquad + f(X_{1i_1}, \ldots, X_{(n-1)i_{n-1}}, X_n) - f(X_{1i_1}, \ldots, X_{ni_n}) \end{aligned}$$

et posant $B_r = \sum_{i_r=1}^{q+1} |L_{i_r}(X_r)|$ on a, d'après le lemme :

$$|f(M) - L_N[f](M)| \leq \left(9 + \frac{4}{\pi}\operatorname{Log}(q+1)\right) \frac{M_m(f, C)}{2^m} \frac{d^m \pi^m}{(1+q)^m} [B_1 + B_1 B_2 + \ldots + B_1 B_2 \ldots B_{n-1}].$$

Nous majorons B_r par $B = 8 + \frac{4}{\pi}\operatorname{Log}(q+1)$ et obtenons

$$|f(M) - L_N[f](M)| \leq (B+1) \frac{B^n - B}{B-1} \frac{1}{2^m} \pi^m n^m d^m \frac{M_m(f, C)}{N^m},$$

$$\|f - L_N[f]\|_C \leq \frac{\pi^m n^m}{2^m} \frac{9}{7} \left(8 + \frac{4}{\pi}\operatorname{Log}\left(\frac{N}{n} + 1\right)\right)^n \frac{d^m M_m(f, C)}{N^m}$$

qui donne l'inégalité annoncée si l'on pose

$$K_1 = \frac{\pi^m n^m}{2^m} \frac{9}{7}, \qquad K_2 = 8 \qquad \text{et} \qquad K_3 = \frac{K_1\left(K_2 + \frac{4}{\pi}\operatorname{Log} 2\right)}{\operatorname{Log} 2}.$$

Remarque. — Si $m = 1$ certains calculs précédents ne sont pas valables, mais on a cependant le résultat pour $N \geq 1$

$$\|f - L_N[f]\|_C \leq K_1 \left(K_2 + \frac{4}{\pi}\operatorname{Log} N\right)^n d \frac{M_1(f, C)}{N} \leq K_3 (\operatorname{Log} N)^n d \frac{M_1(f, C)}{N}.$$

Remarque. — $L_N[f]$ est un projecteur sur l'espace des polynomes dont le degré par rapport à chaque variable est $\leq q$. Bien que $L_N[f]$ soit de degré nq il ne contient que $(q+1)^n$ coefficients et non pas $\binom{nq+n}{nq}$.

Le théorème précédent nous donne une borne supérieure pour $E(f, 0, N, C)$ dans $\mathbf{R}^n$ dans le cas où f possède des dérivées d'ordre m bornées par $M_m(f, C)$. Nous pouvons aussi obtenir des résultats pour diverses classes de fonctions f.

Nous nous contenterons d'énoncer les résultats qui s'obtiennent, mis à part les calculs, de la même façon qu'en (II.3.1).

(II.3.3) Théorème. — *Si f possède sur C un m-module de continuité $\omega(f, m, .)$, l'opérateur L_N réalise une approximation telle que :*

$$\|f - L_N[f]\|_C \leq K'_1 \left(K_2 + \frac{4}{\pi}\operatorname{Log} N\right)^n \frac{d^m}{N^m} \omega\left(f, m, \frac{d}{N}\right) \leq K'_3 (\operatorname{Log} N)^n \frac{d^m}{N^m} \omega\left(f, m, \frac{d}{N}\right).$$

Pour calculer une borne supérieure de K'_1 nous utiliserons un résultat de Korneicuk (Korneicuk [1]) relatif à l'approximation des fonctions d'une variable réelle. Ce résultat qui ne peut, d'après (Korneicuk [1]) être amélioré, est le suivant :

$$\text{(II.3.3.1)} \qquad E(g, 0, q, [a, b]) \leq \omega\left(g, 0, \frac{b-a}{2} \frac{\pi}{q+1}\right).$$

Par utilisation de l'inégalité $E(g, 0, q) \leqq \frac{\pi}{2q+2} E(g', 0, q-1)$ valable sur $[-1, +1]$ on majore K'_1 et K'_2.

Nous avons étudié le cas d'un hypercube C; considérons maintenant un compact E quelconque de diamètre d dans $\mathbf{R}^n$ et un hypercube C de côté d le contenant. Supposons défini sur E un champ taylorien T d'ordre m tel qu'il existe $\hat{\omega}$ satisfaisant à :

$$\mathfrak{T}_1(A, B, T, m) \leqq \hat{\omega}(AB) \quad \text{pour tout couple } (A, B) \in E^2.$$

Nous pouvons donc prolonger T en une fonction m fois continûment dérivable dans $\mathring{C}$ de telle sorte que par (I.4.4) il existe $\Gamma_3(m, n, d)$ tel que

$$\|f\|_C^m \leqq \Gamma_3(m, n, d) \left(\max_{\substack{A \in E \\ B \in E}} \hat{\omega}(AB) + \|f\|_E^m \right)$$

et, par (I.4.5), il existe $\Gamma_2(m, n, d)$ tel que

$$\omega(f, m, .) \leqq \Gamma_2(m, n, d)\, \hat{\omega}(.).$$

Les théorèmes suivants en résultent :

(II.3.4) **Théorème.** — *Étant donné un champ taylorien* T *d'ordre* m *défini sur* E *on peut approcher* f *par un polynome d'interpolation de degré* $\leqq N$ *de telle façon que*

$$\|f - L_N[f]\|_E \leqq K(m, n, d) \left[K_2 + \frac{4}{\pi} \operatorname{Log} N \right]^n \frac{1}{N^m} \hat{\omega}\left(\frac{1}{N}\right) \leqq K'(\operatorname{Log} N)^n \frac{1}{N^m} \hat{\omega}\left(\frac{1}{N}\right).$$

(II.3.5) **Théorème.** — *S'il existe un module de continuité* $\hat{\omega}$ *tel que, pour tout couple* $(A, B) \in E^2$ *on ait*

$$|f(A) - f(B)| \leqq \frac{1}{|\operatorname{Log} AB|^n} \hat{\omega}(AB),$$

alors $L_N[f]$ *converge uniformément vers* f *sur* E.

Ce dernier résultat est naturellement vrai si f est höldérienne d'exposant $\alpha (0 < \alpha \leqq 1)$ sur E et les résultats sont du même type que les critères classiques du type Dini-Lipschitz dans $\mathbf{R}^1$ pour l'approximation par polynomes trigonométriques.

Nous allons maintenant étudier $\|f - L_N[f]\|_C^k$. Nous montrerons en particulier que si $f \in \mathcal{C}^\infty(C)$ on a, quels que soient les entiers indépendants p et k,

$$\lim_{N \to +\infty} N^p \|f - L_N[f]\|_C^k = 0.$$

Le théorème suivant nous permet, à partir de polynomes réalisant *séparément* de bonnes approximations de chaque dérivée partielle première de f, de construire un polynome approchant f d'une part et dont les déri-

vées partielles approchent *simultanément* les dérivées partielles premières correspondantes de f.

(II.3.6) THÉORÈME. — *Si* C *est défini par les vecteurs de base et s'il existe n polynomes* P^i_{N-1} $(i = 1$ *à* $n)$ *de degrés* $N - 1$ *tels que*

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial X_i} - P^i_{N-1} \right\|^0_C \leqq \rho_i \quad \textit{pour } i = 1 \textit{ à } n,$$

on peut construire n polynomes P^j_N, *de degrés* N, *tels que pour chaque* $j = 1$ *à n on ait*

$$\| f - P^j_N \|^1_C \leqq (4N^2 + 1)(\rho_1 + \ldots + \rho_n).$$

Démonstration. — Soit P^1_{N-1} tel que $\left\| \frac{\partial f}{\partial X_i} - P^1_{N-1} \right\|^0_C \leqq \rho_1$. Par intégration sur $[0, X_1]$ de $\frac{\partial f}{\partial X_1}(u_1, X_2, \ldots, X_n] - P^1_{N-1}(u_1, X_2, \ldots, X_n)$ on forme Q^1_N de degré N tel que

$$| f(X_1, \ldots, X_n) - Q^1_N(X_1, \ldots, X_n) - (f(0, X_2, \ldots, X_n) - Q^1_N(0, X_2, \ldots, X_n)) | \leqq \rho_1.$$

Considérons maintenant Q^2_N obtenu comme Q^1_N en échangeant $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ puis faisons $X_1 = 0$. Nous obtenons

$$| f(0, X_2, \ldots, X_n) - Q^2_N(0, X_2, \ldots, X_n) - (f(0, 0, X_3, \ldots, X_n) - Q^2_N(0, 0, X_3, \ldots, X_n)) | \leqq \rho_2.$$

De proche en proche nous formons des polynomes et finalement nous obtenons P^1_N défini par

$$\begin{aligned} P^1_N(X_1, X_2, \ldots, X_n) = {} & Q^1_N(X_1, X_2, \ldots, X_n) - Q^1_N(0, X_2, \ldots, X_n) + Q^2_N(0, X_2, \ldots, X_n) - \ldots \\ & + Q^n_N(0, \ldots, 0, X_n) - Q^n_N(0, 0, \ldots, 0) + f(0, 0, \ldots, 0), \end{aligned}$$

P^1_N satisfaisait à

$$\| f - P^1_N \|^0_C \leqq \rho_1 + \ldots + \rho_n \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial P^1_N}{\partial X_1} = P^1_{N-1}.$$

Opérant de la même façon en permutant dès le début $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_j$ nous obtenons finalement n polynomes P^j_N de degrés $\leqq N$ qui, pour chaque $j = 1$ à n ont les propriétés

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial X_j} - \frac{\partial P^j_N}{\partial X_j} \right\|^0_C \leqq \rho_j; \tag{II.3.6.1}$$

$$\| f - P^j_N \|^0_C \leqq \rho_1 + \ldots + \rho_n; \tag{II.3.6.2}$$

$$\frac{\partial P^j_N}{\partial X_j} = P^j_{N-1}. \tag{II.3.6.3}$$

Il nous reste à majorer $\left\| \frac{\partial P^j_N}{\partial X_i} - \frac{\partial f}{\partial X_i} \right\|^0_C$ pour $i \neq j$,

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial X_i} - \frac{\partial P^j_N}{\partial X_i} \right\|^0_C \leqq \left\| \frac{\partial f}{\partial X_i} - \frac{\partial P^i_N}{\partial X_i} \right\|^0_C + \left\| \frac{\partial P^i_N}{\partial X_i} - \frac{\partial P^j_N}{\partial X_i} \right\|^0_C.$$

En utilisant l'inégalité de Markoff et (II.3.6.1) :

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial X_i} - \frac{\partial P_N^i}{\partial X_i} \right\|_C^0 \leqq \rho_i + 2N^2 \| P_N^i - P_N^i \|_C^0 \leqq \rho_i + 2N^2 (\| f - P_N^i \|_C^0 + \| f - P_N^i \|_C^0).$$

Par (II.3.6.2) on obtient le théorème.

(II.3.7) Théorème. — *Si* C *est défini par les vecteurs de base et si l'on connaît des polynomes* P_{N-k}^K *de degrés* $\leqq N-k$ *tels que, pour chaque multi-indice* $K=(k_1, \ldots, k_n)$ *avec* $k_1 + \ldots + k_n = k$, *on ait*

$$\left\| \frac{\partial^K f}{\partial X^K} - P_{N-k}^K \right\|_C^0 \leqq \rho_K \leqq r_k,$$

alors on peut construire un ensemble Q *de polynomes* Q_N, *de degrés* $\leqq N$, *tels que quel que soit* $Q_N \in Q$ *on ait*

$$\| f - Q_N \|_C^k \leqq (2^{k+1} N^{2k} + 1) n^k r_k.$$

Opérons comme dans le théorème précédent : on peut remonter de chaque dérivée partielle $\frac{\partial^K f}{\partial X^K}$ à f par un nombre fini de « chemins » différents et chaque chemin définit un polynome Q_N. Soit Q l'ensemble de ces polynomes.

Pour chaque multi-indice $I (i \leqq k)$ on peut trouver un chemin et donc un polynome $Q_N^I \in Q$ tel que

$$\left\| \frac{\partial^I f}{\partial X^I} - \frac{\partial^I Q_N^I}{\partial X^I} \right\|_C^0 \leqq n^{k-i} r_k.$$

Soit Q_N arbitraire dans Q :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^I f}{\partial X^I} - \frac{\partial^I Q_N}{\partial X^I} \right\|_C^0 &\leqq n^{k-i} r_k + \left\| \frac{\partial^I Q_N^I}{\partial X^I} - \frac{\partial^I Q_N}{\partial X^I} \right\|_C^0 \\ &\leqq n^{k-i} r_k + 2^i N^2 (N-1)^2 \ldots (N-i+1)^2 \| Q_N^I - Q_N \|_C^0 \\ &\leqq n^{k-i} r_k + 2^k N^{2k} (n^k r_k + n^k r_k). \end{aligned}$$

Finalement pour $i \leqq k$ et pour $Q_N \in Q$:

$$\left\| \frac{\partial^I}{\partial X^I} (f - Q_N) \right\| \leqq (2^{k+1} N^{2k} + 1) n^k r_k.$$

Démontrons maintenant le théorème :

(II.3.8) Théorème. — *Si* $f \in \mathcal{C}^m(C)$ *et si* k *et* m *sont des entiers tels qu'on ait* $m - 3k = p > 0$, *alors pour* ε *compris strictement entre* 0 *et* p, *on a* [*en prenant pour* L_N *l'opérateur d'interpolation défini en* (II.3.2.3)]

$$\lim_{N \to +\infty} N^{p-\varepsilon} \| f - L_N[f] \|_C^k = 0.$$

Plus précisément, on a :

$$\text{(II.3.8.1)} \qquad \lim_{N \to +\infty} \frac{N^p}{(\operatorname{Log} N)^n} \| f - L_N[f] \|_C^k = 0.$$

Démonstration. — En appliquant à *chaque* dérivée partielle $\frac{\partial^K f}{\partial X^K}$ l'opérateur L_{N-k} on obtient par le théorème (II.3.3) des polynomes P_{N-k}^K tels que

$$\left\| \frac{\partial^K f}{\partial X^K} - P_{N-k}^K \right\|_C^0 \leq K_3'' \frac{(\operatorname{Log} N)^n}{(N-k)^{m-k}} \omega\left(f, m, \frac{1}{N-k}\right).$$

Par (II.3.7) on peut former Q_N tel que

$$\| f - Q_N \|_C^k \leq K_5 \frac{(\operatorname{Log} N)^n}{N^{m-3k}} \omega\left(f, m, \frac{1}{N}\right).$$

Remarque. — Nous avons donc déjà formé Q_N satisfaisant [à la place de $L_N[f]$) à (II.3.8.1)],

$$\| f - L_N[f] \|_C^k \leq \| f - Q_N \|_C^k + \| Q_N - L_N[f] \|_C^k$$

qui, par l'inégalité de Markoff et l'inégalité triangulaire, donne

$$\| f - L_N[f] \|_C^k \leq \| f - Q_N \|_C^k + 2^k N^{2k} \| f - Q_N \|_C^0 + 2^k N^{2k} \| f - L_N[f] \|_C^0.$$

On a donc

$$\| f - L_N[f] \|_C^k \leq K_6 \frac{(\operatorname{Log} N)^n}{N^{m-3k}} \omega\left(f, m, \frac{1}{N}\right).$$

(II.3.9) Corollaire. — *Si f est indéfiniment dérivable sur* C *alors, pour tout entier k et tout entier p, on a*

$$\lim_{N \to +\infty} N^p \| f - L_N[f] \|_C^k = 0.$$

Il suffit de prendre $m = 3k + p + 1$ pour conclure.

(II.4) Théorèmes d'approximation et de convergence concernant l'approximation par des opérateurs linéaires positifs. — Dans tout ce chapitre Ω désigne un compact de $\mathbf{R}^n$. $\mathbf{R}^n$ est rapporté ou bien à une base orthonormée de coordonnées X_i ou bien à un véritable simplexe de sommets A_i. Les coordonnées barycentriques par rapport aux A_i sont $x_1, \ldots, x_n$ et $x_{n+1} = 1 - x_1 - \ldots - x_n$. Nous désignerons par E_0, E_i, E_{ij}, e_0, e_i, e_{ij} respectivement les fonctions $M \to 1$, $M \to X_i(M)$, $M \to X_i(M) X_j(M)$, $M \to 1$, $M \to x_i(M)$, $M \to x_i(M) x_j(M)$, L_k désigne, pour chaque entier k, un opérateur linéaire positif opérant sur $\mathcal{C}(\Omega)$. Nous poserons s'il n'y a pas ambiguïté $\| g \|_\Omega^0 = \| g \|$. Le lemme suivant généralise à $\mathbf{R}^n$ un théorème dû à Korovkin (Korovkin [1]) dans le cas de $\mathbf{R}^1$.

(II.4.1) Lemme. — *Pour que* $\lim_{k \to +\infty} \| L_k[f] - f \| = 0$ *pour tout* $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, *il faut et il suffit que* $\lim_{k \to +\infty} \| L_k[g] - g \| = 0$ *pour chaque g de l'ensemble*

$\{E_0, E_1, \ldots, E_n, E\}$ *contenant* $n+2$ *fonctions*, E *désigne la fonction* $M \to \sum_{i=1}^{n} X_i^2(M)$.

Démonstration. — La condition nécessaire étant évidente, supposons qu'on ait sur Ω

$$L_k[E_0](M) = E_0(M) + A_{0k}(M),$$
$$L_k[E_i](M) = E_i(M) + A_{ik}(M),$$
$$L_k[E\ ](M) = E\ (M) + A_k\ (M)$$

et que A_{0k}, A_{ik}, A_k tendent uniformément vers zéro sur Ω lorsque k tend vers $+\infty$.

Soit u_μ la fonction $M \to \mu M^2$ et soit δ un réel > 0 arbitraire.

Pour tout couple $(\mu, M) \in \Omega^2$ les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$-\omega(f, \delta) - \frac{2\|f\|}{\delta^2}\mu M^2 \leqq f(M) - f(\mu) \leqq \omega(f, \delta) + \frac{2\|f\|}{\delta^2}\mu M^2.$$

En effet, si $\mu M \leqq \delta$, on a

$$|f(M) - f(\mu)| \leqq \omega(f, \delta)$$

et si $\mu M \geqq \delta$, alors :

$$|f(M) - f(\mu)| \leqq 2\|f\| \leqq \frac{2\|f\|}{\delta^2}\mu M^2.$$

On en déduit les inégalités fonctionnelles :

$$-\omega(f, \delta)E_0 - \frac{2\|f\|}{\delta^2}u_\mu \leqq f - f(\mu)E_0 \leqq \omega(f, \delta)E_0 + \frac{2\|f\|}{\delta^2}u_\mu.$$

Appliquons alors l'opérateur linéaire positif L_k aux fonctions qui interviennent dans ces inégalités en tenant compte du fait que

$$u_\mu = E - 2\sum_{i=1}^{n} E_i(\mu)E_i + E(\mu)E_0$$

$$-\omega(f, \delta)L_k[E_0] - \frac{2\|f\|}{\delta^2}\left[L_k[E] - 2\sum_{i=1}^{n} E_i(\mu)L_k[E_i] + E(\mu)L_k[E_0]\right]$$
$$\leqq L_k[f] - f(\mu)L_k[E_0] \leqq \ldots$$

Comme

$$L_k[E](\mu) - 2\sum_{i=1}^{n} E_i(\mu)L_k[E_i](\mu) + E(\mu)L_k[E_0](\mu)$$
$$= E(\mu) + A_k(\mu) - 2\sum_{i=1}^{n} E_i^2(\mu) - 2\sum_{i=1}^{n} E_i(\mu)A_{ik}(\mu) + E(\mu) + E(\mu)A_{0k}(\mu).$$

On a

$$\left| L_k[E](\mu) - 2\sum_{i=1}^{n} E_i(\mu) L_k[E_i](\mu) + E(\mu) L_k[E_0](\mu) \right| \leqq B_k(\mu), \qquad \text{avec} \quad \lim_{k \to +\infty} \| B_k \| = 0.$$

Pour $k > k(\varepsilon)$, on aura donc

$$-\varepsilon f(\mu) - \omega(f, \delta)\,|1+\varepsilon| - \varepsilon \leqq L_k[f](\mu) - f(\mu) \leqq \varepsilon f(\mu) + \omega(f, \delta)\,|1+\varepsilon| + \varepsilon$$

et uniformément en μ on aura

$$\lim_{k \to +\infty} \| L_k[f] - f \| \leqq \omega(f, \delta).$$

Comme δ est arbitraire et f uniformément continue, c'est que

$$\lim_{k \to +\infty} \| L_k[f] - f \| = 0.$$

Soit maintenant un simplexe Ω de $\mathbf{R}^n$. On en déduit facilement du lemme la proposition :

(II.4.2) Proposition. — *Pour que* $\lim_{k \to +\infty} \| L_k[f] - f \| = 0$ *pour tout* $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, *il faut et il suffit que* $\lim_{k \to +\infty} \| L_k[g] - g \| = 0$ *pour chaque* g *de l'ensemble* $\{e_0, \ldots, e_i, \ldots, e_{ij}, \ldots\}$ *contenant* $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ *fonctions.*

Considérons alors l'opérateur de Bernstein à n variables dans le simplexe :

$$L_k[f](M) = \sum_{i=0}^{k} \sum_{i_1+\ldots+i_n=i} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n} (1 - x_1 - \ldots - x_n)^{k-i} \frac{k!}{i_1! \ldots i_n!\,(k-i)!} f\left(\frac{i_1}{k}, \ldots, \frac{i_n}{k}\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{(k-i)!} (1 - x_1 \ldots - x_n)^{k-i} \sum_{i_1+\ldots+i_n=i} \frac{x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}}{i_1! \ldots i_n!} f\left(\frac{i_1}{k}, \ldots, \frac{i_n}{k}\right).$$

Il est clair que $L_k[e_0](M) = 1$

$$L_k[e_j](M) = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{(k-i)!} (1 - x_1 \ldots - x_n)^{k-i} \sum_{i_1+\ldots+i_n=i} \frac{x_1^{i_1} \ldots x_j^{i_j} \ldots x_n^{i_n}}{i_1! \ldots i_j! \ldots i_n!} \frac{i_j}{k}$$

et, puisque l'égalité $i = 0$ entraîne $i_j = 0$, on a

$$L_k[e_{lj}](M) = \sum_{i=1}^{k} \frac{k!}{(k-i)!} (1 - x_1 \ldots - x_n)^{k-i} \frac{x_j}{k} (x_1 + \ldots x_n)^{i-1} \frac{1}{(i-1)!},$$

(II.4.2.1) $$L_k[e_j](M) = x_j = e_j(M).$$

Pour $l \neq j$ on a aussi

$$L_k[e_{lj}](M) = \sum_{i=2}^{k} \frac{k!}{(k-i)!} (1 - x_1 - \ldots - x_n)^{k-i} \frac{x_l x_j}{k^2} (x_1 + \ldots + x_n)^{i-2} \frac{1}{(i-2)!},$$

(II.4.2.2) $$L_k[e_{l_j}](M) = x_l x_j \left(1 - \frac{1}{k}\right) = e_{lj}(M) - \frac{1}{k} e_{lj}(M).$$

Pour $j = l$ enfin on a

$$L_k[e_{jj}](M) = \sum_{i=1}^{k} \frac{k!}{(k-i)!}(1 - x_1 - \ldots - x_n)^{k-i} \frac{x_j}{k^2} \left(\sum_{i_1+\ldots+i_n=i-1} \frac{x_1^{i_1} \ldots x_j^{i_j-1} \ldots x_n^{i_n}}{i_1! \ldots (i_j-1)! \ldots i_n!} i_j \right)$$

et, en écrivant $i_j = i_j - 1 + 1$, on a

$$L_k[e_{jj}](M) = \sum_{i=2}^{k} \frac{k!}{(k-i)!}(1 - x_1 - \ldots - x_n)^{k-i} \frac{x_j^2}{k^2}(x_1 + \ldots + x_n)^{i-2} \frac{1}{(i-2)!}$$
$$+ \sum_{i=1}^{k} \frac{k!}{(k-i)!}(1 - x_1 - \ldots - x_n)^{k-i}(x_1 + \ldots + x_n)^{i-1} \frac{x_j}{k^2} \frac{1}{(i-1)!}$$

$$\text{(II.4.2.1)} \qquad L_k[e_{jj}](M) = \frac{k-1}{k} x_j^2 + \frac{x_j}{k} = e_{jj}(M) + \frac{1}{k}(e_j(M) - e_{jj}(M)).$$

Nous avons alors par application du lemme le résultat concernant l'approximation au sens de Weierstrass de $f \in \mathcal{C}(\Omega)$. Nous allons préciser les résultats. La démonstration qui suit n'utilise d'ailleurs pas le lemme et suffit à montrer qu'on a $\lim_{k \to +\infty} \| L_k[f] - f \| = 0$ lorsque L_k est l'opérateur de Bernstein.

Pour $M \in \Omega$, nous avons (puisque $L_k[e_0] = 1$)

$$|f(M) - L_k[f](M)| \leq \left| \sum_{I} \omega(f, \mu_I M) p_I(M) \right|$$

en appelant μ_I le point $\left(\frac{i_1}{k}, \ldots, \frac{i_n}{k}\right)$ et

$$p_I(M) = \frac{k!}{i_1! \ldots i_n! (k-i)!} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n} (1 - x_1 - \ldots - x_n)^{k-i}.$$

On a alors

$$|f(M) - L_k[f](M)| \leq \sum_{I} \left(1 + \frac{\lambda}{l} \mu_I M\right) \omega\left(f, \frac{l}{\lambda}\right) p_I(M)$$

pour tout $\lambda > 0$ et en désignant par l la longueur du plus grand côté du simplexe,

$$|f(M) - L_k[f](M)| \leq \omega\left(f, \frac{l}{\lambda}\right) \left[1 + \frac{\lambda}{l} \sqrt{\sum_{I} \overline{\mu_I M}^2 p_I(M)} \right].$$

Comme

$$\overline{\mu_I M}^2 = \sum_{j=1}^{n} \left(x_j - \frac{i_j}{k}\right)^2 \overline{A_{n+1} A_j}^2$$
$$+ 2 \sum_{1 \leq j < l \leq n} \left(x_j - \frac{i_j}{k}\right)\left(x_l - \frac{i_l}{k}\right) \overrightarrow{A_{n+1} A_j} . \overrightarrow{A_{n+1} A_l}.$$

On a, compte tenu des approximations des $L_k[e_j]$ et $L_k[e_{jl}]$,

$$\sum_{I} \overline{\mu_I M^2}\, p_I(M) = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{n}(x_j - x_j^2)\overline{A_{n+1}A_j^2} - 2\sum_{1\leq j<l\leq n}\frac{x_j x_l}{k}\overrightarrow{A_{n+1}A_j}.\overrightarrow{A_{n+1}A_l}$$

$$= \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{n} x_j \overrightarrow{A_{n+1}A_j^2} - \frac{(A_{n+1}M)^2}{k}.$$

Il en résulte que pour un simplexe quelconque dont le plus grand côté a pour longueur l :

$$\|f - L_k[f]\| \leq \omega\left(f, \frac{l}{\lambda}\right)\left[1 + \frac{\lambda}{\sqrt{k}}\right]$$

et, en faisant $\lambda = \sqrt{k}$, nous avons le théorème :

(II.4.3) Théorème. — *L'opérateur de Bernstein donne lieu à une approximation*

$$\|f - L_k[f]\| \leq 2\,\omega\left(f, \frac{l}{\sqrt{k}}\right).$$

Supposons toujours le simplexe quelconque mais f höldérienne de telle façon que $\omega(f, \delta) \leq K\delta^\alpha$.

Nous avons

$$\|f - L_k[f]\| \leq K l^\alpha\left[\lambda^{-\alpha} + \frac{\lambda^{1-\alpha}}{\sqrt{k}}\right].$$

Choisissons λ pour que le crochet soit minimal : $\lambda = \frac{\alpha}{1-\alpha}\sqrt{k}$, on obtient

$$\|f - L_k[f]\| \leq \frac{K l^\alpha}{k^{\frac{\alpha}{2}}}\varphi(\alpha), \tag{II.4.4}$$

avec

$$\varphi(\alpha) = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^\alpha + \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{(1-\alpha)}$$

ou

$$\varphi(\alpha) = \frac{1}{\alpha^\alpha(1-\alpha)^{1-\alpha}} \leq 2.$$

Lorsque les côtés $\overrightarrow{A_{n+1}A_j}$ sont orthogonaux, nous avons

$$\sum_{I} \overline{\mu_I M^2}\, p_I(M) \leq \frac{l^2}{k}\sum_{j=1}^{n}(x_j - x_j^2).$$

Prenons le maximum de $\sum_{j=1}^{n}(x_j - x_j^2)$ dans le simplexe.

Nous avons

$$\sum_{j=1}^{n}(x_j - x_j^2) \leqq \sum_{j=1}^{n} x_j - \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^2}{n}$$

et pour $n \geqq 2$ le maximum $1 - \frac{1}{n}$ est atteint $\left(\text{pour } x_j = \frac{1}{n}\right)$.

On a donc (pour $n \geqq 2$) dans un simplexe multirectangle :

$$\text{(II.4.5)} \qquad \|f - \mathrm{L}_k[f]\| \leqq \omega\left(f, \frac{l}{\sqrt{k}}\right)\left[1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right].$$

Pour $n = 1$, $\sum \overline{\mu_1 \mathrm{M}^2}\, p_1(\mathrm{M}) \leqq \frac{l^2}{4k}$ et l'on retrouve le résultat connu

$$\|f - \mathrm{L}_k[f]\| \leqq \frac{3}{2}\,\omega\left(f, \frac{l}{\sqrt{k}}\right).$$

CHAPITRE III.

Interpolation, d'un champ taylorien, par des fonctions polynomiales par simplexes.

(III.0) Introduction. — Supposons donné, sur un compact E de $\mathbf{R}^n$, un champ taylorien T d'ordre m. On peut être tenté d'approcher un prolongement du champ T en réalisant une interpolation polynomiale du champ T sur un ensemble fini F de N points A_i de E. Le problème revient à trouver N fonctions s_i telles que :

a. s_i est m-plat en A_j pour $i \neq j$;

b. La fonction $\mathrm{M} \rightsquigarrow s_i(\mathrm{M}) - 1$ est m-plate en A_i.

La fonction $\mathrm{Q}_\mathrm{N}(\mathrm{M}) = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} s_i(\mathrm{M})\, \mathrm{T}_{\mathrm{A}_i}(\mathrm{M})$ résout alors le théorème du prolongement de Whitney lorsque le champ T est défini sur un ensemble discret. Il est raisonnable d'exiger en plus que, lorsque T est le champ induit par un polynome de degré m sur $\mathbf{R}^n$, Q_N soit identique à ce polynome. Ceci entraîne alors la condition supplémentaire :

c. $\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} s_i(\mathrm{M}) = 1$.

Les fonctions s_i constituent ce que nous appellerons une partition de l'unité relative à l'ensemble F.

Sans même parler des difficultés numériques qui s'opposent à la formation et à l'utilisation d'une telle partition de l'unité, ce procédé présente tous les inconvénients, connus depuis Runge, Borel, Faber (Runge [1], Borel [1], Faber [1]), de l'interpolation par une formule du type de Lagrange-Hermite. L'interpolation est divergente en général sur l'ensemble E lui-même.

Nous avons alors pensé tenter une approximation d'un type voisin de celle utilisée par Schoenberg (Schœnberg [1]), mais dans le cas de $\mathbf{R}^n$ au lieu de $\mathbf{R}$, Schoenberg utilise une fonction P polynomiale par intervalle, de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbf{R}$ et de degré pas trop élevé : ce sont les « splines ».

Dans (III.1), nous définirons un recouvrement, de l'enveloppe convexe E C(F) d'un ensemble F fini, par des simplexes ayant pour sommets les points de F. Nous définirons alors plusieurs partitions de l'unité relatives aux sommets d'un simplexe.

Dans (III.3), nous préciserons une partition qui nous semble importante : c'est une partition *polynomiale* de l'unité.

Dans ce paragraphe (III.3) nous nous sommes efforcé de donner des majorations aussi fines que possible pour les dérivées des fonctions s_i de la partition polynomiale. Ces majorations sont importantes lorsqu'on veut étudier « l'erreur d'interpolation » en un point M de E C(F).

Dans (III.4) et les derniers paragraphes du chapitre III, nous étudions l'interpolation associée à une telle méthode.

Dans le chapitre IV nous utiliserons la partition polynomiale pour une étude numérique d'intégration avec points non régulièrement répartis dans $\mathbf{R}^n$.

Remarque. — Nous serons amené à dériver ou bien par rapport aux coordonnées barycentriques x_i ou bien par rapport aux coordonnées de la base canonique de $\mathbf{R}^n$. Pour préciser les notations de (I.1) nous mettrons x (ou X) en indice lorsqu'il y a ambiguïté. Ainsi $M_{x,k}(f)$ désignera le $M_k(f)$ de (I.1), où les dérivées sont prises par rapport aux x_i.

(III.1) La N-triangulation. — Étant donnés les N points $A_i (N \geq n+1)$ nous commençons par rechercher l'enveloppe convexe E C(F) de F ainsi que les sommets du polytope définissant E C(F). La frontière de E C(F) est constituée par des facettes à $(n-1)$ dimensions au plus. Il peut arriver que des points A_i ne soient pas strictement des sommets du polytope définissant E C(F) mais soient intérieurs aux facettes de E C(F) ou sur leur frontière. La construction générale donnée plus loin s'appliquera en changeant n en $n-1$ pour la triangulation de ces facettes frontières de E C(F). Nous avons ainsi construit un polytope P limité par des facettes à $n-1$ dimensions. Soit F_1 l'ensemble des points A_i situés sur la frontière de P et F_2 l'ensemble des A_i strictement intérieurs à P.

Pratiquement pour obtenir F_1 nous considérons n points A_i et nous cherchons d'abord si ces n points définissent un hyperplan à $n-1$ dimensions. Formant l'équation de cet hyperplan il suffit de voir si tous les autres points A_i sont (au sens large) d'un même côté de l'hyperplan; on peut, par exemple, utiliser les produits de puissances analytiques par rapport à l'hyperplan. Différentes techniques de programmation linéaire peuvent être utilisées pour diminuer les temps de calcul. Si tous les points sont, au sens strict, d'un même côté de l'hyperplan les points définissant l'hyperplan définissent une facette. Si un point est dans l'hyperplan nous avons recours à la construction générale en changeant n en $n-1$ (ou $n-p$).

(III.1.1) Définition. — *Nous appellerons n-triangulation dans* E C(F) *un recouvrement de* E C(F) *par des simplexes de* $\mathbf{R}^n$ *ayant pour sommets les points* A_i *de* F *de telle manière que :*

(III.1.1.1) *tout point* $A_i \in F$ *est sommet d'au moins un simplexe;*

(III.1.1.2) *les simplexes du recouvrement ont deux à deux au plus une facette simplexe à* $n-1$ *dimensions en commun;*

(III.1.1.3) *les simplexes fermés recouvrent* E C(F).

(III.1.2) *Construction générale.* — Nous allons définir un algorithme construisant une n-triangulation dans E C(F).

Ayant obtenu F_1 qu'on triangule en appliquant le raisonnement qui suit en changeant n en $n-1$ nous opérons de la manière suivante :

— Si F_2 est vide nous prenons un point A dans F_1 et nous le joignons aux points de F_1 extérieurs aux facettes de F_1 (à $n-1$ dimensions au plus) contenant A. Il nous reste alors à trianguler dans ces facettes et par récurrence descendante sur n le raisonnement s'applique.

— Si F_2 n'est pas vide nous opérons de la même façon en joignant $A \in F_2$ à tous les points de F_1. Nous obtenons un premier recouvrement de E C(F) par des simplexes ayant pour sommets les points de F_1 et A. Ensuite nous prenons les points restants dans F_2 : Soit B un tel point. S'il est strictement intérieur à un simplexe S du premier recouvrement nous supprimons ce simplexe S et nous le remplaçons par les $n+1$ simplexes ayant pour bases les facettes de S et pour dernier sommet le point B. Si B est sur la frontière de plusieurs simplexes, en joignant B aux sommets de ces derniers nous remplaçons le recouvrement précédent par un autre recouvrement ayant les mêmes propriétés (III.1.1.2) et (III.1.1.3). Nous continuons jusqu'à épuisement des points B de F_2.

Pratiquement pour savoir si un point B est à l'intérieur d'un simplexe S on forme les équations des hyperplans contenant les facettes et l'on cherche si le produit de la puissance analytique de B et de la puissance analytique

du sommet opposé à la facette est $\geqq 0$. Il revient au même de considérer les coordonnées barycentriques. Dans le cas où tous les $(n+1)$ produits obtenus sont (strictement) positifs, B est (strictement) intérieur au simplexe S.

Des calculs concernant la n-triangulation ont été effectués sur l'ordinateur du centre de calcul. Nous avons groupé les programmes et les résultats en annexe.

(III.2) Diverses partitions de l'unité.

(III.2.1) Définition. — *Étant donné un simplexe* S *non dégénéré dans* $\mathbf{R}^n$ *nous dirons que nous avons réalisé une* $(n-m)$ *partition de l'unité sur* S *si nous avons trouvé* $(n+1)$ *fonctions* s_i, $i=1$ *à* $n+1$, *satisfaisant à*

(III.2.1.1) $\sum_{i=1}^{n+1} s_i(\mathrm{M}) \equiv 1$ *pour* $\mathrm{M} \in \mathbf{R}^n$;

(III.2.1.2) $s_i(\mathrm{M}) \geqq 0$ *pour* $\mathrm{M} \in \mathrm{S}$;

(III.2.1.3) s_i *est m-plat sur la face opposée à* A_i.

Remarque. — Si (III.2.1.1) et (III.2.1.3) sont vérifiées, alors :

(III.2.2) Proposition :

(III.2.2.1) *pour* $k \neq i$, s_k *est m-plat en* A_i;

(III.2.2.2) $(s_i(\mathrm{M})-1)$ *est m-plat en* A_i.

Dans la suite nous repérerons la position de M dans $\mathbf{R}^n$ par ses coordonnées barycentriques $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1} = 1 - x_1 - \ldots - x_n$ par rapport aux sommets de S. Pour que M soit contenu dans S, il faut et il suffit que $0 \leqq x_i \leqq 1$ pour tout $i=1$ à $n+1$.

Pour $\mathrm{K} = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ et $k = k_1 + \ldots + k_n$ nous poserons

$$\mathrm{K}! = k_1!\, k_2! \ldots k_n!.$$

(III.2.3) *une* $(\mathrm{N}-m)$ *partition rationnelle de l'unité :*

$$\mathrm{D} = \mathrm{D}(\mathrm{M}) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^{m+1}$$

possède un minimum $d(n, m) > 0$ sur S puisque $x_i \geqq 0$ pour tout $i=1$ à $n+1$ et

$$x_{n+1} = 1 - x_1 \ldots - x_n.$$

On a d'ailleurs $d(n, m) = \frac{1}{(n+1)^m}$ atteint par $\mathrm{D}(\mathrm{M})$ au centre de gravité des $(n+1)$ points A_i.

Il en résulte immédiatement que les fonctions s_i définies par $s_i(\mathrm{M}) = \frac{x_i^{m+1}}{\mathrm{D}(\mathrm{M})}$ répondent à la question.

(III.2.3.1) THÉORÈME. — *La* $(n-m)$ *partition rationnelle de l'unité satisfait à*

$$\| s_i \|_{x,S}^k \leqq 2^{\frac{k(k+1)}{2}} (n+1)^{km} (m+1)^k m^{k-1} \dots (m+2-k).$$

Démonstration. — En appliquant la formule de Leibniz à

$$D(M)\, s_i(M) = x_i^{m+1},$$

on a, avec $\lambda = \min(D(M))$,

$$\lambda M_{k,x}(s_i) \leqq \left(\sum_{p=0}^{k-1} \binom{k}{p} (m+1)\dots(m+2-k+p)\, M_{p,x}(s_i) \right) + (m+1)\dots(m+2-k)$$

et donc

$$\lambda \| s_i \|_x^k \leqq (m+1)\dots(m+2-k) \left(1 + \sum_{p=0}^{k-1} \binom{k}{p} \| s_i \|_x^p \right),$$

$$\lambda \| s_i \|_x^k \leqq 2^k (m+1)\dots(m+2-k) \| s_i \|_x^{k-1}.$$

Ce résultat est naturellement valable en remplaçant k par $k_1 \leqq k$. Par multiplication membre à membre on obtient la conclusion du théorème.

Pour les petites valeurs de k, on trouve directement

$$\| s_i \|_x^1 \leqq 2(m+1)(n+1)^m \quad \text{et} \quad \| s_i \|_x^2 \leqq (2m(n+1)^m + 4(m+1)(n+1)^{2m})(m+1).$$

Pour les calculs effectifs, on peut utiliser le fait que :

— si $m = 1$ et $n = 2$, on a

$$\| s_i \|_x^1 \leqq 12$$

et si $m = 2$, $n = 2$,

$$\| s_i \|_x^1 \leqq 54 \quad \text{et} \quad \| s_i \|_x^2 \leqq 3\,024.$$

(III.2.4) *une* (N, ∞) *partition de l'unité.* — Soit $g(x)$ une fonction à dérivée croissante indéfiniment dérivable continûment sur $[0, 1]$ telle que $g^{(p)}(0) = 0$ pour tout entier $p \geqq 0$. Par exemple, $g(x) = \exp\left(-\frac{2}{x}\right)$ pour $x \in [0, 1]$ et $g(0) = 0$.

Soit $D = \sum_1^{n+1} g(x_j)$. Nous obtenons immédiatement la $(n-\infty)$ partition cherchée, à savoir :

$$s_i(M) = \frac{g(x_i)}{D(M)}.$$

(III.2.4.1) THÉORÈME. — *Si* $\gamma_p = \| g \|_{x,[0,1]}^p$,

$$\| s_i \|_{x,S}^k \leqq \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdots \gamma_k \cdot 2^{\frac{k(k+1)}{2}} \frac{1}{(n+1)^k \left[g\left(\frac{1}{n+1} \right) \right]^k}.$$

En effet, compte tenu des hypothèses sur g, $D(M)$ est minimal pour $x_j = \frac{1}{n+1}$ et

$$\lambda = \min D(M) = (n+1)\, g\left(\frac{1}{n+1}\right).$$

D'autre part, en opérant comme en (III.2.3), on a

$$\| s_i \|_x^p \lambda \leqq 2^p \gamma_p \| s_i \|_x^{p-1} \qquad \text{pour} \quad p \leqq k$$

et, après quelques calculs, nous obtenons la conclusion.

Pour $k = 1$, on a

$$\| s_i \|_x^1 \leqq \frac{4\, e^{2n}}{n+1}.$$

Pour $k = 1$ et $n = 1$:

$$\| s_i \|_x^1 \leqq 15,$$

et pour $n = 2$:

$$\| s_i \|_x^1 \leqq 74.$$

Pour $k = 2$, on a

$$\| s_i \|_x^1 \leqq \frac{4\, e^{2n}}{n+1},$$

$$\| s_i \|_x^2 \leqq \frac{80\, e^{4n}}{(n+1)^2}$$

et pour $n = 2$:

$$\| s_i \|_x^2 \leqq 30.000$$

(III.2.5) *Remarque.* — On peut remarquer qu'il est impossible de trouver une fonction g donnant lieu à une « faible » croissance de $\| s_i \|_x^k$ lorsque k tend vers $+\infty$. En effet, dans le cas où $n = 1$, il résulte du théorème de Denjoy-Carleman (Denjoy [1], Carleman [1], Borel [2]) que $\| s_i \|_x^k$ ne peut être constamment inférieur à k^k. En effet, s'il en était ainsi, on aurait pour tout k : $\frac{1}{\sqrt[k]{\| s_i \|^k}} \geqq \frac{1}{k}$ et la série de terme général $\frac{1}{\sqrt[k]{\| s_i \|_x^k}}$ serait divergente contrairement au résultat de Carleman (Carleman [1]).

Nous allons maintenant développer la $(n - m)$ partition de l'unité la plus importante et nous lui consacrerons le paragraphe (III.3).

(III.3) Une $(n - m)$ partition polynomiale. — Soit D_M^i le simplexe obtenu en remplaçant le sommet A_i de S par $M \in S$. Désignant par x_1, $x_2, \ldots, x_n$, $x_{n+1} = 1 - x_1 - \ldots - x_n$ (resp. $t_1, t_2, t_n, \ldots, t_{n+1} = 1 - t_1 - \ldots - t_n$) les coordonnées barycentriques de M (resp. μ), avec M et μ dans S, par rapport aux sommets A_i de S et posant

$$N_i(M) = \int \cdots \int_{D_M^i} t_1^m \ldots t_n^m (1 - t_1 - t_2 - \ldots - t_n)^m \, dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_n$$

obtenons le théorème :

(III.3.1) Théorème. — *Les* $(n+1)$ *fonctions* s_i *définies par* $s_i(\mathrm{M}) = \frac{\mathrm{N}_i(\mathrm{M})}{\mathrm{N}_i(\mathrm{A}_i)}$ *sont des polynomes réalisant la* $(n-m)$ *partition de l'unité sur* S.

En effet, par le changement de variables :

$$t_j = (1-\delta_i^j)\, u_j + u_i x_j \quad \text{pour } j = 1 \text{ à } n, \tag{III.3.1.1}$$

avec $\delta_i^j = 0$ si $i \neq j$ et $\delta_i^i = 1$, le domaine $\mathrm{D}_{\mathrm{M}}^i$ est transformé en S et

$$\mathrm{N}_i(\mathrm{M}) = x_i^{m+1} \int \cdots \int_{\mathrm{S}} (u_1 + u_i x_1)^m \ldots (u_{i-1} + u_i x_{i-1})^m u_i^m (u_{i+1} + u_i x_{i+1})^m \ldots$$
$$\times (1 - u_1 - \ldots - u_{i-1} - u_{i+1} - \ldots - u_n - u_i(x_1 + \ldots + x_n))^m \, du_1 \wedge \ldots \wedge du_n;$$

$\mathrm{N}_i(\mathrm{M})$ est donc un polynome de degré $(n+1)m+1$.

En posant $s_i(\mathrm{M}) = \frac{\mathrm{N}_i(\mathrm{M})}{\mathrm{N}_i(\mathrm{A}_i)}$ nous obtenons une $(n-m)$ partition polynomiale de l'unité avec des $s_i(\mathrm{M})$ polynomes de degrés $(n+1)m+1$.

Remarque. — On peut développer $\mathrm{N}_i(\mathrm{M})$ sous la forme d'un polynome

$$\mathrm{N}_i(\mathrm{M}) = x_i^{m+1} \psi(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1 - x_1 - \ldots - x_n, x_{i+1}, \ldots, x_n),$$

où ψ est un polynome, de degré nm par rapport aux variables indiquées entre parenthèses, et admettant pour coefficients des intégrales de Dirichlet (Goursat [1], p. 376) :

$$\int \cdots \int_{\mathrm{S}} u_1^{\alpha_1} \ldots u_n^{\alpha_n} (1 - u_1 - \ldots - u_n)^{\alpha_{n+1}} \, du_1 \wedge \ldots \wedge du_n$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha_1+1)\ldots\Gamma(\alpha_n+1)\,\Gamma(\alpha_{n+1}+1)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n+\alpha_{n+1}+n+1)}.$$

Ici les exposants α_j sont d'ailleurs des entiers $\geqq 0$.

Dans ce chapitre, nous utiliserons cette $(n-m)$ partition polynomiale de préférence aux autres partitions. Il est essentiel de faire un calcul assez fin de majoration pour $\| s_i \|_{x,\mathrm{S}}^k$.

Pour éviter des complications d'écriture, introduisons de nouvelles définitions.

(III.3.2) Définitions.

(III.3.2.0) *Pour* $\mathrm{K} = (k_1, \ldots, k_n)$ *et* $\overline{\mathrm{K}} = (k_1, \ldots, k_n, k_{n+1})$, *posons*

$$k = k_1 + \ldots + k_n, \qquad \bar{k} = k_1 + \ldots + k_n + k_{n+1}, \qquad \sigma_i = \bar{k} - k_i;$$

$$\mathrm{N}_i(\mathrm{M}, k_1, \ldots, k_{n+1}) = \mathrm{N}_i(\mathrm{M}, \overline{\mathrm{K}}) = \int \cdots \int_{\mathrm{D}_{\mathrm{M}}^i} \prod_{j=1}^{n+1} t_j^{k_j} \, dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_n; \tag{III.3.2.1}$$

(III.3.2.2) $$s_i(\mathrm{M}, k_1, \ldots, k_{n+1}) = s_i(\mathrm{M}, \overline{\mathrm{K}}) = \frac{\mathrm{N}_i(\mathrm{M}, \overline{\mathrm{K}})}{\mathrm{N}_i(\mathrm{A}_i, \overline{\mathrm{K}})};$$

(III.3.2.3) $$n_i(\mathrm{M}, k_1, \ldots, k_{n+1}) = n_i(\mathrm{M}, \overline{\mathrm{K}})$$
$$= \int \cdots \int_{\mathrm{S}} \prod_{j=1}^{n+1} (u_j + (1 - \delta_i^j)\, u_i x_j)^{k_j}\, du_1 \wedge \ldots \wedge du_n;$$

(III.3.2.4) $$\{\{c\}\} = \begin{cases} c & si\ c > 0, \\ 1 & si\ c \leqq 0. \end{cases}$$

(III.3.3) Lemme. — *Avec les notations précédentes et pour* K *fixé :*

(III.3.3.1) $$\sum_{i=1}^{n+1} s_i(\mathrm{M}, \overline{\mathrm{K}}) \equiv 1 \quad pour\ \mathrm{M} \in \mathrm{R}^n;$$

(III.3.3.2) $s_i(\mathrm{M}, \overline{\mathrm{K}}) \geqq 0$ *pour* $\mathrm{M} \in \mathrm{S}$;

(III.3.3.3) $s_i(\mathrm{M}, \overline{\mathrm{K}})$ *est* k_i*-plate sur la face opposée à* A_i;

(III.3.3.4) $s_i(\mathrm{M}, \overline{\mathrm{K}})$ *est un polynome de degré* $k_j + k_{n+1}$ *en* x_j *pour* $j \neq i$, *de degré* $k_i + k_{n+1} + 1$ *en* x_i *et de degré total* $\overline{k} + 1$.

Pour $\mathrm{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, *on a*

(III.3.3.5) $$\left\| \frac{\partial^{\mathrm{A}} s_i(., \overline{\mathrm{K}})}{\partial x^{\mathrm{A}}} \right\|_{\mathrm{S}}^{0} \leqq \frac{k_i + 1}{\{\{k_i + 1 - \alpha_i\}\}}\, 2^{\alpha} (\overline{k} - \alpha + n + 1) \ldots (\overline{k} + n).$$

Démonstration. — Par (III.3.2.1) et (III.3.2.2) :

$$\mathrm{N}_i(\mathrm{A}_i, \overline{\mathrm{K}}) = \int \cdots \int_{\mathrm{S}} \prod_{j=1}^{n+1} t_j^{k_j}\, dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_n = \sum_{i=1}^{n+1} \mathrm{N}_i(\mathrm{M}, \overline{\mathrm{K}}).$$

(III.3.3.1) est donc vérifié. Pour (III.3.3.2), c'est évident.

On a d'ailleurs par (Goursat [1], p. 376) la valeur de l'intégrale

$$\mathrm{N}_i(\mathrm{A}_i, \overline{\mathrm{K}}) = \sum_{i=1}^{n+1} \mathrm{N}_i(\mathrm{M}, \overline{\mathrm{K}}) = \frac{\overline{\mathrm{K}}!}{(\overline{k} + n)!}.$$

Il en résulte que pour $\mathrm{M} \in \mathrm{S}$ on a

$$0 \leqq \mathrm{N}_i(\mathrm{M}, \overline{\mathrm{K}}) \leqq \frac{\overline{\mathrm{K}}!}{(\overline{k} + n)!}.$$

D'autre part, $\mathrm{N}_i(\mathrm{M}, \overline{\mathrm{K}})$ est, par le changement de variables (III.3.1.1), égal à $\mathrm{N}_i(\mathrm{M}, \overline{\mathrm{K}}) = x_i^{k_i+1} n_i(\mathrm{M}, \overline{\mathrm{K}})$ et (III.3.3.3) et (III.3.3.4) en résultent.

Par utilisation de la formule de Leibniz, on trouve

$$\left| \frac{\partial^{\mathrm{A}} \mathrm{N}_i(\mathrm{M}, \overline{\mathrm{K}})}{\partial x^{\mathrm{A}}} \right| \leqq \sum_{p_1=0}^{\alpha_1} \binom{\alpha_1}{p_1} \cdots \sum_{p_n=0}^{\alpha_n} \binom{\alpha_n}{p_n} \frac{k_1!}{(k_1 - p_1)!} \cdots \frac{(k_i + 1)!}{(k_i + 1 - p_i)!} \cdots$$
$$\times \frac{k_{n+1}!}{(k_{n+1} - \alpha_1 + p_1)!} \frac{(k_{n+1} - \alpha_1 + p_1)!}{(\quad)!} \cdots \frac{(\quad)!}{(k_{n+1} - \alpha + p)!} \Lambda,$$

avec

$$\Lambda = \int \cdots \int_S (u_1 + u_i x_1)^{k_1 - p_1} \ldots u_i^{k_i + \alpha - p_i} x_i^{k_i + 1 - p_i} \ldots$$
$$\times \left[1 - \sum_1^n u_l + u_i \left(1 - \sum_1^n x_l \right) \right]^{k_{n+1} - \alpha + p} du_1 \wedge \ldots \wedge du_n ;$$

$$\Lambda \leqq N_i(M, k_1 - p_1, k_2 - p_2, \ldots, k_i - p_i, \ldots, k_n - p_n, k_{n+1} - \alpha + p),$$

on a donc

$$\Lambda \leqq \frac{(k_1 - p_1)! \ldots (k_n - p_n)! \, (k_{n+1} - \alpha + p)!}{(\bar{k} - \alpha + n)!}$$

et

$$\left| \frac{\partial^A N_i(M, \overline{K})}{\partial x^A} \right| \leqq \frac{2^\alpha (k_i + 1)}{\{\{ k_i + 1 - \alpha_i \}\}} \frac{K!}{(\bar{k} - \alpha + n)!}$$

et, comme par (III.3.2.2),

$$\left\| \frac{\partial^A s_i(M, \overline{K})}{\partial x^A} \right\|_S^0 = \frac{(\bar{k} + n)!}{K!} \left\| \frac{\partial^A N_i(M, \overline{K})}{\partial x_A} \right\|_S^0,$$

le résultat (III.3.3.5) en résulte.

La majoration précédente est uniforme sur S; donnons une autre majoration qui tient compte de la platitude.

Majorons d'abord $n_i(M, \overline{K})$ et $s_i(M, \overline{K})$.

Dans $n_i(M, \overline{K})$ l'intégrale porte sur un produit de la forme :

$$u_i^{k_i} v_1^{k_1} \ldots v_{i-1}^{k_i - 1} v_{i+1}^{k_{i+1}} \ldots v_n^{k_n} v_{n+1}^{k_{n+1}},$$

avec

$$0 \leqq v_1 + \ldots + v_{i-1} + v_{i+1} + \ldots + v_{n+1} \leqq 1.$$

Après quelques calculs tenant compte du fait que $v_j \geqq 0$, on a

$$v_1^{k_1} \ldots v_{i-1}^{k_i - 1} v_{i+1}^{k_{i+1}} \ldots v_n^{k_n} v_{n+1}^{k_{n+1}} \leqq \frac{k_1^{k_1} \ldots k_{i-1}^{k_i - 1} k_{i+1}^{k_{i+1}} \ldots k_n^{k_n} k_{n+1}^{k_{n+1}}}{(\bar{k} - k_i)^{\sigma_i}}$$

et

$$n_i(M, \overline{K}) \leqq \frac{k_i!}{(k_i + n)!} \frac{k_1^{k_1} \ldots k_{i-1}^{k_i - 1} k_{i+1}^{k_{i+1}} \ldots k_{n+1}^{k_{n+1}}}{(\sigma_i)^{\sigma_i}},$$

$$s_i(M, \overline{K}) \leqq x_i^{k_i + 1} \frac{k_i!}{(k_i + n)!} \frac{k_1^{k_1} \ldots k_{i-1}^{k_i - 1} k_{i+1}^{k_{i+1}} \ldots k_{n+1}^{k_{n+1}}}{k_1! \ldots k_i! \ldots k_{n+1}!} \frac{(\bar{k} + n)!}{\sigma_i^{\sigma_i}}.$$

On peut démontrer assez facilement que pour tout n entier $\geqq 0$ la double inégalité $\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e \frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}}$ est vérifiée.

On a donc pour tout n entier $\geqq 0$: $1 < \frac{e^n n!}{n^n} < e(n+1)$ et

$$s_i(M, \overline{K}) \leqq x_i^{k_i + 1} \frac{(\sigma_i + 1) \ldots (\sigma_i + k_i + n)}{(k_i + n)!} \frac{\sigma_i^{\sigma_i} (\sigma_i + 1)}{e^{\sigma_i - 1}} \frac{e^{\sigma_i}}{\sigma_i^{\sigma_i}}.$$

Finalement, nous obtenons

$$s_i(\mathrm{M}, \overline{\mathrm{K}}) \leqq x_i^{k_i+1} \frac{(\sigma_i+1)^2 (\sigma_i+2)\ldots(\overline{k}+n)}{(k_i+n)!} e.$$

Majoration pour les dérivées : Sans insister sur les détails de calcul, nous avons

$$n_i(\mathrm{M}, \overline{\mathrm{K}}) \leqq \frac{k_i!}{(k_i+n)!} e \frac{k_1!\ldots k_{i-1}!\, k_{i+1}!\ldots k_{n+1}!}{\sigma_i!} (\sigma_i+1) = \frac{e(\sigma_i+1)\overline{\mathrm{K}}!}{\sigma_i!\,(k_i+n)!}$$

et, en utilisant la formule de Leibniz, on obtient

$$\left| \frac{\partial^{\mathrm{A}} s_i(\mathrm{M}, \overline{\mathrm{K}})}{\partial x^{\mathrm{A}}} \right| \leqq \mathrm{H} x_i^{k_i+1-\alpha_i}.$$

Par exemple, pour $n = 2$ et $k_j = 2$ pour $j = 1, 2, 3$, on a

$$\left\| \frac{\partial s_1}{\partial x_1} \right\| \leqq 24, \qquad \left\| \frac{\partial s_1}{\partial x_2} \right\| \leqq 16, \qquad \left\| \frac{\partial^2 s_1}{\partial x_2^2} \right\| \leqq 224,$$

$$\left\| \frac{\partial^2 s_1}{\partial x_1 \partial x_2} \right\| \leqq 336, \qquad \left\| \frac{\partial^2 s_1}{\partial x_1^2} \right\| \leqq 672,$$

$$\left| \frac{\partial^2 s_1}{\partial x_2^2}(\mathrm{M}) \right| \leqq 560\, e x_1^3, \qquad \left| \frac{\partial^2 s_1}{\partial x_1^2}(\mathrm{M}) \right| \leqq 448\, x_1.$$

Du lemme résulte le théorème :

(III.3.4) Théorème. — *La $(n-m)$ partition polynomiale de l'unité définie par*

$$s_i(\mathrm{M}) = \frac{\mathrm{N}_i(\mathrm{M}, m, m, \ldots, m)}{\mathrm{N}_i(\mathrm{A}_i, m, \ldots, m)}$$

est telle que

$$\left\| \frac{\partial^{\mathrm{A}} s_i}{\partial x^{\mathrm{A}}} \right\|_{\mathrm{S}}^{0} \leqq \frac{m+1}{\{\{m+1-\alpha_i\}\}} 2^{\alpha} (nm+m+n-\alpha+1)\ldots(nm+m+n).$$

(III.3.5) *Applications.* — Nous allons expliciter lorsque $n = 2$, les expressions des $s_i(\mathrm{M})$ sous une forme qui ne fait plus intervenir les intégrales.

Au lieu d'utiliser la méthode du changement de variables au début du calcul, nous avons écrit

$$\mathrm{N}_1(\mathrm{M}) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \mathrm{I}_{\mathrm{M}}(m+i-j, m+j)$$

en posant

$$\mathrm{I}_{\mathrm{M}}(p, q) = \iint_{\mathrm{D}_{\mathrm{M}}^1} t_1^p t_2^q \, dt_1 \, dt_2,$$

$$\mathrm{N}_1(\mathrm{M}) = x_1^{m+1} \left\{ \sum_{i=0}^{m} \left[(-1)^i \binom{m}{i} \left(\sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \frac{x_1^{i-j}}{m+j+1} (\mathrm{P}_{ij}(x_2)) \right) \right] \right\}$$

en désignant par $P_{ij}(x_2)$ le polynome en x_2 seulement (de degré $m+j$)

$$P_{ij}(x_2) = \left(\sum_{k=0}^{m+j+1} \binom{m+j+1}{k} \frac{(x_2-1)^k}{m+j+1} \right) - \frac{x_2^{m+j+1}}{2m+i+2}.$$

(III.3.5.1) $m=1$; $n=2$:

$$s_1(M) = x_1^2[3 - 2x_1 + 6x_2 - 6x_1x_2 - 6x_2^2],$$
$$s_2(M) = x_2^2[3 + 6x_1 - 2x_2 - 6x_1^2 - 6x_1x_2],$$
$$s_3(M) = (1 - x_1 - x_2)^2(1 + 2x_1 + 2x_2 + 6x_1x_2)$$

$$\frac{\partial s_1}{\partial x_1} = 6x_1(1 - x_1 + 2x_2 - 3x_1x_2 - 2x_2^2), \quad \frac{\partial s_1}{\partial x_2} = 6x_1^2(1 - x_1 - 2x_2),$$
$$\frac{\partial s_2}{\partial x_1} = 6x_2^2(1 - 2x_1 - x_2), \quad \frac{\partial s_2}{\partial x_2} = 6x_2(1 + 2x_1 - x_2 - 3x_1x_2 - 2x_1^2),$$
$$\frac{\partial s_3}{\partial x_1} = -6(1 - x_1 - x_2)(x_1 + 3x_1x_2 + x_2^2), \quad \frac{\partial s_3}{\partial x_2} = -6(1 - x_1 - x_2)(x_2 + 3x_1x_2 + x_1^2).$$

(III.3.5.2) Pour obtenir les formules correspondant à $n=2$, $m=2$, nous avons utilisé les résultats partiels suivants :

$$I(2, 2) = \frac{x_1^3}{180}(1 + 3x_2 + 6x_2^2), \quad I(3, 2) = \frac{x_1^4}{420}(1 + 4x_2 + 10x_2^2),$$
$$I(2, 3) = \frac{x_1^3}{420}(1 + 3x_2 + 6x_2^2 + 10x_2^3), \quad I(3, 3) = \frac{x_1^4}{1120}(1 + 4x_2 + 10x_2^2 + 20x_2^3),$$
$$I(4, 2) = \frac{x_1^5}{840}(1 + 5x_2 + 15x_2^2), \quad I(2, 4) = \frac{x_1^3}{840}(1 + 3x_2 + 6x_2^2 + 10x_2^3 + 15x_2^4),$$

$$N_1(M) = I(2, 2) - 2I(3, 2) - 2I(2, 3) + 2I(3, 3) + I(4, 2) + I(2, 4),$$
$$s_1(M) = x_1^3[10 - 15x_1 + 30x_2 + 6x_1^2 - 60x_1x_2 + 60x_2^2 + 30x_1^2x_2 - 150x_1x_2^2 - 180x_2^3 + 90x_1^2x_2^2 + 180x_1x_2^3 + 90x_2^4]$$
$$s_2(M) = x_2^3[10 + 30x_1 - 15x_2 + 60x_1^2 - 60x_1x_2 + 6x_2^2 - 180x_1^3 - 150x_1^2x_2 + 30x_1x_2^2 + 90x_1^4 + 180x_1^3x_2 + 90x_1^2x_2^2],$$
$$s_3(M) = 1 - s_1(M) - s_2(M) = (1 - x_1 - x_2)^3[1 + 3x_1 + 3x_2 + 6x_1^2 + 12x_1x_2 + 6x_2^2 + 30x_1^2x_2 + 30x_1x_2^2 + 90x_1^2x_2^2].$$

Pour la suite (*voir* l'interpolation) nous avons cherché les dérivées partielles :

$$\frac{\partial s_1}{\partial x_1} = 30x_1^2[1 - 2x_1 + 3x_2 + x_1^2 - 8x_1x_2 + 6x_2^2 + 5x_1^2x_2 - 20x_1x_2^2 + 15x_1^2x_2^2 + 24x_1x_2^3 - 18x_2^3 + 9x_2^4],$$
$$\frac{\partial s_1}{\partial x_2} = 10x_1^3[3 - 6x_1 + 12x_2 + 3x_1^2 - 30x_1x_2 - 54x_2^2 + 18x_1^2x_2 + 54x_1x_2^2 + 36x_2^3],$$
$$\frac{\partial^2 s_1}{\partial x_1^2} = 60x_1[1 - 3x_1 + 3x_2 + 2x_1^2 - 12x_1x_2 + 6x_2^2 + 10x_1^2x_2 - 30x_1x_2^2 + 30x_1^2x_2^2 + 36x_1x_2^3 - 18x_2^3 + 9x_2^4],$$
$$\frac{\partial^2 s_1}{\partial x_1 \partial x_2} = 30x_1^2[3 - 8x_1 + 12x_2 + 5x_1^2 - 40x_1x_2 + 30x_1^2x_2 + 72x_1x_2^2 - 54x_2^2 + 36x_2^3],$$
$$\frac{\partial^2 s_1}{\partial x_2^2} = 20x_1^3[6 - 15x_1 - 54x_2 + 9x_1^2 + 54x_1x_2 + 54x_2^2].$$

On peut, à titre de vérification, voir que toutes ces dérivées sont nulles pour $\left| \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{array} \right.$.

(III.4) Interpolation du champ taylorien. — On donne dans $\mathbf{R}^n$ N points $A_i (N \geqq n+1)$ constituant F et sur F un champ taylorien d'ordre m. Soit E C(F) l'enveloppe convexe de F. Considérons l'application, associée à une n-triangulation, de E C(F) dans $\mathbf{R}$:

$$\text{(III.4.0)} \qquad M \to P(M) = \sum_{i=1}^{n+1} s_i(M)\, T_{A_i}(M) = \sum_{i=1}^{n+1} s_i(M)\, T_i(M)$$

en désignant par $(s_1, \ldots, s_{n+1})$ une $(n - m)$ partition de l'unité, étudiée en (III.3), sur un simplexe, de la n-triangulation, contenant M. Cette application est définie en tous les points intérieurs aux simplexes de la n-triangulation et sur la frontière de E C(F) : c'est bien évident. En un point commun à deux simplexes de la n-triangulation nous avons, au contraire, plusieurs façons pour former $\sum_{i=1}^{n+1} s_i(M)\, T_i(M)$ suivant qu'on considère M comme appartenant à l'un des simplexes ou à un autre.

(III.4.1) Théorème. — *L'application* P : M → P(M) *de* E C(F) *dans* R *est bien définie par* (III.4.0). *Elle est continue. La restriction de* P *à chaque simplexe de la n-triangulation est m-fois continûment différentiable mais l'application de* E C(F) *dans* $\mathbf{R}$ *ne l'est pas aux points frontières de deux simplexes de la n-triangulation. Néanmoins* P *est m fois continûment dérivable aux points* A_i *de* F *et coïncide en ces points ainsi que toutes ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre m inclus respectivement avec* T_{A_i} *et ses dérivées partielles.*

Si $n = 1$, E C(F) est un segment $[a, b]$ et alors P est *m-fois* continûment dérivable sur $[a, b]$ et coïncide en A_i ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre m respectivement avec TA_i et ses dérivées.

Démonstration. — $\mathbf{R}^n$ étant rapporté à une base orthonormée soit $(X_1, \ldots, X_n)$ les coordonnées de M et $(X_1^i, \ldots, X_n^i)$ celles de A_i. Dans un simplexe S nous avons

$$\text{(III.4.1.1)} \qquad \overrightarrow{A_{n+1}M} = x_1 \overrightarrow{A_{n+1}A_1} + \ldots + x_n \overrightarrow{A_{n+1}A_n}$$

donc les relations suivantes entre coordonnées et coordonnées barycentriques sont valables :

$$\text{(III.4.1.2)} \qquad x_k = \frac{\begin{vmatrix} 1 & X_1^1 & \ldots & X_n^1 \\ 1 & X_1 & \ldots & X_n \\ 1 & X_1^{n+1} & \ldots & X_n^{n+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & X_1^1 & \ldots & X_n^1 \\ 1 & X_1^k & \ldots & X_n^k \\ 1 & X_1^{n+1} & \ldots & X_n^{n+1} \end{vmatrix}} = \frac{\sum_{j=1}^{n} u_j^k X_j + H^k}{\sum_{j=1}^{n} u_j^k X_j^k + H^k},$$

avec

$$H^k = (-1)^k \begin{vmatrix} X_1^1 & \dots & X_n^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ X_1^{k-1} & \dots & X_n^{k-1} \\ X_1^{k+1} & \dots & X_n^{k+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ X_1^{n+1} & \dots & X_n^{n+1} \end{vmatrix};$$

c'est la relation

$$x_k = \frac{\text{« volume » de } D_M^k}{\text{« volume » de } S}.$$

On a alors, en posant « volume » de $S = D_s$,

$$\text{(III.4.1.3)} \qquad \frac{\partial x_k}{\partial X_j} = \frac{u_j^k}{D_s};$$

$$\text{(III.4.1.4)} \qquad \frac{\partial X_j}{\partial x_k} = \text{projection sur } OX_j \text{ de } \overrightarrow{A_{n+1}A_k} = \overline{a_{n+1}^j a_k^j}.$$

Ayant réalisé une n-triangulation il est clair que l'application de S dans R : $M \to P(M)$ où S est un simplexe quelconque est m-fois continûment dérivable. L'application $M \to P(M)$ de E C(F) dans R est définie, d'une part et continue d'autre part malgré l'ambiguïté du choix du simplexe contenant M aux points communs à deux ou plusieurs simplexes de la n-triangulation : en effet, en un tel point M commun à deux simplexes S_1 et S'_1 les valeurs des coordonnées barycentriques de M prises dans l'un ou l'autre simplexe sont les mêmes d'après une propriété classique des coordonnées barycentriques. D'autre part, dans la somme $\sum_1^{n+1} s_i(M)\, T_i(M)$ les seuls $T_i(M)$ qui sont multipliés par un $s_i(M)$ différent de o sont ceux qui correspondent aux points A_i sommets de la facette ambiguë (qui peut avoir moins de $n-1$ dimensions).

Aux points A_i : P et T_{A_i} prennent les mêmes valeurs et en tenant compte des propriétés de platitude des s_j on a la continuité pour P et ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre m ainsi que la coïncidence de P et de ses dérivées partielles respectivement avec T_{A_i} et ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre m inclus. Il suffit d'appliquer la formule de Leibniz.

En un point commun à deux simplexes S_1 et S'_1, d'après la platitude, seuls interviennent les T_{A_i} correspondant aux A_i communs à S_1 et S'_1, mais les dérivées $\left(\frac{\partial x_k}{\partial X_j}\right)_1$ et $\left(\frac{\partial x_k}{\partial X_j}\right)_{1'}$ sont d'après (III.4.1.3) en général différentes. P n'est donc pas différentiable dans E C(F).

Nous avons, dans le cas de $\mathbf{R}^n$, réalisé une interpolation dans le sens suivant : si nous prenons pour partition sur chaque simplexe la $(n-m)$ par-

tition polynomiale de (III.3) et si nous nous donnons le champ taylorien d'ordre m induit sur F par une fonction f de classe $\mathcal{C}^m$, alors P est :

— sur chaque simplexe de la n-triangulation un polynome de degré $(n+2)m+1$;

— dans E C(F) une fonction qui, aux points A_i, est m-fois continûment dérivable et coïncide, ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre m inclus, avec f et les dérivées correspondantes de f.

Remarque. — Il semble assez évident qu'il existe des polynomes possédant les propriétés signalées aux points A_i de E C(F). Il en existe sans doute qui sont de degrés bien inférieurs à $(n+2)\,m+1$. Dans le cas de $\mathbf{R}^1$ ceci est très facile à montrer mais la formation du polynome correspondant n'est pas simple (Heurtaux [1]). D'autre part, on n'a pas des propriétés telles que $1 \geqq s_i(M) \geqq 0$ et $\sum s_i(M) \equiv 1$ qui nous seront très utiles.

Lorsque $n=1$, les difficultés signalées sur la frontière commune à deux simplexes ne se présentent pas et l'on obtient le :

Cas particulier. — Étant donnés N points a_i (de $\mathbf{R}$) constituant F la fonction P, polynomiale par intervalle, de la forme

$$s(x)\,T_i(x) + [1 - s(x)]\,T_{i+1}(x) \quad \text{sur } [a_i, a_{i+1}],$$

est m fois continûment différentiable sur $[a_1, a_N]$ et le champ taylorien d'ordre m qu'elle induit coïncide en restriction sur F avec le champ T donné à l'avance sur F : de plus, $s(x)$ de degré $2m+1$ est compris entre 0 et 1 sur chaque intervalle.

(III.4.2) *Calcul de* P(M) *et de ses dérivées.* — (III.4.2.1) *Formalisation des calculs :* Soit S la matrice ligne ayant pour éléments s_1, $s_2, \ldots, s_{n+1}$ et soit T la matrice colonne ayant pour éléments $T_1, T_2, \ldots, T_{n+1}$. Posons

$$P(M) = \sum_{i=1}^{n+1} s_i(M)\,T_i(M) = (S.T)\,(M) \qquad \text{et} \qquad P = S.T.$$

Nous désignerons par $\dfrac{\partial^K S}{\partial X^K}$ la matrice ligne obtenue en dérivant à l'ordre multi-indiciel K chaque élément de S. En opérant de même pour T et en utilisant la formule de Leibniz nous obtenons

$$\frac{\partial^K P}{\partial X^K} = \sum_{0 \leqq I \leqq K} \binom{K}{I} \frac{\partial^I S}{\partial X^I} \frac{\partial^{K-I} T}{\partial X^{K-I}}.$$

Soit F la matrice colonne dont les $(n+1)$ éléments sont égaux à f. Nous obtenons $\left[\text{en utilisant } \sum_{i=1}^{n+1} s_i(\mathrm{M}) \equiv 1\right]$ la formule d'erreur

$$\frac{\partial^{\mathrm{K}}(f-\mathrm{P})}{\partial \mathrm{X}^{\mathrm{K}}} = \sum_{0 \leq \mathrm{I} \leq \mathrm{K}} \binom{\mathrm{K}}{\mathrm{I}} \frac{\partial^{\mathrm{I}} \mathrm{S}}{\partial \mathrm{X}^{\mathrm{I}}} \frac{\partial^{\mathrm{K}-\mathrm{I}}(\mathrm{F}-\mathrm{T})}{\partial \mathrm{X}^{\mathrm{K}-\mathrm{I}}}.$$

En un point M commun à deux simplexes S_1 et S'_1 de sommets respectifs $(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \ldots, \mathrm{A}_{n+1})$ et $(\mathrm{A}'_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \ldots, \mathrm{A}_{n+1})$ et admettant pour facette commune le simplexe G à $n-1$ dimensions de sommets $\mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_{n+1}$ nous avons deux façons pour choisir P : soit P le polynome d'interpolation sur S_1 et P′ le polynome d'interpolation sur S'_1

$$\mathrm{P} = \mathrm{S}.\mathrm{T} = s_1(\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_{n+1}) + s_2(\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_{n+1}) + \ldots + s_n(\mathrm{T}_n - \mathrm{T}_{n+1}) + \mathrm{T}_{n+1}.$$

On a une relation analogue pour P′. En tenant compte de la platitude de s_1 et s'_1 sur G on obtient en tout point M de G :

$$\frac{\partial^{\mathrm{K}}(\mathrm{P}-\mathrm{P}')}{\partial \mathrm{X}^{\mathrm{K}}} = \frac{\partial^{\mathrm{K}}}{\partial \mathrm{X}^{\mathrm{K}}}\left[(s_2 - s'_2)(\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_{n+1}) + \ldots + (s_n - s'_n)(\mathrm{T}_n - \mathrm{T}_{n+1})\right].$$

En prenant pour s la matrice ligne à $(n-1)$ éléments $(s_i - s'_i)$ et pour t la matrice colonne à $(n-1)$ éléments $(\mathrm{T}_i - \mathrm{T}_{n+1})$, on obtient le saut de dérivée $\mathrm{K}^{\text{ième}}$ sur G :

$$\frac{\partial^{\mathrm{K}}(\mathrm{P}-\mathrm{P}')}{\partial \mathrm{X}^{\mathrm{K}}} = \frac{\partial^{\mathrm{K}}(s.t)}{\partial \mathrm{X}^{\mathrm{K}}} = \sum_{0 \leq \mathrm{I} \leq \mathrm{K}} \binom{\mathrm{K}}{\mathrm{I}} \frac{\partial^{\mathrm{I}} s}{\partial \mathrm{X}^{\mathrm{I}}} \frac{\partial^{\mathrm{K}-\mathrm{I}} t}{\partial \mathrm{X}^{\mathrm{K}-\mathrm{I}}}.$$

Posons

$$\| \mathrm{S} \|^k_{\mathrm{X}, \mathrm{S}_1} = \max_{i=1 \text{ à } n+1} (\| s_i \|^k_{\mathrm{X}, \mathrm{S}_1}) \qquad \text{et} \qquad \| \mathrm{S} \|^k_{x, \mathrm{S}_1} = \| \mathrm{S} \|^k_x = \max_i (\| s_i \|^k_{x, \mathrm{S}_1}).$$

(III.4.2.2) *Lemmes de majoration.*

1er *lemme :* Dans le simplexe S_1 on a les inégalités

$$\left\| \frac{\partial^{\mathrm{R}} \mathrm{S}}{\partial \mathrm{X}^{\mathrm{R}}} \right\|_{\mathrm{S}_1} \leq n^r \left(\frac{1}{h_1} + \ldots + \frac{1}{h_n} \right)^r \| \mathrm{S} \|^r_x,$$

$$\left\| \frac{\partial^{\mathrm{R}} \mathrm{S}}{\partial x^{\mathrm{R}}} \right\| \leq n^r (\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{A}_1)^{r_1} \ldots (\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{A}_n)^{r_n} \| \mathrm{S} \|^r_{\mathrm{X}, \mathrm{S}_1}.$$

Démonstration :

$$\frac{\partial s_i}{\partial \mathrm{X}_j} = \frac{\partial s_i}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \mathrm{X}_j} + \ldots + \frac{\partial s_i}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial \mathrm{X}_j}$$

qui, par (III.4.1.3), donne

$$\frac{\partial s_i}{\partial \mathrm{X}_j} = \frac{\partial s_i}{\partial x_1} \frac{u^1_j}{\mathrm{D}_{\mathrm{S}_1}} + \ldots + \frac{\partial s_i}{\partial x_n} \frac{u^n_j}{\mathrm{D}_{\mathrm{S}_1}}.$$

Considérons alors les j opérateurs de dérivation :

$$\frac{\partial}{\partial X_j} = \frac{1}{D_{S_1}}\left(u_j^1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + u_j^n \frac{\partial}{\partial x_n}\right).$$

Par (III.4.1.2) on a

$$\left|\frac{\partial x_k}{\partial X_j}\right| \leqq \frac{\text{« aire » de la face opposée à } A_k}{\text{« volume » de } S_1}$$

puisque $|u_j^k|$ est « l'aire » de la projection parallèlement à $\vec{E}_j$ de la face opposée à A_k.

En désignant par h_k la hauteur, de S_1, relative à A_k on a

$$\left|\frac{\partial x_k}{\partial X_j}\right| \leqq \frac{n}{h_k}.$$

Appliquons l'opérateur de dérivation $\frac{\partial}{\partial X_j}$ à une fonction g une fois continûment dérivable sur S_1. On a donc

$$\left\|\frac{\partial g}{\partial X_j}\right\|_{S_1}^0 \leqq n\left(\frac{1}{h_1} + \ldots + \frac{1}{h_n}\right)\|g\|_x^1.$$

En faisant décrire à g l'ensemble des dérivées partielles, d'ordre total $\leqq r-1$, des s_i, on obtient la première inégalité du lemme.

Considérons de même l'opérateur de dérivation :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial X_1}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial X_1} + \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial X_j}\frac{\partial}{\partial X_n},$$

où les $\frac{\partial X_k}{\partial x_j}$ sont constants.

Par (III.4.1.4) : $\left|\frac{\partial X_k}{\partial x_j}\right| \leqq A_{n+1} A_j$ et

$$\left\|\frac{\partial g}{\partial x_j}\right\| \leqq n \,.\, A_{n+1} A_j \|g\|_{X,\, S_1}^1.$$

En faisant encore décrire à g l'ensemble des dérivées partielles, d'ordre total $\leqq r-1$, des s_i on obtient la 2e inégalité du lemme.

Corollaire : Si $h = \inf_j(h_j)$ et $l = \sup_j(A_{n+1} A_j)$:

— pour $nl \geqq 1$: $\|S\|_x^k \leqq n^k l^k \|S\|_{X,\, S_1}^k$;

— pour $nl \leqq 1$: $\|S\|_x^k \leqq \|S\|_{X,\, S_1}^k$;

— pour $\frac{n^2}{h} \geqq 1$: $\|S\|_{X,\, S_1}^k \leqq \frac{n^{2k}}{h^k}\|S\|_x^k$;

— pour $\frac{n^2}{h} \leqq 1$: $\|S\|_{X,\, S_1}^k \leqq \|S\|_x^k$.

2e *lemme :* Considérons, comme dans (III.4.2.1), deux simplexes S_1 et S'_1 qui ont en commun un simplexe G à $(n-1)$ dimensions de sommets A_2, $A_3, \ldots, A_n, A_{n+1}$. En posant

$$l_G = \sup_{2 \leq i < j \leq n} (A_i A_j) \qquad \text{et} \qquad |||\, T_G \,||| = \max_{2 \leq i < j \leq n} \mathfrak{T}_3 (A_i, A_j, T, m),$$

où $\mathfrak{T}_3$ a la définition donnée en (I.6.1), nous avons

$$\left\| \frac{\partial^{K-1} t}{\partial X^{K-1}} \right\|_G^0 \leq K(m, n) \, |||\, T_G \,|||\, l_G^{m-k+i}.$$

En effet, soit C (G) un couvercle de G, de diamètre $2 l_G$:

$$\left\| \frac{\partial^{K-1} t}{\partial X^{K-1}} \right\|_G^0 \leq \left\| \frac{\partial^{K-1} t}{\partial X^{K-1}} \right\|_{C(G)}^0 \leq \gamma_1 \frac{\| t \|_{C(G)}}{l_G^{k-i}}$$

et l'inégalité du lemme en résulte.

Remarque. — Nous pouvons expliciter les constantes en choisissant pour C (G) un hypercube, de longueur de côté l_G, à côtés parallèles à la base canonique, et contenant G. Nous obtenons

$$K(m, n) \leq 2^{k-i} m^2 (m-1)^2 \ldots (m-k+i+1)^2 \leq (m!)^2 . 2^m .$$

(III.4.2.3) *Majoration de l'erreur.* — Soit f m-fois continûment dérivable sur S_1, $\omega(f, m, .)$ son m-module de continuité sur S_1. En utilisant la formule d'erreur donnée en (III.4.2.1) et le premier lemme on a (si $h \leq n^2$)

$$\left\| \frac{\partial^K (f - P)}{\partial X^K} \right\|_{S_1}^0 \leq \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{n^{2i}}{h^i} \| S \|_{\infty}^i \, l^{m-k+i} \, \omega(f, m, l)$$

et l'on détermine facilement $K_1(k, n, m)$ tel que

$$\left\| \frac{\partial^K (f - P)}{\partial X^K} \right\|_{S_1}^0 \leq K_1 \left(\frac{l}{h} \right)^k l^{m-k} \, \omega(f, m, l).$$

Nous avons trouvé : $K_1 \leq (m+1)(1 + 6mn^3)^k$.

D'où le théorème :

THÉORÈME. — *Si l'on triangule un polytope convexe* E *de telle façon que le nombre de points augmente indéfiniment en respectant les deux conditions :*

a. $\frac{l_G}{h}$ *est uniformément borné;*

b. sup (l_G) *tend vers zéro,*

alors $\left\| \frac{\partial^K (f - P)}{\partial X_K} \right\|_E^0$ *tend vers zéro pour* $0 \leq k \leq m$.

(III.4.2.4) *Majoration des sauts des dérivées.*

THÉORÈME. — *Si* P *et* P′ *sont définis comme en* (III.4.2.1)

$$\left\| \frac{\partial^{\mathrm{K}}(\mathrm{P}-\mathrm{P}')}{\partial \mathrm{X}^{\mathrm{K}}} \right\|_{\mathrm{G}} \leqq \mathrm{K}_2 \left(\frac{l_{\mathrm{G}}}{h}\right)^k l_{\mathrm{G}}^{m-k} \,|||\, \mathrm{T}_{\mathrm{G}} \,|||$$

et, dans les conditions du théorème (III.4.2.3), $\left\| \frac{\partial^{\mathrm{K}}(\mathrm{P}-\mathrm{P}')}{\partial \mathrm{X}^{\mathrm{K}}} \right\|_{\mathrm{G}}$ *tend uniformément vers zéro.*

Il suffit d'opérer comme au paragraphe précédent, d'utiliser le 2e lemme et la condition de Whitney : $|||\, \mathrm{T}_{\mathrm{G}} \,||| \leqq \hat{\omega}(l_{\mathrm{G}})$.

Calcul de $\mathrm{K}_1(k, n, m)$. — Utilisons (III.3.4)

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} n^{2i} \| \mathrm{S} \|_{\infty}^{i} \left(\frac{l}{h}\right)^i$$

$$\leqq \left(\frac{l}{h}\right)^k \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} n^{2i} . 2^i . (m+1)(nm+m+n-i+1) \ldots (nm+m+n)$$

$$\leqq \left(\frac{l}{h}\right)^k \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} n^{3i} . 2^i . (m+1) . m^i . 3^i \leqq \left(\frac{l}{h}\right)^k (1+6mn^3)^k (m+1) .$$

Calcul de $\mathrm{K}_2(k, n, m)$. — On a $\| s \|_{\infty}^{i} \leqq 2 \| \mathrm{S} \|_{\infty}^{i}$ et donc on peut prendre

$$\mathrm{K}_2(k, n, m) = 2^{k+1} \left(\frac{(m!)}{(m-k)!}\right)^2 (1+6mn^3)^k (m+1).$$

Remarque. — Précisons la portée pratique de ces résultats : ils sont utiles lorsqu'on connaît f et qu'on veut l'approcher par une fonction polynomiale par simplexe. C'est ce que nous ferons en (IV.5) pour l'intégration numérique. Par contre, pour prolonger une fonction définie sur un compact E quelconque il ne sera pas toujours possible de satisfaire aux conditions *a* et *b* précédentes. L'obtention d'un algorithme de prolongement aussi général que la méthode théorique de prolongement due à Whitney n'est donc pas résolue.

CHAPITRE IV.

QUELQUES APPLICATIONS A L'ANALYSE NUMÉRIQUE.

(IV.0) INTRODUCTION. — Nous allons dans ce chapitre donner quelques applications des résultats précédents à l'analyse numérique. Le paragraphe (IV.1) est consacré à l'ordre de convergence d'une méthode très importante de cette discipline. C'est l'extrapolation à la limite. Un problème d'analyse est très souvent discrétisé et cette discrétisation est définie par une variable réelle $h > 0$. La résolution du problème discrétisé conduit,

en général, au calcul effectif des valeurs d'au moins une fonction g de h alors que pour le problème posé on cherche $g(0)$.

Laurent dans (Laurent [1]) a fait une étude numérique approfondie du procédé d'extrapolation de Richardson. Mais l'étude théorique correspondante ne tient compte en fait que de la continuité à droite en 0 de la fonction g. Le théorème de Whitney et des majorations analogues à celles de Glaeser et Merrien nous permettent de donner des majorations bien plus précises de l'erreur qui correspond à l'application du procédé d'extrapolation. Nous modifions le procédé pour améliorer notablement les résultats.

Le paragraphe (IV.2) est consacré à la recherche du maximum d'une fonction f sur un hypercube C de $\mathbf{R}^n$.

Un algorithme de recherche de $\|f\|$ ne peut être défini que si l'on sait que f appartient à une classe suffisamment restreinte $\mathcal{B}$ de $\mathcal{C}^0(C)$. Nous traitons complètement le cas où cette classe $\mathcal{B}$ est Π_N.

Dans (IV.3), nous avons appliqué les résultat du paragraphe (II.2) pour expliciter diverses formules d'approximation pour les valeurs des dérivées partielles $\frac{\partial^K f}{\partial X^K}$ en un point M. Ces valeurs sont approchées par des combinaisons linéaires des valeurs de f sur des systèmes unisolvents « voisins » de M.

Dans (IV.4) nous donnons des résultats numériques qui correspondent à la méthode d'interpolation étudiée en (III.4).

Dans (IV.5) enfin nous traitons des applications, de la méthode d'interpolation, à l'intégration numérique dans le cas où les nœuds d'interpolation sont irrégulièrement répartis.

(IV.1) L'EXTRAPOLATION A LA LIMITE.

(IV.1.1) *L'extrapolation polynomiale des formes linéaires réelles.* — Soit $H = \{h_0, h_1, \ldots, h_p, \ldots\}$ une suite décroissante de réels positifs tels que $\lim_{p \to +\infty} h_p = 0$. Posons $\overline{H} = H \cup \{0\}$ et désignons par $L_h (h \in H)$ une famille de fonctionnelles linéaires continues opérant sur un espace de Banach $\mathcal{B}$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$. Soit L une fonctionnelle linéaire continue de $\mathcal{B}$ dans $\mathbf{R}$ telle que, pour tout $f \in \mathcal{B}$, on ait

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in H}} L_h[f] = L[f].$$

Le prolongement par continuité d'une fonction uniformément continue nous montre que, pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que les conditions a et b suivantes soient vérifiées :

a. $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \in H}} L_h[g] = L[g]$ pour tout $g \in \mathcal{B}_1$. $\mathcal{B}_1$ dense dans $\mathcal{B}$;

b. il existe M tel que $\| L_h \| \leqq M$.

A tout $h = h_N \in H$ associons L_h^* défini par

$$L_{h_N}^*[f] = \sum_{i=0}^{N} l_i L_{h_i}[f], \qquad \text{avec} \quad l_i = \frac{\prod\limits_{j \neq i, j=0 \text{ à } N} (-h_j)}{\prod\limits_{j \neq i, j=0 \text{ à } N} (h_i - h_j)},$$

$L_{h_N}^*[f]$ est la valeur en o du polynome de degré N qui interpole la fonction g définie, sur $(h_0, h_1, \ldots, h_N)$, par $h \to g(h) = L_h[f]$.

D'après un théorème de Laurent (Laurent [1]), pour que $\lim\limits_{N \to +\infty} L_{h_N}^*[f] = L[f]$ soit conséquence de $\lim\limits_{N \to +\infty} L_{h_N}[f] = L[f]$, il faut et il suffit qu'il existe k compris entre o et 1 tel que pour tout p entier > 0, on ait : $h_{p+1} \leqq k . h_p$.

L'extrapolation à la limite est intéressante si l'approximation de $L[f]$ par $L_h^*[f]$ est meilleure que l'approximation de $L[f]$ par $L_h[f]$. Nous donnons dans le paragraphe suivant une majoration en $\frac{h_0^q}{N^q}$ de $| L[f] - L_{h_N}^*[f] |$ et ce résultat explique l'efficacité du procédé d'extrapolation de Richardson.

Les théorèmes (IV.1.2) et (IV.1.3) suivants donnent, l'un une majoration en $\frac{h_0^q}{N^q} \omega_q\left(g, \frac{1}{N}\right)$, l'autre simplement une majoration en $\frac{h_0^q}{N^q}$. La différence entre les deux théorèmes réside dans le fait que, pour le premier, on utilise l'*existence* d'une constante, alors que dans le 2e théorème nous avons explicité la majoration en fonction de k, h_0 et q. Dans le 1er théorème nous utilisons la construction très fine de Whitney pour obtenir un résultat meilleur que dans le 2e théorème où nous construisons un prolongement, distinct de celui de Whitney, très élémentaire, mais qui nous fait perdre le facteur $\omega_q\left(g, \frac{1}{N}\right)$.

(IV.1.2) THÉORÈME. — *Si* $H = \{h_0, \ldots, h_N, \ldots\}$ *satisfait à* $h_0 \leqq 1$ *et*

(IV.1.2.1) *il existe k positif et inférieur à* 1 *tel que pour tout* i : $h_{i+1} \leqq k h_i$ *et si g est une fonction, définie sur* $\overline{H}$, *telle que :*

(IV.1.2.2) *il existe* $c_0, c_1, \ldots, c_q$ *dans* **R** *et un module de continuité* $\omega_q(g, .)$ *tels que sur* $\overline{H}$

$$| g(h) - c_0 - c_1 h - \ldots - c_q h^q | \leqq h^q \omega_q(g, h),$$

alors, en désignant par $P_N[g]$ *le polynome d'interpolation de* g *sur* $H_N = \{h_0, \ldots, h_N\}$, *il existe* $K_1(q, k)$ *tel que : pour* $N > q$

$$(\text{IV}.1.2.3) \qquad |g(0) - P_N[g](0)| \leq K_1 \frac{h_0^q}{(N+1)^q} \omega_q\left(g, \frac{h_0}{N+1}\right).$$

Si (IV.1.2.1) est satisfait on a, pour tout ensemble de $(r+1)$ points *distincts* $(a_0, a_1, \ldots, a_r)$ de H

$$(\text{IV}.1.2.4) \qquad \prod_{j \neq i, j=0 \text{ à } r} |a_i - a_j| \geq a_i^r K_2,$$

où K_2 ne dépend que de k et pour $0 < k < 1$ on a $K_2(k) > 0$.

En effet, ayant fixé a_i, soit α_1 le point de H le plus proche de a_i. Quel que soit $j \neq i$ on a

$$|a_i - a_j| \geq |a_i - \alpha_1| \geq a_i(1-k).$$

En utilisant le fait que les points *sont distincts*, on a finalement (IV.1.2.4), avec $K_2(k) > \prod_{j \geq 1} (1 - k^j)^2$.

Posons

$$g_1(h) = g(h) - c_0 - c_1 h - \ldots - c_q h^q.$$

Nous allons utiliser le théorème de Whitney pour prolonger g_1 défini sur $\overline{H}$ en une fonction $\hat{g}_1$, q fois continûment dérivable sur $[0, h_0]$ et de q-module de continuité $\omega(\hat{g}_1, q, .)$ inférieur à $\Gamma(q)\,\omega_q(g, .)$.

Considérons le champ taylorien d'ordre q défini sur $\overline{H}$ par $T_A(M) = g_1(A)$, où chaque polynome est réduit à son terme constant : la valeur en $A \in \overline{H}$ de g_1,

$$\mathfrak{T}_3(A, B, T, q) = \frac{|T_A(M) - T_B(M)|}{AB^q} \leq \frac{|h_A^q \omega_q(g, h_A) + h_B^q \omega_q(g, h_B)|}{|h_A - h_B|^q}$$

en appelant h_A et h_B les abscisses de A et B.

Par (I.2.1.5) et (IV.1.2.4) nous obtenons

$$\mathfrak{T}_3(A, B, T, q) \leq \left(h_A^q\left(1 + \frac{h_A}{|h_A - h_B|}\right) + h_B^q\left(1 + \frac{h_B}{|h_A - h_B|}\right)\right) \frac{\omega_q(g, |h_A - h_B|)}{|h_A - h_B|^q}$$

le coefficient de ω_q se décompose en quatre termes chacun majoré par $\frac{1}{(1-k)^{q+1}}$

$$\mathfrak{T}_3(A, B, T, q) \leq \frac{4}{(1-k)^{q+1}} \omega_q(g, AB).$$

Par le théorème de Steckin (I.2.3.5) on peut trouver $\hat{\omega}_1$ module de continuité concave compris entre ω_q et $2\omega_q$. Par la condition (I.4.3) du théorème de Whitney on peut donc prolonger g_1 en une fonction $\hat{g}_1$, q-fois continûment dérivable.

En prenant pour $\hat{g}_1$ la fonction obtenue par la méthode de Whitney et par (I.4.5) :

$$\omega(\hat{g}_1, [0, h_0], q, .) \leqq \Gamma_1 \hat{\omega}_1(.),$$

Γ_1 dépend de q et de h_0, mais comme Γ_1 croît avec h_0 on aura

$$\Gamma_1(q, h_0) \leqq \Gamma_1(q, 1) = \Gamma(q).$$

Finalement,

$$\omega(\hat{g}_1, q, .) \leqq K_2(q, k)\, \omega_q(g, .).$$

Posons

$$\hat{g}(h) = \hat{g}_1(h) + c_0 + c_1 h + \ldots + c_q h^q.$$

On voit immédiatement que $\omega(\hat{g}_1, q, .) = \omega(\hat{g}, q, .)$.

Soit alors Q_1 le polynome de meilleure approximation de $\hat{g}$ sur l'ensemble discret de $N+2$ points : $H_N \cup \{0\}$ et Q_2 le polynome de meilleure approximation de $\hat{g}$ sur $C = [0, h_0]$. Nous savons que (de la Vallée Poussin [1])

$$\| \hat{g} - Q_1 \|^0_{H_N \cup \{0\}} \leqq \| \hat{g} - Q_2 \|^0_C = E(\hat{g}, N, C)$$

qui par (II.3.3.1) et (Golomb [1], p. 129) est inférieur à

$$\frac{\pi^q}{(N+1)^q} \frac{h_0^q}{2^q} \omega\left(\hat{g}, q, \frac{\pi h_0}{2(N-q)}\right) \leqq \Gamma_2 \frac{h_0^q}{(N+1)^q} \omega_q\left(g, \frac{h_0}{N+1}\right),$$

$$|g(0) - P_N[g](0)| \leqq |g(0) - Q_1(0)| + |P_N[g - Q_1](0)|$$

et

$$|g(0) - P_N[g](0)| \leqq \left(1 + \sum_{i=0}^{N} \frac{\pi(h_j)}{\pi|h_i - h_j|}\right) \Gamma_2 \frac{h_0^q}{(N+1)^q} \omega_q\left(g, \frac{h_0}{N+1}\right).$$

D'après un résultat de Laurent (Laurent [1], p. 17) si $h_{i+1} \leqq k h_i$ avec $k < 1$, il existe $A(k)$ indépendant de N majorant $A_{N,k} = \sum \frac{\pi(h_j)}{\pi|h_i - h_j|}$.

Précisons cette majoration :

— pour $j < i$:

$$h_i < k^{i-j} h_j \qquad \text{et} \qquad |h_i - h_j| > h_j(1 - k^{i-j});$$

— pour $j > i$, on a de même

$$|h_i - h_j| > (k^{i-j} - 1) h_j$$

et

$$A_{N,k} \leqq \frac{k^{\frac{N(N+1)}{2}}}{(1-k)(1-k^2)\ldots(1-k^N)} + \frac{k^{\frac{N(N-1)}{2}}}{(1-k)^2(1-k^2)\ldots(1-k^{N-1})}$$
$$+ \frac{k^{\frac{(N-1)(N-2)}{2}}}{(1-k)^2(1-k^2)^2\ldots(1-k^{N-2})} + \ldots + \frac{1}{(1-k)\ldots(1-k^N)},$$

$$A_{N,k} \leqq \frac{1}{(1-k)^2(1-k^2)^2\ldots\left(1-k^{\left[\frac{N}{2}\right]+1}\right)^2} \frac{1}{1-k} \leqq A(k).$$

On peut prendre $A(k) = \left[\dfrac{1}{\prod\limits_{j\geq 1}(1-k^j)}\right]^2 \dfrac{1}{1-k}$.

La majoration (IV.1.2.3) est donc démontrée.

Ce résultat est amélioré dans (Coatmélec [2]).

(IV.1.3) **Théorème.** — *Si* H *satisfait à* (IV.1.2.1) *et* g *à* (IV.1.2.2), *on a*

$$|g(0) - P_N[g](0)| \leq K(q, k)\frac{h_0^q}{(N+1)^q}\omega_q(g, h_0) \tag{IV.1.3.1}$$

et nous explicitons la majoration :

$$K(q, k) \leq \frac{\pi^q(2q+1)!}{q!\prod\limits_{j\geq 1}(1-k^j)^2}\frac{4}{(1-k)^{q+1}}. \tag{IV.1.3.2}$$

Démonstration. — En reprenant les notations du paragraphe précédent, définissons sur $\overline{H}$ le champ taylorien d'ordre q défini par $T_A(M) = g_1(A)$, où $T_A(M)$ se réduit au terme constant. Définissons un prolongement, de g_1, sur $[0, h_0]$ en utilisant la $(1, q)$-partition polynomiale du chapitre III.

Sur $[h_{i+1}, h_i]$ le prolongement est défini par

$$\hat{g}_1(X) = s_1(X)\, g_1(h_{i+1}) + s_2(X)\, g_1(h_i),$$

avec

$$s_1(X) = \frac{\int_X^{h_i}(t-h_{i+1})^q(h_i-t)^q\,dt}{\int_{h_{i+1}}^{h_i}(t-h_{i+1})^q(h_i-t)^q\,dt} \quad \text{et} \quad s_2(X) = 1 - s_1(X).$$

En posant

$$t = h_{i+1} + u(h_i - h_{i+1}) \quad \text{et} \quad X = h_{i+1} + x(h_i - h_{i+1}),$$

nous avons

$$s_1(X) = \frac{\int_x^1 u^q(1-u)^q\,du}{\int_0^1 u^q(1-u)^q\,du} \quad \text{et} \quad s_2(X) = \frac{\int_0^x u^q(1-u)^q\,du}{\int_0^1 u^q(1-u)^q\,du}.$$

Par (III.3.4), on a

$$\left\|\frac{d^r s_1}{dX^r}\right\|^0_{[h_{i+1}, h_i]} \leq C(r, q)\frac{1}{(h_i - h_{i+1})^r},$$

avec

$$C(r, q) \leq \frac{q+1}{q+1-r}2^r(2q+2-r)\ldots(2q+1)$$

et pour $r \leqq q$:

$$C(r, q) \leqq 2^q \frac{(2q+1)!}{q!}$$

On a donc

$$M_r(\hat{g}_1, [0, h_0]) \leqq \sup_i \frac{|(g_1(h_i) - g_1(h_{i+1})|}{(h_i - h_{i+1})^r} C(r, q)$$

$$\leqq \sup_i \frac{h_i^q \omega_q(g, h_i) + h_{i+1}^q \omega_q(g, h_{i+1})}{(h_i - h_{i+1})^r} C(r, q)$$

qui, par (IV.1.2.4) et quelques calculs, donne

$$M_r(\hat{g}_1, [0, h_0]) \leqq 2 h_0^{q-r} \frac{\omega_q(g, h_0)}{(1-k)^r} C(r, q).$$

Par (II.3.3.1) et (Golomb [1], p. 129) on a pour $N > q$

$$E(\hat{g}_1, N, [0, h_0]) = E(\hat{g}, N, [0, h_0]) \leqq \frac{\pi^q}{(N+1)^q} \frac{h_0^q}{2^q} M_q(\hat{g}_1, [0, h_0])$$

et

$$|g(0) - P_N[g](0)| \leqq (A(k) + 1) \frac{\pi^q}{(N+1)^q} \frac{h_0^q}{2^q} C(q, q) \frac{2\omega_q(g, h_0)}{(1-k)^q};$$

(IV.1.3.1) est donc démontré avec :

$$K(q, k) \leqq \frac{\pi^q (2q+1)!}{q!} \frac{1}{\prod_{j \geqq 1} (1 - k^j)^2} \frac{4}{(1-k)^{q+1}}.$$

Remarque. — Les majorations obtenues prouvent que la convergence est au moins de l'ordre de $\frac{h_0^q}{N^q}$ lorsque N tend vers $+\infty$ et ceci explique l'efficacité du procédé d'extrapolation de Richardson.

Dans la plupart des problèmes d'analyse numérique, la condition (IV.1.2.2) s'exprime plus simplement : il existe c_0 tel que

$$|g(h) - c_0| \leqq M_{q+1} h^{q+1}.$$

Il en est ainsi, par exemple, lorsque g est défini par une méthode de quadrature, d'interpolation, de différentiation, etc.

Dans une publication consacrée au procédé d'extrapolation (Coatmélec [2]), nous préciserons les constantes de majoration et nous montrerons comment modifier le procédé d'extrapolation pour éviter de faire décroître trop rapidement h_i vers zéro. Il suffit de remplacer $P_N[g]$ par le polynome $P_{N+q}[g]$ de degré $N+q$ qui satisfait à la condition d'interpolation sur H_N et dont les dérivées possèdent les mêmes propriétés de

platitude en o que g. Cette méthode ne donne pas de meilleurs résultats que l'extrapolation classique (au contraire) lorsque k est $\leqq \frac{2}{3}$. Mais lorsque k est assez voisin de 1 la méthode est bonne.

(IV.2) Recherche d'une valeur approchée du maximum du module d'une fonction a valeurs réelles.

(IV.2.1) *Position du problème.* — Soit $\mathcal{C}(E)$ l'ensemble des fonctions à valeurs réelles définies et continues sur un espace métrique compact E. La distance de A_1 à A_2 sera désignée par A_1A_2 pour A_1 et A_2 dans E. Soit

$$f \in \mathcal{C}(E) \qquad \text{et} \qquad M_0(f, E) = M(f) = \max_{A \in E} |f(A)|.$$

La fonction

$$((A_1, A_2), f) \rightsquigarrow \frac{|f(A_1) - f(A_2)|}{2M(f)}$$

est uniformément bornée par 1. Posons

$$\max_{A_1A_2 \leqq l} \frac{|f(A_1) - f(A_2)|}{2M(f)} = \Omega(f, l).$$

Pour f fixé, $\Omega(f, l)$ tend vers zéro avec l.

Considérons alors une classe $\Phi \subset \mathcal{C}(E)$ de fonctions f telles que

$$\Omega(f, l) \leqq \Omega_\Phi(l) \quad \text{pour tout } f \in \Phi, \qquad \text{avec} \quad \lim_{l \to 0} \Omega_\Phi(l) = 0.$$

On a alors $|f(A_1) - f(A_2)| \leqq 2M(f)\,\Omega_\Phi(A_1A_2)$ pour tout $f \in \Phi$ et pour tout couple $(A_1, A_2) \in E^2$.

Donnons-nous N_1 points de E : $A_i (i = 1 \text{ à } N_1)$ et posons

$$l = \max_{A \in E} \left(\min_{i = 1 \text{ à } N_1} AA_i \right).$$

Soit $A^\star$ un des points où $|f(A)|$ atteint son maximum $M(f) = |f(A^\star)|$. $\big||f(A^\star)| - |f(A_i)|\big| \leqq 2M(f)\,\Omega_\Phi(l)$ et si l'on pose $\mu(f) = \max_i |f(A_i)|$, on a

$$\mu(f) \leqq M(f) \leqq \mu(f) + 2M(f)\,\Omega_\Phi(l).$$

En supposant l assez petit pour que $\Omega_\Phi(l) < \frac{1}{4}$, on a

$$\mu(f) \leqq M(f) \leqq \frac{\mu(f)}{1 - 2\Omega_\Phi(l)}.$$

Il en résulte que $\mu(f)$ est une valeur approchée de $M(f)$ avec une *erreur relative uniforme sur* Φ qui est inférieure à

$$\frac{2\,\Omega_\Phi(l)}{1-2\,\Omega_\Phi(l)} \leqq 4\,\Omega_\Phi(l).$$

Nous possédons donc un critère de précision et nous pouvons espérer donner un algorithme, de recherche d'une valeur approchée de $M(f)$, relative à une classe suffisamment restreinte $\Phi \subset \mathcal{C}(E)$.

(IV.2.2) *Cas où* $\Phi = \Pi_N$. — Soit E un hypercube, de $\mathbf{R}^n$, dont les côtés de longueur h sont parallèles à $\vec{E}_1, \ldots, \vec{E}_n$. En prenant dans E un ensemble discret régulier contenant $N_1 = (p+1)^n$ points, on a

$$l = \max_{A \in E}\left(\min_{i=1 \text{ à } N_1} AA_i\right) = \frac{h\sqrt{n}}{2p}.$$

(IV.2.2.1) Proposition. — *La discrétisation de recherche du maximum de* $f(A)$ *donne une précision relative inférieure à* $2\sqrt{n}\,\frac{N^2}{p}$. *Le choix de* p *pour une bonne précision est indépendant du polynome* $f \in \Pi_N$ *qu'on considère et de l'hypercube* E. *Pour* n *fixé ce choix sera fonction uniquement du degré* N.

En effet, pour tout $f \in \Phi$ et pour tout couple $(A, B) \in E^2$, on a par l'inégalité de Markoff

$$|f(A) - f(B)| \leqq \frac{2\,N^2}{h}\,M(f)\,AB.$$

On peut prendre $\Omega_\Phi(\delta) = \frac{N^2}{h}\,\delta$ et l'on obtient

$$M(f) = \mu(f) + 2\,\varepsilon\sqrt{n}\,\frac{N^2}{p}\,\mu(f), \qquad \text{avec} \quad 0 \leqq \varepsilon \leqq 1.$$

La proposition en résulte.

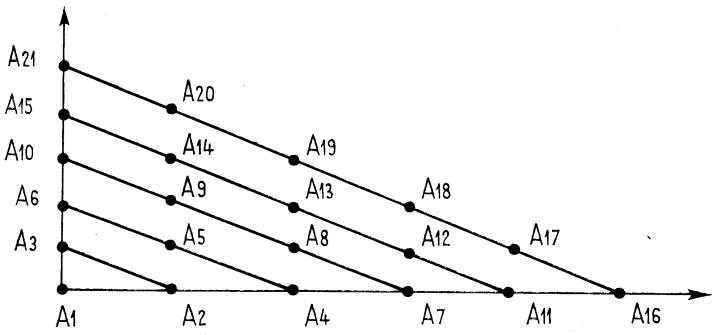

Fig. 1.

(IV.3) Formules d'approximation des valeurs, en un point M fixe, d'une fonction et de ses dérivées partielles. — Ce paragraphe est une application de (II.2.5). Dans $\mathbf{R}^n$ nous considérons un

système unisolvent $\mathfrak{A}_k$ de $\binom{k+n}{n}$ points « voisins » de M (pris comme origine des coordonnées) et nous recherchons les valeurs en M des dérivées du polynome $\mathfrak{P}_k$ qui interpole f sur $\mathfrak{A}_k$.

Considérons un système unisolvent $\mathfrak{A}_k$ dans $\mathbf{R}^n$ analogue à celui indiqué dans la figure 1 p. 329 et associons-lui le système unisolvent $\mathfrak{A}_k^*$ qui

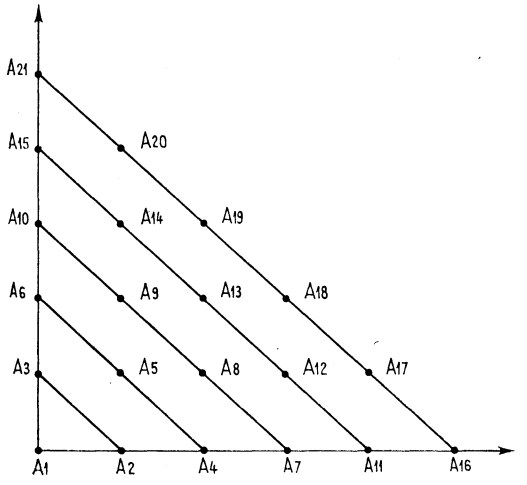

Fig. 2.

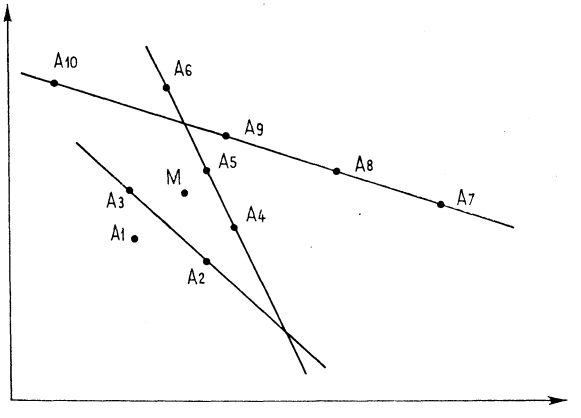

Fig. 3.

correspond à des pas égaux à 1 sur les axes (*fig.* 2). Soit $A(k)$ la matrice d'interpolation associée à $\mathfrak{A}_k^*$ et $A^{-1}(k)$ son inverse. Dans $\mathbf{R}^n$ la figure 1 correspond à un n-pas $(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ et la figure 2 à un n-pas unitaire $(1, 1, \ldots, 1)$.

Posons $H^K = h_1^{k_1} \ldots h_n^{k_n}$ et $K! = k_1! \ldots k_n!$ et soit $F(\mathfrak{A}_k)$ la matrice colonne ayant pour éléments $f(A_i)$ pour $i = 1$ à $\binom{k+n}{n}$.

On vérifie facilement la

(IV.3.1) PROPOSITION. — *Pour* M *origine des coordonnées :* $A^{-1}(k)\,F(\mathfrak{A}_k)$ *est une matrice colonne qui a pour éléments* $\frac{H^I}{I!}\frac{\partial^I \varphi_k}{\partial X^I}(M)$, *approximations respectives des valeurs* $\frac{H^I}{I!}\frac{\partial^I f}{\partial X^I}(M)$. *L'erreur sur* $\frac{\partial^I f}{\partial X^I}(M)$ *est* $o(h^{k-i})$, *où* $h = \sup_i h_i$ *si* M *est dans l'enveloppe convexe de* $\mathfrak{A}_k$ *et* f *de classe* $\mathcal{C}^k$.

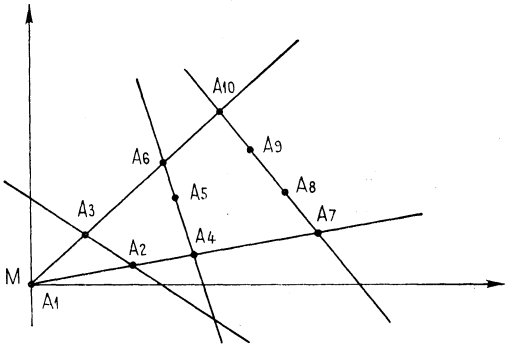

Fig. 4.

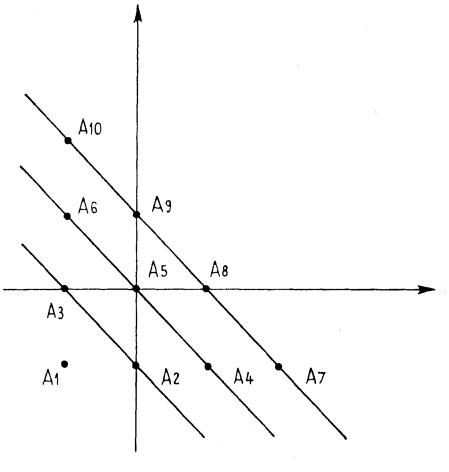

Fig. 5.

Nous donnons dans les pages qui suivent les expressions de $A^{-1}(k)$ pour $k = 1, 2, 3, 4$ lorsqu'on utilise la figure 1 avec M en A_1. Par exemple, nous obtenons par (IV.3.1), avec $k = 4$:

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x\,\partial y^3} \simeq \frac{1}{h_1 h_2^3}\left[f(A_1) - f(A_2) - 3f(A_3) + 3f(A_5) + 3f(A_6) - 3f(A_9) - f(A_{10}) + f(A_{14})\right].$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2} \simeq \frac{1}{2h_1 h_2^2}\left[-5f(A_1) + 6f(A_2) + 12f(A_3) - f(A_4) - 14f(A_5)\right.$$
$$\left. - 9f(A_6) + 2f(A_8) + 10f(A_9) + 2f(A_{10}) - f(A_{13}) - 2f(A_{14})\right].$$

Remarques. — Par translation nous pouvons aussi obtenir des formules d'approximation du genre Everett-Stirling-Bessel : il suffit de considérer la figure 5.

L'obtention de systèmes unisolvents est assurée dans le cas de la figure 3 : les points de $\mathfrak{A}$ sont obtenus en prenant A_1, puis 2 points sur une droite ne passant pas par A_1, puis 3 points alignés sur une droite ne contenant pas un des précédents, etc. En utilisant m droites on obtient un système unisolvent d'ordre m, car si les points qui constituent $\mathfrak{A}_m$ étaient sur une courbe algébrique, de degré m, celle-ci serait décomposée en une droite contenant $m+1$ points et une courbe algébrique d'ordre $m-1$. Par récurrence descendante, le système $\mathfrak{A}_m$ est unisolvent.

Dans le livre de Panow (D. J. Panow [1]) des formules différentes sont obtenues pour d'autres systèmes de points, mais chaque système de points donne lieu à une méthode particulière.

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

A^{-1} d'ordre 3;
Polynome de degré 1

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 2 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{matrix}$$

A^{-1} d'ordre 6; Polynome de degré 2

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{11}{6} & 3 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{11}{6} & 0 & 3 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{5}{2} & 0 & 2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 3 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{matrix}$$

A^{-1} d'ordre 10; Polynome de degré 3

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$-\frac{25}{12}$	4	0	-3	0	0	$\frac{4}{3}$	0	0	0	$-\frac{1}{4}$	0	0	0	0
$-\frac{25}{12}$	0	4	0	0	-3	0	0	0	$\frac{4}{3}$	0	0	0	0	$-\frac{1}{4}$
$\frac{35}{24}$	$-\frac{13}{2}$	0	$\frac{19}{4}$	0	0	$-\frac{7}{3}$	0	0	0	$\frac{11}{24}$	0	0	0	0
$\frac{35}{12}$	$-\frac{13}{3}$	$-\frac{13}{3}$	$\frac{7}{4}$	6	$\frac{7}{4}$	$-\frac{1}{3}$	-2	-2	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	0
$\frac{35}{24}$	0	$-\frac{13}{3}$	0	0	$\frac{19}{4}$	0	0	0	$-\frac{7}{3}$	0	0	0	0	$\frac{11}{24}$
$-\frac{5}{12}$	$\frac{3}{2}$	0	-2	0	0	$\frac{7}{6}$	0	0	0	$-\frac{1}{4}$	0	0	0	0
$-\frac{5}{4}$	3	$\frac{3}{2}$	$-\frac{9}{4}$	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	0
$-\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	3	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{9}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0
$-\frac{5}{12}$	0	$\frac{3}{2}$	0	0	-2	0	0	0	$\frac{7}{6}$	0	0	0	0	$-\frac{1}{4}$
$\frac{1}{24}$	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0	$-\frac{1}{6}$	0	0	0	$\frac{1}{24}$	0	0	0	0
$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{6}$	0	0	0
$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{4}$	0	0
$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	0	0	0	$\frac{1}{6}$	0
$\frac{1}{24}$	0	$-\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{1}{4}$	0	0	0	$-\frac{1}{6}$	0	0	0	0	$\frac{1}{24}$

A^{-1} d'ordre 15; Polynome de degré 4.

(IV.4) Résultats numériques relatifs au chapitre III. — Dans les figures 6 et 7 nous avons donné les résultats d'un programme de triangulation.

Nous avons utilisé la figure 8 et les formules (III.3.5.2) pour réaliser une interpolation d'un champ taylorien d'ordre 2 défini sur un ensemble E de points contenu dans la région C, de $\mathbf{R}^2$, définie par : $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $9x^2 + 16y^2 \leqq 9$.

Nous donnons plus loin les résultats numériques, concernant la valeur absolue de l'erreur commise en remplaçant la fonction f (qui induisait sur E le champ donné) par notre fonction P polynomiale par triangle.

Nous avons pris comme fonction f :

$$f(x, y) = e^{x^2 y^2} \cos(x^2 + y^2) + Q_2(x, y),$$

où $Q_2(x, y)$ était un polynome de degré 2.

Nous avons calculé $\left|\frac{\partial^k f}{\partial X^k}(M) - \frac{\partial^k P}{\partial X^k}(M)\right|$ pour $0 \leqq k \leqq 2$ lorsque M décrit un ensemble de points régulièrement répartis dans C.

Si $\Delta_1 = |f(M) - P(M)|$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(M) - \frac{\partial P}{\partial x}(M)\right| = \Delta_2 \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial y}(M) - \frac{\partial P}{\partial y}(M)\right| = \Delta_3$$

et Δ_4, Δ_5, Δ_6 représentent les erreurs sur les dérivées 2e, en multipliant Δ_1 par 10^4; Δ_2 et Δ_3 par 10^3; Δ_4, Δ_5, Δ_6 par 10^2 on obtient les bornes d'erreur de la page suivante.

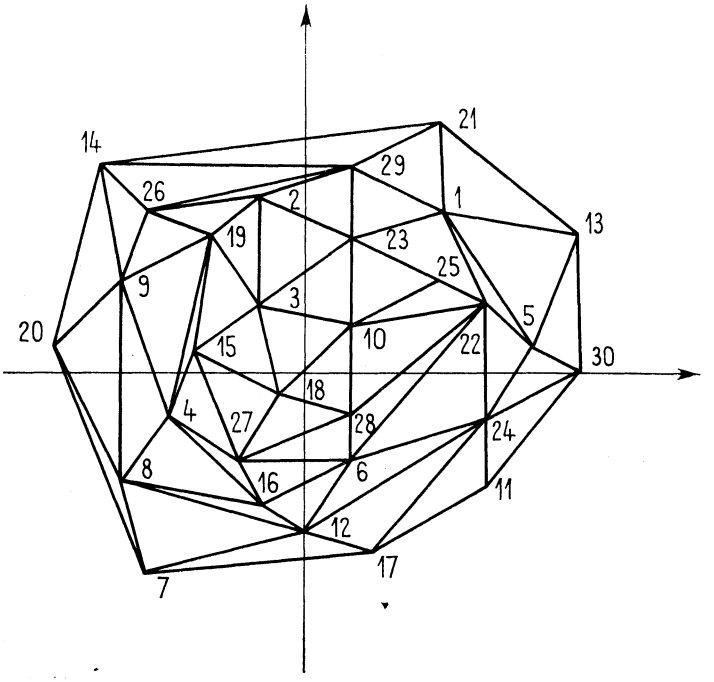

Fig. 6.

(IV.5) Application de (II.3) a l'intégration numérique pour des nœuds irrégulièrement répartis. — Dans ce dernier paragraphe, nous appliquons les résultats du chapitre III à l'intégration numérique.

Sur un simplexe S de $\mathbf{R}^n$ nous approchons

$$L[f] = \int \cdots \int_S f(X_1, \ldots, X_n)\, dX_1 \wedge \cdots \wedge dX_n$$

par

$$L_m[f] = \int \cdots \int_S \sum_{i=1}^{n+1} s_i(x_1, \ldots, x_n)\, T_i(X_1, \ldots, X_n)\, dX_1 \wedge \cdots \wedge dX_n,$$

X.	Y.	10^{-1}. D_1.	10^{-2}. D_2.	10^{-3}. D_3.	10^{-3}. D_4.	10^{-3}. D_5.	10^{-3}. D_6.
0,1	0,1	0	0	0	2	1	3
0,2	0,1	1	0	4	13	10	21
0,3	0,1	1	0	0	2	2	5
0,4	0,1	0	5	0	2	4	12
0,5	0,1	1	7	0	32	2	3
0,6	0,1	0	0	0	41	4	4
0,7	0,1	5	4	1	67	9	17
0,8	0,1	2	2	3	57	1	13
0,1	0,2	1	4	0	27	6	5
0,2	0,2	0	0	0	1	0	4
0,3	0,2	2	2	1	7	6	16
0,4	0,2	0	1	0	1	6	1
0,5	0,2	2	1	2	38	0	11
0,6	0,2	2	6	2	6	9	23
0,7	0,2	2	8	9	22	2	22
0,8	0,2	0	0	0	27	12	35
0,9	0,2	2	0	9	6	34	26
0,1	0,3	1	0	2	7	0	2
0,2	0,3	1	2	0	14	4	12
0,3	0,3	1	0	0	3	0	9
0,4	0,3	2	0	3	19	8	21
0,5	0,3	2	2	1	18	8	30
0,6	0,3	2	1	1	29	17	22
0,7	0,3	2	0	6	59	17	5
0,9	0,3	5	13	4	12	19	54
0,1	0,4	2	3	1	0	10	48
0,2	0,4	2	1	4	21	8	16
0,3	0,4	1	0	1	22	5	11
0,4	0,4	1	0	0	6	0	16
0,5	0,4	3	1	8	42	35	27
0,6	0,4	2	12	7	9	11	43
0,7	0,4	4	6	7	24	32	23
0,8	0,4	0	7	3	40	29	7
0,1	0,5	4	1	8	12	1	47
0,2	0,5	1	1	1	17	6	3
0,3	0,5	4	6	9	30	27	44
0,4	0,5	1	4	0	8	14	13
0,5	0,5	0	0	0	9	6	28
0,6	0,5	2	1	8	14	47	32
0,7	0,5	3	17	17	44	40	50
0,1	0,6	4	5	13	25	19	45
0,2	0,6	1	3	1	13	1	6
0,3	0,6	3	12	3	17	5	3
0,4	0,6	3	19	20	29	39	63
0,5	0,6	0	4	6	2	15	14
0,2	0,7	5	9	7	11	22	22
0,3	0,7	1	0	2	2	0	18

où les T_i sont les polynomes de Taylor, de degré m, aux sommets de S. Par changement de variables nous sommes ramenés au calcul d'intégrales de Dirichlet sur le simplexe canonique défini par

$$x_i \geqq 0, \qquad \sum x_i \leqq 1.$$

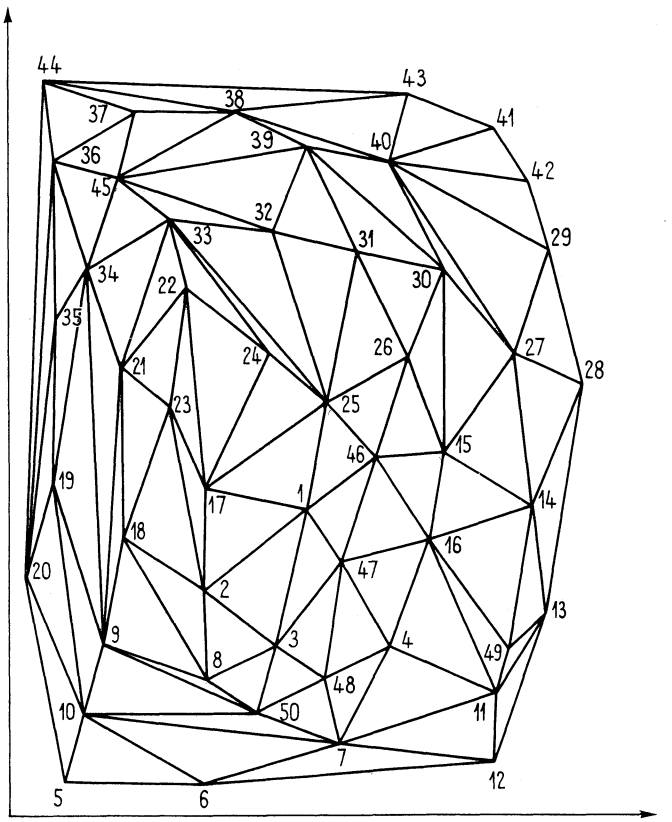

Fig. 7.

Dans (Coatmélec et Houssais [1]) nous développons cette question. Bornons-nous ici à un exemple : nous nous proposons de calculer :

$$I_n = \iint_D \cos^n \frac{\pi}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) dx \wedge dy$$

lorsque D est la région définie par

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqq 1, \qquad x \geqq 0,\ y \geqq 0.$$

Nous approchons le domaine D par des réunions de triangles dont les sommets ne constituent pas un réseau régulier.

n.	Nombre de points.	Nombre de triangles.	I_n.
1	5	3	0,408 1
	13	15	0,404 4
	31	45	0,386 5
	50	78	0,381 9
	73	120	0,379 6
	157	276	0,377 1

Valeur exacte : $\frac{3}{8} = 0,375\,0$

n.	Nombre de points.	Nombre de triangles.	I_n.
4	5	3	0,208 48
	13	15	0,223 70
	31	45	0,220 89
	50	78	0,221 36
	73	120	0,220 82
	157	276	0,220 85

Valeur exacte : $\frac{9\pi}{128} = 0,220\,893$

2	5	3	0,215 09
	13	15	0,289 08
	31	45	0,294 30
	50	78	0,295 27
	73	120	0,294 67
	157	276	0,294 63

Valeur exacte : $\frac{3\pi}{32} = 0,294\,52$

5	5	3	0,204 37
	13	15	0,201 00
	31	45	0,199 52
	50	78	0,200 24
	73	120	0,199 80
	157	276	0,199 91

Valeur exacte : $\frac{1}{5} = 0,2$

3	5	3	0,212 09
	13	15	0,252 46
	31	45	0,250 63
	50	78	0,250 82
	73	120	0,250 14
	157	276	0,250 04

Valeur exacte : $\frac{1}{4} = 0,25$

6	5	3	0,199 87
	13	15	0,182 99
	31	45	0,183 36
	50	78	0,184 17
	73	120	0,183 80
	157	276	0,183 95

Valeur exacte : $\frac{45\pi}{768} = 0,184\,078$

7	5	3	0,195 04
	13	15	0,168 61
	31	45	0,170 59
	50	78	0,171 42
	73	120	0,171 09
	157	276	0,17 127

Valeur exacte : $\frac{6}{35} = 0,171\,428$

9	5	3	0,184 73
	13	15	0,147 61
	31	45	0,151 38
	50	78	0,152 20
	73	120	0,151 94
	157	276	0,152 18

Valeur exacte : $\frac{16}{105} = 0,152\,38$

8	5	3	0,189 98
	13	15	0,157 02
	31	45	0,160 15
	50	78	0,160 96
	73	120	0,160 67
	157	276	0,160 89

Valeur exacte : $\frac{105\pi}{2\,048} = 0,161\,07$

10	5	3	0,179 36
	13	15	0,139 87
	31	45	0,143 86
	50	78	0,144 71
	73	120	0,144 48
	157	276	0,144 74

Valeur exacte $\frac{189\pi}{4\,096} = 0,144\,96$

Les figures 9, 10, 11, 12 suivantes indiquent des triangulations considérées : elles comportent respectivement 5, 13, 31 et 50 points. Les résultats numériques donnés plus haut sont relatifs à ces triangulations et à deux

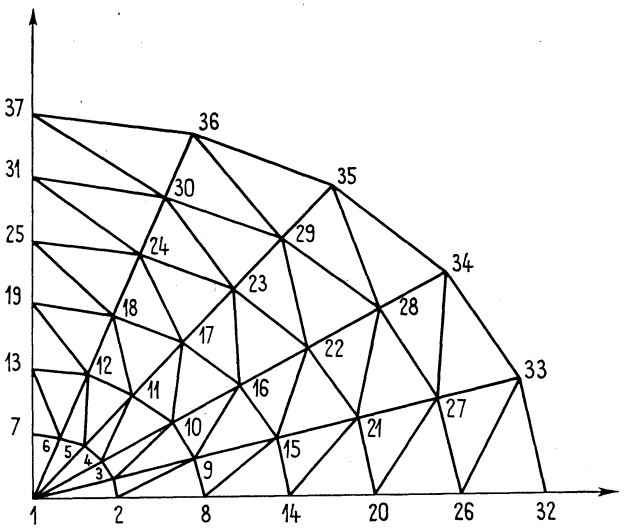

Fig. 8.

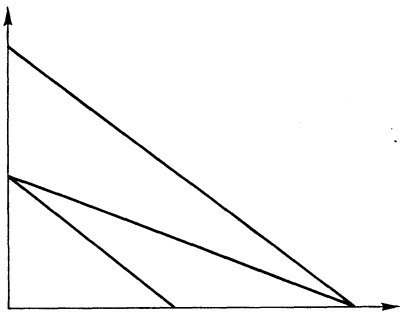

Fig. 9.

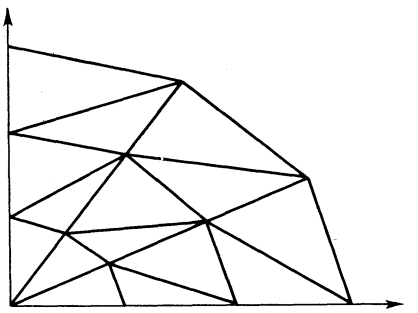

Fig. 10.

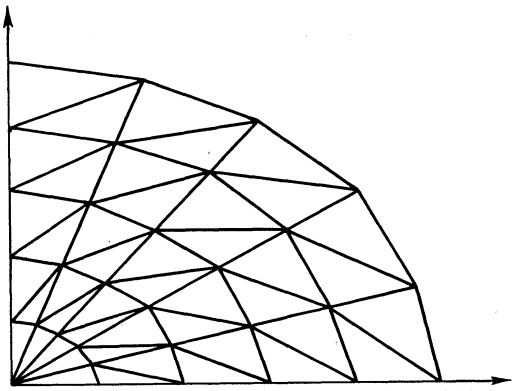

Fig. 11.

triangulations plus fines (73 et 157 points). Nous avons pris $a = 1$, $b = \frac{3}{4}$, n prend les valeurs 1, 2, ..., 10 et le champ taylorien utilisé est le champ d'ordre 1 induit par la fonction à intégrer.

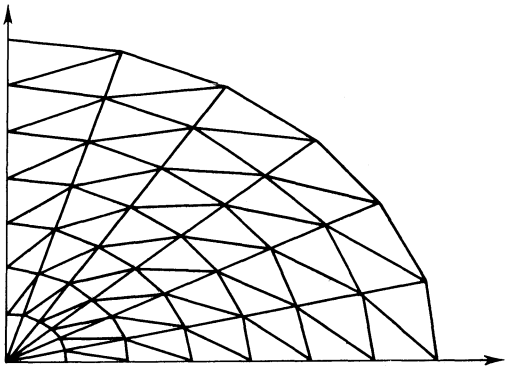

Fig. 12.

BIBLIOGRAPHIE.

ACHIESER (N. I.) :

[1] *Theory of approximation* (traduit du russe), New-York, 1956.

BERNSTEIN (S. N.) :

[1] *Quelques remarques sur l'interpolation* [*Comm. Khar'kov Math. Soc.*, (2), t. 15, 1916 et *Math. Ann.*, t. 79, 1918].

BOREL (É.) :

[1] *Leçons sur les fonctions de variables réelles*, Gauthier-Villars, Paris, 1905.

[2] *C. R. Acad. Sc.*, t. 174, 1922, p. 996.

CARLEMAN :

[1] *Les fonctions quasi-analytiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1926.

[2] *C. R. Acad. Sc.*, t. 174, 1922, p. 505.

COATMÉLEC :

[1] *Quelques théorèmes de Whitney et applications à l'analyse numérique* (Séminaire d'analyse numérique, Faculté des Sciences de Rennes, 1965).

[2] *Sur l'extrapolation à la limite* (à paraître).

COATMÉLEC et HOUSSAIS :

[1] Rapport D.G.R.S.T. (Contrat 65 FR 209).

DENJOY :

[1] *C. R. Acad. Sc.*, t. 173, 1921, p. 1329.

DIEUDONNÉ :

[1] *Sur les fonctions continues numériques définies dans un produit de deux espaces compacts* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 205, 1937, p. 593).

DUBOVITSKY :

[1] *Sur les transformations différentiables des cubes* (en russe) (*Math. Sb.*, 1953).

EFIMOV (A. V.) :

[1] *Math. Sb.*, nouv. série, t. 54, 1961, p. 96.

FABER (G.) :

[1] *Ueber die interpolatorische Darstellung Stebiger Functionen*, Jahresberichte der Deutschen, *Mathematiker Vereinigung*, 23, 1914.

FAVARD :

[1] *Sur les meilleurs procédés d'approximation de certaines classes de fonctions par des polynomes trigonométriques* (*Bull. Sc. Math.*, t. 61, 1937).

[2] *Sur l'interpolation* (*J. Math. pures et appl.*, t. 19, 1940).

[3] *Problèmes d'extremums relatifs aux courbes convexes* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, vol. 47, 1930).

GLAESER (G.) :

[1] *Étude de quelques algèbres tayloriennes* (*J. Anal. Math.*, Jérusalem, 1958).

[2] *Prolongement extrémal de fonctions différentiables* (à paraître).

GOLOMB (M.) :

[1] *Lectures on theory of approximation*, Argonne National Laboratory, 1962.

GOURSAT :

[1] *Cours d'analyse.*

HEURTAUX :

[1] *Chiffres*, mars 1958.

KORNEICUK (N. P.) :

[1] *The exact constant in D. Jackson s theorem on best uniform approximation of continuous periodic functions* (*Doklady*, vol. 3, n° 4, 1962, p. 1040).

KOROVKIN (P. O.) :

[1] *Linear operators and approximation theory* (traduit du russe), Delhi, 1960.

KRYLOV (V. I.) :

Approximate calculation of integrals (traduit du russe), A. C. M. Monograph series, 1962.

LANGER :

Symposium, University of Wisconsin, April 1958.

LAURENT :

[1] *Étude de procédés d'approximation en analyse numérique* (*Thèse*, 15 juin 1964).

LORENTZ (G. G.) :

[1] *Bernstein polynomials*, Mathematical expositions n° 8, Toronto, 1953.

MALGRANGE :

[1] *Idéaux de fonctions différentielles*, Séminaire Leray, mars 1964.

MERRIEN :

[1] *Prolongateurs de fonctions différentiables d'une variable réelle* (*J. Math. pures et appl.*, 9e série, t. 45, 1966, p. 291).

MARKOFF (A. A.) :

[1] *On the limiting values of integrals connected with interpolation* (Collected works).

MARKOFF (W. A.) :

[1] *On functions which deviate least from zero*, S. Pb., 1892.

MONTEL (P.) :

[1] *Leçons sur les séries de polynomes*, Gauthier-Villars, Paris, 1910.

PANOW (D. J.) :

[1] *Formelsammlung zur numerischen Behandlung partieller. Differentialgleich ungen nach dem Differenzenverfahren*, Akad. Verlag, Berlin, 1955.

RICE :

[1] *The approximation of functions*, Addison Wesley Publish, Comp., 1964.

RUNGE :

[1] *Ueber empirische Functionen und die Interpolation zwischen äquidistanten Ordinaten* (*Z. Math. Physil*, t. 46, 1902, p. 242-243).

SCHOENBERG :

[1] *Spline functions* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 64, 1958, p. 352-357).

SCHWARTZ (L.) :

[1] *Les théorèmes de Whitney sur les fonctions différentiables*, Séminaire Bourbaki, mars 1951.

TIMAN :

Theory of approximation of functions of a real variable, Pergamon Press, 1963.

VALLÉE POUSSIN (C. DE LA) :

Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle, Gauthier-Villars, Paris, 1919.

WHITNEY (H.) :

[1] *Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 36, 1934, p. 1).

[2] *Differentiable functions defined in closed sets* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 36, 1934, p. 2).

[3] *On the extension of differentiable functions* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 50, 1944, p. 2).