ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

VICTOR HERMAN

La caractérisation fonctionnelle de la fonction rationnelle d'une variable complexe

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 83, nº 3 (1966), p. 187-189
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1966_3_83_3_187_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
3e série, t. 83, 1966, p. 187 à 189.

LA CARACTÉRISATION FONCTIONNELLE
DE LA
FONCTION RATIONNELLE D'UNE VARIABLE COMPLEXE

PAR VICTOR HERMAN
à Cluj.

P. Montel ([1], [2], [3]) a donné des théorèmes pour la caractérisation fonctionnelle des polynomes de variables réelles ou complexes. En étendant ces résultats, on peut faire la caractérisation fonctionnelle des fonctions rationnelles d'une ou plusieurs variables réelles ou complexes.

On va présenter les résultats concernant la fonction rationnelle d'une variable complexe. Nous considérons les domaines S_α et S'_α des variables complexes z et h définis par

$$\begin{aligned} S_\alpha:\quad & z = re^{i\theta}, \qquad \alpha_0 < \theta < \alpha_1, \qquad r > 0; \\ S'_\alpha:\quad & h = \rho e^{i\varphi}, \qquad \alpha_0 < \varphi < \alpha_1, \qquad \rho > 0; \end{aligned}$$

où α_0 et α_1 sont des constantes données. L'utilisation de ces domaines est imposée par la forme de l'équation fonctionnelle utilisée.

LEMME 1. — *Les équations fonctionnelles*

$$(1)\qquad E_{n,m}[f(z), h] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & f_0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & f_1 & f_1 & \dots & f_1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^n & f_2 & 2f_2 & \dots & 2^m f_2 \\ . & . & . & \dots & . & . & . & \dots & . \\ 1 & p & p^2 & \dots & p^n & f_p & pf_p & \dots & p^m f_p \end{vmatrix} = 0,$$

$$(2)\qquad E'_{n,m}[f(z), h] = \begin{vmatrix} 1 & z & z^2 & \dots & z^n & f_0 & zf_0 & \dots & z^m f_0 \\ 1 & z+h & (z+h)^2 & \dots & (z+h)^n & f_1 & (z+h)f_1 & \dots & (z+h)^m f_1 \\ 1 & z+2h & (z+2h)^2 & \dots & (z+2h)^n & f_2 & (z+2h)f_2 & \dots & (z+2h)^m f_2 \\ . & . & . & \dots & . & . & . & \dots & . \\ 1 & z+ph & (z+ph)^2 & \dots & (z+ph)^n & f_p & (z+ph)f_p & \dots & (z+ph)^m f_p \end{vmatrix} = 0,$$

$$[f_k = f(z+kh),\ k = 0, 1, \dots, p;\ p = n+m+1],$$

n et m étant les degrés respectifs du numérateur et du dénominateur de la fraction sont équivalentes quelle que soit la fonction $f(z)$ analytique et uniforme à l'intérieur de l'angle S_α, quel que soit le vecteur-période h à l'intérieur de l'angle S'_α.

THÉORÈME. — *Une fonction $f(z)$ analytique et uniforme à l'intérieur de l'angle S_α, satisfaisant à la relation*

$$f(z) = f(kz) \qquad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

se réduit à une constante.

LEMME 2. — *Quelle que soit la fonction $f(z)$, analytique et uniforme à l'intérieur de l'angle S_α, qui vérifie l'équation fonctionnelle*

$$E'_{n,m}[f(z), h] = 0 \tag{3}$$

pour trois périodes h_1, h_2, h_3 indépendantes telles que

$$E'_{n-1,m}[f(z), h] \neq 0, \qquad E'_{n,m-1}[f(z), h] \neq 0, \tag{4}$$

il existe des constantes

$$a_0, \quad a_1, \quad \dots, \quad a_n, b_0, b_1, \quad \dots, \quad b_m \tag{5}$$

non toutes nulles telles que le système

$$\begin{cases} a_0 + a_1(z+jh) + \dots + a_n(z+jh)^n \\ \quad + [b_0 + b_1(z+jh) + \dots + b_{m-1}(z+jh)^{m-1}] f_j + b_m(z+jh)^m f_j = 0 \\ \qquad (j = 0, 1, \dots, p;\ p = n+m+1) \end{cases} \tag{6}$$

de $p + 1$ équations linéaires et homogènes par rapport au même nombre d'inconnues (5), soit vérifié.

La caractérisation fonctionnelle de la fonction rationnelle résulte de ces lemmes et du

THÉORÈME DE MONTEL. — *Toute fonction $f(z)$ d'une variable complexe, analytique et uniforme dans un domaine D, vérifiant les équations fonctionnelles*

$$\Delta^p_{h_1} f(z) = 0, \qquad \Delta^p_{h_2} f(z) = 0, \qquad \Delta^p_{h_3} f(z) = 0 \tag{7}$$

dans lesquelles les périodes h_1, h_2, h_3 sont indépendantes, est un polynome de degré inférieur à p.

On dit que les périodes h_1, h_2, h_3 sont indépendantes s'il n'existe entre elles aucune relation de la forme

$$\mu_1 h_1 + \mu_2 h_2 + \mu_3 \alpha_3 = 0,$$

où μ_1, μ_2, μ_3 sont des nombres entiers non tous nuls.

On démontre ensuite le

THÉORÈME. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $f(z)$ d'une variable complexe, analytique et uniforme à l'intérieur de l'angle S_α du plan complexe, représente la fonction rationnelle*

$$\frac{a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \ldots + b_m z^m}$$

à coefficients arbitraires et $b_0 + b_1 z + \ldots + b_m z^m \neq 0$, *est que* $f(z)$ *vérifie l'équation fonctionnelle*

$$(8) \qquad E_{n,m}[f(z), h] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & f_0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & f_1 & f_1 & \ldots & f_1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \ldots & 2^n & f_2 & 2f_2 & \ldots & p^m f_2 \\ . & . & . & \ldots & . & . & . & \ldots & . \\ 1 & p & p^2 & \ldots & p^n & f_p & pf_p & \ldots & p^m f_p \end{vmatrix} = 0$$

$$[f_k = f(x + kh),\ k = 0, 1, 2, \ldots, p;\ p = n + m + 1]$$

pour trois valeurs $h_1, h_2, h_3 \in S'_\alpha$ *indépendantes et en même temps*

$$E_{n-1,m}[f(z), h] \neq 0, \qquad E_{n,m-1}[f(z), h] \neq 0.$$

Remarques. — 1. Pour $m = 0$, l'équation fonctionnelle se réduit à l'équation de Montel qui caractérise les polynomes.

2. On caractérise de même les fonctions rationnelles de plusieurs variables réelles ou complexes par l'extension des résultats correspondants de Montel (1).

BIBLIOGRAPHIE.

[1] P. MONTEL, *Sur un théorème de Jacobi* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 201, 1935, p. 586-588).

[2] P. MONTEL, *Sur quelques extensions d'un théorème de Jacobi* (*Prace Mat. Fis.*, 1936, p. 315-329).

[3] P. MONTEL, *Sur des équations fonctionnelles caractérisant les polynomes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 226, 1948, p. 1053-1055).

(1) La caractérisation de la fonction rationnelle dans la classe de fonctions mesurables va paraître dans la *Revue Roumaine de Mathématiques pures et appliquées*.