

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MARTHE GRANDET-HUGOT

## Étude de certaines suites $\{\lambda\alpha^n\}$ dans les adèles

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 83, n° 3 (1966), p. 171-185

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1966\\_3\\_83\\_3\\_171\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1966_3_83_3_171_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## ÉTUDE DE CERTAINES SUITES $\{\lambda \alpha^n\}$ DANS LES ADÈLES

PAR M<sup>me</sup> MARTHE GRANDET-HUGOT.

Cette étude a pour but de généraliser à des ensembles d'adèles certaines propriétés relatives aux nombres de Pisot-Vijayaraghavan.

1. RAPPELS ET NOTATIONS. — Nous noterons par  $\mathbf{Q}$  le corps des nombres rationnels, par  $\mathbf{Z}$  l'anneau des entiers rationnels.  $P$  désignera l'ensemble des valuations de  $\mathbf{Q}$ ,  $o$  désignant la valuation archimédienne, et  $p$  la valuation  $p$ -adique avec  $|p|_p = \frac{1}{p}$ ;  $\mathbf{Q}_p$  est le corps des nombres  $p$ -adique et  $\Omega_p$  sa clôture algébrique. (Alors  $\mathbf{Q}_o = \mathbf{R}$ .)

Soit  $I$  un sous-ensemble fini de  $P$ , posons

$$I^+ = I \cup \{o\}, \quad I^- = I - \{o\} \quad \text{si } o \in I, \\ I^- = I \quad \text{si } o \notin I.$$

Soit, alors,  $V_I$  l'anneau des  $I$ -adèles de  $\mathbf{Q}$ ,  $V_I$  est isomorphe algébriquement et topologiquement au produit cartésien

$$\prod_{p \in I} \mathbf{Q}_p$$

et contient un sous-corps isomorphe à  $\mathbf{Q}$  :  $\mathbf{Q}e_1$ ,  $e_1$  étant l'élément unité de  $V_I$ . Nous désignerons également par  $V_p$  l'anneau des adèles de  $\mathbf{Q}$  et par  $e_p$  son élément unité.

Si  $x \in V_p$ ,  $x_p$  désignera sa composante dans  $\mathbf{Q}_p$  et nous poserons

$$|x_p|_p = |x|_p.$$

Enfin, nous désignerons par  $\mathbf{Z}[I]$ , le sous-anneau de  $\mathbf{Q}$  ainsi défini :

$$\mathbf{Z}[I] = \{x \in \mathbf{Q} \mid |x|_p = 1 \text{ pour } p \notin I^+\},$$

autrement dit  $\mathbf{Z}[\mathbf{I}]$  est l'anneau des fractions n'ayant au dénominateur que des nombres premiers de  $\mathbf{I}$ .

Si  $a \in \mathbf{R}$ , nous appellerons domaine fondamental  $F_a(\mathbf{P})$  de  $V_p$  le sous-ensemble de  $V_p$  ainsi défini :

$$F_a(\mathbf{P}) = \{x \in V_p \mid |x|_p \leq 1 \text{ pour } p \neq 0; 0 \leq x_0 < a + 1\},$$

on obtient alors le théorème suivant :

THÉORÈME D'ARTIN ([1], [2]). — Soit  $x \in V_p$ ; il existe une décomposition unique

$$x = E(x) e_p + \varepsilon(x),$$

où  $E(x) \in \mathbf{Q}$  et  $\varepsilon(x) \in F_a(\mathbf{P})$ .

De plus, si  $x \in V_1$ ,  $E(x) \in \mathbf{Z}[\mathbf{I}]$ , et pour  $p \notin \mathbf{I}$  :  $\varepsilon_p(x) = -E(x)$ .

Cette décomposition jouera le même rôle que la décomposition en partie réelle et partie fractionnaire dans le domaine réel.

2. REMARQUES SUR LA DÉCOMPOSITION D'ARTIN DES SUITES  $\{\lambda \alpha^n\}$ . — Soit  $\alpha \in V_1$ , tel que  $|\alpha|_p > 1$  pour tout  $p \in \mathbf{I}$ , et soit  $\lambda$  un élément inversible de  $V_1$ .

La décomposition d'Artin de  $\lambda \alpha^n$ , avec  $F_a(\mathbf{P})$  comme domaine fondamental ( $a$  est un nombre réel quelconque) :

$$\lambda \alpha^n = u_n e_p + \varepsilon(\lambda \alpha^n), \quad \text{où } u_n \in \mathbf{Z}[\mathbf{I}].$$

REMARQUE 1. — Il existe  $q \in \mathbf{Z}$ ;  $q = \prod_{p \in \mathbf{I}^-} p^{k_p}$ , tel que, à partir d'un certain rang :  $q^{n+1} u_n \in \mathbf{Z}$ .

Soit

$$\begin{aligned} |\alpha|_p &= p^{t_p} & \text{où } t_p > 0 & \text{ pour } p \in \mathbf{I}^-, \\ |\lambda|_p &= p^{r_p} & \text{où } r_p & \in \mathbf{Z} \end{aligned}$$

à partir d'un certain rang  $|\lambda \alpha^n|_p > 1$ , donc

$$|u_n|_p = |\lambda \alpha^n|_p = p^{r_p + n t_p}, \quad \forall p \in \mathbf{I}^-$$

donc, il existe  $k_p \geq t_p$  tel que, à partir d'un certain rang :

$$|u_n|_p \leq p^{k_p (n+1)}$$

et si

$$q = \prod_{p \in \mathbf{I}^-} p^{k_p},$$

on a

$$|q^{n+1} u_n|_p \leq 1 \quad \text{pour tout } p \in \mathbf{I}^-,$$

ce qui, compte tenu du fait que  $u_n \in \mathbf{Z}[\mathbf{I}]$  entraîne que  $q^{n+1} u_n$  est un entier rationnel.

REMARQUE 2. — Deux suites  $\lambda\alpha^n$  et  $\lambda'\alpha'^n$  distinctes ne peuvent pas engendrer la même suite  $\{u_n\}$ .

Supposons que

$$\begin{aligned}\lambda\alpha^n &= u_n e_{\mathbb{P}} + \varepsilon(\lambda\alpha^n), \\ \lambda'\alpha'^n &= u_n e_{\mathbb{P}} + \varepsilon(\lambda'\alpha'^n),\end{aligned}$$

alors

$$\lambda\alpha^n - \lambda'\alpha'^n \varepsilon(\lambda\alpha^n - \varepsilon(\lambda'\alpha'^n)) \in F_a(\mathbb{P}),$$

supposons, par exemple, que  $|\alpha|_p > |\alpha'|_p$  pour un  $p \in \Gamma^-$ , on aurait alors

$$\alpha_p^n \left[ \lambda_p - \lambda'_p \left( \frac{\alpha'_p}{\alpha_p} \right)^n \right] = \varepsilon_p(\lambda\alpha^n) - \varepsilon_p(\lambda'\alpha'^n)$$

et, dans  $\mathbb{Q}_p \left( \frac{\alpha'_p}{\alpha_p} \right)^n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ , donc, pour  $n$  suffisamment grand :

$$\left| \lambda_p - \lambda'_p \left( \frac{\alpha'_p}{\alpha_p} \right)^n \right|_p = |\lambda|_p$$

et

$$|\lambda\alpha^n|_p = \text{Max}(|\varepsilon(\lambda\alpha^n)|_p, |\varepsilon(\lambda'\alpha'^n)|_p) \leq 1,$$

ce qui est impossible puisque  $|\lambda\alpha^n|_p \rightarrow \infty$  quand  $n \rightarrow \infty$ , on a donc

$$|\alpha|_p = |\alpha'|_p \quad \text{pour tout } p \in \Gamma^-.$$

On a également

$$|\lambda|_p = |\lambda'|_p$$

et, puisque

$$\begin{aligned}|\alpha|_p^n \left| \lambda_p - \left( \frac{\alpha'_p}{\alpha_p} \right)^n \lambda'_p \right|_p &< 1, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_p - \left( \frac{\alpha'_p}{\alpha_p} \right)^n \lambda'_p &= 0,\end{aligned}$$

donc

$$\lambda_p \alpha^n = \lambda'_p \alpha'^n \quad \text{à partir d'un certain rang}$$

et

$$\lambda_p = \lambda'_p, \quad \alpha_p = \alpha'_p, \quad \forall p \in \Gamma^-.$$

Le cas  $p = 0$  se traite alors de la même manière que dans le domaine réel.

### 3. ENSEMBLES $\mathcal{S}_1^{p'}(a)$ .

DÉFINITION. — Nous dirons qu'un élément  $\alpha \in V_1$ , tel que  $|\alpha|_p > 1$  pour  $p \in I$ , appartient à  $\mathcal{S}_1^{p'}(a)$  si il existe un élément  $\lambda$  inversible de  $V_1$  tel que, en considérant la décomposition d'Artin :

$$\lambda\alpha^n = u_n e_{\mathbb{P}} + \varepsilon(\lambda\alpha^n),$$

on ait

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_{p'}(\lambda\alpha^n) = 0, \quad \text{où } p' \in \mathbb{P},$$

le domaine fondamental étant  $F_a(\mathbb{P})$ .

Les éléments algébriques de cet ensemble sont alors les éléments  $S_1''$  définis et caractérisés par F. Bertrandias dans [2] :

$S_1''$  est l'ensemble des éléments algébriques  $\theta$  de  $V_1$  tels que  $|\theta|_p > 1$  pour tout  $p \in I$ , et pour lesquels il existe un polynôme  $A \in \mathbf{Z}[X]$  ayant les propriétés suivantes :

- $\theta$  est racine de  $A$  dans  $V_1$ .
- Les racines de  $A$  dans  $\Omega_{p'}$  (distinctes de  $\theta_{p'}$  si  $p' \in I$ ) appartiennent au disque  $|X|_{p'} < 1$ .
- Les racines de  $A$  dans  $\Omega_p$  (distinctes de  $\theta_p$  pour  $p \in I$ ) appartiennent au disque  $|X|_p \leq 1$  pour tout  $p \in P$ .

On sait déjà que l'ensemble  $S_0''(a)$  est un ensemble dénombrable ([6], [7]) dont les éléments algébriques forment l'ensemble  $S$  des nombres de Pisot-Vijayaraghavan. Nous allons généraliser ce résultat.

**THÉORÈME.** — *L'ensemble  $S_1''(a)$  est dénombrable.*

*Démonstration.* — Posons

$$\lambda \alpha^n = u_n e_p + \varepsilon(\lambda \alpha^n),$$

où

$$u_n \in \mathbf{Z}[I] \quad \text{et} \quad \varepsilon(\lambda \alpha^n) \in F_a(P).$$

On en déduit

$$u_{n+1}^2 - u_n u_{n+2} = u_{n+2} \varepsilon(\lambda \alpha^n) + u_n \varepsilon(\lambda \alpha^{n+2}) - 2 \varepsilon(\lambda \alpha^{n+1}) u_{n+1} - \varepsilon^2(\lambda \alpha^{n+1}) + \varepsilon(\lambda \alpha^n) \varepsilon(\lambda \alpha^{n+2}),$$

d'où

$$(1) \quad u_{n+2} - \frac{u_{n+1}^2}{u_n} = -\frac{u_{n+2}}{u_n} \varepsilon(\lambda \alpha^n) + 2 \frac{u_{n+1}}{u_n} \varepsilon(\lambda \alpha^{n+1}) - \varepsilon(\lambda \alpha^{n+2}) + \frac{\varepsilon^2(\lambda \alpha^{n+1}) - \varepsilon(\lambda \alpha^n) \varepsilon(\lambda \alpha^{n+2})}{u_n}.$$

En utilisant les notations du paragraphe 2, on obtient les inégalités suivantes à partir de (1), pour tout  $p \in I^+ \cup \{p'\}$ .

a.  $p \neq p'$ .

— Si  $p \neq 0$  : A partir d'un certain rang :

$$|u_n|_p = p^{r_n + n'p},$$

d'où, compte tenu de  $|\varepsilon_p(\lambda \alpha^n)| \leq 1$  :

$$\left| u_{n+2} - \frac{u_{n+1}^2}{u_n} \right|_p \leq \text{Max}(p^{2r}, 2p^r, 1),$$

donc, à partir d'un certain rang :

$$(2) \quad \left| u_{n+2} - \frac{u_{n+1}^2}{u_n} \right|_p \leq p^{2r}.$$

— Si  $p = 0 \in I$  : Alors

$$|\varepsilon_0(\lambda \alpha^n)| \leq \text{Max}(|a|, |a+1|) = \Lambda.$$

Quand  $n$  augmente indéfiniment  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  reste borné, on peut donc trouver une constante  $M$  telle que

$$(3) \quad \left| u_{n+2} - \frac{u_{n+1}^2}{u_n} \right| \leq M$$

à partir d'un certain rang.

— Si  $0 \notin I$  : Nous utiliserons alors l'inégalité

$$(4) \quad a \leq -u_n < a+1.$$

b.  $p = p'$ .

— Si  $p' \in I^-$  : A partir d'un certain rang, étant donné  $\varepsilon$ , on a

$$|\varepsilon(\lambda\alpha^n)|_{p'} < \varepsilon,$$

d'où l'on déduit, en utilisant (1) :

$$(5) \quad \left| u_{n+2} - \frac{u_{n+1}^2}{u_n} \right|_{p'} < \varepsilon p^{2/p'}.$$

— Si  $p' = 0 \in I$  : On a alors nécessairement  $|a| < 1$ , et, étant donné  $\varepsilon$ , à partir d'un certain rang :

$$|\varepsilon_0(\lambda\alpha^n)| < \varepsilon$$

et, en utilisant (1), on obtient

$$(6) \quad \left| u_{n+2} - \frac{u_{n+1}^2}{u_n} \right| < \varepsilon M,$$

$M$  étant une constante.

— Si  $p' \notin I$  : Alors, étant donné  $\varepsilon$ , à partir d'un certain rang, on a

$$(7) \quad |u_n|_{p'} < \varepsilon.$$

Nous allons maintenant montrer que si  $u_0, \dots, u_{n+1}$  sont donnés, ces inégalités définissent de manière unique  $u_{n+2}$ , pour  $n$  assez grand. Supposons qu'il existe deux éléments  $u_{n+2}$  et  $u'_{n+2}$  de  $\mathbf{Z}[I]$  vérifiant ces inégalités et étudions la différence  $u_{n+2} - u'_{n+2}$ .

a.  $p' \in I$ .

— Si  $0 \in I$  et  $p' = 0$  : De (3) on tire

$$(3') \quad |u_{n+2} - u'_{n+2}| \leq 2M$$

et pour  $p \neq 0$  et  $p \neq p'$  on tire de (2) :

$$(2') \quad |u_{n+2} - u'_{n+2}|_p \leq p^{2t}$$

et, enfin, de (5) on tire

$$(5') \quad |u_{n+2} - u'_{n+2}|_{p'} \leq \varepsilon p^{2/p'}$$

d'où

$$\prod_{p \in I} |u_{n+2} - u'_{n+2}|_p \leq \varepsilon M',$$

où  $M'$  est une constante, donc si  $\varepsilon$  a été choisi assez petit :

$$\prod_{p \in I} |u_{n+2} - u'_{n+2}|_p < 1,$$

ce qui, compte tenu du fait que  $u_{n+2}$  et  $u'_{n+2}$  appartiennent à  $\mathbf{Z}[I]$ , entraîne que  $u_{n+2} = u'_{n+2}$ .

— Si  $p' = 0$  : Alors, pour  $p \neq p'$ , on utilise (2'), et de plus, (6) entraîne

$$(6') \quad |u_{n+2} - u'_{n+2}| < 2\varepsilon M,$$

on a donc encore, si  $\varepsilon$  a été choisi suffisamment petit,

$$\prod_{p \in I} |u_{n+2} - u'_{n+2}|_p < 1$$

qui entraîne  $u_{n+2} = u'_{n+2}$ .

— Si  $0 \notin I$  : On utilise alors (2'), (5') et puisque

$$a \leq u_{n+2} < a+1 \quad \text{et} \quad a \leq u'_{n+2} < a+1,$$

on a

$$|u'_{n+2} - u_{n+2}| < 1$$

et l'on obtient encore le même résultat.

b.  $p' \notin I$ .

On utilise alors les inégalités

$$(7') \quad |u_{n+2} - u'_{n+2}|_p < \varepsilon \quad \text{si} \quad p' \neq 0,$$

$$(7'') \quad |u_{n+2} - u'_{n+2}| < 2\varepsilon \quad \text{pour} \quad p' = 0,$$

d'où l'on déduit le même résultat.

L'ensemble des suites  $\{u_n\}$  est donc dénombrable, et puisqu'à une seule  $\{u_n\}$  correspond au plus un élément  $\alpha$  de  $V_1$ , on en déduit que l'ensemble  $\mathcal{S}'_1(a)$  est dénombrable.

4. CAS OU  $\varepsilon_{p'}(\lambda \alpha^n)$  A UN NOMBRE FINI DE POINTS D'ACCUMULATION. — Nous allons généraliser le résultat du paragraphe précédent au cas où  $\varepsilon_{p'}(\lambda \alpha^n)$  a un nombre fini de points d'accumulation dans  $\mathbf{Z}_{p'}$ , pour un certain  $p' \in P$ . Nous prendrons  $a = -\frac{1}{2}$  pour définir le domaine fondamental, ce qui ne restreint pas la généralité du problème.

Nous montrerons d'abord que, quitte à modifier le domaine fondamental, on peut ramener ces points d'accumulation dans une boule centrée à l'origine et de rayon aussi petit qu'on veut.

Dans la démonstration, nous supposons  $p' \neq 0$ , puisque, pour  $p' = 0$ , la démonstration est presque identique à celle qui a été faite dans le cas réel [7].

Considérons une suite  $\{\varphi_n\}$  d'éléments de  $V_1$ , telle que, pour un certain  $p' \in P$ ,  $\varepsilon_{p'}(\varphi_n)$  n'ait qu'un nombre fini de points d'accumulation dans  $Z_{p'}$ .

Soient  $r_i (i = 1, \dots, k)$  les points d'accumulation rationnels et  $\omega_j (j = 1, \dots, h)$  les autres. Désignons par  $(\varphi_n)_{p'}$  la composante de  $\varphi_n$  dans  $Q_{p'} [(\varphi_n)_{p'} = 0 \text{ si } p' \notin I]$ .

LEMME. — Si  $p' \in I$ , on peut trouver  $d \in Z [p']$  tel que, dans la décomposition d'Artin de  $d\varphi_n$ , le seul point d'accumulation rationnel de  $\varepsilon_{p'}(d\varphi_n)$  soit 0.

a. Si  $p' \in I$ . — En effet si

$$\begin{aligned} (\varphi_n)_{p'} &= E(\varphi_n) e + r_i + \varepsilon_n \quad (i = 1, \dots, k), \\ (d\varphi_n)_{p'} &= dE(\varphi_n) e + dr_i + d\varepsilon_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0. \end{aligned}$$

On peut choisir  $d \in Z [p']$  tel que

$$\begin{aligned} dr_i &\in Z [I] \quad \text{pour } i = 1, \dots, k, \\ d\varepsilon(\varphi_n) - dr_i &\in F_{-\frac{1}{2}}(P), \end{aligned}$$

en effet, si  $d \in Z [p']$ ,

$$|d|_p \leq 1 \quad \text{pour } p \neq p' \quad \text{et } p \neq 0,$$

on peut donc choisir  $d$  tel que

$$|dr_i|_p \leq 1 \quad \text{pour } p \neq p' \quad \text{et } p \neq 0$$

et si l'on veut avoir

$$-\frac{1}{2} \leq d\varepsilon_0(\varphi_n) - dr_i < \frac{1}{2},$$

on peut prendre

$$|d| < \frac{1}{|2|r_i - 1|}$$

et alors

$$\begin{aligned} E(d\varphi_n) &= dE(\varphi_n) + dr_i \quad (i = 1, \dots, k), \\ \varepsilon(d\varphi_n) &= d\varepsilon(\varphi_n) - dr_i. \end{aligned}$$

b. Si  $p' \notin I$ , le calcul précédent est toujours valable.

Nous supposons donc dans la suite que 0 est le seul point d'accumulation rationnel possible de la suite  $\varepsilon_{p'}(d\varphi_n)$ .

Considérons maintenant le système des formes linéaires

$$\Lambda_j = x\omega_j - y_j \quad \text{pour } j = 1, \dots, h,$$



ce système, de signature  $(h, h + 1)$  est non annulable, donc (cf. [5], chap. II), si l'on pose

$$\begin{aligned} H &= \text{Max}_{j=1, \dots, h} (|x|, |y_j|), \\ \Lambda &= \text{Max}_{j=1, \dots, h} |x\omega_j - y_j|_{\rho'}, \end{aligned}$$

l'inégalité

$$H^{h+1} \Lambda^h \leq 1$$

admet une infinité de solutions en  $(x, y_j) \in \mathbf{Z}^{h+1}$ , où les entiers  $x, y_j$  sont premiers entre eux dans leur ensemble. Autrement dit, on peut trouver un entier  $H$  aussi grand qu'on veut tel que

$$|x\omega_j - y_j|_{\rho'} < \frac{1}{H^{1+\frac{1}{h}}} \quad (j=1, \dots, h),$$

avec

$$H = \text{Max}_{j=1, \dots, h} (|x|, |y_j|).$$

On a alors nécessairement  $|x|_{\rho'} = 1$ , car si  $|x|_{\rho'} < 1$  on aurait aussi  $|y_j|_{\rho'} < 1$  pour  $j=1, \dots, h$  et  $x$  et les  $y_j$  ne seraient pas premiers entre eux dans leur ensemble.

On peut alors écrire

$$\begin{aligned} (x\varphi_n)_{\rho'} &= x E(\varphi_n) + x\omega_j + x\varepsilon_n \quad (j=1, \dots, h), \\ \text{où } \varepsilon_n &\rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

et, si l'on pose

$$\eta_j = x\omega_j - y_j \quad \text{où } |\eta_j|_{\rho'} < \frac{1}{H^{1+\frac{1}{h}}},$$

il vient

$$(4) \quad (x\varphi_n)_{\rho'} = x E(\varphi_n) + y_j + \eta_j + x\varepsilon_n.$$

Et l'on peut poser

$$x\varphi_n = V_n e_p + \varepsilon'(x\varphi_n),$$

où

$$v_n = x E(\varphi_n) + y_j \in \mathbf{Z}[I']$$

et où

$$\eta(x\varphi_n) = x\varepsilon(\varphi_n) - y_j e_p$$

vérifie les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} |\eta(x\varphi_n)|_{\rho'} &< \frac{2}{H^{1+\frac{1}{h}}} \quad \text{à partir d'un certain rang,} \\ |\eta(x\varphi_n)|_{\rho} &\leq 1 \quad \text{pour } p \neq p', \\ |\eta(x\varphi_n)| &\leq \frac{3H}{2}. \end{aligned}$$

Pour  $\varphi_n = \lambda x^n$ , on peut alors écrire des inégalités analogues à celles du paragraphe 3. Plus précisément, pour  $p \neq p'$  et  $p \neq 0$  on aura entre les  $v_n$  les mêmes inégalités qu'au paragraphe 3.

— Si  $p' \in I$ , on aura

$$\left| v_{n+2} - \frac{v_{n+1}^2}{v_n} \right|_{p'} \leq \frac{K}{H^{1+\frac{1}{h}}} \quad \text{à partir d'un certain rang,}$$

$K$  étant une constante.

— Si  $p' \notin I$ , alors

$$|v_n|_{p'} \leq \frac{K}{H^{1+\frac{1}{h}}} \quad \text{à partir d'un certain rang.}$$

— Si  $0 \in I$ , on a

$$\left| v_{n+2} - \frac{v_{n+1}^2}{v_n} \right| < CH \quad (C \text{ étant une constante}).$$

— Si  $0 \notin I$ , on a alors

$$|v_n| \leq CH.$$

On en déduit alors comme au paragraphe 3 que l'ensemble des suites  $\{v_n\}$  est dénombrable, il en est donc de même de l'ensemble des  $\alpha$  et de l'ensemble des  $\lambda$ .

**THÉORÈME 2.** — Les éléments  $\alpha \in V_1$ ,  $|\alpha|_p > 1$  pour  $p \in I$  tels qu'il existe un élément inversible  $\lambda \in V_1$  tel que, en considérant la décomposition d'Artin de  $\lambda x^n$  dans  $V_V$  (où  $V = \bigcup \{p'\}$ ),  $\varepsilon_{p'}(\lambda x^n)$  ait un nombre fini de points d'accumulation dans  $\mathbf{Z}_{p'}$ , forment un ensemble dénombrable. L'ensemble des  $\lambda$  associés est également dénombrable.

**ÉLÉMENTS ALGÈBRIQUES DE CET ENSEMBLE.** — Soit  $\theta$  un élément algébrique de l'ensemble défini ci-dessus et soit

$$P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_s X^s \in \mathbf{Z}[X]$$

son polynôme minimal.

Alors

$$(x\lambda\theta^n)(a_0 + a_1\theta + \dots + a_s\theta^s) = 0$$

et

$$\omega_n = a_0 v_n + \dots + a_s v_{n+s} = -[a_0 \varepsilon'(x\lambda\theta^n) + \dots + a_s \varepsilon'_s(x\lambda\theta^{n+s})],$$

on peut, alors, obtenir les majorations suivantes des valeurs absolues ordinaires et  $p$ -adiques de  $\omega_n \in \mathbf{Z}[I]$  :

$$\begin{aligned} |\omega_n|_p &\leq 1 && \text{pour } p \neq p' && \text{et } p \neq 0, \\ |\omega_n|_{p'} &\leq \frac{K}{H^{1+\frac{1}{h}}}, \\ |\omega_n| &\leq KH && \text{si } p' \neq 0 && (\mathbf{K} \text{ étant une constante}). \end{aligned}$$

On a donc

$$\prod_{p \in P} |\omega_n|_p \leq CH^{-\frac{1}{h}} < 1$$

si  $H$  a été choisi suffisamment grand. Donc  $\omega_n = 0$  à partir d'un certain rang et les  $\varphi_n$  vérifient une relation de récurrence à coefficients constants.

La série  $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n X^n$  représente donc une fraction rationnelle  $\frac{A(X)}{Q_1(X)}$ , où  $A$  et  $Q$  appartiennent à  $\mathbf{Z}[X]$  et sont premiers entre eux, et  $Q_1(X)$  divise le polynome

$$Q(X) \equiv X^s P\left(\frac{1}{X}\right);$$

— pour  $p \notin \mathbf{I} \cup \{p'\}$   $|\varphi_n|_p \leq 1$  la série converge dans le disque  $|X|_p < 1$  de  $\Omega_p$ , les racines de  $Q_1(X)$  vérifient donc  $|X|_p \geq 1$ ;

— pour  $p \in \mathbf{I}$  et  $p \neq p'$  :

$$\frac{A(X)}{Q_1(X)} = \sum_{n=0}^{\infty} x \lambda_p \theta_p^n X^n - \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon'_p(x \lambda \theta^n) X^n = \frac{x \lambda_p}{1 - \theta_p X} - \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon'_p(x \lambda \theta^n) X^n,$$

comme  $|\varepsilon'_p(x \lambda \theta^n)|_p \leq 1$ , la série converge pour  $|X|_p < 1$ .

— Si  $p' \in \mathbf{I}$ , on a aussi

$$\frac{A(X)}{Q_1(X)} = \frac{x \lambda_{p'}}{1 - \theta_{p'} X} - \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon'_{p'}(x \lambda \theta^n) X^n,$$

il en résulte que  $\theta$  est racine de  $Q_1(X)$  dans  $V_1$ , donc si l'on a choisi  $P(X)$  primitif :

$$Q_1(X) \equiv q Q(X), \quad \text{où } q \in \mathbf{Z}$$

et il est facile de voir que  $q = \prod_{p \in \mathbf{I}} p^{e_p}$  avec  $e_p \in \mathbf{N}$ .

D'autre part, les racines de  $Q(X)$  dans  $\Omega_p$  (autres que  $\theta_p$  si  $p \in \mathbf{I}$ ) vérifient  $|X|_p \geq 1$ .

Et l'on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{A(X)}{qQ(X)} &= \frac{x \lambda}{1 - \theta X} - \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon'(x \lambda \theta^n) X^n \quad \text{dans } V_1, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n X^n, \end{aligned}$$

cette égalité étant valable si  $1 - \theta X$  est un élément inversible de  $V_1$  et si la série  $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon'_p(x \lambda \theta^n) X^n$  converge pour tout  $X \in V_1$  vérifiant  $|X|_p \leq 1$  pour  $p \in \mathbf{I}$ .

Supposons maintenant que, pour deux valeurs  $x_1$  et  $x_2$  de  $x$ , on obtienne deux fractions rationnelles :  $\frac{A_1(X)}{q_1 Q(X)}$  et  $\frac{A_2(X)}{q_2 Q(X)}$ , alors

$$\frac{A_1(X)}{q_1 Q(X)} = \frac{x_1 \lambda}{1 - \theta X} - \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon'(x_1 \lambda \theta^n) X^n,$$

$$\frac{A_2(X)}{q_2 Q(X)} = \frac{x_2 \lambda}{1 - \theta X} - \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon'(x_2 \lambda \theta^n) X^n,$$

d'où

$$\frac{q_2 x_2 A_1(X) - q_1 x_1 A_2(X)}{q_1 q_2 Q(X)} = q_2 x_2 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon'(x_2 \lambda \theta^n) - q_1 x_1 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon'(x_1 \lambda \theta^n),$$

cette fraction rationnelle n'a donc plus le pôle  $\frac{1}{\theta}$  dans  $V_1$ , donc  $q_2 x_2 A_1(X) - q_1 x_1 A_2(X)$  est divisible par le polynôme minimal de  $\frac{1}{\theta}$  dans  $\mathbf{z}[X]$ , c'est-à-dire par  $Q(X)$ .

Et si  $\frac{1}{\alpha}$  est une racine de  $Q(X)$ , alors

$$\frac{A_1\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{q_1 x_1} = \frac{A_2\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{q_2 x_2} = \rho(\alpha)$$

et  $\rho(\alpha)$  ne dépend donc pas de  $x$ , donc de  $H$ .

Étudions maintenant les racines de  $Q(X)$  dans  $\Omega_{p'}$ ; (nous supposons toujours  $p' \neq 0$ , car dans le cas  $p' = 0$  la démonstration est identique à celle qui a été faite dans le cas réel, cf. [7]), alors, puisque  $|x|_{p'} = 1$ , on a

$$\left| \frac{A\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{q} \right|_{p'} = |\rho(\alpha)|_{p'}.$$

Supposons de plus que  $|\alpha|_{p'} = 1$ .

Alors

$$Q(X) = (1 - \alpha_{p'} X) Q_1(X), \quad \text{où } Q_1\left(\frac{1}{\alpha_{p'}}\right) \neq 0.$$

Posons

$$\frac{A(X)}{q\theta(X)} \theta_1(X) = \frac{A(X)}{q(1 - \alpha_{p'} X)} = \sum_{n=0}^{\infty} r_n X^n$$

et si  $a$  est le degré de  $A(X)$  :

$$r_n = \alpha_{p'}^{n-a} \frac{A\left(\frac{1}{\alpha_{p'}}\right)}{q},$$

d'où  $|r_n|_{p'} = |\rho(\alpha)|_{p'}$  ne dépend donc pas de  $x$ , donc de  $H$ ; d'autre part, si l'on pose

$$Q_1(X) = q_0 + q_1 X + \dots + q_{s-1} X^{s-1},$$

$$r_n = (q_0 v_n + q_1 v_{n-1} + \dots + q_{s-1} v_{n-(s-1)}),$$

donc

$$v_n = -[q_0 \varepsilon'_{p'}(x \lambda \theta^n) + \dots + q_{s-1} \varepsilon'_{p'}(x \lambda \theta^{n-s+1})]$$

et, pour  $n$  assez grand :

$$|r_n|_{p'} \leq \frac{K}{H^{1+\frac{1}{h}}} \quad (K \text{ étant une constante}).$$

Cette inégalité étant incompatible avec l'égalité précédente, il en résulte que  $|\alpha|_{p'} \neq 1$ , donc les racines de  $P(X)$  dans  $\Omega_{p'}$  (autres que  $\theta_{p'}$  si  $p' \in I$ ) appartiennent au disque  $|X|_{p'} < 1$  et  $\theta \in S_{p'}$ , donc  $\lambda$  appartient à l'anneau  $\mathcal{O}_1[\theta]$  engendré par  $\mathcal{O}_{e_1}$  et l'élément  $\theta$ .

**THÉORÈME 3.** — Si  $\theta$  est un élément algébrique de  $V_1$ ,  $|\theta|_{p'} > 1$  pour  $p \in I$  et si il existe un élément inversible  $\lambda$  de  $V_1$ , tel que pour  $p' \in P$ ,  $\varepsilon_{p'}(\lambda \theta^n)$  ait un nombre fini de points d'accumulation dans  $\mathbf{Z}_{p'}$  alors  $\theta \in S_{p'}$  et  $\lambda \in \mathcal{O}_1[\theta]$ .

On peut également étendre aux adèles, le théorème suivant de C. Pisot [7].

Si  $\alpha \in \mathbf{R}$ ,  $\alpha > 1$  et si les conditions suivantes sont vérifiées :

(a) il existe  $\lambda > 1$  tel que si l'on pose

$$\lambda x^n = u_n + \varepsilon_n, \quad u_n \in \mathbf{Z}, \quad -\frac{1}{2} \leq \varepsilon_n < \frac{1}{2}.$$

$\varepsilon_n$  admet un nombre fini de points d'accumulation;

(b) la convergence de  $\varepsilon_n$  vers ses points d'accumulation est  $o\left(\frac{1}{n^{h+1}}\right)$ ,  $h$  étant le nombre de points d'accumulation irrationnels.

**THÉORÈME 4.** — Si  $\alpha \in V_1$ ,  $|\alpha|_{p'} > 1$  pour tout  $p \in V_1$  et si les conditions suivantes sont vérifiées :

(a) Il existe un élément inversible  $\lambda$  de  $V_1$  tel que, si l'on considère la décomposition d'Artin de  $\lambda \alpha^n$  :

$$\lambda \alpha^n = u_n e_1 + \varepsilon(\lambda \alpha^n),$$

$\varepsilon_{p'}(\lambda \alpha^n)$  admet un nombre fini de points d'accumulation.

(b) La convergence de  $\varepsilon_{p'}(\lambda \alpha^n)$  vers ses points d'accumulation est  $o\left(\frac{1}{n^{h+1}}\right)$ ,  $h$  étant le nombre de points d'accumulation irrationnels.

Alors  $\alpha \in S_{p'}$  et  $\lambda$  est un élément de l'anneau  $\mathcal{O}_1[\alpha]$ .

D'après ce qui précède il nous suffit de montrer que  $\alpha$  est algébrique. La démonstration repose sur le théorème suivant dû à A. Decomps-Guilloux ([3], [4]) <sup>(1)</sup>.

**THÉORÈME A.** — Soit  $\alpha \in V_1$ ,  $|\alpha|_p = p^{a_p}$ ,  $t_p > 0$  pour  $p \in \Gamma$ ,  $\alpha_0 > 1$  si  $p \in I$ . S'il existe  $\lambda \in V_1$ ,  $|\lambda|_p = p^{b_p}$ ,  $b_p > 0$ , pour  $p \in \Gamma$ , et  $|\lambda_0| > 1$  si  $0 \in I$ , tel que si l'on pose

$$\lambda x^n = u_n e_p + \eta(\lambda x^n),$$

où  $u_n \in \mathbf{Z}[I]$  et

$$|\eta_p(\lambda x^n)| \leq \varepsilon_p \quad \text{pour } p \in P, \text{ et tout } n \geq 0,$$

avec la condition

$$\prod_{p \in P} \varepsilon_p < \frac{1}{\psi},$$

où

$$\begin{aligned} \psi &\geq q^2 e(1 + \text{Log } m) && \text{si } 0 \notin I, \\ \psi &\geq 2 q^2 \alpha_0 (\alpha_0 + 1) e(1 + \text{Log } m) && \text{si } 0 \in I, \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$q = \prod_{p \in I} p^{a_p}, \quad m = \prod_{p \in I} |\lambda|_p.$$

*Démonstration du théorème 4.* — Soient  $\omega_1, \dots, \omega_h$  les points d'accumulation irrationnels de  $\varepsilon_p(\lambda x^n)$  qui admet éventuellement, en plus, le point d'accumulation rationnel  $\omega_0 = 0$ .

a. Si  $p' = 0$  : Alors, étant donné  $H$ , il existe des entiers  $(x, y_j)$  tels que

$$0 < x < H^h$$

et

$$|x \omega_j - y_j| \leq \frac{1}{H},$$

alors

$$\begin{aligned} x \lambda_0 \alpha_0^n &= x u_n + x \varepsilon_0(\lambda x^n) && (\alpha_0 = 0 \text{ si } p \notin I) \\ &= x u_n + x \omega_j + x \varepsilon_n && (j = 1, \dots, h), \end{aligned}$$

où

$$\varepsilon_n = 0 \left( \frac{1}{n^{1+\frac{1}{h}}} \right),$$

d'où

$$x \lambda_0 \alpha_0^n = x u_n + y_j + \eta_j + x \varepsilon_n,$$

avec

$$|\eta_j| \leq \frac{1}{H}.$$

---

<sup>(1)</sup> Il est, en effet, très facile de voir que la démonstration de A. Decomps-Guilloux s'applique au cas où sans être nécessairement une décomposition d'Artin, la décomposition est du type indiqué.

On peut donc écrire

$$\begin{aligned} x\lambda\alpha^n &= (xu_n + y_j) e_p + x\varepsilon(\lambda\alpha^n) - y_j e_p \\ &= v_n e_p + \eta(\lambda\alpha^n), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} v_n &= xu_n + y_j \in \mathbf{Z}[1], \\ \eta(x\lambda\alpha^n) &= x\varepsilon(\lambda\alpha^n) - y_j e_p \end{aligned}$$

vérifie les inégalités

$$\begin{aligned} |\eta(x\lambda\alpha^n)|_p &\leq 1 \quad (p \neq 0) \\ |\eta(x\lambda\alpha^n)| &\leq \frac{1}{11} + 11^b |\varepsilon_n|; \end{aligned}$$

posons maintenant

$$\beta = q^2 e \hat{z} \operatorname{Log} q,$$

où

$$\begin{aligned} \hat{z} &= 1 && \text{si } 0 \notin I \\ \hat{z} &= 2\alpha_0(\alpha_0 + 1) && \text{si } 0 \in I, \end{aligned}$$

et soit  $b$  un entier vérifiant

$$b > 4\beta.$$

Alors, on peut trouver un entier  $n_0$  tel que

$$\begin{aligned} n \geq n_0 &\Rightarrow |\varepsilon_n| \leq \frac{1}{(bn_0)^{h+1}}, \\ |x\lambda\alpha^n|_p > 1, & \quad \forall p \in I \quad \text{et} \quad \forall x \leq (bn_0)^h \quad (x \in \mathbf{N}) \\ q^n &> em(bn_0)^h \end{aligned}$$

et si l'on prend

$$H = bn_0,$$

on peut trouver  $x \leq (bn_0)^h$  tel que

$$|\eta(x\lambda\alpha^n)| < \frac{2}{bn_0},$$

or

$$\frac{1}{2} bn_0 > q^2 e \hat{z} \cdot 2n_0 \operatorname{Log} q,$$

donc

$$\frac{1}{2} bn_0 > q^2 e \hat{z} (1 + \operatorname{Log} q + \operatorname{Log} mx)$$

et en posant  $\lambda' = \lambda x \alpha^n$  on peut appliquer le théorème A à la suite  $\{\lambda' \alpha^n\}$ ,  $\alpha$  est donc algébrique et, d'après le théorème 3,  $\alpha \in S_1^0$  et  $\lambda \in \mathbf{Q}[\alpha]$ .

b. Si  $p' \neq 0$  : En reprenant les mêmes notations que lors de la démonstration du théorème 3, on obtient l'inégalité

$$\prod_{p \in P} |\eta(x\lambda\alpha^n)|_p \leq C11^{-\frac{1}{h}}.$$

et la suite de la démonstration est analogue à la précédente, si  $H$  vérifie

$$[b(n_0 - 1)]^h < H \leq (bn_0)^h$$

puisqu'une telle inégalité peut être vérifiée pour des valeurs de  $n_0$  suffisamment grandes.

#### BIBLIOGRAPHIE.

- [1] Emil ARTIN, *Algebraic numbers and algebraic functions*, New York and Princeton University, 1950-1951 (multigraphié).
- [2] Françoise BERTRANDIAS, *Ensembles remarquables d'adèles algébriques* [*Bull. Soc. math. France*, Mémoire 4, 1965 (*Thèse Sc. math.*, Paris, 1965)].
- [3] Annette DECOMPS-GUILLOUX, *Ensembles d'éléments algébriques dans les adèles* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 261, 1965, p. 1929-1931).
- [4] Annette DECOMPS-GUILLOUX, *Répartition modulo 1 de  $\lambda x^n$  dans les adèles*, Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 7<sup>e</sup> année, 1965-1966, n<sup>o</sup> 5.
- [5] Élisabeth LUTZ, *Sur les approximations diophantiennes linéaires p-adiques*, Paris, Hermann, 1955 (*Act. scient. et ind.*, 1224; *Publ. Inst. math. Univ.*, Strasbourg, 12).
- [6] Charles PISOT, *La répartition modulo 1 et les nombres algébriques* (*Ann. Scuola norm. sup. Pisa*, Serie 2, t. 7, 1938, p. 205-248).
- [7] Charles PISOT, *Répartition (mod 1) des puissances successives des nombres réels* (*Comment. Math. Helvet.*, t. 19, 1946, p. 153-160).