

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MICHEL BROISE

Sur les isomorphismes de certaines algèbres de von Neumann

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 83, n° 2 (1966), p. 91-111

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1966_3_83_2_91_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES ISOMORPHISMES DE CERTAINES ALGÈBRES DE VON NEUMANN

PAR M. MICHEL BROISE.

INTRODUCTION.

Soient \mathcal{A} une algèbre de von Neumann dans un espace de Hilbert \mathcal{H} , φ une trace normale fidèle semi-finie sur \mathcal{A}^+ et $L_p(\varphi)$ l'ensemble des opérateurs mesurables (*cf.* [5] ou [7]) affiliés à \mathcal{A} de puissance $p^{\text{ième}}$ sommable par rapport à φ .

De même, on définit \mathcal{B} , \mathcal{K} , ψ et $L_p(\psi)$.

Si L désigne un ensemble d'opérateurs mesurables affiliés à \mathcal{A} , on note L^+ l'ensemble des éléments de L qui sont positifs.

Une trace φ normale fidèle semi-finie sur \mathcal{A}^+ définit canoniquement une forme linéaire sur $L_1(\varphi)$. Nous notons encore φ cette forme linéaire sur $L_1(\varphi)$; ainsi φ sera une application de $\mathcal{A}^+ \cup L_1(\varphi)$ dans $\overline{\mathbf{R}}_+ \cup \mathbf{C}$ (\mathbf{C} , ensemble des nombres complexes et $\overline{\mathbf{R}}_+ = [0, \infty]$).

Rappelons alors que le produit fort $x, y \rightarrow x \cdot y$ défini dans [5] ou [7] applique $L_2(\varphi) \times L_2(\varphi)$ dans $L_1(\varphi)$, que $\varphi(x \cdot y)$ est réel pour tous x et y hermitiens $\in L_2(\varphi)$, que $\varphi(x \cdot y)$ est positif pour tous x et $y \in L_2^+(\varphi)$ et que l'application $x, y \rightarrow \varphi(x \cdot y^*)$ de $L_2(\varphi) \times L_2(\varphi)$ dans \mathbf{C} est une forme sesquilinéaire hermitienne sur $L_2(\varphi)$ qui fait de $L_2(\varphi)$ un espace de Hilbert.

Nous allons étudier les applications linéaires et bijectives U de l'espace de Hilbert $L_2(\varphi)$ dans l'espace de Hilbert $L_2(\psi)$ qui sont isométriques [c'est-à-dire telles que $\varphi(x \cdot x^*) = \psi(U(x) \cdot (U(x))^*)$ pour tout $x \in L_2(\varphi)$] et qui satisfont à la condition $U(L_2^+(\varphi)) \subset L_2^+(\psi)$ [ce qui entraîne $U(x^*) = (U(x))^*$ pour tout $x \in L_2(\varphi)$].

Nous obtiendrons principalement le théorème 1 et ses différents corollaires, dont voici l'énoncé dans le cas où \mathcal{A} ou \mathcal{B} est facteur.

THÉORÈME 1. — *On suppose que \mathfrak{A} ou \mathfrak{B} est facteur. Alors il existe un isomorphisme ou un anti-isomorphisme Φ de \mathfrak{A} sur \mathfrak{B} et un scalaire λ positif tels que*

$$U(x) = \lambda \cdot \Phi(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathfrak{A} \cap L_2(\varphi).$$

COROLLAIRE 1. — *On suppose que $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, que $\varphi = \psi$ et que \mathfrak{A} est un facteur fini. Alors il existe un automorphisme ou un anti-automorphisme Φ de \mathfrak{A} tel que*

$$U(x) = \Phi(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathfrak{A}$$

[Rappelons que, dans ce cas, on a $\mathfrak{A} \subset L_2(\varphi)$.]

COROLLAIRE 2. — *On suppose que $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, que $\varphi = \psi$ et que \mathfrak{A} est un facteur discret. [\mathfrak{A} est isomorphe à $\mathcal{L}(H)$, où H est un espace de Hilbert bien choisi.] Alors il existe un automorphisme ou un anti-automorphisme Φ de \mathfrak{A} tel que*

$$U(x) = \Phi(x) \quad \text{pour tout } x \in L_2(\varphi).$$

[Rappelons que, dans ce cas, on a $L_2(\varphi) \subset \mathfrak{A}$.]

REMARQUE 1. — *Dans $L_2(\varphi)$ soit \mathfrak{m} un sous-espace vectoriel engendré par l'ensemble \mathfrak{m}^+ de ses éléments positifs. On suppose que l'adhérence de \mathfrak{m}^+ dans l'espace de Hilbert $L_2(\varphi)$ est $L_2^+(\varphi)$.*

Soit U' une application linéaire de \mathfrak{m} dans $L_2(\varphi)$ satisfaisant aux conditions suivantes :

- 1° $\psi(U'(x) \cdot (U'(x))^*) = \varphi(x \cdot x^*)$ pour tout $x \in \mathfrak{m}$;
- 2° $U'(\mathfrak{m})$ est dense dans $L_2(\psi)$;
- 3° $U'(\mathfrak{m}^+) \subset L_2^+(\psi)$.

Alors U' se prolonge par continuité en une application linéaire bijective et isométrique U de $L_2(\varphi)$ dans $L_2(\psi)$. De plus, il est clair que $U(L_2^+(\varphi)) \subset L_2^+(\psi)$.

En particulier, si l'on prend par exemple pour \mathfrak{m} l'idéal bilatère \mathfrak{m}_φ de \mathfrak{A} des opérateurs à traces relativement à φ , la remarque 1 permet de donner au théorème 1 et à ses différents corollaires une forme différente ne faisant intervenir que des opérateurs de \mathfrak{A} et \mathfrak{B} . Par exemple, dans le cas des facteurs, on a :

THÉORÈME 1 bis. — *On suppose que \mathfrak{A} ou \mathfrak{B} est un facteur.*

Soit U' une application linéaire de \mathfrak{m}_φ dans \mathfrak{B} satisfaisant aux conditions suivantes :

- 1° $\psi(U'(x) \cdot (U'(x))^*) = \varphi(x \cdot x^*)$ pour tout $x \in \mathfrak{m}_\varphi$;
- 2° L'adhérence de $U'(\mathfrak{m}_\varphi)$ pour la norme $a \rightarrow \|a\|_2 = (\varphi(a \cdot a^*))^{\frac{1}{2}}$ contient \mathfrak{m}_ψ ;
- 3° $U'(\mathfrak{m}_\varphi^+) \subset \mathfrak{B}^+$.

Alors il existe un isomorphisme ou un anti-isomorphisme Φ de \mathcal{A} sur \mathcal{B} et un scalaire positif λ tel que

$$U'(x) = \lambda \cdot \Phi(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathfrak{m}_\varphi.$$

NOTATIONS ET RAPPELS DIVERS. — Soient x et y des opérateurs (linéaires) dans un espace de Hilbert \mathcal{H} à domaine dense. On note \mathcal{D}_x et \mathcal{D}_y leurs domaines.

On dit que y prolonge x et l'on note $x \subseteq y$, lorsque $\mathcal{D}_x \subset \mathcal{D}_y$ et lorsque $x(\xi) = y(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathcal{D}_x$.

$y \circ x$ désigne l'opérateur, défini sur l'ensemble des $\xi \in \mathcal{D}_x$ pour lesquels $x(\xi) \in \mathcal{D}_y$, tel que $(y \circ x)(\xi) = y(x(\xi))$.

Si $y \circ x$ a un prolongement linéaire fermé on note $y \cdot x$ le produit fort, c'est-à-dire le plus petit prolongement linéaire fermé de $y \circ x$.

(Notons que si l'opérateur x est borné et a pour domaine \mathcal{H} et si l'opérateur y est fermé, on a $y \cdot x = y \circ x$; cf. [6], p. 297.)

$x + y$ désigne l'opérateur défini sur $\mathcal{D}_x \cap \mathcal{D}_y$ par

$$(x + y)(\xi) = x(\xi) + y(\xi).$$

Si $x + y$ a un prolongement linéaire fermé, on désigne par $x + y$ la somme forte, c'est-à-dire le plus petit prolongement linéaire fermé de $x + y$.

Si x a un prolongement linéaire fermé; on note x^* l'opérateur adjoint. x^* est un opérateur fermé à domaine dense satisfaisant à $(x(\xi_1), \xi_2) = (\xi_1, x^*(\xi_2))$ pour tous $\xi_1 \in \mathcal{D}_x$ et $\xi_2 \in \mathcal{D}_{x^*}$.

Un opérateur x est dit auto-adjoint lorsque $x = x^*$.

L'ensemble des opérateurs mesurables affiliés à \mathcal{A} (resp. \mathcal{B}) forme une algèbre involutive (cf. [5] ou [7]) avec la somme forte, le produit fort et l'involution $x \rightarrow x^*$. Nous noterons \mathfrak{A} (resp. \mathfrak{B}) cette algèbre.

Rappelons que les opérateurs de \mathfrak{A} (resp. \mathfrak{B}) sont fermés affiliés à \mathcal{A} (resp. \mathcal{B}), à domaine fortement dense au sens de ([5], Déf. 1.1) ou de ([7], Déf. 2.1), et que \mathcal{A} (resp. \mathcal{B}) est une sous-algèbre involutive de \mathfrak{A} (resp. \mathfrak{B}).

Soit x un élément de \mathfrak{A} (resp. \mathfrak{B}), on notera S_x le plus petit projecteur p de \mathcal{A} (resp. \mathcal{B}) tel que $p \cdot x \cdot p = x$.

Si $x = x_1 + ix_2$ est la décomposition de x en parties hermitiennes, on a $S_x = S_{x_1} \vee S_{x_2}$, où $S_{x_1} \vee S_{x_2}$ désigne le projecteur (hermitien) sur le sous-espace vectoriel fermé engendré par les sous-espaces $S_{x_1}(\mathcal{H})$ et $S_{x_2}(\mathcal{H})$.

$\mathfrak{m}_{r, \varphi}$ désigne l'idéal bilatère restreint de \mathcal{A} engendré par les projecteurs de \mathfrak{m}_φ (l'idéal des opérateurs à trace relativement à φ). Soit x un élément de $\mathfrak{m}_{r, \varphi}$, on a $S_x \in \mathfrak{m}_{r, \varphi}$. Réciproquement, si $x \in \mathcal{A}$ et si $S_x \in \mathfrak{m}_{r, \varphi}$ on a $x \in \mathfrak{m}_{r, \varphi}$ (cf. [3]). Notons aussi que si p_1 et p_2 sont deux projecteurs de $\mathfrak{m}_{r, \varphi}$, alors $p_1 \vee p_2$ est un projecteur de $\mathfrak{m}_{r, \varphi}$.

$\overline{m_{r,\varphi}}^u$ désigne l'adhérence uniforme de l'idéal $m_{r,\varphi}$ de \mathcal{A} , c'est une \mathbf{C}^* -algèbre.

\mathfrak{u}_φ désigne l'idéal $\mathcal{A} \cap L_2(\varphi)$ de \mathcal{A} .

\mathfrak{u}_φ muni de la forme sesquilinéaire hermitienne $a, b \rightarrow \varphi(a \cdot b^*)$ est une algèbre hilbertienne achevée.

Nous noterons $\mathcal{U}(\mathfrak{u}_\varphi)$ [resp. $\mathcal{V}(\mathfrak{u}_\varphi)$] l'algèbre de von Neumann associée à gauche (resp. à droite) à l'algèbre hilbertienne \mathfrak{u}_φ et $a \rightarrow \lambda_a$ (resp. $a \rightarrow \rho_a$) l'isomorphisme (resp. l'anti-isomorphisme) de l'algèbre de von Neumann \mathcal{A} dans $\mathcal{U}(\mathfrak{u}_\varphi)$ [resp. $\mathcal{V}(\mathfrak{u}_\varphi)$].

On a introduit les idéaux bilatères $m_\varphi, m_{r,\varphi}, \overline{m_{r,\varphi}}^u$ et \mathfrak{u}_φ de \mathcal{A} , on définit de même les idéaux bilatères $m_\psi, m_{r,\psi}, \overline{m_{r,\psi}}^u$ et \mathfrak{u}_ψ de \mathcal{B} .

On appelle homomorphisme de Jordan d'une \mathbf{C}^* -algèbre A dans une autre B une application linéaire Φ de A dans B telle que

$$\Phi(x^*) = (\Phi(x))^* \text{ pour tout } x \text{ appartenant à } A \text{ et telle que}$$

$$\Phi(x^2) = (\Phi(x))^2 \text{ pour tout } x \text{ hermitien appartenant à } A.$$

Si Φ est de plus une application bijective, on dira que Φ est un isomorphisme de Jordan de A sur B (ou un automorphisme de Jordan lorsque $A = B$). L'application Φ^{-1} de B sur A est alors un isomorphisme de Jordan.

Remarque. — Les homomorphismes de Jordan ont été étudiés dans [8], où ils sont appelés \mathbf{C}^* -homomorphismes.

LEMME 1. — Soient a et b des éléments de \mathcal{A} et soit x un élément de $L_2(\varphi)$. On suppose que a tend ultrafortement vers b (par exemple que a tend fortement vers b et que $\|a\|$ reste majoré par une constante).

- (i) $a \cdot x$ tend vers $b \cdot x$ dans l'espace de Hilbert $L_2(\varphi)$;
- (ii) Si a et b sont hermitiens $x \cdot a$ tend vers $x \cdot b$ dans $L_2(\varphi)$.

Démonstration.

(i) Soit $a \rightarrow \lambda_a$ l'isomorphisme de \mathcal{A} dans l'algèbre de von Neumann $\mathcal{U}(\mathfrak{u}_\varphi)$ associée à gauche à l'algèbre hilbertienne \mathfrak{u}_φ .

L'isomorphisme $a \rightarrow \lambda_a$ est ultrafortement continu (cf. [1], chap. I, . 4.3). Donc λ_a tend ultrafortement vers λ_b . Par suite, pour tout $x \in L_2(\varphi)$, $\lambda_a(x)$ tend vers $\lambda_b(x)$ dans $L_2(\varphi)$; c'est-à-dire $a \cdot x$ tend vers $b \cdot x$ dans $L_2(\varphi)$;

(ii) D'après (i), $a \cdot x^*$ tend vers $b \cdot x^*$ dans $L_2(\varphi)$. D'autre part, les opérateurs a et b sont hermitiens et l'application $x \rightarrow x^*$ de $L_2(\varphi)$ dans $L_2(\varphi)$ est continue, donc $x \cdot a = (a \cdot x^*)^*$ tend vers $x \cdot b$ dans $L_2(\varphi)$.

LEMME 2. — Soient x_1 et x_2 deux opérateurs positifs appartenant à $L_2(\varphi)$ tels que $x_1 \cdot x_2 = 0$. Alors on a $U(x_1) \cdot U(x_2) = 0$.

Démonstration. — Les opérateurs x_1 et x_2 étant positifs, nous avons

$$\psi(U(x_1) \cdot U(x_2)) = \varphi(x_1 \cdot x_2) = 0.$$

D'après ([5], théor. 2 (i) et théor. 6), on a

$$(U(x_2))^{\frac{1}{2}} \in L_4(\psi) \quad \text{et} \quad U(x_1) \cdot (U(x_2))^{\frac{1}{2}} \in L_{\frac{4}{3}}(\psi).$$

Il en résulte, d'après ([5], lemme 3.1, (i)),

$$\begin{aligned} & \psi\left((U(x_2))^{\frac{1}{2}} \cdot U(x_1) \cdot (U(x_2))^{\frac{1}{2}}\right) \\ &= \psi\left(U(x_1) \cdot (U(x_2))^{\frac{1}{2}} \cdot (U(x_2))^{\frac{1}{2}}\right) = \psi(U(x_1) \cdot U(x_2)) = 0. \end{aligned}$$

Mais on a

$$(U(x_2))^{\frac{1}{2}} \cdot U(x_1) \cdot (U(x_2))^{\frac{1}{2}} = \left((U(x_1))^{\frac{1}{2}} \cdot (U(x_2))^{\frac{1}{2}}\right)^* \cdot \left((U(x_1))^{\frac{1}{2}} \cdot (U(x_2))^{\frac{1}{2}}\right).$$

D'après ([5], théor. 6, (ii), b), il vient alors

$$(U(x_1))^{\frac{1}{2}} \cdot (U(x_2))^{\frac{1}{2}} = 0.$$

D'où

$$U(x_1) \cdot U(x_2) = 0.$$

COROLLAIRE 1. — On a $U(L_2^+(\varphi)) = L_2^+(\psi)$ et l'application U^{-1} de $L_2(\psi)$ dans $L_2(\varphi)$ satisfait aux mêmes hypothèses que U .

Démonstration. — Soit y un élément de $L_2^+(\psi)$. Il existe $x \in L_2(\varphi)$ tel que $U(x) = y$. En remplaçant au besoin x par $\frac{x+x^*}{2}$, il est clair qu'on peut supposer x hermitien. Soit $x_1 + x_2$ la décomposition de x en partie positive et en partie négative, on a x_1 et $-x_2 \in L_2^+(\varphi)$, avec $x_1 \cdot x_2 = 0$. D'après le lemme 2, il vient $U(x_1) \cdot U(x_2) = 0$. Ainsi $U(x_1) + U(x_2)$ ne peut être positif que si $U(x_2) = 0$. Donc

$$U(L_2^+(\varphi)) = L_2^+(\psi).$$

Le reste est alors évident.

COROLLAIRE 2. — Soient p et p_1 deux projecteurs appartenant à $L_2(\varphi)$ (donc à $\mathfrak{m}_{r,\varphi}$) :

(i) On suppose que $p_1 \cdot p = p \cdot p_1$. Alors

$$U(p_1) \cdot U(p) = U(p) \cdot U(p_1);$$

(ii) On suppose que $p \cdot p_1 \cdot p = p_1$. Alors

$$U(p_1) = S_{U(p)} \cdot U(p_1) \cdot S_{U(p)}.$$

Démonstration.

(i) Posons

$$q_1 = p \cdot p_1, \quad q_2 = p - q_1 \quad \text{et} \quad q_3 = p_1 - q_1.$$

Comme $p_1 \cdot p = p \cdot p_1$, les opérateurs q_1 , q_2 et q_3 sont trois projecteurs orthogonaux appartenant à $L_2(\varphi)$.

On a donc, d'après le lemme 2,

$$U(q_1) \cdot U(q_3) = U(q_2) \cdot U(q_1) = U(q_2) \cdot U(q_3) = 0.$$

Il en résulte

$$U(p) \cdot U(p_1) = U(q_1 + q_2) \cdot U(q_1 + q_3) = U(q_1) \cdot U(q_1).$$

Par suite,

$$U(p) \cdot U(p_1) = U(p_1) \cdot U(p).$$

(ii) L'hypothèse $p \cdot p_1 \cdot p = p$ peut s'écrire $p_1 \leq p$.

Donc on a

$$0 \leq U(p_1) \leq U(p).$$

Il en résulte

$$U(p_1) = S_{U(p)} \cdot U(p_1) \cdot S_{U(p)}.$$

COROLLAIRE 3. — Soient p un projecteur de $L_2(\varphi)$ et x un opérateur de $L_2(\varphi)$.

(i) On suppose que $x \cdot p = p \cdot x$. Alors

$$U(x) \cdot U(p) = U(p) \cdot U(x).$$

(ii) On suppose que $p \cdot x \cdot p = x$. Alors

$$U(x) = S_{U(p)} \cdot U(x) \cdot S_{U(p)}.$$

Démonstration. — Il est clair que l'hypothèse $p \cdot x \cdot p = x$ entraîne $x \cdot p = p \cdot x$. (i) (resp. ii) : L'hypothèse $p \cdot x = x \cdot p$ (resp. $p \cdot x \cdot p = x$) entraîne $p \cdot x^* = x^* \cdot p$ (resp. $p \cdot x^* \cdot p = x^*$). On peut donc, sans perte de généralité, supposer x hermitien.

D'après la décomposition spectrale de x , il est clair que x est la limite dans l'espace de Hilbert $L_2(\varphi)$ d'une suite d'éléments $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $L_2(\varphi)$, tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n soit une combinaison linéaire finie de projecteurs $p_{n,i}$ appartenant à $L_2(\varphi)$ et satisfaisant à $p_{n,i} \cdot p = p \cdot p_{n,i}$ (resp. $p \cdot p_{n,i} \cdot p = p_{n,i}$).

D'après le corollaire 2, on a

$$U(x_n) \cdot U(p) = U(p) \cdot U(x_n) \quad (\text{resp. } S_{U(p)} \cdot U(x_n) \cdot S_{U(p)} = U(x_n)).$$

Comme l'application bilinéaire $a, b \rightarrow a \cdot b$ de $L_2(\psi) \times L_2(\psi)$ dans $L_1(\psi)$ [resp. de $L_2(\psi) \times \mathcal{B}$ dans $L_2(\psi)$ et de $\mathcal{B} \times L_2(\psi)$ dans $L_2(\psi)$] est continue, par passage à la limite, il vient

$$U(x) \cdot U(p) = U(p) \cdot U(x) \quad (\text{resp. } S_{U(p)} \cdot U(x) \cdot S_{U(p)} = U(x)).$$

COROLLAIRE 4. — Soient x_1 et x_2 deux éléments positifs de $L_2(\varphi)$. On suppose que x_1 et x_2 ont même support (i. e. $S_{x_1} = S_{x_2}$).

Alors les images par U de x_1 et de x_2 ont même support (i. e. $S_{U(x_1)} = S_{U(x_2)}$).

En particulier, si x est un élément positif de $L_2(\varphi)$ et si S_x appartient à $\mathfrak{m}_{r,\varphi}$, alors on a $S_{U(x)} = S_{U(S_x)}$.

Démonstration. — L'isomorphisme $a \rightarrow \lambda_a$ de \mathcal{A} dans l'algèbre de von Neumann $\mathcal{U}(\mathfrak{n}_\varphi)$ associée à gauche à l'algèbre hilbertienne \mathfrak{n}_φ se prolonge aux opérateurs mesurables (cf. [5], théor. 1).

Par suite, l'hypothèse $S_{x_1} = S_{x_2}$ est équivalente à

$$\{\xi \in L_2(\varphi) \mid x_1 \cdot \xi = 0\} = \{\xi \in L_2(\varphi) \mid x_2 \cdot \xi = 0\}.$$

Mais tout $\xi \in L_2(\varphi)$ peut se mettre sous la forme $\xi = |\xi| \cdot u$, où

$$|\xi| = (\xi \cdot \xi^*)^{\frac{1}{2}} \in L_2^+(\varphi)$$

et où u est un opérateur partiellement isométrique de \mathcal{A} .

Aussi pour que

$$\{\xi \in L_2(\varphi) \mid x_1 \cdot \xi = 0\} = \{\xi \in L_2(\varphi) \mid x_2 \cdot \xi = 0\},$$

il faut et il suffit que

$$\{\xi \in L_2^+(\varphi) \mid x_1 \cdot \xi = 0\} = \{\xi \in L_2^+(\varphi) \mid x_2 \cdot \xi = 0\}.$$

D'après le lemme 2, il en résulte

$$\{U(\xi) \in L_2^+(\psi) \mid U(x_1) \cdot U(\xi) = 0\} = \{U(\xi) \in L_2^+(\psi) \mid U(x_2) \cdot U(\xi) = 0\}.$$

D'après le corollaire 1 du lemme 2, il vient

$$\{\eta \in L_2^+(\psi) \mid U(x_1) \cdot \eta = 0\} = \{\eta \in L_2^+(\psi) \mid U(x_2) \cdot \eta = 0\}.$$

Comme précédemment, il en résulte

$$\{\eta \in L_2(\psi) \mid U(x_1) \cdot \eta = 0\} = \{\eta \in L_2(\psi) \mid U(x_2) \cdot \eta = 0\}$$

et, par suite,

$$S_{U(x_1)} = S_{U(x_2)}.$$

LEMME 3. — Il existe un homomorphisme de Jordan Φ' de $\overline{\mathfrak{m}_{r,\varphi}}^u$ dans \mathcal{B} tel que :

1° $U(x) = U(p) \cdot \Phi'(x) = \Phi'(x) \cdot U(p)$ pour tout $x \in \mathfrak{m}_{r,\varphi}$ et pour tout projecteur $p \in \mathfrak{m}_{r,\varphi}$ tel que $S_x \leq p$ (c'est-à-dire $x = p \cdot x \cdot p$);

2° $\Phi'(p) = S_{U(p)}$ pour tout projecteur $p \in \mathfrak{m}_{r,\varphi}$.

Démonstration. — Soient ε un nombre strictement positif, x un élément de $\mathfrak{m}_{r,\varphi}$ et p un projecteur de $\mathfrak{m}_{r,\varphi}$ satisfaisant à $x = p \cdot x \cdot p$.

Soit $\Phi'_\varepsilon(x, p)$ l'élément de \mathcal{B} défini par

$$\Phi'_\varepsilon(x, p) = (\varepsilon \cdot I + U(p))^{-1} \cdot S_{U(p)} \cdot U(x).$$

L'opérateur $U(p)$ de $L_2(\psi)$ est positif, et l'application $t \rightarrow \frac{t}{\varepsilon + t}$ de \mathbf{R}_+ dans \mathbf{R} est positive et majorée par 1; donc

$$\Phi_\varepsilon''(p, p) = (\varepsilon \cdot I + U(p))^{-1} \cdot U(p)$$

est un opérateur positif de \mathcal{B} et l'on a $0 \leq \Phi_\varepsilon''(p, p) \leq I$.

On a $x = p \cdot x \cdot p$, donc d'après le corollaire 3 du lemme 2, les opérateurs $U(x)$ et $U(p)$ [et, par suite, $\Phi_\varepsilon''(p, p)$] commutent entre eux.

Soit a un élément positif de $\mathfrak{m}_{r, \varphi}$ tel que $S_a \leq p$. D'une part, on a $a \leq \|a\| \cdot p$, donc

$$0 \leq \Phi_\varepsilon''(a, p) \leq \|a\| \Phi_\varepsilon''(p, p) \leq \|a\| \cdot I;$$

d'autre part, pour a et p fixés, l'application $\varepsilon \rightarrow \Phi_\varepsilon''(a, p)$ de \mathbf{R}_+ dans \mathcal{B} est décroissante, donc les opérateurs $\Phi_\varepsilon''(a, p)$ ont une limite forte dans \mathcal{B} , lorsque ε tend vers zéro. Notons $\Phi''(a, p)$ cette limite. On a

$$\|\Phi''(a, p)\| \leq \|a\|.$$

L'opérateur x est une combinaison linéaire d'opérateurs positifs appartenant à $\mathfrak{m}_{r, \varphi}$ et ayant leur support majoré par p ; aussi on définit par linéarité $\Phi''(x, p)$ comme la limite forte de $\Phi_\varepsilon''(x, p)$ lorsque ε tend vers zéro.

Comme $p \in \mathfrak{m}_{r, \varphi}$ on a $p \cdot \mathcal{A} \cdot p \subset \mathfrak{m}_{r, \varphi}$. Il est clair alors que l'application $x \rightarrow \Phi''(x, p)$ de $p \cdot \mathcal{A} \cdot p$ dans \mathcal{B} est linéaire, continue et positive.

Soit p_1 un projecteur de \mathcal{A} satisfaisant à $S_x \leq p_1 \leq p$. Montrons que

$$\Phi''(x, p_1) = \Phi''(x, p).$$

Par linéarité, sans perte de généralité, il est clair qu'il suffit de montrer que

$$\Phi''(a, p_1) = \Phi''(a, p) \quad \text{pour tout } a \in \mathfrak{m}_{r, \varphi}$$

tel que $a \geq 0$ et $S_a \leq p_1 \leq p$.

En fait, on montrera que

$$\Phi_\varepsilon''(a, p_1) - \Phi_\varepsilon''(a, p) = 0 \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0.$$

En effet, U étant une application positive, on a

$$S_{U(a)} \leq S_{U(p_1)} \leq S_{U(p)}.$$

Par suite, on a

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon''(a, p_1) - \Phi_\varepsilon''(a, p) &= ((\varepsilon \cdot I + U(p_1))^{-1} \cdot S_{U(p_1)} - (\varepsilon \cdot I + U(p))^{-1} \cdot S_{U(p)}) \cdot U(a) \\ &= ((\varepsilon \cdot I + U(p_1))^{-1} - (\varepsilon \cdot I + U(p))^{-1}) \cdot U(a). \end{aligned}$$

Les opérateurs $U(p)$, $U(p_1)$ et $U(a)$ sont positifs et commutent entre eux [corollaire 3, (ii) du lemme 2]; donc

$$\Phi_\varepsilon''(a, p_1) - \Phi_\varepsilon''(a, p) = (\varepsilon \cdot I + U(p_1))^{-1} \cdot (\varepsilon \cdot I + U(p))^{-1} \cdot (U(p) - U(p_1)) \cdot U(a).$$

Enfin la condition $S_a \leq p_1 \leq p$ entraîne $(p - p_1) \cdot a = 0$ et $p - p_1 \geq 0$; d'après le lemme 2, il en résulte $U(p - p_1) \cdot U(a) = 0$. On a donc

$$\Phi''_\varepsilon(a, p_1) = \Phi''_\varepsilon(a, p).$$

Pour tout x appartenant à $\mathfrak{m}_{r, \varphi}$, notons $\Phi''(x)$ l'opérateur $\Phi''(x, S_x)$. Montrons que l'application $x \rightarrow \Phi''(x)$ de $\mathfrak{m}_{r, \varphi}$ dans \mathcal{B} est linéaire.

En effet, soient x_1 et x_2 deux éléments de $\mathfrak{m}_{r, \varphi}$ et soit p le projecteur $S_{x_1} \vee S_{x_2}$; on a $p \in \mathfrak{m}_{r, \varphi}$, donc

$$\Phi''(x_1 + x_2, p) = \Phi''(x_1, p) + \Phi''(x_2, p).$$

Enfin il est clair que Φ'' est une application continue et positive. Soit p un projecteur de $\mathfrak{m}_{r, \varphi}$. Montrons que $\Phi''(p) = S_{U(p)}$.

En effet, la fonction $f_\varepsilon(t) = \frac{t}{\varepsilon + t}$ tend vers 1 uniformément dans tout intervalle $[\alpha, \infty]$ ($\alpha > 0$); et $f_\varepsilon(0) = 0$. Donc $\Phi''_\varepsilon(p, p) = f_\varepsilon(U(p))$ tend fortement vers $S_{U(p)}$; donc $\Phi''(p) = S_{U(p)}$.

Des dernières propriétés de l'application Φ'' , il résulte que Φ'' se prolonge par continuité en une application linéaire, continue et positive de $\overline{\mathfrak{m}_{r, \varphi}^u}$ dans \mathcal{B} . Notons Φ' cette application.

Comme $\overline{\mathfrak{m}_{r, \varphi}^u}$ est la \mathbf{C}^* -algèbre engendrée par les projecteurs de $\mathfrak{m}_{r, \varphi}$, l'application Φ' est un homomorphisme de Jordan de $\overline{\mathfrak{m}_{r, \varphi}^u}$ dans \mathcal{B} .

En effet, la relation $\Phi'(x^*) = (\Phi'(x))^*$ pour tout $x \in \overline{\mathfrak{m}_{r, \varphi}^u}$ est clair. D'autre part, l'application $x \rightarrow x^2$ de $\overline{\mathfrak{m}_{r, \varphi}^u}$ dans $\overline{\mathfrak{m}_{r, \varphi}^u}$ est continue pour la norme, donc pour montrer que $\Phi'(x^2) = (\Phi'(x))^2$ pour tout x hermitien appartenant à $\overline{\mathfrak{m}_{r, \varphi}^u}$, il suffit de montrer que pour tout entier n , pour toute famille $(p_i)_{1 \leq i \leq n}$ de projecteurs orthogonaux de $\mathfrak{m}_{r, \varphi}$ et pour toute famille $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ de nombres réels, on a

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_i \cdot a_j \cdot \Phi'(p_i \cdot p_j) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_i \cdot a_j \cdot (\Phi'(p_i) \cdot \Phi'(p_j)),$$

mais pour $i \neq j$, $\Phi'(p_i) + \Phi'(p_j) = \Phi'(p_i + p_j)$ est un projecteur, donc comme il est bien connu $\Phi'(p_i) \cdot \Phi'(p_j) = 0$, par suite on a bien l'égalité précédente et Φ' est un homomorphisme de Jordan.

Montrons enfin qu'on a

$$U(x) = U(p) \cdot \Phi'(x) = \Phi'(x) \cdot U(p),$$

pour tout $x \in \mathfrak{m}_{r, \varphi}$ et pour tout projecteur p de $\mathfrak{m}_{r, \varphi}$ tel que

$$S_x \leq p.$$

En effet, supposons x hermitien; d'après le lemme 1, on a

$$\begin{aligned} U(p) \cdot \Phi'(x) &= U(p) \cdot \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{forte } \Phi'_\varepsilon(x, p) \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{dans } L_2(\psi) (U(p) \cdot \Phi'_\varepsilon(x, p)) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{dans } L_2(\psi) (U(p) \cdot (\varepsilon \cdot I + U(p))^{-1} \cdot U(x)) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{dans } L_2(\psi) (\Phi'_\varepsilon(p, p) \cdot U(x)) = \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{forte } \Phi'_\varepsilon(p, p) \right) \cdot U(x) \\ &= S_{U(p)} \cdot U(x) = U(x). \end{aligned}$$

De même, on montrerait que

$$U(x) = \Phi'(x) \cdot U(p).$$

Par linéarité, il est clair que

$$U(x) = \Phi'(x) \cdot U(p) = U(p) \cdot \Phi'(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathfrak{m}_{r, \varphi}.$$

LEMME 4. — Soit q un projecteur appartenant à $\mathfrak{m}_{r, \psi}$. Alors il existe une suite de projecteurs de $\mathfrak{m}_{r, \psi}$ deux à deux orthogonaux $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$, telle que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} q_n = q \quad \text{et} \quad S_{U^{-1}(q_n)} \in \mathfrak{m}_{r, \varphi} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

En outre, si l'on pose $p_n = S_{U^{-1}(q_n)}$, on a

$$q_n = \Phi'(p_n) \quad \text{et} \quad q = \sum_{n \in \mathbb{N}} \Phi'(p_n).$$

Démonstration. — L'application U^{-1} de $L_2(\psi)$ dans $L_2(\varphi)$ satisfaisant aux mêmes propriétés que l'application U (corollaire 1 du lemme 2), on a

$$U^{-1}(q) \geq 0 \quad \text{et} \quad U^{-1}(q) \in L_2(\varphi).$$

Donc il existe un nombre positif λ et un projecteur $p_1 \neq 0$ appartenant à \mathfrak{A} , tel que $p_1 \leq \lambda \cdot U^{-1}(q)$. Par suite, on a $p_1 \in L_2(\varphi)$ et $0 \leq U(p_1) \leq \lambda \cdot q$. Par hypothèse, q appartient à $\mathfrak{m}_{r, \psi}$, donc $U(p_1)$ et $S_{U(p_1)}$ appartiennent aussi à $\mathfrak{m}_{r, \psi}$ et l'on a $S_{U(p_1)} \leq q$.

Posons $q_1 = S_{U(p_1)}$. On a, d'une part $q_1 \leq q$, d'autre part $S_{U^{-1}(q_1)} \in \mathfrak{m}_{r, \varphi}$; en effet, compte tenu du corollaire 4 du lemme 2, il vient

$$S_{U^{-1}(q_1)} = S_{U^{-1}(S_{U(p_1)})} = S_{U^{-1}(U(p_1))} = p_1.$$

Soit $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille maximale de projecteurs orthogonaux non nuls de \mathfrak{B} satisfaisant aux conditions $q_n \leq q$ et $S_{U^{-1}(q_n)} \in \mathfrak{m}_{r, \varphi}$. Cette famille est dénombrable car la trace ψ est fidèle et $q \in L_2(\psi)$. On a $\sum_{n \in \mathbb{N}} q_n = q$.

En effet, si le projecteur $q - \sum_{n \in \mathbb{N}} q_n$ n'est pas nul, on pourrait construire comme précédemment un projecteur q' non nul satisfaisant aux conditions

$$q' \leq q - \sum_{n \in \mathbb{N}} q_n \quad \text{et} \quad S_{U^{-1}(q')} \in \mathfrak{m}_{r, \varphi};$$

ainsi la famille $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne serait pas maximale. Enfin, d'après le lemme 3 et le corollaire 4 du lemme 2, on a

$$\Phi'(p_n) = S_{U(p_n)} = S_{U(S_{U^{-1}(q_n)})} = S_{U(U^{-1}(q_n))} = q_n;$$

donc

$$q = \sum_{n \in \mathbb{N}} \Phi'(p_n).$$

COROLLAIRE.

(i) Soit q un projecteur appartenant à \mathcal{B} . Alors il existe une famille de projecteurs de $\mathfrak{m}_{r,\varphi}$, deux à deux orthogonaux $(p_i)_{i \in I}$ telle que

$$q = \sum_{i \in I} \Phi'(p_i) \quad \text{et} \quad \Phi'(p_i) \in \mathfrak{m}_{r,\psi};$$

(ii) L'adhérence faible de $\Phi'(\mathfrak{m}_{r,\varphi})$ est \mathcal{B} .

Démonstration. — (i) est clair car tout projecteur de \mathcal{B} est la somme d'une famille de projecteurs orthogonaux appartenant à $\mathfrak{m}_{r,\psi}$. Enfin, il est clair que (i) \Rightarrow (ii).

LEMME 5.

(i) Il existe deux projecteurs q_1 et q_2 appartenant au centre de l'algèbre de von Neumann \mathcal{B} , tels que $q_1 + q_2 = I$ et tels que l'application $x \rightarrow \Phi'(x) \cdot q_1$ (resp. $x \rightarrow \Phi'(x) \cdot q_2$) de $\overline{\mathfrak{m}_{r,\varphi}}^u$ dans \mathcal{B} soit un homomorphisme (resp. un anti-homomorphisme);

(ii) Pour tout couple de projecteurs q_1 et q_2 satisfaisant à (i), pour tout x appartenant à $L_2(\varphi)$ et pour tout a appartenant à $\overline{\mathfrak{m}_{r,\varphi}}^u$, on a

$$q_1 \cdot \Phi'(a) \cdot U(x) = q_1 \cdot U(a \cdot x) \quad [\text{resp. } q_2 \cdot \Phi'(a) \cdot U(x) = q_2 \cdot U(x \cdot a)]$$

et

$$q_1 \cdot U(x) \cdot \Phi'(a) = q_1 \cdot U(x \cdot a) \quad [\text{resp. } q_2 \cdot U(x) \cdot \Phi'(a) = q_2 \cdot U(a \cdot x)];$$

(iii) Pour tout couple de projecteurs q_1 et q_2 satisfaisant à (i), il existe un couple de projecteurs p_1 et p_2 dans le centre de l'algèbre de von Neumann \mathcal{A} , tel que $p_1 + p_2 = I$ et tel que, pour tout x appartenant à $L_2(\varphi)$, on ait

$$q_1 \cdot U(x) = U(p_1 \cdot x) \quad [\text{resp. } q_2 \cdot U(x) = U(p_2 \cdot x)].$$

(iv) L'application Φ' de $\overline{\mathfrak{m}_{r,\varphi}}^u$ dans \mathcal{B} est ultrafaiblement continue et se prolonge de manière unique en un isomorphisme de Jordan Φ de \mathcal{A} dans \mathcal{B} .

Démonstration.

(i) Φ' est un homomorphisme de Jordan de la \mathbf{C}^* -algèbre $\overline{\mathfrak{m}_{r,\varphi}}^u$ dans \mathcal{B} (lemme 3). L'adhérence faible de $\Phi'(\mathfrak{m}_{r,\varphi})$ est \mathcal{B} [corollaire (ii) du lemme 4]. Donc le théorème 3.3 de [7] entraîne (i).

(ii) En appliquant le lemme 3 plusieurs fois, pour tout $x \in \mathfrak{m}_{r,\varphi}$ et pour tout $a \in \overline{\mathfrak{m}_{r,\varphi}}^u$, il vient

$$\begin{aligned} q_1 \cdot \Phi'(a) \cdot U(x) &= q_1 \cdot \Phi'(a) \cdot \Phi'(x) \cdot U(S_x \vee S_{a \cdot x}) \\ &= q_1 \cdot \Phi'(a \cdot x) \cdot U(S_x \vee S_{a \cdot x}) = q_1 \cdot U(a \cdot x). \end{aligned}$$

Comme $\mathfrak{m}_{r,\varphi}$ est dense dans $L_2(\varphi)$, la continuité de U entraîne

$$q_1 \cdot \Phi(a) \cdot U(x) = q_1 \cdot U(a \cdot x) \quad \text{pour tout } a \in \overline{\mathfrak{m}_{r,\varphi}}^u \text{ et pour tout } x \in L_2(\varphi)$$

De même, on montrerait les autres relations de (ii).

(iii) D'après le corollaire (i) du lemme 4, il existe une famille $(p_{1,i})_{i \in I}$ [resp. $(p_{2,j})_{j \in J}$] de projecteurs deux à deux orthogonaux de $\mathfrak{m}_{r,\varphi}$, telle que

$$q_1 = \sum_{i \in I} \Phi'(p_{1,i}) \quad \left[\text{resp. } q_2 = \sum_{j \in J} \Phi'(p_{2,j}) \right].$$

$$\text{Posons } p_1 = \sum_{i \in I} p_{1,i} \quad \left(\text{resp. } p_2 = \sum_{j \in J} p_{2,j} \right).$$

Pour montrer que $q_1 \cdot U(x) = U(p_1 \cdot x)$, il suffit de vérifier que pour tout x et $y \in L_2(\varphi)$, on a

$$\psi(q_1 \cdot U(x) \cdot U(y)) = \psi(U(p_1 \cdot x) \cdot U(y)) \quad \text{ou} \quad \psi(q_1 \cdot U(x) \cdot U(y)) = \varphi(p_1 \cdot x \cdot y).$$

Mais $x \cdot y$ et $U(x) \cdot U(y)$ appartiennent à $L_1(\varphi)$ et $L_1(\psi)$, donc (cf. [5], théor. 6, (iv)) les applications $a \rightarrow \varphi(a \cdot x \cdot y)$ de \mathcal{A} dans \mathbf{C} et $a \rightarrow \psi(a \cdot U(x) \cdot U(y))$ de \mathcal{B} dans \mathbf{C} sont ultrafaiblement continues. Il en résulte

$$\varphi(p_1 \cdot x \cdot y) = \sum_{i \in I} \varphi(p_{1,i} \cdot x \cdot y) = \sum_{i \in I} \psi(U(p_{1,i} \cdot x) \cdot U(y))$$

et

$$\psi(q_1 \cdot U(x) \cdot U(y)) = \sum_{i \in I} \psi(\Phi(p_{1,i}) \cdot U(x) \cdot U(y)).$$

Ainsi il suffit de montrer que

$$\Phi(p_{1,i}) \cdot U(x) = U(p_{1,i} \cdot x).$$

Appliquons la partie (ii) de ce lemme, on a

$$U(p_{1,i} \cdot x) = q_1 \cdot U(p_{1,i} \cdot x) + q_2 \cdot U(p_{1,i} \cdot x) = q_1 \cdot \Phi(p_{1,i}) \cdot U(x) + q_2 \cdot U(x) \cdot \Phi(p_{2,i});$$

or on a $q_1 \supseteq \Phi(p_{1,i})$, il en résulte

$$q_1 \cdot \Phi(p_{1,i}) = \Phi(p_{1,i}) \quad \text{et} \quad q_2 \cdot \Phi(p_{1,i}) = 0,$$

d'où

$$U(p_{1,i} \cdot x) = q_1 \cdot \Phi(p_{1,i}) \cdot U(x).$$

Ainsi

$$q_1 \cdot U(x) = U(p_1 \cdot x).$$

On montrerait de même que

$$q_2 \cdot U(x) = U(x \cdot p_2).$$

Maintenant comme $q_1 \cdot U(x) = U(x) \cdot q_1$, il vient en utilisant le corollaire 1 du lemme 1,

$$\begin{aligned} p_1 \cdot x &= U^{-1}(q_1 \cdot U(x)) = (U^{-1}((q_1 \cdot U(x))^*))^* = (U^{-1}(U(x^*) \cdot q_1))^* \\ &= (U^{-1}(q_1 \cdot U(x^*)))^* = (U^{-1}(U(p_1 \cdot x^*)))^* = x \cdot p_1 \end{aligned}$$

et, de même, $x \cdot p_2 = p_2 \cdot x$.

Donc p_1 et p_2 appartiennent au centre de l'algèbre de von Neumann \mathfrak{A} .

En outre, comme

$$x \cdot (p_1 + p_2) = U^{-1}(U(x) \cdot q_1 + U(x) \cdot q_2) = U^{-1}(U(x)) = x$$

pour tout x appartenant à $\mathfrak{m}_{r, \varphi}$, il en résulte $p_1 + p_2 = I$.

(iv) Pour montrer que l'application Φ' est ultrafaiblement continue, il suffit de montrer (cf [5], théor. 6 (iv)) que pour tout z appartenant à $L_1(\psi)$, la forme linéaire $a \rightarrow \psi(\Phi(a) \cdot z)$ sur $\overline{\mathfrak{m}_{r, \varphi}}^u$ est ultrafaiblement continue, ou encore puisque U est une application surjective et que $L_2(\psi) \cdot L_2(\psi) = L_1(\psi)$, il suffit de montrer que, pour tout x et y appartenant à $L_2(\varphi)$, la forme linéaire $a \rightarrow \psi(\Phi'(a) \cdot U(x) \cdot U(y))$ sur $\overline{\mathfrak{m}_{r, \varphi}}^u$ est ultrafaiblement continue.

Or on a

$$\begin{aligned} \Phi'(a) \cdot U(x) &= q_1 \cdot \Phi'(a) \cdot U(x) + q_2 \cdot \Phi'(a) \cdot U(x) = q_1 \cdot U(a \cdot x) + q_2 \cdot U(x \cdot a) \\ &= U(p_1 \cdot a \cdot x) + U(p_2 \cdot x \cdot a) = U(p_1 \cdot a \cdot x + p_2 \cdot x \cdot a). \end{aligned}$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} \psi(\Phi'(a) \cdot U(x) \cdot U(y)) &= \psi(U(p_1 \cdot a \cdot x + p_2 \cdot x \cdot a) \cdot U(y)) \\ &= \varphi(p_1 \cdot a \cdot x \cdot y + p_2 \cdot x \cdot a \cdot y) = \varphi(a \cdot (p_1 \cdot x \cdot y + p_2 \cdot y \cdot x)). \end{aligned}$$

Mais la forme linéaire $a \rightarrow \varphi(a \cdot (p_1 \cdot x \cdot y + p_2 \cdot y \cdot x))$ est ultrafaiblement continue, car $p_1 \cdot x \cdot y + p_2 \cdot y \cdot x$ appartient à $L_1(\varphi)$.

La boule unité de \mathfrak{B} est faiblement complète car elle est faiblement compacte; d'autre part, tout point de \mathfrak{A} est faiblement adhérent à une partie bornée de $\mathfrak{m}_{r, \varphi}$ (théorème de Kaplansky). Il en résulte que Φ' se prolonge en une application linéaire Φ ultrafaiblement continue de \mathfrak{A} dans \mathfrak{B} . Il est clair alors que Φ est un homomorphisme de Jordan ultrafaiblement continu, donc l'image de \mathfrak{A} par application Φ est ultrafaiblement fermée. Comme $\Phi(\mathfrak{m}_{r, \varphi}) = \Phi'(\mathfrak{m}_{r, \varphi})$ est ultrafaiblement dense dans \mathfrak{B} , Φ est surjectif. Φ est injectif, sinon il existerait un projecteur p non nul appartenant à $\mathfrak{m}_{r, \varphi}$ tel que $\Phi(p) = 0$ ou $\Phi'(p) = 0$, ce qui est impossible, car $\Phi'(p) = S_{U(p)}$.

Enfin Φ est unique, car un isomorphisme de Jordan est ultrafaiblement continu.

THÉOREME 1. — Soient \mathfrak{A} une algèbre de von Neumann dans un espace de Hilbert \mathfrak{H} , φ une trace normale, fidèle, semi-finie sur \mathfrak{A}^+ , $L_2(\varphi)$ l'espace de Hilbert des opérateurs mesurables affiliés à \mathfrak{A} de carré sommable par rapport à φ et $L_2^+(\varphi)$ l'ensemble des éléments de $L_2(\varphi)$ qui sont positifs.

De même, on définit \mathfrak{B} , \mathfrak{K} , ψ , $L_2(\psi)$ et $L_2^+(\psi)$.

Soit U une application linéaire isométrique et bijective de $L_2(\varphi)$ sur $L_2(\psi)$ telle que $U(L_2^+(\varphi)) \subset L_2^+(\psi)$.

Alors il existe un isomorphisme de Jordan et un seul Φ de \mathfrak{A} sur \mathfrak{B} et un opérateur z unique, auto-adjoint, positif affilié au centre de \mathfrak{B} tels que

$$U(x) = z \cdot \Phi(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathfrak{A} \cap L_2(\varphi).$$

Si l'on suppose en outre que \mathfrak{A} ou \mathfrak{B} est un facteur, Φ est un isomorphisme ou un anti-isomorphisme de \mathfrak{A} sur \mathfrak{B} et z est proportionnel à l'unité de \mathfrak{B} ; ainsi il existe un scalaire positif λ non nul, unique tel que

$$U(x) = \lambda \cdot \Phi(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathfrak{A} \cap L_2(\varphi)$$

Démonstration. — Soit $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille de projecteurs deux à deux orthogonaux appartenant à $\mathfrak{m}_{r, \varphi}$, telle que $I = \sum_{\lambda \in \Lambda} p_\lambda$.

Posons $S_\lambda = S_{U(p_\lambda)}$ pour tout λ appartenant à Λ .

Les projecteurs S_λ sont deux à deux orthogonaux (lemme 2) et l'on a

$$S_\lambda = \Phi'(p_\lambda) = \Phi(p_\lambda) \quad (\text{lemme 3}),$$

où Φ désigne l'isomorphisme de Jordan de \mathfrak{A} sur \mathfrak{B} défini dans le lemme 5, (iv). Φ est ultrafaiblement continue. Il en résulte $I = \sum_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$.

L'opérateur z' « somme directe » des $U(p_\lambda) | S_\lambda(\mathfrak{K})$ est affilié à \mathfrak{B} et a pour domaine $\mathcal{O}_{z'}$ le sous-espace dense dans \mathfrak{K} engendré par

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} (\mathcal{O}_{U(p_\lambda)} \cap S_\lambda(\mathfrak{K})).$$

Les opérateurs $U(p_\lambda)$ sont auto-adjoints et positifs, donc z' a pour fermeture un opérateur z , affilié à \mathfrak{B} , auto-adjoint et positif. (On a $z = z^* = z'^{**} = z'^*$.)

Soit x un élément de $\mathfrak{A} \cap L_2(\varphi)$. Dans l'espace de Hilbert $L_2(\psi)$, en appliquant le lemme 1, on a

$$U(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} U(p_\lambda \cdot x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} U(x \cdot p_\lambda).$$

Compte tenu du lemme 5, (i) et (ii), nous en déduisons [dans $L_2(\psi)$]

$$\begin{aligned} U(x) &= (q_1 + q_2) \cdot U(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} (q_1 \cdot U(x \cdot p_\lambda) + q_2 \cdot U(p_\lambda \cdot x)) \\ &= \sum_{\lambda \in \Lambda} (q_1 \cdot \Phi(x) \cdot U(p_\lambda) + q_2 \cdot \Phi(x) \cdot U(p_\lambda)) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \Phi(x) \cdot U(p_\lambda). \end{aligned}$$

Il en résulte

$$\Phi(x) \circ z' \subseteq U(x).$$

En effet, d'une part on a, pour tout $\lambda_0 \in \Lambda$

$$(\Phi(x) \circ z') \circ S_{\lambda_0} = \Phi(x) \circ (z' \circ S_{\lambda_0}) = \Phi(x) \circ U(p_{\lambda_0}) \subseteq \Phi(x) \cdot U(p_{\lambda_0});$$

d'autre part, dans l'espace de Hilbert $L_2(\psi)$, on a

$$\Phi(x) \cdot U(p_{\lambda_0}) = \sum_{\lambda \in \Lambda} (\Phi(x) \cdot U(p_\lambda)) \cdot S_{\lambda_0} = \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} \Phi(x) \cdot U(p_\lambda) \right) \cdot S_{\lambda_0} = U(x) \cdot S_{\lambda_0}.$$

Ainsi

$$(\Phi(x) \circ z') \circ S_{\lambda_0} \subseteq U(x) \cdot S_{\lambda_0}.$$

Donc

$$\Phi(x) \circ z' \subseteq U(x).$$

De cette dernière relation, on tire

$$(U(x))^* \subseteq (\Phi(x) \circ z')^*;$$

mais l'opérateur $\Phi(x)$ est borné, donc d'après ([6], p. 297), il en résulte

$$(\Phi(x) \circ z')^* = z'^* \circ (\Phi(x))^* = z \circ (\Phi(x))^*$$

et, par suite,

$$(U(x))^* \subseteq z \circ (\Phi(x))^*$$

ou

$$U(x^*) \subseteq z \circ \Phi(x^*)$$

En changeant x en x^* , il vient

$$U(x) \subseteq z \circ \Phi(x).$$

Considérons l'opérateur $z \circ \Phi(x)$. Il est fermé car $\Phi(x)$ est borné. Il prolonge l'opérateur mesurable $U(x)$, donc il est mesurable et, d'après ([5], lemme 1.2), il coïncide avec $U(x)$. Ainsi

$$U(x) = z \circ \Phi(x) = z \cdot \Phi(x).$$

L'opérateur $\Phi(x) \circ z$ a pour adjoint $z \circ (\Phi(x))^*$. Il en résulte

$$\Phi(x) \cdot z = (\Phi(x) \circ z)^* = (z \circ (\Phi(x))^*)^* = (U(x^*))^* = U(x).$$

D'où

$$U(x) = z \cdot \Phi(x) = \Phi(x) \cdot z.$$

L'opérateur z est affilié au centre de \mathcal{B} . En effet, comme pour tout $x \in \mathcal{A} \cap L_2(\varphi)$, on a $z \circ \Phi(x) \supseteq \Phi(x) \circ z$, $\Phi(x)$ commute à z au sens classique, donc $\Phi(x)$ commute aux projecteurs spectraux de z . Donc les projecteurs spectraux de z appartiennent à $(\Phi(\mathcal{A} \cap L_2(\varphi)))' = \mathcal{B}'$. Par suite, z est affilié au centre de \mathcal{B} .

Démontrons l'unicité de Φ et de z .

L'isomorphisme de Jordan Φ de \mathcal{A} sur \mathcal{B} est déterminé, dès qu'on connaît sa valeur sur les projecteurs de $\mathfrak{m}_{r,\varphi}$ (puisque'un isomorphisme de Jordan est ultrafaiblement continu et que l'idéal $\mathfrak{m}_{r,\varphi}$ est ultrafaiblement dense dans \mathcal{A}). Or, d'après le lemme 3, on a $S_{U(p)} = \Phi(p)$ pour tout projecteur $p \in \mathfrak{m}_{r,\varphi}$; donc Φ est unique.

Soit z_1 un opérateur auto-adjoint positif, affilié au centre de \mathcal{B} , tel que $U(x) = z_1 \cdot \Phi(x)$ pour tout $x \in \mathcal{A} \cap L_2(\varphi)$.

Soient s_1 et s_2 les deux opérateurs positifs affiliés au centre de \mathcal{B} satisfaisant à $s_1 \cdot s_2 = 0$ et à $s_1 - s_2 = z_1 - z$.

Si $z_1 - z$ n'est pas nul, on a S_{s_1} ou S_{s_2} différent de zéro (S_{s_1} et S_{s_2} désignent les supports de s_1 et de s_2). En effet, supposons par exemple $S_{s_1} \neq 0$; d'après le lemme 4, il existe un projecteur non nul q appartenant à $\mathfrak{m}_{r,\varphi}$ tel que $q \leq S_{s_1}$ et tel que $p = S_{U^{-1}(q)}$ appartienne à $\mathfrak{m}_{r,\varphi}$. On aurait alors $(z_1 - z) \cdot q \neq 0$ ou $z_1 \cdot q \neq z \cdot q$, ce qui est impossible puisque

$$U(p) = z \cdot \Phi(p) = z \cdot q \quad \text{et} \quad U(p) = z_1 \cdot \Phi(p) = z_1 \cdot q.$$

On suppose maintenant que \mathcal{A} (resp. \mathcal{B}) est un facteur.

Du théorème 3.3 de [8], on déduit qu'il existe deux projecteurs p_1 et p_2 (resp. q_1 et q_2) appartenant au centre de l'algèbre de von Neumann \mathcal{A} (resp. \mathcal{B}) tels que l'application $x \rightarrow p_1 \cdot \Phi^{-1}(x)$ de \mathcal{B} dans \mathcal{A} [resp. $x \rightarrow q_1 \cdot \Phi(x)$ de \mathcal{A} dans \mathcal{B}] soit un homomorphisme et tels que l'application $x \rightarrow p_2 \cdot \Phi^{-1}(x)$ de \mathcal{B} dans \mathcal{A} [resp. $x \rightarrow q_2 \cdot \Phi(x)$ de \mathcal{A} dans \mathcal{B}] soit un anti-homomorphisme.

Mais \mathcal{A} (resp. \mathcal{B}) est un facteur, donc on a, soit $p_1 = 0$ et $p_2 = I$, soit $p_1 = I$ et $p_2 = 0$ (resp. soit $q_1 = 0$ et $q_2 = I$, soit $q_1 = I$ et $q_2 = 0$). Par suite, Φ^{-1} (resp. Φ) est un isomorphisme ou un anti-isomorphisme de \mathcal{B} sur \mathcal{A} (resp. \mathcal{A} sur \mathcal{B}) et \mathcal{B} (resp. \mathcal{A}) est un facteur.

Dans ces deux cas, l'opérateur z affilié au centre de \mathcal{B} est proportionnel à l'unité, donc il existe un scalaire positif λ tel que

$$U(x) = \lambda \Phi(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{A} \cap L_2(\varphi).$$

COROLLAIRE 1. — Soient \mathcal{A} un facteur fini, φ la trace canonique sur \mathcal{A}^+ , et U un opérateur unitaire de $L_2(\varphi)$ tel que $U(L_2^+(\varphi)) \subset L_2^+(\varphi)$. Alors il existe un automorphisme ou un anti-automorphisme Φ de \mathcal{A} tel que

$$U(x) = \Phi(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{A}.$$

COROLLAIRE 2. — Soient \mathfrak{A} un facteur discret, φ la trace canonique sur \mathfrak{A}^+ et U un opérateur unitaire de $L_2(\varphi)$ tel que $U(L_2^+(\varphi)) \subset L_2^+(\varphi)$. Alors il existe un automorphisme ou un anti-automorphisme Φ de \mathfrak{A} tel que

$$U(x) = \Phi(x) \quad \text{pour tout } x \in L_2(\varphi).$$

Le théorème 1 admet une réciproque : la proposition 1 qui nécessite l'emploi du lemme suivant :

LEMME 6. — Soient \mathfrak{A} une algèbre de von Neumann quelconque, z, z_1, z_2 , des opérateurs auto-adjoints affiliés au centre de \mathfrak{A} et x un opérateur à domaine dense, fermé, affilié à \mathfrak{A} .

(i) L'opérateur $z \circ x$ a un domaine dense et une fermeture. En outre, si y est un opérateur auto-adjoint affilié à \mathfrak{A} et si ν est un opérateur partiellement isométrique appartenant à \mathfrak{A} , tels qu'on ait $x = y \circ \nu$ et $y = x \circ \nu^*$, alors on a

$$z \cdot x = (z \cdot y) \circ \nu \quad \text{et} \quad z \cdot y = (z \cdot x) \circ \nu^*;$$

$$(ii) \quad z_1 \cdot (z_2 \cdot x) = (z_1 \cdot z_2) \cdot x;$$

$$(iii) \quad (z \cdot x) \circ (z \cdot x)^* = (z \circ z) \cdot (x \circ x^*).$$

Démonstration. — Rappelons d'abord que tout opérateur x fermé, à domaine dense et affilié à \mathfrak{A} , a des décompositions polaires $x = u \circ \rho_1$ et $x = \rho_2 \circ u$, où ρ_1 et ρ_2 sont des opérateurs auto-adjoints positifs affiliés à \mathfrak{A} , et où u est un opérateur partiellement isométrique appartenant à \mathfrak{A} ; on a $\rho_1 = u^* \circ x$ et $\rho_2 = x \circ u^*$.

(i) Soit $x = u \circ \rho_1$ l'une des décompositions polaires de x . L'opérateur z est affilié au centre de \mathfrak{A} , donc $z \circ u \supseteq u \circ z$; par suite, $z \circ x = z \circ u \circ \rho_1 \supseteq u \circ z \circ \rho_1$; mais d'après le lemme 15.2 de [7], l'opérateur $z \circ \rho_1$ a un domaine dense, donc $z \circ x$ a un domaine dense.

D'après le lemme 15.2 de [7], la fermeture de $z \circ y$ existe, donc $(z \cdot y) \circ \nu$ est un opérateur fermé et comme $z \circ x = z \circ y \circ \nu$, l'opérateur $z \circ x$ a une fermeture et l'on a $z \cdot x \subseteq (z \cdot y) \circ \nu$.

D'autre part, comme $y = x \circ \nu^*$, on a

$$z \circ y = z \circ x \circ \nu^* \subseteq (z \cdot x) \circ \nu^*;$$

par suite, $z \cdot y \subseteq (z \cdot x) \circ \nu^*$.

Ainsi

$$z \cdot x \subseteq (z \cdot y) \circ \nu \subseteq (z \cdot x) \circ \nu^* \circ \nu$$

et

$$z \cdot y \subseteq (z \cdot x) \circ \nu^* \subseteq (z \cdot y) \circ \nu \circ \nu^*.$$

Mais $z \cdot x$ et $z \cdot y$ ont des adjoints et sont fermés, il en résulte

$$z \cdot x = (z \cdot x) \circ \nu^* \circ \nu \quad \text{et} \quad z \cdot y = (z \cdot y) \circ \nu \circ \nu^*.$$

donc

$$z \cdot x = (z \cdot y) \circ v \quad \text{et} \quad z \cdot y = (z \cdot x) \circ v^*.$$

(ii) D'après (i), les opérateurs $z_1 \cdot (z_2 \cdot x)$ et $(z_1 \cdot z_2) \cdot x$ ont un sens et ont des domaines denses. Si $x = \varrho_2 \circ u$ désigne une des décompositions polaires de x , la partie (i) et le lemme 15.2 de [7] entraînent

$$z_1 \cdot (z_2 \cdot x) = z_1 \cdot ((z_2 \cdot \rho_2) \circ u) = (z_1 \cdot (z_2 \cdot \rho_2)) \circ u$$

et

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot x = ((z_1 \cdot z_2) \cdot \rho_2) \circ u.$$

Donc, pour montrer que $z_1 \cdot (z_2 \cdot x) = (z_1 \cdot z_2) \cdot x$, il suffit de vérifier que

$$z_1 \cdot (z_2 \cdot \rho_2) = (z_1 \cdot z_2) \cdot \rho_2.$$

Les projecteurs spectraux des opérateurs z_1 , z_2 et ϱ_2 engendrent une algèbre de von Neumann commutative et z_1 , z_2 et ϱ sont affiliés à cette algèbre. D'après le corollaire 4.1 de [7], z_1 , z_2 et ϱ_2 sont mesurables (pour cette algèbre de von Neumann commutative); donc on a

$$z_1 \cdot (z_2 \cdot \rho_2) = (z_1 \cdot z_2) \cdot \rho_2.$$

(iii) D'après la partie (i), il est clair que $(z \cdot x) \circ (z \cdot x)^*$ et $(z \circ z) \cdot (x \circ x^*)$ ont un sens et des domaines denses. Par suite, ils sont auto-adjoints.

On a, d'une part

$$z \circ x \circ x^* \circ z \subseteq (z \circ x) \circ (z \circ x)^* \subseteq (z \cdot x) \circ (z \cdot x)^*$$

et, d'autre part, compte tenu du lemme 15.2 de [7] et de partie (ii)

$$z \circ x \circ x^* \circ z \subseteq z \circ ((x \circ x^*) \cdot z) = z \circ (z \cdot (x \circ x^*)) \subseteq z \cdot (z \cdot (x \circ x^*)) = (z \circ z) \cdot (x \circ x^*).$$

D'après 15.2 de [7], l'opérateur $z \circ x \circ x^* \circ z$ a une fermeture auto-adjointe, donc

$$(z \cdot x) \circ (z \cdot x)^* = (z \circ z) \cdot (x \circ x^*).$$

PROPOSITION 1. — Soient \mathfrak{A} (resp. \mathfrak{B}) une algèbre de von Neumann, φ (resp. ψ) une trace normale, fidèle, semi-finie sur \mathfrak{A}^+ (resp. \mathfrak{B}^+).

Soit Φ un isomorphisme de Jordan de \mathfrak{A} sur \mathfrak{B} .

Alors il existe une trace normale, fidèle, semi-finie et une seule ψ' sur \mathfrak{B}^+ telle que

$$\begin{aligned} \psi'(y) &= \varphi(\Phi^{-1}(y)) && \text{pour tout } y \in \mathfrak{B}^+, \\ \psi'(\Phi(x) \cdot \Phi(x^*)) &= \varphi(x \cdot x^*) && \text{pour tout } x \in \mathfrak{A}^+, \\ \Phi(\mathfrak{A} \cap L_2(\varphi)) &= \mathfrak{B} \cap L_2(\psi'), \end{aligned}$$

il existe une application linéaire isométrique et bijective et une seule U_1 de $L_2(\varphi)$ sur $L_2(\psi')$ satisfaisant à $U_1(L_2^+(\varphi)) \subset L_2^+(\psi')$, tel que $U_1(x) = \Phi(x)$ pour tout $x \in \mathfrak{A} \cap L_2(\varphi)$.

Enfin il existe un opérateur z auto-adjoint, positif, affilié au centre de \mathfrak{B} , unique, tel que l'application $x \rightarrow z \cdot U_1(x)$ soit une application isométrique et bijective de $L_2(\varphi)$ sur $L_2(\psi)$ satisfaisant à

$$z \cdot U_1(L_2^+(\varphi)) \subset L_2^+(\psi).$$

Démonstration. — Φ^{-1} est un isomorphisme de Jordan de \mathfrak{B} sur \mathfrak{A} , donc Φ^{-1} est normal; par suite, l'application ψ' de \mathfrak{B}^+ dans $\overline{\mathfrak{R}}_+$ définie par $y \rightarrow \psi'(y) = \varphi(\Phi^{-1}(y))$ est fidèle, normale et semi-finie.

Montrons que ψ' est une trace.

Si ϱ est un opérateur unitaire appartenant à \mathfrak{B} , $\Phi^{-1}(\varrho)$ est un opérateur unitaire de \mathfrak{A} . (En effet, on a $\Phi^{-1}(u) \cdot \Phi^{-1}(u^*) + \Phi^{-1}(u^*) \cdot \Phi^{-1}(u) = 2I$; d'autre part, on a $\|\Phi^{-1}(u)\| \leq 1$, donc $\Phi^{-1}(u) \cdot \Phi^{-1}(u^*) \leq I$ et, de même, $\Phi^{-1}(u^*) \cdot \Phi^{-1}(u) \leq I$; par suite, $\Phi^{-1}(u) \cdot \Phi^{-1}(u^*) = \Phi^{-1}(u^*) \cdot \Phi^{-1}(u) = I$.)

Il en résulte

$$\begin{aligned} \psi(\varrho \cdot y \cdot \varrho^*) &= \psi\left(\frac{\varrho \cdot y \cdot \varrho^* + \varrho^* \cdot y \cdot \varrho}{2}\right) = \varphi\left(\Phi^{-1}\left(\frac{\varrho \cdot y \cdot \varrho^* + \varrho^* \cdot y \cdot \varrho}{2}\right)\right) \\ &= \varphi\left(\frac{\Phi^{-1}(\varrho) \cdot \Phi^{-1}(y) \cdot \Phi^{-1}(\varrho^*) + \Phi^{-1}(\varrho^*) \cdot \Phi^{-1}(y) \cdot \Phi^{-1}(\varrho)}{2}\right) \\ &= \varphi(\Phi^{-1}(y)) = \psi'(y). \end{aligned}$$

Ainsi ψ' est une trace sur \mathfrak{B}^+ .

Comme $\psi'(\Phi(x) \cdot (\Phi(x))^*) = \varphi(x \cdot x^*)$ pour tout $x \in \mathfrak{A}$, la restriction de Φ à $\mathfrak{A} \cap L_2(\varphi)$ est une isométrie de $\mathfrak{A} \cap L_2(\varphi)$ dans $L_2(\psi')$ et l'image de $\mathfrak{A} \cap L_2(\varphi)$ par Φ est $\mathfrak{A} \cap L_2(\psi')$.

Comme $\mathfrak{A} \cap L_2(\varphi)$ et $\mathfrak{B} \cap L_2(\psi')$ sont denses dans $L_2(\varphi)$ et $L_2(\psi')$ respectivement, la restriction de Φ à $\mathfrak{A} \cap L_2(\varphi)$ se prolonge par continuité en une application linéaire unique isométrique et bijective U_1 de $L_2(\varphi)$ dans $L_2(\psi')$. Il est clair, en outre, qu'on a

$$U_1(L_2^+(\varphi)) \subset L_2^+(\psi').$$

ψ et ψ' sont des traces normales fidèles et semi-finies. On déduit du théorème 15, du lemme 15.2 et du début de la démonstration du lemme 15.4 de [7] qu'il existe un opérateur s (resp. s_1) auto-adjoint positif affilié au centre de \mathfrak{B} tel que pour tout x (resp. y) appartenant à $L_1^+(\psi)$ [resp. $L_1^+(\psi)'$] l'opérateur $s \cdot x$ (resp. $s_1 \cdot y$) existe, appartient à $L_1^+(\psi)$ [resp. $L_1^+(\psi)'$] et vérifié $\psi(s \cdot x) = \psi'(x)$ [resp. $\psi'(s_1 \cdot y) = \psi(y)$].

Soit z (resp. z_1) l'opérateur auto-adjoint positif affilié au centre de \mathfrak{B} tel que $z^2 = s$ [resp. $(z_1)^2 = s_1$].

D'après le lemme 6 (iii), on a

$$(z \cdot x) \circ (z \cdot x)^* = (z \circ z) \cdot (x \circ x^*),$$

donc $(z \cdot x) \circ (z \cdot x)^*$ appartient à $L_1^+(\psi)$, par suite l'opérateur $z \cdot x$ est mesurable et appartient à $L_2(\psi)$, enfin il est clair que l'application $x \rightarrow z \cdot x$ est une isométrie de $L_2(\psi')$ dans $L_2(\psi)$.

Montrons que cette application est surjective.

En effet, considérons l'application $x \rightarrow s_1 \cdot (s \cdot x)$ de $L_1^+(\psi')$ dans $L_1^+(\psi')$.

On a

$$\psi'(s_1 \cdot (s \cdot x)) = \psi(s \cdot x) = \psi'(x);$$

mais, d'après le lemme 6 (ii),

$$s_1 \cdot (s \cdot x) = (s_1 \cdot s) \cdot x, \quad \text{donc} \quad \psi'((s_1 \cdot s) \cdot x) = \psi'(x).$$

Le théorème 15 de [7] entraîne $s_1 \cdot s = I$ et par suite $z_1 \cdot z = I$. L'application $x \rightarrow z_1 \cdot (z \cdot x)$ de $L_2(\psi')$ dans $L_2(\psi')$, d'après le lemme 6 (ii) est donc l'application identique. Comme l'application $y \rightarrow z_1 \cdot y$ de $L_2(\psi)$ dans $L_2(\psi')$ est injective, l'application $x \rightarrow z \cdot x$ de $L_2(\psi')$ dans $L_2(\psi)$ est surjective. Enfin d'après le lemme 15.2 de [7], l'application $x \rightarrow z \cdot x$ envoie $L_2^+(\psi')$ dans $L_2^+(\psi)$.

Ainsi l'application $x \rightarrow z \cdot U_1(x)$ est une application isométrique et bijective de $L_2(\varphi)$ sur $L_2(\psi)$ et satisfait à $z \cdot U_1(L_2^+(\varphi)) \subset L_2^+(\psi)$; en outre, z est unique d'après le théorème 1.

THÉORÈME 2. — Soient \mathfrak{A} une algèbre de von Neumann et φ une trace normale, fidèle et semi-finie sur \mathfrak{A}^+ .

Soient G_1 le groupe (cf. cor. 1 du lemme 2) des applications linéaires U isométriques et bijectives de $L_2(\varphi)$ sur $L_2(\varphi)$ telles que $U(L_2^+(\varphi)) \subset L_2^+(\varphi)$ et G_2 le groupe des automorphismes de Jordan Φ de \mathfrak{A} .

Alors l'application $U \rightarrow \Phi$ de G_1 dans G_2 défini par le théorème 1 est un isomorphisme du groupe G_1 sur le groupe G_2 .

Démonstration. — Soient U_1 et U_2 deux éléments de G_1 . D'après le théorème 1 à U_1 , U_2 et $U_2 \circ U_1$ on peut associer, de façon unique, des automorphismes de Jordan que nous noterons Φ_1 , Φ_2 et Φ_3 .

Pour montrer que l'application $U \rightarrow \Phi$ de G_1 dans G_2 est un homomorphisme de groupe, il suffit de montrer (puisque un automorphisme de Jordan est défini dès qu'on connaît sa valeur sur les projecteurs de \mathfrak{A}) que $\Phi_3(p) = \Phi_2(\Phi_1(p))$ pour tout projecteur p appartenant à \mathfrak{A} .

Du corollaire 1 (i) du lemme 4, on tire aisément que tout projecteur p appartenant à \mathfrak{A} est la somme d'une famille de projecteurs orthogonaux $(p_i)_{i \in I}$ appartenant à $\mathfrak{m}_{r, \varphi}$ telle que $S_{U_1(p_i)} = \Phi_1(p_i)$ appartient à $\mathfrak{m}_{r, \varphi}$. En appliquant le lemme 3 plusieurs fois et le corollaire 4 du lemme 2, il vient pour tout $i \in I$

$$(\Phi_2 \circ \Phi_1)(p_i) = \Phi_2(S_{U_1(p_i)}) = S_{U_2(S_{U_1(p_i)})} = S_{(U_2 \circ U_1)(p_i)} = \Phi_3(p_i).$$

Mais les automorphismes de Jordan Φ_1 , Φ_2 et Φ_3 sont normaux donc

$$\Phi_3(p) = \sum_{i \in I} \Phi_3(p_i) = \sum_{i \in I} (\Phi_2 \circ \Phi_1)(p_i) = (\Phi_2 \circ \Phi_1)(p).$$

Ainsi $\Phi_3 = \Phi_2 \circ \Phi_1$. Maintenant l'application $U \rightarrow \Phi$ est surjective d'après la proposition 1, donc cette application est un isomorphisme de groupe.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] J. DIXMIER, *Algèbre de von Neumann*, Gauthier-Villars, Paris.
- [2] J. DIXMIER, *Les C^* -algèbres et leurs représentations*, Gauthier-Villars.
- [3] J. DIXMIER, *Application \natural dans les anneaux d'opérateurs* (*Comp. Math.*, t. 10, 1952, p. 1-55).
- [4] R. V. KADISON, *Isométries of operator algebras* (*Ann. Math.*, t. 54, 1951, p. 325-338).
- [5] T. OGASAWARA et K. YOSHINAGA, *A non commutative Theory of integration for operators* (*J. Sc. Hiroshima Univ.*, t. 18, 1955, p. 311-347).
- [6] F. RIESZ et B. Sz. NAGY, *Leçon d'analyse fonctionnelle*, 3^e édition, Gauthier-Villars, Paris.
- [7] I. SEGAL, *A non commutative extension of abstract integration* (*Ann. Math.*, t. 57, 1953, p. 401-457).
- [8] E. STORMER, *On Jordan Structure of C^* -algebras* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 120, n^o 3, 1965).

