ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

CH. BRISSE

Exposition analytique de la théorie des surfaces

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 3 (1874), p. 87-146
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1874_2_3__87_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1874, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

EXPOSITION ANALYTIQUE

DE LA

THÉORIE DES SURFACES,

PAR M. CH. BRISSE,

RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ.

Depuis Euler, la théorie des surfaces a été exposée de bien des manières différentes, tantôt à l'aide de l'Analyse ou de la Géométrie pures, tantôt à l'aide de l'une et de l'autre. Le tableau complet des progrès de cette branche de l'Analyse appliquée a été tracé par M. Chasles dans son *Rapport sur les progrès de la Géométrie*, et le nombre considérable de Mémoires qui s'y trouvent analysés porte à croire qu'une exposition nouvelle, comprenant les résultats fondamentaux actuellement acquis, pourrait être utile à ceux qui voudraient s'occuper de la théorie des surfaces.

Il semble nature d'établir d'abord ce qui est relatif à une surface quelconque considérée isolément, pour passer ensuite à la théorie des surfaces correspondantes et aux monographies. En outre, il convient de définir les éléments introduits dans cette théorie par les géomètres et d'en fournir les expressions indépendamment de tout système de coordonnées, avant de montrer les simplifications qui résultent d'un choix judicieux de ces systèmes. Tel est l'ordre que je me propose de suivre dans cette *Exposition*, dont je donne ici les débuts, et d'où j'ai exclu systématiquement toute considération géométrique.

Dans la première Section, j'établis à l'aide d'une transformation de coordonnées les formules relatives au déplacement le plus général d'un trièdre trirectangle, et j'en déduis la portion des formules de M. Codazzi qui est indépendante de la position du trièdre par rapport à

la surface. Je prouve ensuite, à l'aide de l'Analyse bien connue de M. Ossian Bonnet, que six fonctions quelconques satisfaisant à ces trois équations définissent toujours le déplacement d'un trièdre autour de son sommet et n'en définissent qu'un.

En exprimant que le trièdre a deux de ses arêtes tangentes à une surface, on trouve la seconde portion des formules de M. Codazzi en coordonnées rectangulaires et en coordonnées obliques, sous la forme où M. Laguerre les a données dans les *Nouvelles Annales* de 1872. J'ai d'ailleurs établi toutes mes formules dans l'un et l'autre système de coordonnées, en leur donnant le même numéro, et en affectant ce dernier d'un accent pour les coordonnées obliques.

En exprimant que le trièdre est formé par la tangente, la normale principale et la binormale d'une courbe gauche, on obtient, au lieu des formules de M. Codazzi, les formules de M. Serret. Comme on a quelquefois à différentier ces formules jusqu'à un ordre assez élevé, je crois être utile en publiant les résultats que j'ai obtenus jusqu'au sixième ordre inclusivement, et dont je garantis l'exactitude. J'en déduis plusieurs formules qui renferment, comme cas particuliers, quelques théorèmes de Géométrie infinitésimale dus à M. Ossian Bonnet.

Cette Section se termine par les formules qui donnent le plan osculateur, le rayon de courbure et le rayon de torsion d'une ligne tracée sur une surface, quand on connaît l'angle sous lequel elle coupe les lignes coordonnées. Ces formules sont dues à M. Laguerre.

Dans la deuxième Section, je démontre le théorème d'Euler, celui de Gauss relatif à la courbure, et celui de Meusnier. De l'étude des normales autour d'un point, je déduis ensuite toutes les expressions connues de la torsion géodésique, de l'angle de deux normales infiniment voisines et de la courbure géodésique.

Dans la troisième Section, je définis les lignes de courbure, les asymptotiques et les géodésiques, et j'établis leurs équations différentielles. J'y donne le théorème de Lancret, et, d'après M. Ossian Bonnet, l'application de la théorie du dernier multiplicateur de Jacobi à l'intégration des géodésiques.

Enfin, dans la quatrième Section, j'établis la théorie des surfaces, lieux de normales, le long d'une courbe quelconque.

SECTION I.

FORMULES GÉNÉRALES.

I. — *Déplacement d'un trièdre.*

1. Considérons un trièdre trirectangle mobile d'une manière quelconque dans l'espace et, par un point fixe O, menons des parallèles $O\xi_1$, $O\eta_1$, $O\zeta_1$ à ses trois arêtes dans chacune de leurs positions. Menons également, par le point O, trois axes fixes trirectangulaires, et soient a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' les cosinus des angles formés par les droites $O\xi_1$, $O\eta_1$, $O\zeta_1$ avec ces axes. Si x_1, y_1, z_1 sont, par rapport à $O\xi_1$, $O\eta_1$, $O\zeta_1$, les coordonnées d'un point invariablement lié au trièdre, ses coordonnées x, y, z, par rapport aux axes fixes, seront fournies par les formules

$$(1)\qquad \begin{cases} x = a x_1 + a' y_1 + a'' z_1, \\ y = b x_1 + b' y_1 + b'' z_1, \\ z = c x_1 + c' y_1 + c'' z_1. \end{cases}$$

En passant de la position actuelle du trièdre à la position infiniment voisine, ces formules donneront

$$(2)\qquad \begin{cases} dx = x_1\, da + y_1\, da' + z_1\, da'', \\ dy = x_1\, db + y_1\, db' + z_1\, db'', \\ dz = x_1\, dc + y_1\, dc' + z_1\, dc''. \end{cases}$$

Si l'on ajoute les équations (2), après avoir multiplié la première par a, la deuxième par b, la troisième par c; puis la première par a', la deuxième par b', la troisième par c'; enfin la première par a'', la deuxième par b'', la troisième par c'', on obtient

$$\left\{\begin{aligned} a\,dx + b\,dy + c\,dz &= (a\,da + b\,db + c\,dc)x_1 + (a\,da' + b\,db' + c\,dc')y_1 \\ &\qquad + (a\,da'' + b\,db'' + c\,dc'')z_1, \\ a'\,dx + b'\,dy + c'\,dz &= (a'\,da + b'\,db + c'\,dc)x_1 + (a'\,da' + b'\,db' + c'\,dc')y_1 \\ &\qquad + (a'\,da'' + b'\,db'' + c'\,dc'')z_1, \\ a''\,dx + b''\,dy + c''\,dz &= (a''\,da + b''\,db + c''\,dc)x_1 + (a''\,da' + b''\,db' + c''\,dc')y_1 \\ &\qquad + (a''\,da'' + b''\,db'' + c''\,dc'')z_1. \end{aligned}\right.$$

Or, en différentiant les relations

$$(4)\quad \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1, \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1, \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1, \end{cases} \qquad (5)\quad \begin{cases} a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0, \\ a''a + b''b + c''c = 0, \\ a\,a' + b\,b' + c\,c' = 0, \end{cases}$$

il vient

$$(6)\quad \begin{cases} a\,da + b\,db + c\,dc = 0, \\ a'\,da' + b'\,db' + c'\,dc' = 0, \\ a''\,da'' + b''\,db'' + c''\,dc'' = 0, \end{cases}$$

$$(7)\quad \begin{cases} a'\,da'' + b'\,db'' + c'\,dc'' = -(a''\,da' + b''\,db' + c''\,dc'), \\ a''\,da + b''\,db + c''\,dc = -(a\,da'' + b\,db'' + c\,dc''), \\ a\,da' + b\,db' + c\,dc' = -(a'\,da + b'\,db + c'\,dc). \end{cases}$$

Portons ces valeurs dans les formules (3), nous aurons

$$(8)\quad \begin{cases} a\,dx + b\,dy + c\,dz = -(a'\,da + b'\,db + c'\,dc)\,y_1 + (a\,da'' + b\,db'' + c\,dc'')\,z_1, \\ a'\,dx + b'\,dy + c'\,dz = -(a''da' + b''db' + c''dc')\,z_1 + (a'\,da + b'\,db + c'\,dc)\,x_1, \\ a''\,dx + b''\,dy + c''\,dz = -(a\,da'' + b\,db'' + c\,dc'')\,x_1 + (a''da' + b''db' + c''dc')\,y_1. \end{cases}$$

Si l'on ajoute les équations (1), après avoir multiplié la première par a, la deuxième par b, la troisième par c; puis la première par a', la deuxième par b', la troisième par c'; enfin la première par a'', la deuxième par b'', la troisième par c'', on obtient, eu égard aux équations (4) et (5),

$$(9)\quad \begin{cases} a\,x + b\,y + c\,z = x_1, \\ a'\,x + b'\,y + c'\,z = y_1, \\ a''\,x + b''\,y + c''\,z = z_1; \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$(10)\quad \begin{cases} a\,dx + b\,dy + c\,dz = -(x\,da + y\,db + z\,dc), \\ a'\,dx + b'\,dy + c'\,dz = -(x\,da' + y\,db' + z\,dc'), \\ a''\,dx + b''\,dy + c''\,dz = -(x\,da'' + y\,db'' + z\,dc''). \end{cases}$$

Portons ces valeurs, ainsi que celles de x_1, y_1, z_1, dans les équa-

tions (8), et nous aurons

$$(11)\quad \begin{cases} x\,da + y\,db + z\,dc = +(a'\,da + b'\,db + c'\,dc)(a'x + b'y + c'z) \\ \qquad\qquad - (a\,da'' + b\,db'' + c\,dc'')(a''x + b''y + c''z), \\ x\,da' + y\,db' + z\,dc' = +(a''da' + b''db' + c''dc')(a''x + b''y + c''z) \\ \qquad\qquad - (a'\,da + b'\,db + c'\,dc)(a\,x + b\,y + c\,z), \\ x\,da'' + y\,db'' + z\,dc'' = +(a\,da'' + b\,db'' + c\,dc'')(a\,x + b\,y + c\,z) \\ \qquad\qquad - (a''da' + b''db' + c''dc')(a'x + b'y + c'z). \end{cases}$$

En exprimant que ces formules sont des identités en x, y, z, il vient donc

$$(12)\quad \begin{cases} da = (a'\,da + b'\,db + c'\,dc)\,a' - (a\,da'' + b\,db'' + c\,dc'')\,a'', \\ db = (a'\,da + b'\,db + c'\,dc)\,b' - (a\,da'' + b\,db'' + c\,dc'')\,b'', \\ dc = (a'\,da + b'\,db + c'\,dc)\,c' - (a\,da'' + b\,db'' + c\,dc'')\,c''; \\ da' = (a''da' + b''\,db' + c''dc')\,a'' - (a'\,da + b'\,db + c'\,dc)\,a, \\ db' = (a''da' + b''\,db' + c''dc')\,b'' - (a'\,da + b'\,db + c'\,dc)\,b, \\ dc' = (a''da' + b''\,db' + c''dc')\,c'' - (a'\,da + b'\,db + c'\,dc)\,c; \\ da'' = (a\,da'' + b\,db'' + c\,dc'')\,a - (a''da' + b''db' + c''dc')\,a', \\ db'' = (a\,da'' + b\,db'' + c\,dc'')\,b - (a''da' + b''db' + c''dc')\,b', \\ dc'' = (a\,da'' + b\,db'' + c\,dc'')\,c - (a''da' + b''db' + c''dc')\,c'. \end{cases}$$

Telles sont les relations fondamentales qui vont nous permettre de passer d'une position quelconque d'un trièdre trirectangle à la position infiniment voisine.

II. — *Formules de M. Codazzi.*

2. Imaginons qu'un point décrive une surface quelconque

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v),$$

et que a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' soient aussi des fonctions connues de u et de v. Alors les expressions

$$a'\,da + b'\,db + c'\,dc, \quad a\,da'' + b\,db'' + c\,dc'', \quad a''da' + b''db' + c''dc'$$

seront des fonctions connues de u et de v. En les désignant par

$+ M\,du + N\,dv$, $- P\,du - S\,dv$, $- R\,du - Q\,dv$, on aura

$$(13)\quad \begin{cases} a'\,da + b'\,db + c'\,dc = + M\,du + N\,dv, \\ a\,da'' + b\,db'' + c\,dc'' = - P\,du - S\,dv, \\ a''da' + b''db' + c''dc' = - R\,du - Q\,dv, \end{cases}$$

et les équations fondamentales du mouvement du trièdre deviendront

$$(14)\quad \begin{cases} da = + (M\,du + N\,dv)\,a' + (P\,du + S\,dv)\,a'', \\ db = + (M\,du + N\,dv)\,b' + (P\,du + S\,dv)\,b'', \\ dc = + (M\,du + N\,dv)\,c' + (P\,du + S\,dv)\,c''; \\ da' = - (R\,du + Q\,dv)\,a'' - (M\,du + N\,dv)\,a, \\ db' = - (R\,du + Q\,dv)\,b'' - (M\,du + N\,dv)\,b, \\ dc' = - (R\,du + Q\,dv)\,c'' - (M\,du + N\,dv)\,c; \\ da'' = - (P\,du + S\,dv)\,a + (R\,du + Q\,dv)\,a', \\ db'' = - (P\,du + S\,dv)\,b + (R\,du + Q\,dv)\,b', \\ dc'' = - (P\,du + S\,dv)\,c + (R\,du + Q\,dv)\,c'. \end{cases}$$

Si le sommet du trièdre doit de plus coïncider avec le point décrivant la surface, son mouvement dans l'espace sera complétement déterminé.

3. Nous allons chercher si, réciproquement, à tout système de valeurs de M, N, P, Q, R, S correspond un mouvement déterminé du trièdre autour de l'origine et un seul ([1]).

A cet effet, groupons les équations (14) de la manière suivante :

$$(15)\quad \begin{cases} da = + (M a' + P a'')\,du + (N a' + S\,a'')\,dv, \\ da' = - (R a'' + M a)\,du - (Q a'' + N a)\,dv, \\ da'' = - (P\,a - R a')\,du - (S\,a - Q a')\,dv; \\ db = + (M b' + P b'')\,du + (N b' + S\,b'')\,dv, \\ db' = - (R b'' + M b)\,du - (Q b'' + N\,b)\,dv, \\ db'' = - (P\,b - R b')\,du - (S\,b - Q b')\,dv; \\ dc = + (M c' + P c'')\,du + (N c' + S\,c'')\,dv, \\ dc' = - (R c'' + M c)\,du - (Q c'' + N c)\,dv, \\ dc'' = - (P\,c - R c')\,du - (S\,c - Q c')\,dv. \end{cases}$$

([1]) Dans tout ce paragraphe 3, nous n'avons fait que reproduire textuellement l'analyse donnée par M. Ossian Bonnet dans son *Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée,* où il a le premier montré toute l'importance des formules de M. Codazzi.

Ces équations équivalent aux suivantes :

$$(16)\left\{\begin{array}{lll}\dfrac{da}{du}=+\mathrm{M}a'+\mathrm{P}a'', & \dfrac{db}{du}=+\mathrm{M}b'+\mathrm{P}b'', & \dfrac{dc}{du}=+\mathrm{M}c'+\mathrm{P}c'',\\[2ex] \dfrac{da'}{du}=-\mathrm{R}a''-\mathrm{M}a, & \dfrac{db'}{du}=-\mathrm{R}b''-\mathrm{M}b, & \dfrac{dc'}{du}=-\mathrm{R}c''-\mathrm{M}c,\\[2ex] \dfrac{da''}{du}=-\mathrm{P}a+\mathrm{R}a', & \dfrac{db''}{du}=-\mathrm{P}b+\mathrm{R}b', & \dfrac{dc''}{du}=-\mathrm{P}c+\mathrm{R}c',\end{array}\right.$$

$$(17)\left\{\begin{array}{lll}\dfrac{da}{dv}=+\mathrm{N}a'+\mathrm{S}a'', & \dfrac{db}{dv}=+\mathrm{N}b'+\mathrm{S}b'', & \dfrac{dc}{dv}=+\mathrm{N}c'+\mathrm{S}c'',\\[2ex] \dfrac{da'}{dv}=-\mathrm{Q}a''-\mathrm{N}a, & \dfrac{db'}{dv}=-\mathrm{Q}b''-\mathrm{N}b, & \dfrac{dc'}{dv}=-\mathrm{Q}c''-\mathrm{N}c,\\[2ex] \dfrac{da''}{dv}=-\mathrm{S}a+\mathrm{Q}a', & \dfrac{db''}{dv}=-\mathrm{S}b+\mathrm{Q}b', & \dfrac{dc''}{dv}=-\mathrm{S}c+\mathrm{Q}c',\end{array}\right.$$

et l'on doit avoir avant tout

$$(18)\left\{\begin{array}{l}\dfrac{d}{dv}(\mathrm{M}a'+\mathrm{P}a'')=\dfrac{d}{du}(\mathrm{N}a'+\mathrm{S}a''),\\[2ex] \dfrac{d}{dv}(\mathrm{R}a''+\mathrm{M}a)=\dfrac{d}{du}(\mathrm{Q}a''+\mathrm{N}a),\\[2ex] \dfrac{d}{dv}(\mathrm{P}a-\mathrm{R}a')=\dfrac{d}{du}(\mathrm{S}a-\mathrm{Q}a');\\[2ex] \dfrac{d}{dv}(\mathrm{M}b'+\mathrm{P}b'')=\dfrac{d}{du}(\mathrm{N}b'+\mathrm{S}b''),\\[2ex] \dfrac{d}{dv}(\mathrm{R}b''+\mathrm{M}b)=\dfrac{d}{du}(\mathrm{Q}b''+\mathrm{N}b),\\[2ex] \dfrac{d}{dv}(\mathrm{P}b-\mathrm{R}b')=\dfrac{d}{du}(\mathrm{S}b-\mathrm{Q}b');\\[2ex] \dfrac{d}{dv}(\mathrm{M}c'+\mathrm{P}c'')=\dfrac{d}{du}(\mathrm{N}c'+\mathrm{S}c''),\\[2ex] \dfrac{d}{dv}(\mathrm{R}c''+\mathrm{M}c)=\dfrac{d}{du}(\mathrm{Q}c''+\mathrm{N}c),\\[2ex] \dfrac{d}{dv}(\mathrm{P}c-\mathrm{R}c')=\dfrac{d}{du}(\mathrm{S}c-\mathrm{Q}c'),\end{array}\right.$$

ce qui, en effectuant et remplaçant les différentielles partielles de a, a',

a'', b, b', b'', c, c', c'' par leurs valeurs, conduit aux conditions

$$(19)\qquad \begin{cases} \dfrac{dM}{dv} - \dfrac{dN}{du} = RS - PQ, \\ \dfrac{dP}{dv} - \dfrac{dS}{du} = MQ - RN, \\ \dfrac{dR}{dv} - \dfrac{dQ}{du} = NP - MS. \end{cases}$$

Supposons ces conditions remplies ; on sait que, quelles que soient les quantités M, P, R, il existe une infinité de systèmes de valeurs de a, a', a'' satisfaisant aux équations (16), et qu'en appelant a_1, a'_1, a''_1, a_2, a'_2, a''_2, a_3, a'_3, a''_3 trois de ces systèmes, pour lesquels le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ a''_1 & a''_2 & a''_3 \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro, les valeurs les plus générales de a, a', a'' sont

$$(20)\qquad \begin{cases} a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3, \\ a' = \alpha_1 a'_1 + \alpha_2 a'_2 + \alpha_3 a'_3, \\ a'' = \alpha_1 a''_1 + \alpha_2 a''_2 + \alpha_3 a''_3, \end{cases}$$

α_1, α_2, α_3 étant des fonctions arbitraires de v.

Cela posé, assujettissons les valeurs précédentes de a, a', a'' à vérifier les équations (17), nous aurons

$$\begin{cases} a_1 \dfrac{d\alpha_1}{dv} + a_2 \dfrac{d\alpha_2}{dv} + a_3 \dfrac{d\alpha_3}{dv} \\ \quad = \left(+Na'_1 + Sa''_1 - \dfrac{da_1}{dv}\right)\alpha_1 + \left(+Na'_2 + Sa''_2 - \dfrac{da_2}{dv}\right)\alpha_2 + \left(+Na'_3 + Sa''_3 - \dfrac{da_3}{dv}\right)\alpha_3, \\ a'_1 \dfrac{d\alpha_1}{dv} + a'_2 \dfrac{d\alpha_2}{dv} + a'_3 \dfrac{d\alpha_3}{dv} \\ \quad = \left(-Qa''_1 - Na_1 - \dfrac{da'_1}{dv}\right)\alpha_1 + \left(-Qa''_2 - Na_2 - \dfrac{da'_2}{dv}\right)\alpha_2 + \left(-Qa''_3 - Na_3 - \dfrac{da'_3}{dv}\right)\alpha_3, \\ a''_1 \dfrac{d\alpha_1}{dv} + a''_2 \dfrac{d\alpha_2}{dv} + a''_3 \dfrac{d\alpha_3}{dv} \\ \quad = \left(-Sa_1 + Qa'_1 - \dfrac{da''_1}{dv}\right)\alpha_1 + \left(-Sa_2 + Qa'_2 - \dfrac{da''_2}{dv}\right)\alpha_2 + \left(-Sa_3 + Qa'_3 - \dfrac{da''_3}{dv}\right)\alpha_3. \end{cases}$$

Ces équations fourniront pour α_1, α_2, α_3 des valeurs convenables, c'est-à-dire des valeurs fonctions de v seul, si leur système est équivalent à celui que l'on obtient en les dérivant par rapport à u, α_1, α_2, α_3, $\frac{d\alpha_1}{dv}$, $\frac{d\alpha_2}{dv}$, $\frac{d\alpha_3}{dv}$ étant traités comme des constantes, c'est-à-dire au système des trois équations

$$
(22)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{da_1}{du}\frac{d\alpha_1}{dv}+\frac{da_2}{du}\frac{d\alpha_2}{dv}+\frac{da_3}{du}\frac{d\alpha_3}{dv}\\
&\quad=\left(+\mathrm{N}\frac{da'_1}{du}+\mathrm{S}\frac{da''_1}{du}+a'_1\frac{d\mathrm{N}}{du}+a''_1\frac{d\mathrm{S}}{du}-\frac{d^2a_1}{du\,dv}\right)\alpha_1\\
&\quad+\left(+\mathrm{N}\frac{da'_2}{du}+\mathrm{S}\frac{da''_2}{du}+a'_2\frac{d\mathrm{N}}{du}+a''_2\frac{d\mathrm{S}}{du}-\frac{d^2a_2}{du\,dv}\right)\alpha_2\\
&\quad+\left(+\mathrm{N}\frac{da'_3}{du}+\mathrm{S}\frac{da''_3}{du}+a'_3\frac{d\mathrm{N}}{du}+a''_3\frac{d\mathrm{S}}{du}-\frac{d^2a_3}{du\,dv}\right)\alpha_3,\\
&\frac{da'_1}{du}\frac{d\alpha_1}{dv}+\frac{da'_2}{du}\frac{d\alpha_2}{dv}+\frac{da'_3}{du}\frac{d\alpha_3}{dv}\\
&\quad=\left(-\mathrm{Q}\frac{da''_1}{du}-\mathrm{N}\frac{da_1}{du}-a''_1\frac{d\mathrm{Q}}{du}-a_1\frac{d\mathrm{N}}{du}-\frac{d^2a'_1}{du\,dv}\right)\alpha_1\\
&\quad+\left(-\mathrm{Q}\frac{da''_2}{du}-\mathrm{N}\frac{da_2}{du}-a''_2\frac{d\mathrm{Q}}{du}-a_2\frac{d\mathrm{N}}{du}-\frac{d^2a'_2}{du\,dv}\right)\alpha_2\\
&\quad+\left(-\mathrm{Q}\frac{da''_3}{du}-\mathrm{N}\frac{da_3}{du}-a''_3\frac{d\mathrm{Q}}{du}-a_3\frac{d\mathrm{N}}{du}-\frac{d^2a'_3}{du\,dv}\right)\alpha_3,\\
&\frac{da''_1}{du}\frac{d\alpha_1}{dv}+\frac{da''_2}{du}\frac{d\alpha_2}{dv}+\frac{da''_3}{du}\frac{d\alpha_3}{dv}\\
&\quad=\left(-\mathrm{S}\frac{da_1}{du}+\mathrm{Q}\frac{da'_1}{du}-a_1\frac{d\mathrm{S}}{du}+a'_1\frac{d\mathrm{Q}}{du}-\frac{d^2a''_1}{du\,dv}\right)\alpha_1\\
&\quad+\left(-\mathrm{S}\frac{da_2}{du}+\mathrm{Q}\frac{da'_2}{du}-a_2\frac{d\mathrm{S}}{du}+a'_2\frac{d\mathrm{Q}}{du}-\frac{d^2a''_2}{du\,dv}\right)\alpha_2\\
&\quad+\left(-\mathrm{S}\frac{da_3}{du}+\mathrm{Q}\frac{da'_3}{du}-a_3\frac{d\mathrm{S}}{du}+a'_3\frac{d\mathrm{Q}}{du}-\frac{d^2a''_3}{du\,dv}\right)\alpha_3.
\end{aligned}
\right.
$$

Or cela a lieu évidemment; en effet, en multipliant la deuxième des équations (21) par M, la troisième par P, et en ajoutant membre à membre, on trouve la première des équations (22), ou plutôt ce que devient cette équation lorsqu'on y remplace les dérivées premières et secondes des quantités a_1, a'_1, a''_1, a_2, a'_2, a''_2, a_3, a'_3, a''_3 par les valeurs déduites de

la définition de ces quantités, et les dérivées $\frac{dN}{du}$, $\frac{dS}{du}$, $\frac{dQ}{du}$ par les valeurs déduites des équations (19); de même, en multipliant la troisième des équations (21) par $-R$, la première par $-M$, et en ajoutant membre à membre, on trouve une équation équivalente à la deuxième des équations (22); enfin, en multipliant la première des équations (21) par $-P$, la deuxième par R, et en ajoutant membre à membre, on trouve une équation équivalente à la troisième des équations (22).

Ainsi il existe toujours une infinité de systèmes de valeurs de a, a', a'' vérifiant les équations (16) et (17), lorsque M, N, P, Q, R, S satisfont aux relations (19); de plus, si a_1, a'_1, a''_1, a_2, a'_2, a''_2, a_3, a'_3, a''_3 représentent trois de ces systèmes, pour lesquels le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ a''_1 & a''_2 & a''_3 \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro, les valeurs les plus générales des a, a', a'' sont

$$(23)\qquad \begin{cases} a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3, \\ a' = \alpha_1 a'_1 + \alpha_2 a'_2 + \alpha_3 a'_3, \\ a'' = \alpha_1 a''_1 + \alpha_2 a''_2 + \alpha_3 a''_3, \end{cases}$$

α_1, α_2, α_3 étant des constantes arbitraires. On aurait de même

$$(23)\quad \begin{cases} b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \beta_3 a_3, \\ b' = \beta_1 a'_1 + \beta_2 a'_2 + \beta_3 a'_3, \\ b'' = \beta_1 a''_1 + \beta_2 a''_2 + \beta_3 a''_3; \end{cases} \qquad (23)\quad \begin{cases} c = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \gamma_3 a_3, \\ c' = \gamma_1 a'_1 + \gamma_2 a'_2 + \gamma_3 a'_3, \\ c'' = \gamma_1 a''_1 + \gamma_2 a''_2 + \gamma_3 a''_3, \end{cases}$$

β_1, β_2, β_3, γ_1, γ_2, γ_3 étant six nouvelles constantes arbitraires.

Ces constantes ne sont pas quelconques, car on doit avoir

$$(24)\qquad \begin{cases} a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, \\ b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, \\ c^2 + c'^2 + c''^2 = 1, \end{cases} \qquad (25)\quad \begin{cases} bc + b'c' + b''c'' = 0, \\ ca + c'a' + c''a'' = 0, \\ ab + a'b' + a''b'' = 0. \end{cases}$$

I faut donc encore en prouver l'existence et montrer comment on

les obtient; or, d'après la définition même des quantités a_1, a'_1, a''_1, a_2, a'_2, a''_2, a_3, a'_3, a''_3 (16) et (17), les six fonctions

$$a_1^2 + a_1'^2 + a_1''^2, \qquad a_2^2 + a_2'^2 + a_2''^2, \qquad a_3^2 + a_3'^2 + a_3''^2,$$
$$a_2 a_3 + a'_2 a'_3 + a''_2 a''_3, \quad a_3 a_1 + a'_3 a'_1 + a''_3 a''_1, \quad a_1 a_2 + a'_1 a'_2 + a''_1 a''_2$$

sont constantes. Posons donc

$$(26) \qquad \begin{cases} a_1^2 + a_1'^2 + a_1''^2 = A_1, & a_2 a_3 + a'_2 a'_3 + a''_2 a''_3 = B_1, \\ a_2^2 + a_2'^2 + a_2''^2 = A_2, & a_3 a_1 + a'_3 a'_1 + a''_3 a''_1 = B_2, \\ a_3^2 + a_3'^2 + a_3''^2 = A_3, & a_1 a_2 + a'_1 a'_2 + a''_1 a''_2 = B_3, \end{cases}$$

les relations (24) et (25) deviendront

$$(27) \qquad \begin{cases} A_1 \alpha_1^2 + A_2 \alpha_2^2 + A_3 \alpha_3^2 + 2B_1 \alpha_2 \alpha_3 + 2B_2 \alpha_3 \alpha_1 + 2B_3 \alpha_1 \alpha_2 = 1, \\ A_1 \beta_1^2 + A_2 \beta_2^2 + A_3 \beta_3^2 + 2B_1 \beta_2 \beta_3 + 2B_2 \beta_3 \beta_1 + 2B_3 \beta_1 \beta_2 = 1, \\ A_1 \gamma_1^2 + A_2 \gamma_2^2 + A_3 \gamma_3^2 + 2B_1 \gamma_2 \gamma_3 + 2B_2 \gamma_3 \gamma_1 + 2B_3 \gamma_1 \gamma_2 = 1, \end{cases}$$

$$(28) \qquad \begin{cases} A_1 \beta_1 \gamma_1 + A_2 \beta_2 \gamma_2 + A_3 \beta_3 \gamma_3 + B_1 (\beta_2 \gamma_3 + \beta_3 \gamma_2) \\ \qquad + B_2 (\beta_3 \gamma_1 + \beta_1 \gamma_3) + B_3 (\beta_1 \gamma_2 + \beta_2 \gamma_1) = 0, \\ A_1 \gamma_1 \alpha_1 + A_2 \gamma_2 \alpha_2 + A_3 \gamma_3 \alpha_3 + B_1 (\gamma_2 \alpha_3 + \gamma_3 \alpha_2) \\ \qquad + B_2 (\gamma_3 \alpha_1 + \gamma_1 \alpha_3) + B_3 (\gamma_1 \alpha_2 + \gamma_2 \alpha_1) = 0, \\ A_1 \alpha_1 \beta_1 + A_2 \alpha_2 \beta_2 + A_3 \alpha_3 \beta_3 + B_1 (\alpha_2 \beta_3 + \alpha_3 \beta_2) \\ \qquad + B_2 (\alpha_3 \beta_1 + \alpha_1 \beta_3) + B_3 (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) = 0; \end{cases}$$

α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3, γ_1, γ_2, γ_3 sont donc les coordonnées ξ, η, ζ des extrémités respectives de trois diamètres conjugués de la surface du second ordre représentée par l'équation

$$(29) \qquad A_1 \xi^2 + A_2 \eta^2 + A_3 \zeta^2 + 2B_1 \eta\zeta + 2B_2 \zeta\xi + 2B_3 \xi\eta = 1.$$

D'ailleurs ces coordonnées sont toutes finies, sans quoi la surface du second degré aurait une infinité de centres, et le déterminant

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_3 & B_2 \\ B_3 & A_2 & B_1 \\ B_2 & B_1 & A_3 \end{vmatrix}$$

serait nul, ce qui ne peut être; car ce déterminant, d'après une pro-

priété connue, est le carré du suivant

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ a''_1 & a''_2 & a''_3 \end{vmatrix},$$

lequel n'est pas nul par hypothèse.

Ainsi il existe toujours des valeurs de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ vérifiant les relations (24) et (25). On peut même déterminer une infinité de systèmes de valeurs admissibles de ces constantes; mais il est aisé de voir que ces différents systèmes répondent aux différentes positions des axes de coordonnées $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ dans l'espace.

Considérons, en effet, un premier système de valeurs admissibles de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, et proposons-nous d'en déduire un second tout à fait quelconque. J'appelle l, l', l'' les longueurs des diamètres conjugués de la surface (29) dont les extrémités ont pour coordonnées respectives les premières valeurs de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Soient λ, μ, ν les cosinus des angles formés par le diamètre de longueur l avec les axes $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$; λ', μ', ν' les cosinus des angles formés par le diamètre de longueur l' avec les mêmes axes; λ'', μ'', ν'' les cosinus des angles formés par le diamètre de longueur l'' avec les mêmes axes, en sorte que l'on ait

$$(30) \qquad \begin{cases} \alpha_1 = l\lambda, & \beta_1 = l'\lambda', & \gamma_1 = l''\lambda'', \\ \alpha_2 = l\mu, & \beta_2 = l'\mu', & \gamma_2 = l''\mu'', \\ \alpha_3 = l\nu, & \beta_3 = l'\nu', & \gamma_3 = l''\nu''. \end{cases}$$

Pour obtenir un nouveau système de valeurs de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, il faut chercher les coordonnées ξ, η, ζ des extrémités respectives de trois autres diamètres conjugués de la surface (29). Or, si cette surface était rapportée aux trois diamètres conjugués de longueur l, l', l'', auquel cas son équation serait

$$(31) \qquad \frac{\xi^2}{l^2} + \frac{\eta^2}{l'^2} + \frac{\zeta^2}{l''^2} = 1,$$

les coordonnées des extrémités de trois diamètres conjugués quel-

conques auraient pour valeurs respectives

$$\begin{array}{lll} l\varpi, & l'\rho, & l''\sigma, \\ l\varpi', & l'\rho', & l''\sigma', \\ l\varpi'', & l'\rho'', & l''\sigma'', \end{array}$$

$\varpi, \rho, \sigma, \varpi', \rho', \sigma', \varpi'', \rho'', \sigma''$ satisfaisant aux six relations

$$(32)\quad \begin{cases} \varpi^2 + \rho^2 + \sigma^2 = 1, \\ \varpi'^2 + \rho'^2 + \sigma'^2 = 1, \\ \varpi''^2 + \rho''^2 + \sigma''^2 = 1, \end{cases} \qquad (33)\quad \begin{cases} \varpi'\varpi'' + \rho'\rho'' + \sigma'\sigma'' = 0, \\ \varpi''\varpi + \rho''\rho + \sigma''\sigma = 0, \\ \varpi\varpi' + \rho\rho' + \sigma\sigma' = 0. \end{cases}$$

Donc les coordonnées par rapport aux axes $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ primitifs, c'est-à-dire les nouvelles valeurs de α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3, γ_1, γ_2, γ_3, sont

$$(34)\quad \begin{cases} \alpha'_1 = l\varpi\lambda + l'\rho\lambda' + l''\sigma\lambda'' = \alpha_1\varpi + \beta_1\rho + \gamma_1\sigma, \\ \alpha'_2 = l\varpi\mu + l'\rho\mu' + l''\sigma\mu'' = \alpha_2\varpi + \beta_2\rho + \gamma_2\sigma, \\ \alpha'_3 = l\varpi\nu + l'\rho\nu' + l''\sigma\nu'' = \alpha_3\varpi + \beta_3\rho + \gamma_3\sigma, \\ \beta'_1 = l\varpi'\lambda + l'\rho'\lambda' + l''\sigma'\lambda'' = \alpha_1\varpi' + \beta_1\rho' + \gamma_1\sigma', \\ \beta'_2 = l\varpi'\mu + l'\rho'\mu' + l''\sigma'\mu'' = \alpha_2\varpi' + \beta_2\rho' + \gamma_2\sigma', \\ \beta'_3 = l\varpi'\nu + l'\rho'\nu' + l''\sigma'\nu'' = \alpha_3\varpi' + \beta_3\rho' + \gamma_3\sigma', \\ \gamma'_1 = l\varpi''\lambda + l'\rho''\lambda' + l''\sigma''\lambda'' = \alpha_1\varpi'' + \beta_1\rho'' + \gamma_1\sigma'', \\ \gamma'_2 = l\varpi'''\mu + l'\rho''\mu' + l''\sigma''\mu'' = \alpha_2\varpi'' + \beta_2\rho'' + \gamma_2\sigma'', \\ \gamma'_3 = l\varpi''\nu + l'\rho''\nu' + l''\sigma''\nu'' = \alpha_3\varpi'' + \beta_3\rho'' + \gamma_3\sigma''. \end{cases}$$

En portant ces valeurs à la place de α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3, γ_1, γ_2, γ_3 dans les équations (23), on trouve pour a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' de nouvelles valeurs qui s'expriment en fonction des anciennes de la manière suivante :

$$(35)\quad \begin{cases} a_1 = \alpha_1\varpi + \beta_1\rho + \gamma_1\sigma, & b_1 = \alpha_1\varpi' + \beta_1\rho' + \gamma_1\sigma', & c_1 = \alpha_1\varpi'' + \beta_1\rho'' + \gamma_1\sigma'', \\ a'_1 = \alpha_2\varpi + \beta_2\rho + \gamma_2\sigma, & b'_1 = \alpha_2\varpi' + \beta_2\rho' + \gamma_2\sigma', & c'_1 = \alpha_2\varpi'' + \beta_2\rho'' + \gamma_2\sigma'', \\ a''_1 = \alpha_3\varpi + \beta_3\rho + \gamma_3\sigma, & b''_1 = \alpha_3\varpi' + \beta_3\rho' + \gamma_3\sigma', & c''_1 = \alpha_3\varpi'' + \beta_3\rho'' + \gamma_3\sigma'', \end{cases}$$

en sorte qu'il suffit de substituer aux axes $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ trois nouveaux axes $O\xi'$, $O\eta'$, $O\zeta'$, faisant avec les premiers des angles dont les cosinus soient respectivement ϖ, ρ, σ, ϖ', ρ', σ', ϖ'', ρ'', σ'', transformation pos-

sible d'après les relations (32) et (33), pour que les premières valeurs de a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' se changent en a_1, b_1, c_1, a'_1, b'_1, c'_1, a''_1, b''_1, c''_1. Donc les différents systèmes de valeurs de α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2, α_3, β_3, γ_3 conviennent bien à un même trièdre différemment placé par rapport aux axes de coordonnées $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$.

4. Nous allons maintenant particulariser le mouvement du trièdre, que nous avons laissé jusqu'ici absolument quelconque.

Reprenons, à cet effet, les équations du sommet

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v),$$

et supposons qu'on en déduise, pour l'élément linéaire de la surface qu'il parcourt, soit

$$ds^2 = E^2\,du^2 + G^2\,dv^2, \tag{36}$$

soit

$$ds^2 = E^2\,du^2 + 2\,EG\cos 2\omega\,du\,dv + G^2\,dv^2. \tag{36'}$$

Dans le premier cas, les courbes obtenues en donnant respectivement à v et à u des valeurs constantes se coupent à angle droit, et l'on peut astreindre les arêtes AX, AY, AZ du trièdre à coïncider respectivement avec la tangente à la courbe $v =$ const., avec la tangente à la courbe $u =$ const., avec la normale à la surface. Pour qu'il en soit ainsi, il est évidemment nécessaire et suffisant que l'on ait

$$\left\{\begin{aligned} dx &= aE\,du + a'G\,dv, \\ dy &= bE\,du + b'G\,dv, \\ dz &= cE\,du + c'G\,dv, \end{aligned}\right. \tag{37}$$

et qu'en outre les seconds membres soient des différentielles exactes; ce qui entraîne, en tenant compte des équations (16) et (17),

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dE}{dv} + GM = 0, \\ &\frac{dG}{du} - EN = 0, \\ &ES + GR = 0. \end{aligned}\right. \tag{38}$$

Dans le second cas, les courbes obtenues en donnant respectivement à v et à u des valeurs constantes se coupent sous un angle 2ω, et l'on peut astreindre les arêtes AX, AY, AZ du trièdre à coïncider respectivement avec les bissectrices de cet angle et avec la normale à la surface. Pour qu'il en soit ainsi, il est évidemment nécessaire et suffisant que l'on ait

$$(37)' \quad \begin{cases} dx = a(\mathrm{E}\,du + \mathrm{G}\,dv)\cos\omega + a'(\mathrm{E}\,du - \mathrm{G}\,dv)\sin\omega, \\ dy = b(\mathrm{E}\,du + \mathrm{G}\,dv)\cos\omega + b'(\mathrm{E}\,du - \mathrm{G}\,dv)\sin\omega, \\ dz = c(\mathrm{E}\,du + \mathrm{G}\,dv)\cos\omega + c'(\mathrm{E}\,du - \mathrm{G}\,dv)\sin\omega, \end{cases}$$

et qu'en outre les seconds membres soient des différentielles exactes; ce qui entraîne, en tenant compte des équations (16) et (17),

$$(38)' \quad \begin{cases} \left(\dfrac{d\mathrm{E}}{dv} - \dfrac{d\mathrm{G}}{du}\right)\dfrac{1}{\operatorname{tang}\omega} - \mathrm{E}\left(\mathrm{N} + \dfrac{d\omega}{dv}\right) - \mathrm{G}\left(\mathrm{M} - \dfrac{d\omega}{du}\right) = 0, \\ \left(\dfrac{d\mathrm{E}}{dv} + \dfrac{d\mathrm{G}}{du}\right)\operatorname{tang}\omega + \mathrm{E}\left(\mathrm{N} + \dfrac{d\omega}{dv}\right) - \mathrm{G}\left(\mathrm{M} - \dfrac{d\omega}{du}\right) = 0, \\ (\mathrm{GR} + \mathrm{EQ})\sin\omega - (\mathrm{ES} - \mathrm{GP})\cos\omega = 0. \end{cases}$$

Réciproquement, si les conditions (38) ou (38)′ sont remplies, les équations (37) ou (37)′ font voir qu'on obtient sur-le-champ par des quadratures les coordonnées des différents points de la surface décrite par le sommet du trièdre. D'ailleurs, les trois nouvelles constantes introduites par les quadratures n'influent en rien sur la forme de la surface; donc, finalement, à un système de valeurs de M, N, P, Q, R, S, E, G, ω vérifiant les équations (19) et (38), ou (19) et (38)′, correspond toujours une surface et une seule. C'est le résultat mis en évidence par M. Ossian Bonnet.

Les équations (19), (38) et (38)′ constituent les formules de M. Codazzi.

III. — *Formules de M. Serret.*

5. Imaginons qu'un point décrive une courbe quelconque

$$x = \varphi(u), \quad y = \psi(u), \quad z = \chi(u),$$

et que a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' soient aussi des fonctions connues

de u. Alors les expressions

$$a'\,da + b'\,db + c'\,dc, \quad a\,da'' + b\,db'' + c\,dc'', \quad a''\,da' + b''\,db' + c''\,dc'$$

seront des fonctions connues de u. En les désignant par $+\mathrm{M}\,du$, $-\mathrm{P}\,du$, $-\mathrm{R}\,du$, on aura

$$(39) \qquad \begin{cases} a'\,da + b'\,db + c'\,dc = +\mathrm{M}\,du, \\ a\,da'' + b\,db'' + c\,dc'' = -\mathrm{P}\,du, \\ a''da' + b''db' + c''dc' = -\mathrm{R}\,du, \end{cases}$$

et les équations fondamentales du mouvement du trièdre deviendront

$$(40) \qquad \begin{cases} da = (\mathrm{M}a' + \mathrm{P}a'')\,du, & da' = -(\mathrm{R}a'' + \mathrm{M}a)\,du, & da'' = -(\mathrm{P}a - \mathrm{R}a')\,du, \\ db = (\mathrm{M}b' + \mathrm{P}b'')\,du, & db' = -(\mathrm{R}b'' + \mathrm{M}b)\,du, & db'' = -(\mathrm{P}b - \mathrm{R}b')\,du, \\ dc = (\mathrm{M}c' + \mathrm{P}c'')\,du, & dc' = -(\mathrm{R}c'' + \mathrm{M}c)\,du, & dc'' = -(\mathrm{P}c - \mathrm{R}c')\,du. \end{cases}$$

Si le sommet du trièdre doit de plus coïncider avec le point décrivant la courbe, son mouvement dans l'espace sera complétement déterminé.

On démontrerait, comme au n° 3, qu'à tout système de valeurs de M, P, R correspond un mouvement déterminé du trièdre autour de l'origine et un seul.

6. Pour que les trois arêtes du trièdre soient à chaque instant parallèles à la tangente AT, à la normale principale AN, à la binormale AL d'une courbe gauche, il est évidemment nécessaire et suffisant d'exprimer que AT fait avec sa position infiniment voisine A′T′ un angle égal à l'angle de contingence, que le cosinus de l'angle formé par AL avec A′T′ est infiniment petit d'ordre supérieur au premier, que AL fait avec sa position infiniment voisine A′L′ un angle égal à l'angle de torsion. Or la seconde condition s'exprime par l'équation

$$a''\,da + b''\,db + c''\,dc = 0,$$

ou par son équivalente (7)

$$a\,da'' + b\,db'' + c\,dc'' = 0,$$

c'est-à-dire que l'on a constamment

$$P = 0.$$

Pour exprimer les deux autres, calculons les angles formés par chacune des arêtes du trièdre avec sa position infiniment voisine, angles que nous désignerons par les lettres ε, ε', ε''. Nous aurons

$$(41)\quad \begin{cases} \cos\varepsilon = (a + \Delta a)\,a + (b + \Delta b)\,b + (c + \Delta c)\,c, \\ \cos\varepsilon' = (a' + \Delta a')\,a' + (b' + \Delta b')\,b' + (c' + \Delta c')\,c', \\ \cos\varepsilon'' = (a'' + \Delta a'')\,a'' + (b'' + \Delta b'')\,b'' + (c'' + \Delta c'')\,c''. \end{cases}$$

Si l'on remplace Δa, Δb, Δc, $\Delta a'$, $\Delta b'$, $\Delta c'$, $\Delta a''$, $\Delta b''$, $\Delta c''$ par leurs valeurs au troisième ordre près, et qu'on tienne compte des équations (4) et (6), il viendra

$$(42)\quad \begin{cases} \varepsilon^2 = -(a\,d^2a + b\,d^2b + c\,d^2c), \\ \varepsilon'^2 = -(a'\,d^2a' + b'\,d^2b' + c'\,d^2c'), \\ \varepsilon''^2 = -(a''d^2a'' + b''d^2b'' + c''d^2c''). \end{cases}$$

Or, des équations (6) différentiées, on tire

$$(43)\quad \begin{cases} a\,d^2a + b\,d^2b + c\,d^2c = -(da^2 + db^2 + dc^2), \\ a'\,d^2a' + b'\,d^2b' + c'\,d^2c' = -(da'^2 + db'^2 + dc'^2), \\ a''d^2a'' + b''d^2b'' + c''d^2c'' = -(da''^2 + db''^2 + dc''^2), \end{cases}$$

et, en remplaçant, on a

$$(44)\quad \begin{cases} \varepsilon^2 = da^2 + db^2 + dc^2, \\ \varepsilon'^2 = da'^2 + db'^2 + dc'^2, \\ \varepsilon''^2 = da''^2 + db''^2 + dc''^2. \end{cases}$$

Élevons au carré les équations (40), et ajoutons membre à membre celles qui composent un même groupe, les équations (44) deviendront

$$(45)\quad \begin{cases} \varepsilon^2 = (M^2 + P^2)\,du^2, \\ \varepsilon'^2 = (R^2 + M^2)\,du^2, \\ \varepsilon''^2 = (P^2 + R^2)\,du^2. \end{cases}$$

Dans le cas qui nous occupe, on doit poser

$$P = 0, \quad \varepsilon = \frac{ds}{\rho}, \quad \varepsilon'' = \frac{ds}{r},$$

ds étant la différentielle de l'arc, ρ le rayon de courbure et r le rayon de torsion, ce qui réduit les formules (45) aux suivantes :

$$(46) \qquad \begin{cases} \dfrac{ds}{\rho} = M\,du, \\ \varepsilon'^2 = (R^2 + M^2)\,du^2, \\ \dfrac{ds}{r} = R\,du. \end{cases}$$

On en conclut d'abord

$$(47) \qquad \varepsilon'^2 = ds^2\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}\right);$$

puis, posant

$$(48) \qquad \begin{cases} a = \cos\alpha, & a' = \cos\xi, & a'' = \cos\lambda, \\ b = \cos\beta, & b' = \cos\eta, & b'' = \cos\mu, \\ c = \cos\gamma, & c' = \cos\zeta, & c'' = \cos\nu, \end{cases}$$

les formules (40) deviendront

$$(49) \begin{cases} d\cos\alpha = \dfrac{ds}{\rho}\cos\xi, & d\cos\xi = -\dfrac{ds}{\rho}\cos\alpha - \dfrac{ds}{r}\cos\lambda, & d\cos\lambda = \dfrac{ds}{r}\cos\xi, \\ d\cos\beta = \dfrac{ds}{\rho}\cos\eta, & d\cos\eta = -\dfrac{ds}{\rho}\cos\beta - \dfrac{ds}{r}\cos\mu, & d\cos\mu = \dfrac{ds}{r}\cos\eta, \\ d\cos\gamma = \dfrac{ds}{\rho}\cos\zeta, & d\cos\zeta = -\dfrac{ds}{\rho}\cos\gamma - \dfrac{ds}{r}\cos\nu, & d\cos\nu = \dfrac{ds}{r}\cos\zeta. \end{cases}$$

Ce sont les formules de M. Serret.

7. Ces formules permettent d'exprimer les différentielles des divers ordres des cosinus des trois angles α, ξ, λ, ou β, η, μ, ou γ, ζ, ν par des fonctions linéaires de ces mêmes cosinus dont les coefficients ne contiennent que ds, r, ρ et leurs différentielles. La même observation est applicable aux formules plus générales (40). Voici les résultats que

l'on obtient jusqu'au sixième ordre, en partant des équations (49) et en prenant l'arc pour variable indépendante :

$$\left\{\begin{aligned}
d^2\cos\alpha &= -\frac{ds^2}{\rho^2}\cos\alpha + ds\,d\frac{1}{\rho}\cos\xi - \frac{ds^2}{r\rho}\cos\lambda,\\
d^2\cos\xi &= -ds\,d\frac{1}{\rho}\cos\alpha - ds^2\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)\cos\xi - ds\,d\frac{1}{r}\cos\lambda,\\
d^2\cos\lambda &= -\frac{ds^2}{r\rho}\cos\alpha + ds\,d\frac{1}{r}\cos\xi - \frac{ds^2}{r^2}\cos\lambda;
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
d^3\cos\alpha &= -3\frac{ds^2}{\rho}\,d\frac{1}{\rho}\cos\alpha - ds\left[\frac{ds^2}{\rho}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right) - d^2\frac{1}{\rho}\right]\cos\xi\\
&\qquad - ds^2\left(\frac{2}{r}\,d\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho}\,d\frac{1}{r}\right)\cos\lambda,\\
d^3\cos\xi &= ds\left[\frac{ds^2}{\rho}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right) - d^2\frac{1}{\rho}\right]\cos\alpha - 3\,ds^2\left(\frac{1}{\rho}\,d\frac{1}{\rho}+\frac{1}{r}\,d\frac{1}{r}\right)\cos\xi\\
&\qquad + ds\left[\frac{ds^2}{r}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right) - d^2\frac{1}{r}\right]\cos\lambda,\\
d^3\cos\lambda &= -ds^2\left(\frac{1}{r}\,d\frac{1}{\rho}+\frac{2}{\rho}\,d\frac{1}{r}\right)\cos\alpha - ds\left[\frac{ds^2}{r}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right) - d^2\frac{1}{r}\right]\cos\xi\\
&\qquad - 3\frac{ds^2}{r}\,d\frac{1}{r}\cos\lambda;
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
d^4\cos\alpha &= ds^2\left[\frac{ds^2}{\rho^2}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right) - 3\left(d\frac{1}{\rho}\right)^2 - \frac{4}{\rho}\,d^2\frac{1}{\rho}\right]\cos\alpha\\
&\quad - ds\left\{3\,ds^2\left[\left(\frac{2}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)d\frac{1}{\rho}+\frac{1}{r\rho}\,d\frac{1}{r}\right] - d^3\frac{1}{\rho}\right\}\cos\xi\\
&\quad + ds^2\left[\frac{ds^2}{r\rho}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right) - 3\,d\frac{1}{\rho}\,d\frac{1}{r} - \frac{3}{r}\,d^2\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho}\,d^2\frac{1}{r}\right]\cos\lambda,\\
d^4\cos\xi &= ds\left\{ds^2\left[\left(\frac{6}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)d\frac{1}{\rho}+\frac{5}{r\rho}\,d\frac{1}{r}\right] - d^3\frac{1}{\rho}\right\}\cos\alpha\\
&\quad + ds^2\left[\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)^2 ds^2 - 3\left(d\frac{1}{\rho}\right)^2 - 3\left(d\frac{1}{r}\right)^2 - \frac{4}{\rho}\,d^2\frac{1}{\rho} - \frac{4}{r}\,d^2\frac{1}{r}\right]\cos\xi\\
&\quad + ds\left\{ds^2\left[\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{6}{r^2}\right)d\frac{1}{r}+\frac{5}{r\rho}\,d\frac{1}{\rho}\right] - d^3\frac{1}{r}\right\}\cos\lambda,\\
d^4\cos\lambda &= ds^2\left[\frac{ds^2}{r\rho}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right) - 3\,d\frac{1}{\rho}\,d\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\,d^2\frac{1}{\rho} - \frac{3}{\rho}\,d^2\frac{1}{r}\right]\cos\alpha\\
&\quad - ds\left\{3\,ds^2\left[\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{2}{r^2}\right)d\frac{1}{r}+\frac{1}{r\rho}\,d\frac{1}{\rho}\right] - d^3\frac{1}{r}\right\}\cos\xi\\
&\quad + ds^2\left[\frac{ds^2}{r^2}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right) - 3\left(d\frac{1}{r}\right)^2 - \frac{4}{r}\,d^2\frac{1}{r}\right]\cos\lambda;
\end{aligned}\right.$$

$$
\begin{aligned}
d^5\cos\alpha = {} & 5\,ds^2\left\{\frac{ds^2}{\rho}\left[\left(\frac{2}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)d\frac{1}{\rho}+\frac{1}{r\rho}\,d\frac{1}{r}\right]-2\,d\frac{1}{\rho}\,d^2\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho}\,d^3\frac{1}{\rho}\right\}\cos\alpha \\
& +ds\left\{ds^2\left[\frac{ds^2}{\rho}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)^2-\frac{15}{\rho}\left(d\frac{1}{\rho}\right)^2-\frac{12}{r}\,d\frac{1}{\rho}\,d\frac{1}{r}\right.\right. \\
& \qquad \left.\left.-\frac{3}{\rho}\left(d\frac{1}{r}\right)^2-2\left(\frac{5}{\rho^2}+\frac{3}{r^2}\right)d^2\frac{1}{\rho}-\frac{4}{r\rho}\,d^2\frac{1}{r}\right]+d^4\frac{1}{\rho}\right\}\cos\xi \\
& +ds^2\left\{ds^2\left[\frac{1}{r}\left(\frac{9}{\rho^2}+\frac{4}{r^2}\right)d\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{6}{r^2}\right)d\frac{1}{r}\right]\right. \\
& \qquad \left.-4\,d^2\frac{1}{r}\,d\frac{1}{\rho}-6\,d\frac{1}{r}\,d^2\frac{1}{\rho}-\frac{4}{r}\,d^3\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho}\,d^3\frac{1}{r}\right\}\cos\lambda,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d^5\cos\xi = {} & ds\left\{ds^2\left[-\frac{ds^2}{\rho}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)^2+\frac{15}{\rho}\left(d\frac{1}{\rho}\right)^2+\frac{7}{r}\,d\frac{1}{\rho}\,d\frac{1}{r}\right.\right. \\
& \qquad \left.\left.+\frac{8}{\rho}\left(d\frac{1}{r}\right)^2+\left(\frac{10}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)d^2\frac{1}{\rho}+\frac{9}{r\rho}\,d^2\frac{1}{r}\right]-d^4\frac{1}{\rho}\right\}\cos\alpha \\
& +5\,ds^2\left[2\,ds^2\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{1}{\rho}\,d\frac{1}{\rho}+\frac{1}{r}\,d\frac{1}{r}\right)-2\,d\frac{1}{\rho}\,d^2\frac{1}{\rho}\right. \\
& \qquad \left.-2\,d\frac{1}{r}\,d^2\frac{1}{r}-\frac{1}{\rho}\,d^3\frac{1}{\rho}-\frac{1}{r}\,d^3\frac{1}{r}\right]\cos\xi \\
& +ds\left\{ds^2\left[-\frac{ds^2}{r}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)^2+\frac{8}{r}\left(d\frac{1}{\rho}\right)^2+\frac{7}{\rho}\,d\frac{1}{\rho}\,d\frac{1}{r}\right.\right. \\
& \qquad \left.\left.+\frac{15}{r}\left(d\frac{1}{r}\right)^2+\frac{9}{r\rho}\,d^2\frac{1}{\rho}+\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{10}{r^2}\right)d^2\frac{1}{r}\right]-d^4\frac{1}{r}\right\}\cos\lambda,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d^5\cos\lambda = {} & ds^2\left\{ds^2\left[\frac{1}{r}\left(\frac{6}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)d\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho}\left(\frac{4}{\rho^2}+\frac{9}{r^2}\right)d\frac{1}{r}\right]\right. \\
& \qquad \left.-6\,d\frac{1}{\rho}\,d^2\frac{1}{r}-4\,d\frac{1}{r}\,d^2\frac{1}{\rho}-\frac{1}{r}\,d^3\frac{1}{\rho}-\frac{4}{\rho}\,d^3\frac{1}{r}\right\}\cos\alpha \\
& +ds\left\{ds^2\left[\frac{ds^2}{r}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)^2-\frac{3}{r}\left(d\frac{1}{\rho}\right)^2-\frac{12}{\rho}\,d\frac{1}{\rho}\,d\frac{1}{r}\right.\right. \\
& \qquad \left.\left.-\frac{15}{r}\left(d\frac{1}{r}\right)^2-\frac{4}{r\rho}\,d^2\frac{1}{\rho}-2\left(\frac{3}{\rho^2}+\frac{5}{r^2}\right)d^2\frac{1}{r}\right]+d^4\frac{1}{r}\right\}\cos\xi \\
& +5\,ds^2\left\{\frac{ds^2}{r}\left[\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{2}{r^2}\right)d\frac{1}{r}+\frac{1}{r\rho}\,d\frac{1}{\rho}\right]-2\,d\frac{1}{r}\,d^2\frac{1}{r}-\frac{1}{r}\,d^3\frac{1}{r}\right\}\cos\lambda;
\end{aligned}
$$

$$(54)\quad d^6\cos\alpha = ds^2\Big\{-\frac{ds^4}{\rho^2}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)^2 + ds^2\Big[5\left(\frac{9}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)\left(d\frac{1}{\rho}\right)^2+\frac{32}{r\rho}d\frac{1}{\rho}d\frac{1}{r}$$
$$+\frac{8}{\rho^2}\left(d\frac{1}{r}\right)^2+\frac{1}{\rho}\left(\frac{20}{\rho^2}+\frac{11}{r^2}\right)d^2\frac{1}{\rho}+\frac{9}{r\rho^2}d^2\frac{1}{r}\Big]$$
$$-10\left(d^2\frac{1}{\rho}\right)^2-15\,d\frac{1}{\rho}d^3\frac{1}{\rho}-\frac{6}{\rho}d^4\frac{1}{\rho}\Big\}\cos\alpha$$

$$+ds\Big\{5\,ds^2\Big[ds^2\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{3}{\rho^2}d\frac{1}{\rho}+\frac{1}{r^2}d\frac{1}{\rho}+\frac{2}{r\rho}d\frac{1}{r}\right)-3\left(d\frac{1}{\rho}\right)^3$$
$$-3d\frac{1}{\rho}\left(d\frac{1}{r}\right)^2-\frac{12}{\rho}d\frac{1}{\rho}d^2\frac{1}{\rho}-\frac{4}{r}d\frac{1}{\rho}d^2\frac{1}{r}-\frac{6}{r}d\frac{1}{r}d^2\frac{1}{\rho}$$
$$-\frac{2}{\rho}d\frac{1}{r}d^2\frac{1}{r}-\left(\frac{3}{\rho^2}+\frac{2}{r^2}\right)d^3\frac{1}{\rho}-\frac{1}{r\rho}d^3\frac{1}{r}\Big]+d^5\frac{1}{\rho}\Big\}\cos\xi$$

$$+ds^2\Big\{-\frac{ds^4}{r\rho}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)^2+ds^2\Big[\frac{33}{r\rho}\left(d\frac{1}{\rho}\right)^2+6\left(\frac{2}{\rho^2}+\frac{5}{r^2}\right)d\frac{1}{\rho}d\frac{1}{r}+\frac{15}{r\rho}\left(d\frac{1}{r}\right)^2$$
$$+\frac{1}{r}\left(\frac{19}{\rho^2}+\frac{10}{r^2}\right)d^2\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{10}{r^2}\right)d^2\frac{1}{r}\Big]$$
$$-5d\frac{1}{\rho}d^3\frac{1}{r}-10\,d^2\frac{1}{\rho}d^2\frac{1}{r}-10\,d\frac{1}{r}d^3\frac{1}{\rho}-\frac{5}{r}d^4\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho}d^4\frac{1}{r}\Big\}\cos\lambda,$$

$$(54)\quad d^6\cos\xi = ds\Big\{ds^2\Big[-ds^2\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{15}{\rho^2}d\frac{1}{\rho}+\frac{1}{r^2}d\frac{1}{\rho}+\frac{14}{r\rho}d\frac{1}{r}\right)+15\left(d\frac{1}{\rho}\right)^3$$
$$+15\,d\frac{1}{\rho}\left(d\frac{1}{r}\right)^2+\frac{16}{r}d\frac{1}{\rho}d^2\frac{1}{r}+\frac{60}{\rho}d\frac{1}{\rho}d^2\frac{1}{\rho}$$
$$+\frac{9}{r}d\frac{1}{r}d^2\frac{1}{\rho}+\frac{35}{\rho}d\frac{1}{r}d^2\frac{1}{r}+\left(\frac{15}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)d^3\frac{1}{\rho}+\frac{14}{r\rho}d^2\frac{1}{r}\Big]-d^5\frac{1}{\rho}\Big\}\cos\alpha$$

$$+ds^2\Big\{ds^2\Big[-ds^2\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)^3+3\left(\frac{15}{\rho^2}+\frac{6}{r^2}\right)\left(d\frac{1}{\rho}\right)^2+\frac{54}{r\rho}d\frac{1}{\rho}d\frac{1}{r}$$
$$+3\left(\frac{6}{\rho^2}+\frac{15}{r^2}\right)\left(d\frac{1}{r}\right)^2+\frac{20}{\rho}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)d^2\frac{1}{\rho}+\frac{20}{r}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)d^2\frac{1}{r}\Big]$$
$$-15\,d\frac{1}{\rho}d^3\frac{1}{\rho}-10\left(d^2\frac{1}{\rho}\right)^2-\frac{6}{\rho}d^4\frac{1}{\rho}-15\,d\frac{1}{r}d^3\frac{1}{r}-10\left(d^2\frac{1}{r}\right)^2-\frac{6}{r}d^4\frac{1}{r}\Big\}\cos\xi$$

$$+ds\Big\{ds^2\Big[-ds^2\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{14}{r\rho}d\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho^2}d\frac{1}{r}+\frac{15}{r^2}d\frac{1}{r}\right)+\frac{35}{r}d\frac{1}{\rho}d^2\frac{1}{\rho}$$
$$+\frac{9}{\rho}d\frac{1}{\rho}d^2\frac{1}{r}+15\,d\frac{1}{r}\left(d\frac{1}{\rho}\right)^2+\frac{16}{\rho}d\frac{1}{r}d^2\frac{1}{\rho}$$
$$+\frac{14}{r\rho}d^3\frac{1}{\rho}+\frac{60}{r}d\frac{1}{r}d^2\frac{1}{r}+15\left(d\frac{1}{r}\right)^3+\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{15}{r^2}\right)d^3\frac{1}{r}\Big]-d^5\frac{1}{r}\Big\}\cos\lambda,$$

$$
\begin{aligned}
(54)\quad d^6\cos\lambda = ds^2\Bigg\{ & -\frac{ds^4}{r\rho}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)^2 + ds^2\Bigg[\frac{15}{r\rho}\left(d\frac{1}{\rho}\right)^2 + 6\left(\frac{5}{\rho^2}+\frac{2}{r^2}\right) d\frac{1}{\rho}\, d\frac{1}{r} \\
& + \frac{1}{r}\left(\frac{10}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right) d^2\frac{1}{\rho} + \frac{33}{r\rho}\left(d\frac{1}{r}\right)^2 \\
& + \frac{1}{\rho}\left(\frac{10}{\rho^2}+\frac{19}{r^2}\right) d^2\frac{1}{r}\Bigg] \\
& - 10\, d\frac{1}{\rho}\, d^3\frac{1}{r} - 10\, d^2\frac{1}{\rho}\, d^2\frac{1}{r} - 5\, d\frac{1}{r}\, d^3\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r}\, d^4\frac{1}{\rho} - \frac{5}{\rho}\, d^4\frac{1}{r}\Bigg\}\cos\alpha \\
+ ds\Bigg\{ & 5\, ds^2\Bigg[ds^2\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{2}{r\rho}\, d\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho^2}\, d\frac{1}{r} + \frac{3}{r^2}\, d\frac{1}{r}\right) \\
& - 3\, d\frac{1}{r}\left(d\frac{1}{\rho}\right)^2 - \frac{2}{r}\, d\frac{1}{\rho}\, d^2\frac{1}{\rho} - \frac{6}{\rho}\, d\frac{1}{\rho}\, d^2\frac{1}{r} - \frac{4}{\rho}\, d\frac{1}{r}\, d^2\frac{1}{\rho} \\
& - \frac{1}{r\rho}\, d^3\frac{1}{\rho} - 3\left(d\frac{1}{r}\right)^2 - \frac{12}{r}\, d\frac{1}{r}\, d^2\frac{1}{r} - \left(\frac{2}{\rho^2}+\frac{3}{r^2}\right) d^3\frac{1}{r}\Bigg] + d^5\frac{1}{r}\Bigg\}\cos\xi \\
+ ds^2\Bigg\{ & -\frac{ds^4}{r^2}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)^2 + ds^2\Bigg[\frac{8}{r^2}\left(d\frac{1}{\rho}\right)^2 + \frac{32}{r\rho}\, d\frac{1}{\rho}\, d\frac{1}{r} + \frac{9}{r^2\rho}\, d^2\frac{1}{\rho} \\
& + 5\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{9}{r^2}\right)\left(d\frac{1}{r}\right)^2 + \frac{1}{r}\left(\frac{11}{\rho^2}+\frac{20}{r^2}\right) d^2\frac{1}{r}\Bigg] \\
& - 15\, d\frac{1}{r}\, d^3\frac{1}{r} - 10\left(d^2\frac{1}{r}\right)^2 - \frac{6}{r}\, d^4\frac{1}{r}\Bigg\}\cos\lambda.
\end{aligned}
$$

8. Voici quelques résultats déduits de ces formules, et dont nous aurons besoin ultérieurement.

Cherchons en premier lieu les différences de coordonnées de deux points infiniment voisins. De la formule

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha,$$

on déduit, par celle de Taylor,

$$
\begin{aligned}
\delta x = ds\cos\alpha + \frac{ds}{2}\, d\cos\alpha + \frac{ds}{6}\, d^2\cos\alpha + \frac{ds}{24}\, d^3\cos\alpha \\
+ \frac{ds}{120}\, d^4\cos\alpha + \frac{ds}{720}\, d^5\cos\alpha + \frac{ds}{5040}\, d^6\cos\alpha,
\end{aligned}
$$

en s'arrêtant aux termes du septième ordre. Si l'on remplace $\cos\alpha$ et

ses différentielles par les valeurs du n° 7, il vient

$$
\delta x = \left\{
\begin{aligned}
& ds - \frac{ds^3}{6\rho^2} - \frac{ds^3}{8\rho} d\frac{1}{\rho} + \frac{ds^5}{120\rho^2}\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{ds^3}{30\rho} d^2\frac{1}{\rho} - \frac{ds^3}{40}\left(d\frac{1}{\rho}\right)^2 \\
& + \frac{ds^5}{144\rho}\left(\frac{2}{\rho^2} d\frac{1}{\rho} + \frac{1}{r^2} d\frac{1}{\rho} + \frac{1}{r\rho} d\frac{1}{r}\right) \\
& - \frac{ds^3}{72} d\frac{1}{\rho} d^2\frac{1}{\rho} - \frac{ds^3}{144\rho} d^3\frac{1}{\rho} - \frac{ds^7}{5040\rho^2}\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}\right)^2 \\
& + \frac{ds^5}{5040\rho}\left[\frac{35}{\rho}\left(d\frac{1}{\rho}\right)^2 + \frac{27}{r} d\frac{1}{r} d\frac{1}{\rho} + \left(\frac{20}{\rho^2} + \frac{11}{r^2}\right) d^2\frac{1}{\rho} + \frac{9}{r\rho} d^2\frac{1}{r} + \frac{8}{\rho}\left(d\frac{1}{r}\right)^2\right] \\
& + \frac{ds^5}{1008}\left(\frac{2}{\rho^2} d\frac{1}{\rho} + \frac{1}{r^2} d\frac{1}{\rho} + \frac{1}{r\rho} d\frac{1}{r}\right) d\frac{1}{\rho} \\
& - \frac{ds^3}{504}\left(d^2\frac{1}{\rho}\right)^2 - \frac{ds^3}{840\rho} d^4\frac{1}{\rho} - \frac{ds^3}{336} d\frac{1}{\rho} d^3\frac{1}{\rho}
\end{aligned}
\right\} \cos\alpha
$$

$$
+ \left\{
\begin{aligned}
& \frac{ds^2}{2\rho} + \frac{ds^2}{6} d\frac{1}{\rho} - \frac{ds^2}{24}\left[\frac{ds^2}{\rho}\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}\right) - d^2\frac{1}{\rho}\right] \\
& + \frac{ds^2}{120} d^3\frac{1}{\rho} - \frac{ds^4}{40}\left(\frac{2}{\rho^2} d\frac{1}{\rho} + \frac{1}{r^2} d\frac{1}{\rho} + \frac{1}{r\rho} d\frac{1}{r}\right) \\
& + \frac{ds^2}{720} d^4\frac{1}{\rho} + \frac{ds^4}{720}\left[\frac{ds^2}{\rho}\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}\right)^2 - \frac{15}{\rho}\left(d\frac{1}{\rho}\right)^2 - \frac{3}{\rho}\left(d\frac{1}{r}\right)^2\right. \\
& \qquad \left. - \frac{12}{r} d\frac{1}{\rho} d\frac{1}{r} - 2\left(\frac{5}{\rho^2} + \frac{3}{r^2}\right) d^2\frac{1}{\rho} - \frac{4}{r\rho} d^2\frac{1}{r}\right] \\
& + \frac{ds^2}{5040} d^5\frac{1}{\rho} + \frac{ds^6}{1008}\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{3}{\rho^2} d\frac{1}{\rho} + \frac{1}{r^2} d\frac{1}{\rho} + \frac{2}{r\rho} d\frac{1}{r}\right) \\
& - \frac{ds^4}{1008}\left[3\left(d\frac{1}{\rho}\right)^3 + 3 d\frac{1}{\rho}\left(d\frac{1}{r}\right)^2 + \frac{12}{\rho} d\frac{1}{\rho} d^2\frac{1}{\rho} + \frac{4}{r} d\frac{1}{\rho} d^2\frac{1}{r}\right. \\
& \qquad \left. + \frac{6}{r} d\frac{1}{r} d^2\frac{1}{\rho} + \frac{2}{\rho} d\frac{1}{r} d^2\frac{1}{r} + \left(\frac{3}{\rho^2} + \frac{2}{r^2}\right) d^3\frac{1}{\rho} + \frac{1}{r\rho} d^3\frac{1}{r}\right]
\end{aligned}
\right\} \cos\xi
$$

$$
+\left\{\begin{aligned}
&-\frac{ds^3}{6r\rho}-\frac{ds^3}{24}\left(\frac{2}{r}d\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho}d\frac{1}{r}\right)\\
&+\frac{ds^3}{120}\left[\frac{ds^2}{r\rho}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)-3d\frac{1}{r}d\frac{1}{\rho}-\frac{3}{r}d^2\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho}d^2\frac{1}{r}\right]\\
&+\frac{ds^3}{720}\left[ds^2\left(\frac{4}{r^3}d\frac{1}{\rho}+\frac{9}{r\rho^2}d\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho^3}d\frac{1}{r}+\frac{6}{r^2\rho}d\frac{1}{r}\right)\right.\\
&\qquad\left.-\frac{4}{r}d^3\frac{1}{\rho}-6d\frac{1}{r}d^2\frac{1}{\rho}-4d^2\frac{1}{r}d\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho}d^3\frac{1}{r}\right]\\
&+\frac{ds^3}{5040}\left\{-\frac{ds^4}{r\rho}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)^2+ds^2\left[\frac{1}{r}\left(\frac{10}{r^2}+\frac{19}{\rho^2}\right)d^2\frac{1}{\rho}+6\left(\frac{5}{r^2}+\frac{2}{\rho^2}\right)d\frac{1}{r}d\frac{1}{\rho}\right.\right.\\
&\qquad\left.+\frac{33}{r\rho}\left(d\frac{1}{\rho}\right)^2+\frac{15}{r\rho}\left(d\frac{1}{r}\right)^2+\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{10}{r^2}\right)d^2\frac{1}{r}\right]\\
&\qquad\left.-\frac{5}{r}d^4\frac{1}{\rho}-10d\frac{1}{r}d^3\frac{1}{\rho}-10d^2\frac{1}{r}d^2\frac{1}{\rho}-5d\frac{1}{\rho}d^3\frac{1}{r}-\frac{1}{\rho}d^4\frac{1}{r}\right\}
\end{aligned}\right\}\cos\lambda.
$$

Pour passer de δx à δy, puis à δz, il suffit de remplacer α, ξ, λ par β, η, μ, puis par γ, ζ, ν.

Cherchons, en deuxième lieu, la distance rectiligne de deux points A et A′ infiniment voisins. On a

$$\overline{AA'}^2=\delta x^2+\delta y^2+\delta z^2,$$

et, en remplaçant δx, δy, δz par les valeurs précédentes, il vient

$$
\begin{aligned}
\overline{AA'}^2=ds^2&-\frac{ds^4}{12\rho^2}-\frac{ds^4}{12\rho}d\frac{1}{\rho}+\frac{ds^6}{360\rho^2}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)\\
&-\frac{ds^4}{45}\left(d\frac{1}{\rho}\right)^2-\frac{ds^4}{40\rho}d^2\frac{1}{\rho}+\frac{ds^6}{180\rho^3}d^3\frac{1}{\rho}\\
&-\frac{ds^4}{72}d\frac{1}{\rho}d^2\frac{1}{\rho}+\frac{ds^6}{360r\rho}\left(\frac{1}{r}d\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho}d\frac{1}{r}\right)-\frac{ds^4}{180\rho}d^3\frac{1}{\rho}.
\end{aligned}
$$

Extrayons la racine carrée, nous aurons

$$
\begin{aligned}
55)\quad AA'=ds&-\frac{ds^3}{24\rho^2}-\frac{ds^3}{24\rho}d\frac{1}{\rho}+\frac{ds^5}{240\rho^2}\left(\frac{1}{8\rho^2}+\frac{11}{3r^2}\right)\\
&-\frac{ds^3}{90}\left(d\frac{1}{\rho}\right)^2-\frac{ds^3}{80\rho}d^2\frac{1}{\rho}+\frac{ds^5}{960\rho^3}d\frac{1}{\rho}\\
&+\frac{ds^5}{720r\rho}\left(\frac{1}{r}d\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho}d\frac{1}{r}\right)-\frac{ds^3}{144}d\frac{1}{\rho}d^2\frac{1}{\rho}-\frac{ds^3}{360\rho}d^3\frac{1}{\rho}.
\end{aligned}
$$

Cherchons, en troisième lieu, l'angle V de la binormale en un point A avec la normale principale en un point A′ infiniment voisin. On a

$$\cos V = \cos\lambda \cos\xi' + \cos\mu \cos\eta' + \cos\nu \cos\zeta',$$

et, par la formule de Taylor,

$$\begin{aligned}\cos V = {} & \cos\lambda \cos\xi + \cos\mu \cos\eta + \cos\nu \cos\zeta + \cos\lambda\, d\cos\xi + \cos\mu\, d\cos\eta \\ & + \cos\nu\, d\cos\zeta + \frac{1}{1.2}(\cos\lambda\, d^2\cos\xi + \cos\mu\, d^2\cos\eta + \cos\nu\, d^2\cos\zeta) + \ldots.\end{aligned}$$

Remplaçons $\cos\lambda \cos\xi + \cos\mu \cos\eta + \cos\nu \cos\zeta$ par zéro, et les différentielles successives de $\cos\xi$, $\cos\eta$, $\cos\zeta$ par les valeurs du n° 7, nous aurons

$$\begin{aligned}(56)\quad \cos V = {} & -\frac{ds}{r} - \frac{ds}{2} d\frac{1}{r} + \frac{ds}{6}\left[\frac{ds^2}{r}\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}\right) - d^2\frac{1}{r}\right] \\ & + \frac{ds}{24}\left\{ds^2\left[\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{6}{r^2}\right) d\frac{1}{r} + \frac{5}{r\rho} d\frac{1}{\rho}\right] - d^3\frac{1}{r}\right\} \\ & + \frac{ds}{120}\left\{ds^2\left[-\frac{ds^2}{r}\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}\right)^2 + \frac{8}{r}\left(d\frac{1}{\rho}\right)^2 + \frac{15}{r}\left(d\frac{1}{r}\right)^2\right.\right. \\ & \qquad \left.\left. + \frac{1}{\rho^2} d^2\frac{1}{r} + \frac{10}{r^2} d^2\frac{1}{r} + \frac{9}{r\rho} d^2\frac{1}{\rho} + \frac{7}{\rho} d\frac{1}{r} d\frac{1}{\rho}\right] - d^4\frac{1}{r}\right\} \\ & + \frac{ds}{720}\left\{ds^2\left[-ds^2\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{1}{\rho^2} d\frac{1}{r} + \frac{14}{r\rho} d\frac{1}{\rho} + \frac{15}{r^2} d\frac{1}{r}\right)\right.\right. \\ & \qquad + \frac{35}{r} d\frac{1}{\rho} d^2\frac{1}{\rho} + \frac{60}{r} d\frac{1}{r} d^2\frac{1}{r} \\ & \qquad + 15 d\frac{1}{r}\left(d\frac{1}{\rho}\right)^2 + 15\left(d\frac{1}{r}\right)^3 + \frac{9}{\rho} d\frac{1}{\rho} d^2\frac{1}{r} \\ & \qquad \left.\left. + \frac{16}{\rho} d\frac{1}{r} d^2\frac{1}{\rho} + \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{15}{r^2}\right) d^3\frac{1}{r} + \frac{14}{r\rho} d^3\frac{1}{\rho}\right] - d^5\frac{1}{r}\right\}.\end{aligned}$$

Cherchons, en dernier lieu, l'angle W de la normale principale en un point A avec la normale principale en un point A′ infiniment voisin. On a

$$\cos W = \cos\xi \cos\xi' + \cos\eta \cos\eta' + \cos\zeta \cos\zeta',$$

et, par la formule de Taylor,

$$\cos W = \cos^2\xi + \cos^2\eta + \cos^2\zeta + \cos\xi\, d\cos\xi + \cos\eta\, d\cos\eta$$
$$+ \cos\zeta\, d\cos\zeta + \frac{1}{1.2}(\cos\xi\, d^2\cos\xi + \cos\eta\, d^2\cos\eta + \cos\zeta\, d^2\cos\zeta) + \ldots.$$

Remplaçons $\cos^2\xi + \cos^2\eta + \cos^2\zeta$ par l'unité, et les différentielles successives de $\cos\xi$, $\cos\eta$, $\cos\zeta$ par les valeurs du n° 7, nous aurons

$$(57)\quad \cos W = 1 - \frac{ds^2}{2}\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{ds^2}{2}\left(\frac{1}{\rho}\, d\frac{1}{\rho} + \frac{1}{r}\, d\frac{1}{r}\right)$$
$$+ \frac{ds^2}{24}\left[ds^2\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{\rho}\, d^2\frac{1}{\rho} + \frac{1}{r}\, d^2\frac{1}{r}\right) - 3\left(d\frac{1}{\rho}\right)^2 - 3\left(d\frac{1}{r}\right)^2\right]$$
$$+ \frac{ds^2}{24}\left[2\, ds^2\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{1}{\rho}\, d\frac{1}{\rho} + \frac{1}{r}\, d\frac{1}{r}\right)\right.$$
$$\left. - 2\left(d\frac{1}{\rho}\, d^2\frac{1}{\rho} + d\frac{1}{r}\, d^2\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{\rho}\, d^3\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r}\, d^3\frac{1}{r}\right]$$
$$+ \frac{ds^2}{720}\left\{ds^2\left[-ds^2\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}\right)^3 + \left(\frac{45}{\rho^2} + \frac{18}{r^2}\right)\left(d\frac{1}{\rho}\right)^2\right.\right.$$
$$+ \frac{54}{r\rho}\, d\frac{1}{r}\, d\frac{1}{\rho} + \left(\frac{18}{\rho^2} + \frac{45}{r^2}\right)\left(d\frac{1}{r}\right)^2$$
$$\left. + 20\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{1}{\rho}\, d^2\frac{1}{\rho} + \frac{1}{r}\, d^2\frac{1}{r}\right)\right]$$
$$- 10\left(d^2\frac{1}{\rho}\right)^2 - 10\left(d^2\frac{1}{r}\right)^2 - 15\, d\frac{1}{\rho}\, d^3\frac{1}{\rho}$$
$$\left. - 15\, d\frac{1}{r}\, d^3\frac{1}{r} - \frac{6}{\rho}\, d^4\frac{1}{\rho} - \frac{6}{r}\, d^4\frac{1}{r}\right\}.$$

IV. — *Formules de M. Laguerre.*

9. Considérons une courbe tracée sur une surface quelconque, et soient, comme au n° 6, α, β, γ, ξ, η, ζ, λ, μ, ν les angles que font avec les axes les arêtes du trièdre lié à la courbe; soient de même, comme au n° 4, a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', les cosinus des angles que font avec les axes les arêtes du trièdre lié à la surface. La position relative

des deux trièdres sera déterminée par l'angle i de la droite AT avec la droite AX et par l'angle ϖ de la droite AN avec la droite AZ; de sorte que, en appliquant les formules d'Euler, on aura

$$(58)\quad \left\{\begin{aligned}
&a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma = \cos i,\\
&a'\cos\alpha + b'\cos\beta + c'\cos\gamma = \sin i,\\
&a''\cos\alpha + b''\cos\beta + c''\cos\gamma = 0;\\
&a\cos\xi + b\cos\eta + c\cos\zeta = \sin\varpi\sin i,\\
&a'\cos\xi + b'\cos\eta + c'\cos\zeta = -\sin\varpi\cos i,\\
&a''\cos\xi + b''\cos\eta + c''\cos\zeta = \cos\varpi;\\
&a\cos\lambda + b\cos\mu + c\cos\nu = -\cos\varpi\sin i,\\
&a'\cos\lambda + b'\cos\mu + c'\cos\nu = \cos\varpi\cos i,\\
&a''\cos\lambda + b''\cos\mu + c''\cos\nu = \sin\varpi.
\end{aligned}\right.$$

Différentions ces neuf équations, remplaçons da, db, dc, da', db', dc', da'', db'', dc'' par leurs valeurs (14), $d\cos\alpha$, $d\cos\beta$, $d\cos\gamma$, $d\cos\xi$, $d\cos\eta$, $d\cos\zeta$, $d\cos\lambda$, $d\cos\mu$, $d\cos\nu$ par leurs valeurs (49), enfin tenons compte des équations (58); les neuf équations provenant de la différentiation se réduiront à trois distinctes :

$$(59)\quad \left\{\begin{aligned}
&d\varpi - \frac{ds}{r} = (\mathrm{P}\,du + \mathrm{S}\,dv)\sin i + (\mathrm{R}\,du + \mathrm{Q}\,dv)\cos i,\\
&\frac{ds}{\rho}\cos\varpi = (\mathrm{P}\,du + \mathrm{S}\,dv)\cos i - (\mathrm{R}\,du + \mathrm{Q}\,dv)\sin i,\\
&-\frac{ds}{\rho}\sin\varpi = di + \mathrm{M}\,du + \mathrm{N}\,dv.
\end{aligned}\right.$$

Ce sont les formules de M. Laguerre. Quant à l'angle i, il est lié à u et à v par les formules

$$(60)\qquad ds\cos i = \mathrm{E}\,du,\quad ds\sin i = \mathrm{G}\,dv,$$

si les coordonnées sont rectangulaires; par les formules

$$(60)'\qquad ds\cos i = (\mathrm{E}\,du + \mathrm{G}\,dv)\cos\omega,\quad ds\sin i = (\mathrm{E}\,du - \mathrm{G}\,dv)\sin\omega,$$

si les coordonnées sont obliques.

Des formules (38) et (60), (38)′ et (60)′, on déduit les suivantes :

$$(61)\quad \left\{\begin{aligned}
du &= \frac{ds\cos i}{E},\\
dv &= \frac{ds\sin i}{G},\\
\frac{E}{G} &= \frac{R}{-S},\\
\frac{du}{dv} &= \frac{G\cos i}{E\sin i} = \frac{-S\cos i}{R\sin i},\\
\frac{\sin i}{\cos i} &= \frac{G\,dv}{E\,du} = \frac{-S\,dv}{R\,du};
\end{aligned}\right.$$

$$(61)'\quad \left\{\begin{aligned}
du &= \frac{ds\sin(\omega+i)}{E\sin 2\omega},\\
dv &= \frac{ds\sin(\omega-i)}{G\sin 2\omega},\\
\frac{E}{G} &= \frac{P\cos\omega+R\sin\omega}{S\cos\omega-Q\sin\omega},\\
\frac{du}{dv} &= \frac{G\sin(\omega+i)}{E\sin(\omega-i)} = \frac{S\cos\omega-Q\sin\omega}{P\cos\omega+R\sin\omega}\,\frac{\sin(\omega+i)}{\sin(\omega-i)},\\
\frac{\sin i}{\cos i} &= \frac{E\,du-G\,dv}{E\,du+G\,dv}\,\frac{\sin\omega}{\cos\omega}\\
&= \frac{(P\cos\omega+R\sin\omega)\,du-(S\cos\omega-Q\sin\omega)\,dv}{(P\cos\omega+R\sin\omega)\,du+(S\cos\omega-Q\sin\omega)\,dv}\,\frac{\sin\omega}{\cos\omega};
\end{aligned}\right.$$

qui nous serviront pour des transformations ultérieures.

SECTION II.

ÉTUDE D'UNE SURFACE AUTOUR D'UN DE SES POINTS.

I. — *Théorème d'Euler.*

10. Considérons une série de courbes issues d'un point A d'une surface et dont les plans osculateur scontiennent la normale en A; leurs

rayons de courbure seront liés à leurs directions par la deuxième des équations (59), où $\cos\varpi$ est remplacé par l'unité :

$$(62)\qquad \frac{ds}{\rho} = (\mathrm{P}\,du + \mathrm{S}\,dv)\cos i - (\mathrm{R}\,du + \mathrm{Q}\,dv)\sin i.$$

Éliminons du et dv à l'aide des équations (61) et (61)′, et divisons par ds; nous aurons

$$63)\qquad \frac{\mathrm{EG}}{\rho} = \mathrm{GP}\cos^2 i + (\mathrm{ES} - \mathrm{GR})\sin i\cos i - \mathrm{EQ}\sin^2 i,$$

et

$$(63)'\qquad \begin{aligned}\frac{\mathrm{EG}\sin 2\omega}{\rho} = {} & (\mathrm{ES} + \mathrm{GP})\sin\omega\cos^2 i \\ & - [(\mathrm{ES} - \mathrm{GP})\cos\omega + (\mathrm{GR} + \mathrm{EQ})\sin\omega]\sin i\cos \\ & - (\mathrm{GR} - \mathrm{EQ})\cos\omega\sin^2 i.\end{aligned}$$

Or on sait, par l'algèbre élémentaire, que le second membre de ces équations est susceptible d'un maximum et d'un minimum pour les deux valeurs de l'angle i données par la formule

$$(64)\qquad \operatorname{tang} 2\alpha = \frac{\mathrm{ES} - \mathrm{GR}}{\mathrm{GP} + \mathrm{EQ}},$$

et par la suivante

$$(64)'\qquad \operatorname{tang} 2\alpha = -\frac{(\mathrm{ES} - \mathrm{GP})\cos\omega + (\mathrm{GR} + \mathrm{EQ})\sin\omega}{(\mathrm{ES} + \mathrm{GP})\sin\omega + (\mathrm{GR} - \mathrm{EQ})\cos\omega}.$$

Soient ρ_1 et ρ_2 les valeurs de ρ déduites de l'équation (63) ou de l'équation (63)′, lorsqu'on y remplace i par les valeurs de α tirées de l'équation (64) ou de l'équation (64)′; on a

$$(65)\qquad \left\{\begin{aligned}\frac{\mathrm{EG}}{\rho_1} &= \mathrm{GP}\cos^2\alpha + (\mathrm{ES} - \mathrm{GR})\sin\alpha\cos\alpha - \mathrm{EQ}\sin^2\alpha,\\ \frac{\mathrm{EG}}{\rho_2} &= \mathrm{GP}\sin^2\alpha - (\mathrm{ES} - \mathrm{GR})\sin\alpha\cos\alpha - \mathrm{EQ}\cos^2\alpha,\end{aligned}\right.$$

et

$$(65)' \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{EG\sin 2\omega}{\rho_1} &= (ES+GP)\sin\omega\cos^2\alpha \\ &\quad -[(ES-GP)\cos\omega+(GR+EQ)\sin\omega]\sin\alpha\cos\alpha \\ &\quad -(GR-EQ)\cos\omega\sin^2\alpha, \\ \frac{EG\sin 2\omega}{\rho_2} &= (ES+GP)\sin\omega\sin^2\alpha \\ &\quad +[(ES-GP)\cos\omega+(GR+EQ)\sin\omega]\sin\alpha\cos\alpha \\ &\quad -(GR-EQ)\cos\omega\cos^2\alpha. \end{aligned} \right.$$

Posons

$$(66) \qquad i=\alpha+\theta$$

dans les équations (63) et (63)'; multiplions respectivement par $\cos^2\theta$ et par $\sin^2\theta$ la première et la seconde des équations (65) et (65)', et ajoutons-les membre à membre avec les équations (63) et (63)'; nous aurons, en tenant compte des relations (64) et (64)',

$$(67) \qquad \frac{1}{\rho}=\frac{\cos^2\theta}{\rho_1}+\frac{\sin^2\theta}{\rho_2}.$$

C'est la formule d'Euler. On donne le nom de *sections principales* à celles qui correspondent aux rayons de courbure ρ_1 et ρ_2, et dont les directions sont données par l'une des formules (64) ou (64)'.

II. — *Théorème de Gauss.*

11. Il reste à calculer les rayons de courbure principaux ρ_1 et ρ_2. A cet effet, éliminons α entre les équations (64), (64)' et les équations (63), (63)', où l'on remplace préalablement i par α; les valeurs cherchées seront fournies par l'équation du second degré

$$(68) \qquad \frac{1}{\rho^2}-\frac{GP-EQ}{EG}\frac{1}{\rho}+\frac{RS-PQ}{EG}=0,$$

ou par la suivante

$$(68)' \qquad \frac{1}{\rho^2}-\frac{(ES+GP)\sin\omega-(GR-EQ)\cos\omega}{EG\sin 2\omega}\frac{1}{\rho}-\frac{RS-PQ}{EG\sin 2\omega}=0.$$

On en tire

$$(69)\qquad \frac{1}{\rho_1\rho_2}=\frac{RS-PQ}{EG},\qquad (69)'\quad \frac{1}{\rho_1\rho_2}=-\frac{RS-PQ}{EG\sin 2\omega},$$

et, en remplaçant RS — PQ par sa valeur tirée de la première des équations (19),

$$(70)\qquad \frac{1}{\rho_1\rho_2}=\frac{\dfrac{dM}{dv}-\dfrac{dN}{du}}{EG},\qquad (70)'\quad \frac{1}{\rho_1\rho_2}=-\frac{\dfrac{dM}{dv}-\dfrac{dN}{du}}{EG\sin 2\omega}.$$

Mais les formules (38) et (38)′ donnent

$$(71)\quad \begin{cases} M=-\dfrac{1}{G}\dfrac{dE}{dv}, \\ N=+\dfrac{1}{E}\dfrac{dG}{du}, \end{cases}\qquad (71)'\quad \begin{cases} M=+\dfrac{d\omega}{du}+\dfrac{1}{G\sin 2\omega}\left(\dfrac{dE}{dv}-\cos 2\omega\dfrac{dG}{du}\right), \\ N=-\dfrac{d\omega}{dv}-\dfrac{1}{E\sin 2\omega}\left(\dfrac{dG}{du}-\cos 2\omega\dfrac{dE}{dv}\right); \end{cases}$$

on a donc, en définitive,

$$(72)\qquad \frac{EG}{\rho_1\rho_2}=-\frac{d}{dv}\left(\frac{1}{G}\frac{dE}{dv}\right)-\frac{d}{du}\left(\frac{1}{E}\frac{dG}{du}\right),$$

ou

$$(72)'\qquad \frac{EG\sin 2\omega}{\rho_1\rho_2}=-\frac{d}{dv}\left[\frac{d\omega}{du}+\frac{1}{G\sin 2\omega}\left(\frac{dE}{dv}-\cos 2\omega\frac{dG}{du}\right)\right]$$
$$-\frac{d}{du}\left[\frac{d\omega}{dv}+\frac{1}{E\sin 2\omega}\left(\frac{dG}{du}-\cos 2\omega\frac{dE}{dv}\right)\right].$$

Il en résulte que l'expression $\frac{1}{\rho_1\rho_2}$ ne dépend que de E, G et ω, et conserve sa valeur dans les déformations de la surface qui n'altèrent pas ces trois fonctions. C'est le théorème de Gauss, qui a désigné cette expression sous le nom de *courbure sphérique* de la surface.

III. — *Théorème de Meusnier.*

12. Les rayons de courbure de toutes les sections normales d'une surface en un point étant connus, proposons-nous de trouver les rayons de courbure des sections obliques.

Le plan osculateur de la courbe considérée coupant le plan tangent

à la surface en A suivant une droite AT, si l'on désigne par i l'angle que fait AT avec la droite AX, par ϖ l'angle de la normale principale de la courbe avec la normale à la surface, par ρ' le rayon de courbure cherché, la deuxième des équations (59), traitée comme au n° 10, donne, par comparaison avec les équations (63) et (63)',

$$(73) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{\cos\varpi}{\rho'} \quad \text{ou} \quad \rho' = \rho\cos\varpi.$$

Le rayon de courbure de la section oblique est la projection, sur le plan de cette section, du rayon de courbure de la section normale tangente à la section oblique.

Ce théorème, dû à Meusnier, complète l'étude de la courbure au voisinage d'un point.

IV. — *Torsion géodésique.*

13. Occupons-nous maintenant de la distribution des normales. A cet effet, et pour profiter des formules du n° 7, considérons, à partir d'un point, les courbes dont les normales principales coïncident avec celles de la surface. Ces courbes, qu'on appelle *géodésiques*, ayant en tous leurs points leur plan osculateur normal à la surface, satisfont à l'équation différentielle

$$(74) \qquad di + M\,du + N\,dv = 0,$$

obtenue en faisant $\sin\varpi = 0$ dans la troisième des formules (59). Cette équation montre qu'on peut se donner arbitrairement du et dv, ou $\operatorname{tang} i$, et qu'alors di est déterminé. On en conclut que, par un point, passent une infinité de géodésiques, dont chacune est déterminée par sa tangente en ce point.

14. Proposons-nous de trouver l'angle formé par la normale à la surface en un point $(u + du, v + dv)$ avec le plan normal à la surface au point (u, v), dont la direction est déterminée par le rapport de du à dv. Pour cela, faisons passer une géodésique par les points (u, v), $(u + du, v + dv)$; elle sera, d'après ce qui précède, tangente au plan normal en (u, v), et l'angle cherché sera le complément de celui dési-

gné par V au n° 8, et dont la formule (56) donne le développement. En le désignant par t, et en se limitant aux termes du premier ordre, on aura donc

$$t = -\frac{ds}{r}. \tag{75}$$

D'autre part, la première des formules (59) donne, en y faisant $d\varpi = 0$,

$$-\frac{ds}{r} = (\mathrm{P}\,du + \mathrm{S}\,dv)\sin i + (\mathrm{R}\,du + \mathrm{Q}\,dv)\cos i, \tag{76}$$

d'où

$$t = (\mathrm{P}\,du + \mathrm{S}\,dv)\sin i + (\mathrm{R}\,du + \mathrm{Q}\,dv)\cos i. \tag{77}$$

Remplaçons du et dv par leurs valeurs (61) et (61)', il viendra

$$t = \frac{ds}{\mathrm{EG}}[\mathrm{ES}\sin^2 i + (\mathrm{GP} + \mathrm{EQ})\sin i\cos i + \mathrm{GR}\cos^2 i], \tag{78}$$

$$\begin{aligned} t = \frac{ds}{\mathrm{EG}\sin 2\omega}\Big\{ & -(\mathrm{ES} - \mathrm{GP})\cos\omega\sin^2 i \\ & + [(\mathrm{ES} + \mathrm{GP})\sin\omega + (\mathrm{GR} - \mathrm{EQ})\cos\omega]\sin i\cos i \\ & + (\mathrm{GR} + \mathrm{EQ})\sin\omega\cos^2 i\Big\}, \end{aligned} \tag{78'}$$

ou, en vertu des formules (38) et (38)', (64) et (64)',

$$t = -ds\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{E}\sin 2\alpha}\sin 2(i - \alpha), \tag{79}$$

$$t = -ds\frac{(\mathrm{GR} + \mathrm{EQ})\sin\omega}{\mathrm{EG}\sin 2\omega\sin 2\alpha}\sin 2(i - \alpha). \tag{79'}$$

Or, en retranchant membre à membre les formules (65) et (65)', et en tenant compte également des formules (38) et (38)', (64) et (64)', on a

$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right) = -\frac{2\mathrm{R}}{\sin 2\alpha}, \tag{80}$$

$$\mathrm{EG}\sin 2\omega\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right) = -\frac{2(\mathrm{GR} + \mathrm{EQ})\sin\omega}{\sin 2\alpha}; \tag{80'}$$

donc, par comparaison avec les formules (79) et (79)',

$$t = \frac{ds}{2}\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)\sin 2(i-\alpha). \tag{81}$$

Cette formule et l'introduction, dans la théorie des surfaces, du rapport $\frac{t}{ds}$, appelé *torsion géodésique* par M. Ossian Bonnet, sont dus à M. Bertrand.

On voit que la torsion géodésique est nulle suivant les sections principales, et qu'elle a même valeur, au signe près, pour deux directions rectangulaires.

15. Au lieu de faire passer une géodésique par les points (u, v), $(u + du, v + dv)$, faisons passer une courbe quelconque tangente au plan normal en (u, v). La première des formules (59), appliquée à cette courbe, donnera, par comparaison avec l'équation (77), cette nouvelle expression de la torsion géodésique

$$t = d\varpi - \frac{ds}{r}, \tag{82}$$

due à M. Ossian Bonnet, et qui a d'importantes conséquences.

V. — *Angle de deux normales infiniment voisines.*

16. Proposons-nous de trouver l'angle formé par les normales en deux points infiniment voisins (u, v), $(u + du, v + dv)$. Si l'on fait passer une géodésique par ces deux points, cet angle ne différera pas de celui désigné par W au n° 8, et dont la formule (57) donne le développement. En le désignant par n, et en se limitant aux termes du premier ordre, on aura donc

$$n^2 = ds^2\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}\right),$$

ou, en remplaçant $\frac{ds}{r}$ par sa valeur tirée de l'équation (81) et $\frac{ds}{\rho}$ par sa valeur tirée de l'équation (67),

$$n^2 = ds^2\left[\frac{\cos^2(i-\alpha)}{\rho_1^2} + \frac{\sin^2(i-\alpha)}{\rho_2^2}\right]. \tag{83}$$

On peut remarquer que les deux premières formules (59) donnent, pour la géodésique considérée,

$$-\frac{ds}{r} = (\mathrm{P}\,du + \mathrm{S}\,dv)\sin i + (\mathrm{R}\,du + \mathrm{Q}\,dv)\cos i,$$

$$\frac{ds}{\rho} = (\mathrm{P}\,du + \mathrm{S}\,dv)\cos i - (\mathrm{R}\,du + \mathrm{Q}\,dv)\sin i,$$

d'où, en élevant au carré et ajoutant,

$$(84) \qquad n^2 = (\mathrm{P}\,du + \mathrm{S}\,dv)^2 + (\mathrm{R}\,du + \mathrm{Q}\,dv)^2.$$

Éliminons du et dv à l'aide des relations (60) et (60)', il viendra

$$(85) \quad n^2 = ds^2\left(\frac{\mathrm{P}^2+\mathrm{R}^2}{\mathrm{E}^2}\cos^2 i + 2\,\frac{\mathrm{PS}+\mathrm{RQ}}{\mathrm{EG}}\sin i\cos i + \frac{\mathrm{S}^2+\mathrm{Q}^2}{\mathrm{G}^2}\sin i\right),$$

$$(85)' \quad n^2 = \frac{ds^2}{\sin^2 2\omega}\left[\frac{\mathrm{P}^2+\mathrm{R}^2}{\mathrm{E}^2}\sin^2(\omega+i) + 2\,\frac{\mathrm{PS}+\mathrm{RQ}}{\mathrm{EG}}\sin(\omega+i)\sin(\omega-i) + \frac{\mathrm{S}^2+\mathrm{Q}^2}{\mathrm{G}^2}\sin^2(\omega-i)\right].$$

Enfin, si l'on fait passer par les deux points (u, v), $(u+du, v+dv)$ une courbe quelconque, les équations (59), appliquées à cette courbe, donneront, par comparaison avec l'équation (84), cette nouvelle expression

$$(86) \qquad n^2 = \left(d\varpi - \frac{ds}{r}\right)^2 + ds^2\,\frac{\cos^2\varpi}{\rho^2},$$

due à M. Ossian Bonnet.

VI. — *Courbure géodésique.*

17. Une ligne quelconque étant tracée sur une surface, si l'on projette la courbure de la ligne sur le plan tangent à la surface en un point A de cette ligne, on obtient une dernière expression $\frac{\sin\varpi}{\rho}$ relative à la forme qu'affecte une surface autour d'un de ses points, et dont M. Ossian Bonnet a, le premier, signalé toute l'importance. Cette expression, nulle en tous les points d'une géodésique, a été désignée par M. Liouville sous le nom de *courbure géodésique;* nous allons en calculer l'expression dans le cas d'une courbe quelconque.

De la troisième des formules (59)

$$(87)\qquad -\frac{ds}{\rho}\sin\varpi = di + \mathrm{M}\,du + \mathrm{N}\,dv,$$

on déduit, en remplaçant M et N par leurs valeurs (71) et (71)′, du et dv par leurs valeurs (60) et (60)′,

$$(88)\qquad \frac{\sin\varpi}{\rho} = -\frac{di}{ds} + \frac{\frac{d\mathrm{E}}{dv}}{\mathrm{EG}}\cos i - \frac{\frac{d\mathrm{G}}{du}}{\mathrm{EG}}\sin i,$$

$$(88)'\qquad \frac{\sin\varpi}{\rho} = -\frac{di}{ds} - \left[\frac{d\omega}{du} + \frac{1}{\mathrm{G}\sin 2\omega}\left(\frac{d\mathrm{E}}{dv} - \cos 2\omega\frac{d\mathrm{G}}{du}\right)\right]\frac{\sin(\omega+i)}{\mathrm{E}\sin 2\omega}$$
$$+ \left[\frac{d\omega}{dv} + \frac{1}{\mathrm{E}\sin 2\omega}\left(\frac{d\mathrm{G}}{du} - \cos 2\omega\frac{d\mathrm{E}}{dv}\right)\right]\frac{\sin(\omega-i)}{\mathrm{G}\sin 2\omega}.$$

Il en résulte que l'expression $\frac{\sin\varpi}{\rho}$ ne dépend que de E, G et ω, et conserve sa valeur dans les déformations de la surface qui n'altèrent pas ces trois fonctions. En particulier, si l'on circonscrit à la surface une développable le long de la courbe considérée, sa courbure géodésique sera égale à la courbure de sa transformée par développement.

A l'aide des deux premières formules (61) et (61)′, les expressions (88) et (88)′ prennent la forme remarquable suivante, due à M. Ossian Bonnet,

$$(89)\qquad \mathrm{EG}\frac{\sin\varpi}{\rho} = \frac{d.\mathrm{E}\cos i}{dv} - \frac{d.\mathrm{G}\sin i}{du},$$

$$(89)'\qquad \mathrm{EG}\sin 2\omega\frac{\sin\varpi}{\rho} = \frac{d.\mathrm{G}\cos(\omega+i)}{du} - \frac{d.\mathrm{E}\cos(\omega-i)}{dv}.$$

SECTION III.

LIGNES TRACÉES SUR UNE SURFACE.

I. — *Lignes de courbure.*

18. On nomme ligne de courbure d'une surface une ligne située sur cette surface et tangente en chacun de ses points à l'une des sections principales. Comme il passe, en chaque point de la surface, deux sections principales perpendiculaires l'une à l'autre, il passe aussi, en chaque point, deux lignes de courbure tangentes à ces sections et rectangulaires. Les lignes de courbure d'une surface forment donc deux systèmes orthogonaux dont chacun recouvre entièrement la surface.

19. Il résulte de là que les équations (64) et (64)′ sont, en y remplaçant α par i, celles des lignes de courbure :

$$\text{(90)} \qquad \operatorname{tang} 2i = \frac{ES - GR}{GP + EQ},$$

$$\text{(90)}' \qquad \operatorname{tang} 2i = -\frac{(ES - GP)\cos\omega + (GR + EQ)\sin\omega}{(ES + GP)\sin\omega + (GR - EQ)\cos\omega}.$$

En développant, et en tenant compte de la quatrième des équations (61) et (61)′, elles prennent la forme

$$\text{(91)} \qquad (P\,du + S\,dv)\sin i + (R\,du + Q\,dv)\cos i = 0.$$

Par comparaison avec la première des équations (59), on en conclut

$$d\varpi - \frac{ds}{r} = 0,$$

et, réciproquement, on conclut de cette dernière l'équation (91). On peut donc énoncer le théorème suivant, dû à Lancret :

L'angle de torsion d'une ligne de courbure d'une surface est la différentielle de l'angle que fait avec la surface le plan osculateur de la ligne de courbure.

Et réciproquement :

Une ligne tracée sur une surface est une ligne de courbure de la surface, si l'angle de torsion est la différentielle de l'angle que fait avec la surface le plan osculateur de la ligne.

Si l'on suppose que la courbe soit plane, on a $\frac{ds}{r} = 0$, et, par suite, $\varpi = \text{const.}$ D'où cette conséquence du théorème de Lancret, dont Joachimsthal a donné une démonstration directe :

Si une ligne de courbure d'une surface est plane, le plan de cette ligne de courbure coupe partout la surface sous le même angle.

Et réciproquement :

Si un plan coupe une surface partout sous le même angle, l'intersection est une ligne de courbure de la surface.

Le théorème de Lancret exprime, en définitive, que *la torsion géodésique d'une ligne de courbure est nulle en tous ses points*, et que, réciproquement, *toute ligne dont la torsion géodésique est nulle en tous ses points est une ligne de courbure*. Les formules (78) et (78)′ fournissent donc ces deux nouvelles équations des lignes de courbure

$$(92) \qquad \mathrm{ES}\sin^2 i + (\mathrm{GP} + \mathrm{EQ})\sin i\cos i + \mathrm{GR}\cos^2 i = 0,$$

$$(92)' \quad (\mathrm{ES} - \mathrm{GP})\cos\omega\sin^2 i - [(\mathrm{ES} + \mathrm{GP})\sin\omega + (\mathrm{GR} - \mathrm{EQ})\cos\omega]\sin i\cos i - (\mathrm{GR} + \mathrm{EQ})\sin\omega\cos^2 i = 0,$$

qu'on peut d'ailleurs déduire de l'équation (91), en en éliminant du et dv.

II. — *Lignes asymptotiques.*

20. On nomme *ligne asymptotique d'une surface* une ligne située sur cette surface et tangente en chacun de ses points à l'une des sections normales dont le rayon de courbure est infini. Comme il passe, en chaque point de la surface, deux sections normales dont le rayon de courbure est infini, il passe aussi, en chaque point, deux lignes asymptotiques tangentes à ces sections. Les lignes asymptotiques d'une surface forment donc deux systèmes dont chacun recouvre entièrement la surface.

21. Il résulte de là que les équations (63) et (63)′ sont, en y faisant ρ égal à l'infini, celles des lignes asymptotiques :

$$(93)\qquad GP\cos^2 i + (ES - GR)\sin i\cos i - EQ\sin^2 i = 0,$$

$$(93)'\qquad (ES + GP)\sin\omega\cos^2 i - [(ES - GP)\cos\omega + (GR + EQ)\sin\omega]\sin i\cos i - (GR - EQ)\cos\omega\sin^2 i = 0.$$

En tenant compte de la quatrième des équations (61) et (61)′, elles prennent la forme

$$(94)\qquad (P\,du + S\,dv)\cos i - (R\,du + Q\,dv)\sin i = 0.$$

Par comparaison avec la seconde des équations (59), on en conclut

$$\cos\varpi = 0,$$

et, réciproquement, on conclut de cette dernière l'équation (94). Par conséquent :

Toute ligne asymptotique d'une surface a, en chacun de ses points, son plan osculateur tangent à la surface.

Et réciproquement :

Toute ligne tracée sur une surface, dont le plan osculateur est, en chacun de ses points, tangent à la surface, en est une ligne asymptotique.

Les équations (90) et (90)′ rapprochées des équations (93) et (93)′ montrent que *les angles, formés en un point par deux lignes asymptotiques, sont bissectés par les deux lignes de courbure qui se croisent en ce point.*

Les lignes asymptotiques seront réelles, si l'on a

$$\frac{RS - PQ}{EG} < 0, \quad \frac{RS - PQ}{EG\sin 2\omega} > 0,$$

c'est-à-dire, en se reportant aux équations (68) et (68)′, si les rayons de courbure principaux sont de signes contraires au point considéré. Elles seront imaginaires, si ces rayons de courbure sont de même signe.

Toute surface ou portion de surface pour laquelle les lignes asym-

ptotiques sont imaginaires, est dite *convexe;* elle est dite *à courbures opposées*, lorsque les lignes asymptotiques sont réelles.

22. Considérons sur une surface une courbe dont le plan osculateur en un de ses points A contienne la tangente à l'une des asymptotiques qui passent par ce point. La deuxième des équations (59), appliquée à cette courbe, donnera

$$\frac{\cos\varpi}{\rho} = 0,$$

et, réciproquement, si cette équation est satisfaite en un des points de la courbe, c'est que le plan osculateur en ce point contient la tangente à l'une des asymptotiques qui y passent. On en conclut que :

Toute ligne dont le plan osculateur en un point A *contient la tangente à l'une des asymptotiques qui passent par ce point, sans être tangent à la surface, a en ce point* A *un rayon de courbure infini.*

Toute ligne tracée sur une surface, et qui a, en un de ses points A, *un rayon de courbure infini, est tangente en ce point à l'une des asymptotiques qui y passent.*

Toute ligne, dont le plan osculateur en un point A *est tangent à la surface en ce point, est elle-même tangente en ce point à l'une des asymptotiques qui y passent.*

En particulier, *une courbe tracée sur une surface ou portion de surface convexe ne peut avoir aucun de ses plans osculateurs tangent à la surface.*

Toute ligne dont le plan osculateur en un point A *contient la tangente à l'une des asymptotiques qui passent par ce point, sans avoir en ce point son rayon de courbure infini, a son plan osculateur tangent en* A *à la surface.*

III. — *Lignes géodésiques.*

23. Nous avons donné, au n° 13, la définition et l'équation différentielle des lignes géodésiques, et nous avons fait voir que par un point passent une infinité de géodésiques, dont chacune est déterminée par sa tangente en ce point. Au n° 17, nous avons remarqué que la courbure géodésique d'une géodésique était nulle. Nous allons démontrer maintenant une importante propriété de ces lignes.

De l'équation différentielle

$$di + M\,du + N\,dv = 0$$

on déduit, à l'aide des formules (71),

$$G\,di - \frac{dE}{dv}\,du + \frac{dG}{du}\,\frac{G\,dv}{E} = 0,$$

ou, en introduisant tang$i$,

$$G\cos i\,di - \frac{dE}{dv}\cos i\,du + \frac{dG}{du}\sin i\,du = 0,$$

ou encore

$$G\cos i\,di + \sin i\,\frac{dG}{du}\,du = \frac{E\,\frac{dE}{dv}\,du^2}{ds}.$$

Ajoutons $\sin i\,\frac{dG}{dv}\,dv$ aux deux membres, il vient

$$G\cos i\,di + \sin i\left(\frac{dG}{du}\,du + \frac{dG}{dv}\,dv\right) = \frac{E\,\frac{dE}{dv}\,du^2 + G\,\frac{dG}{dv}\,dv^2}{ds},$$

c'est-à-dire

$$d.G\sin i = \frac{E\,\frac{dE}{dv}\,du^2 + G\,\frac{dG}{dv}\,dv^2}{ds},$$

ou

$$d\,\frac{G^2\,dv}{ds} = \frac{E\,\frac{dE}{dv}\,du^2 + G\,\frac{dG}{dv}\,dv^2}{ds}.$$

Or, si l'on considère une courbe quelconque tracée sur la surface, ce qui rend v fonction de u, on a, pour la longueur de cette courbe comprise entre deux points u_1 et u_2,

$$S = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{E^2\,du^2 + G^2\,dv^2},$$

et, si l'on fait varier la courbe,

$$\delta S = \int_{u_1}^{u_2} \frac{\delta(E^2\,du^2 + G^2\,dv^2)}{2\,ds}.$$

Effectuant la variation, il vient

$$\delta S = \int_{u_1}^{u_2} \frac{\left(E\frac{dE}{dv}du^2 + G\frac{dG}{dv}dv^2\right)\delta v}{ds} + \int_{u_1}^{u_2} \frac{G^2 dv}{ds} d\delta v;$$

d'où, en intégrant le second terme par parties et négligeant ce qui se rapporte aux limites, puisqu'elles sont fixes,

$$\delta S = \int_{u_1}^{u_2} \frac{\left(E\frac{dE}{dv}du^2 + G\frac{dG}{dv}dv^2\right)\delta v}{ds} - \int_{u_1}^{u_2} d\frac{G^2 dv}{ds}\delta v$$

$$= \int_{u_1}^{u_2} \left(\frac{E\frac{dE}{dv}du^2 + G\frac{dG}{dv}dv^2}{ds} - d\frac{G^2 dv}{ds}\right)\delta v.$$

Il en résulte que, pour une géodésique, la variation δS est nulle, en se bornant aux termes du premier ordre; donc

La ligne la plus courte que l'on puisse tracer sur une surface entre deux points donnés est une géodésique.

24. Les formules (89), (89)', auxquelles nous sommes arrivé au n° 17, nous donnent ces deux nouvelles équations des lignes géodésiques

$$(95) \qquad \frac{d.E\cos i}{dv} = \frac{d.G\cos i}{du},$$

$$(95)' \qquad \frac{d.E\cos(\omega - i)}{dv} = \frac{d.G\cos(\omega + i)}{du}.$$

Elles prouvent que, si, par un moyen quelconque, on a obtenu une intégrale première de ces équations du second ordre, on peut, par de simples quadratures, arriver à l'équation en termes finis.

En effet, l'intégrale première est une fonction de u, v, $\frac{dv}{du}$ et d'une constante arbitraire α, ou, ce qui revient au même, de u, v, i et d'une constante arbitraire α

$$F(u, v, i, \alpha) = 0.$$

Tirons i de cette équation et portons sa valeur dans l'une ou l'autre des équations (95), (95)'; cette équation sera identiquement satisfaite, quel que soit α. Donc la dérivée par rapport à α du résultat de cette substitution devra être égale à zéro, et l'on aura, en intervertissant l'ordre des différentiations,

$$\frac{d}{dv}\left[\mathrm{E}\sin(\omega - i)\frac{di}{d\alpha}\right] = \frac{d}{du}\left[-\mathrm{G}\sin(\omega + i)\frac{di}{d\alpha}\right],$$

quelque soit α; ce qui prouve que l'expression

$$\mathrm{E}\sin(\omega - i)\frac{di}{d\alpha}\,du - \mathrm{G}\sin(\omega + i)\frac{di}{d\alpha}\,dv$$

est une différentielle exacte. Mais l'équation $\mathrm{F}(u, v, i, \alpha) = 0$ obtenue, que reste-t-il à faire? Il faut intégrer l'équation qui fait connaître i en fonction de $\frac{dv}{du}$,

$$\frac{\sin(\omega + i)}{\mathrm{E}\,du} = \frac{\sin(\omega - i)}{\mathrm{G}\,dv} \quad \text{ou} \quad \mathrm{E}\sin(\omega - i)\,du - \mathrm{G}\sin(\omega + i)\,dv = 0,$$

et éliminer i entre le résultat de cette intégration et l'équation

$$\mathrm{F}(u, v, i, \alpha) = 0.$$

Or, d'après ce qui précède, le facteur intégrant du premier membre est $\frac{di}{d\alpha}$, et il est connu : la question est donc bien ramenée aux quadratures.

C'est M. Ossian Bonnet qui a démontré qu'on pouvait ainsi rattacher ce résultat à la célèbre théorie du dernier multiplicateur de Jacobi.

SECTION IV.

SURFACES GAUCHES LIEUX DE NORMALES.

I. — *Élément d'arc.*

25. Les surfaces gauches formées par les normales à une surface le long d'une ligne tracée sur cette surface jouent un rôle important dans l'étude qui nous occupe. Pour abréger, nous les appellerons *normalies*, du nom proposé par M. Mannheim dans son *Étude sur le déplacement d'une figure*.

Considérons une courbe tracée sur une surface, et soient x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point A de la courbe, l, m, n les angles de la normale en A à la surface avec les axes; les équations de cette normale sont

$$\frac{X-x}{\cos l}=\frac{Y-y}{\cos m}=\frac{Z-z}{\cos n}=L,$$

L désignant la distance qui sépare le point (x, y, z) du point (X, Y, Z). Soient, comme précédemment (6), α, β, γ les angles de la tangente en A à la courbe avec les axes, ξ, η, ζ ceux de la normale principale, λ, μ, ν ceux de la binormale; on a (9)

$$(96)\qquad \left\{\begin{aligned} &\cos\alpha\cos l+\cos\beta\cos m+\cos\gamma\cos n=0,\\ &\cos\xi\cos l+\cos\eta\cos m+\cos\zeta\cos n=\cos\varpi,\\ &\cos\lambda\cos l+\cos\mu\cos m+\cos\nu\cos n=\sin\varpi.\end{aligned}\right.$$

Des équations de la normale, on tire

$$X=x+L\cos l,\quad Y=y+L\cos m,\quad Z=z+L\cos n,$$

et, en différentiant,

$$\begin{aligned} dX&=dx+\cos l\ dL+L\,d\cos l,\\ dY&=dy+\cos m\,dL+L\,d\cos m,\\ dZ&=dz+\cos n\ dL+L\,d\cos n.\end{aligned}$$

Élevons ces équations au carré, et ajoutons-les membre à membre, nous aurons

$$\begin{aligned} d\sigma^2 = ds^2 + d\mathrm{L}^2 + \mathrm{L}^2[(d\cos l)^2 + (d\cos m)^2 + (d\cos n)^2] \\ + 2\,d\mathrm{L}(dx\cos l + dy\cos m + dz\cos n) \\ + 2\,\mathrm{L}(dx\,d\cos l + dy\,d\cos m + dz\,d\cos n) \\ + 2\,\mathrm{L}\,d\mathrm{L}(\cos l\,d\cos l + \cos m\,d\cos m + \cos n\,d\cos n), \end{aligned}$$

$d\sigma^2$ étant l'élément d'arc de la normalie et ds^2 celui de sa courbe directrice.

De l'équation

$$\cos^2 l + \cos^2 m + \cos^2 n = 1,$$

on tire

$$\cos l\,d\cos l + \cos m\,d\cos m + \cos n\,d\cos n = 0.$$

En remplaçant dx, dy et dz par $ds\cos\alpha$, $ds\cos\beta$ et $ds\cos\gamma$, on a

$$\begin{aligned} dx\,d\cos l + dy\,d\cos m + dz\,d\cos n \\ = ds(\cos\alpha\,d\cos l + \cos\beta\,d\cos m + \cos\gamma\,d\cos n), \\ dx\cos l + dy\cos m + dz\cos n = ds(\cos\alpha\cos l + \cos\beta\cos m + \cos\gamma\cos n). \end{aligned}$$

La première des équations (96) donne donc

$$dx\cos l + dy\cos m + dz\cos n = 0,$$

et différentiée

$$\begin{aligned} \cos\alpha\,d\cos l + \cos\beta\,d\cos m + \cos\gamma\,d\cos n \\ = -(\cos l\,d\cos\alpha + \cos m\,d\cos\beta + \cos n\,d\cos\gamma), \end{aligned}$$

ou, en remplaçant $d\cos\alpha$, $d\cos\beta$, $d\cos\gamma$ par leurs valeurs (49),

$$\begin{aligned} \cos\alpha\,d\cos l + \cos\beta\,d\cos m + \cos\gamma\,d\cos n \\ = -\frac{ds}{\rho}(\cos\xi\cos l + \cos\eta\cos m + \cos\zeta\cos n) = -\frac{ds}{\rho}\cos\varpi. \end{aligned}$$

Pour calculer le coefficient du terme en L^2, différentions les équa-

tions (96) en tenant compte des formules (49), nous aurons

$$(96\,bis)\quad \begin{cases} \cos\alpha\, d\cos l + \cos\beta\, d\cos m + \cos\gamma\, d\cos n = -\dfrac{ds}{\rho}\cos\varpi, \\ \cos\xi\, d\cos l + \cos\eta\, d\cos m + \cos\zeta\, d\cos n = -\sin\varpi\, d\varpi + \dfrac{ds}{r}\sin\varpi, \\ \cos\lambda\, d\cos l + \cos\mu\, d\cos m + \cos\nu\, d\cos n = \cos\varpi\, d\varpi - \dfrac{ds}{r}\cos\varpi. \end{cases}$$

Élevons au carré et ajoutons membre à membre, il viendra

$$(d\cos l)^2 + (d\cos m)^2 + (d\cos n)^2 = \frac{ds^2}{\rho^2}\cos^2\varpi + \left(d\varpi - \frac{ds}{r}\right)^2.$$

Nous aurons donc finalement

$$(97)\qquad d\sigma^2 = dL^2 + \left[\left(L\frac{\cos\varpi}{\rho} - 1\right)^2 + L^2\left(\frac{d\varpi}{ds} - \frac{1}{r}\right)^2\right] ds^2.$$

A l'aide des deux premières formules (59) et des formules (60) et (60)', on peut éliminer $\frac{\cos\varpi}{\rho}$ et $\frac{d\varpi}{ds} - \frac{1}{r}$, de manière à avoir $d\sigma^2$ en fonction de l'angle i seul et des paramètres de la surface; c'est un calcul que nous effectuerons dans chaque cas particulier. On peut néanmoins observer déjà que le coefficient de dL^2 est l'unité, et que celui de ds^2 est une fonction algébrique entière du second degré en L. De plus, les coordonnées à la surface sont rectangulaires et les paramètres u et v sont la longueur de la normale et celle de la courbe directrice.

II. — *Point central.*

26. On appelle *point central* d'une normale le pied, sur cette normale, de sa plus courte distance à la normale infiniment voisine. Pour obtenir ce point, il suffit donc de faire, dans la formule (97), $dL = 0$, et de chercher le minimum du polynôme du second degré

$$\left[\left(\frac{d\varpi}{ds} - \frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{\cos\varpi}{\rho}\right)^2\right] L^2 - 2\frac{\cos\varpi}{\rho} L + 1.$$

On sait, par l'algèbre élémentaire, que ce minimum a lieu pour

$$(98)\qquad L_0 = \frac{\dfrac{\cos\varpi}{\rho}}{\left(\dfrac{d\varpi}{ds} - \dfrac{1}{r}\right)^2 + \left(\dfrac{\cos\varpi}{\rho}\right)^2};$$

telle est la formule qui donne la distance du point central au point correspondant de la surface.

III. — *Formule de M. Chasles.*

27. Proposons-nous de trouver l'angle de deux normales infiniment voisines en deux points d'une même génératrice. A cet effet, faisons $i = 0$ dans la formule (85), il viendra

$$d\theta^2 = dL^2(P^2 + R^2),$$

puisque E est égal à l'unité. Nous exprimerons que les courbes $v =$ const. se réduisent à des droites en écrivant que leur rayon de courbure est infini, ce qui, d'après l'équation (63), donne en tous les points de la surface

$$P = 0.$$

On aura donc, en définitive,

$$d\theta^2 = R^2\, dL^2.$$

Les formules (38) donnent

$$M = 0, \quad N = \frac{dG}{dL}, \quad R = -\frac{S}{G},$$

et la première des formules (19)

$$RS = -\frac{dN}{dL}.$$

On en tire, en éliminant N et S,

$$R^2 = \frac{1}{G}\frac{d^2G}{dL^2}.$$

Mais

$$G^2 = \left(L\frac{\cos\varpi}{\rho} - 1\right)^2 + L^2\left(\frac{d\varpi}{ds} - \frac{1}{r}\right)^2,$$

d'où

$$\frac{1}{G}\frac{d^2G}{dL^2} = \frac{\left(\frac{d\varpi}{ds} - \frac{1}{r}\right)^2}{\left[\left(L\frac{\cos\varpi}{\rho} - 1\right)^2 + L^2\left(\frac{d\varpi}{ds} - \frac{1}{r}\right)^2\right]^2},$$

et, par suite,

$$d\theta = \frac{\frac{d\varpi}{ds} - \frac{1}{r}}{\left(L\frac{\cos\varpi}{\rho} - 1\right)^2 + L^2\left(\frac{d\varpi}{ds} - \frac{1}{r}\right)^2}\,dL.$$

Cette équation intégrée donne

$$\operatorname{tang}(\theta - \text{const.}) = \frac{\left(\frac{d\varpi}{ds} - \frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{\cos\varpi}{\rho}\right)^2}{\frac{d\varpi}{ds} - \frac{1}{r}}\,L - \frac{\frac{\cos\varpi}{\rho}}{\frac{d\varpi}{ds} - \frac{1}{r}}.$$

Si l'on prend pour normale origine la normale au point central, la constante est égale à zéro (98), de sorte qu'en comptant également les L à partir du point central la formule précédente devient

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\left(\frac{d\varpi}{ds} - \frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{\cos\varpi}{\rho}\right)^2}{\frac{d\varpi}{ds} - \frac{1}{r}}\,L. \tag{99}$$

La propriété qu'elle exprime a été énoncée pour la première fois par M. Chasles.

Si l'on prend pour normale origine la normale située dans le plan tangent à la surface, on a $\theta = 0$ pour $L = 0$, et la formule s'écrit

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\left(\frac{d\varpi}{ds} - \frac{1}{r}\right)L}{1 - \frac{\cos\varpi}{\rho}L}. \tag{100}$$

Elle nous sera particulièrement utile sous cette forme.

IV. — *Plan central.*

28. On appelle *plan central* le plan tangent à la normalie au point central. La formule précédente va nous permettre de trouver l'angle que fait avec la direction de la directrice la trace du plan central sur le plan tangent à la surface au point correspondant. Il suffit pour cela d'y remplacer L par la valeur L_0 (98); on trouve

$$\tang \theta_0 = \frac{\dfrac{\cos\varpi}{\rho}}{\dfrac{d\varpi}{ds} - \dfrac{1}{r}}. \tag{101}$$

V. — *Paramètre de distribution.*

29. L'inverse du coefficient de L dans la formule (99) porte le nom de paramètre de distribution ; nous le désignerons par la lettre k. Pour en avoir une interprétation géométrique, cherchons la plus courte distance de la normale donnée à la normale infiniment voisine; il suffit, pour cela, de remplacer dans la formule (97), dL par zéro et L par L_0 (98), on a

$$d\sigma^2 = \frac{\left(\dfrac{d\varpi}{ds} - \dfrac{1}{r}\right)^2}{\left(\dfrac{d\varpi}{ds} - \dfrac{1}{r}\right)^2 + \left(\dfrac{\cos\varpi}{\rho}\right)^2} ds^2.$$

D'autre part, l'angle de deux normales infiniment voisines a pour valeur (86)

$$n^2 = \left[\left(\frac{d\varpi}{ds} - \frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{\cos\varpi}{\rho}\right)^2\right] ds^2.$$

On en conclut que

$$k = \frac{\dfrac{d\varpi}{ds} - \dfrac{1}{r}}{\left(\dfrac{d\varpi}{ds} - \dfrac{1}{r}\right)^2 + \left(\dfrac{\cos\varpi}{\rho}\right)^2} \tag{102}$$

est la limite du rapport de $d\sigma$ à n.

VI. — *Courbure sphérique.*

30. La courbure sphérique en un point d'une génératrice s'obtient immédiatement à l'aide de la formule (70), qui donne

$$\frac{1}{\rho_1\rho_2} = -\frac{1}{G}\frac{dN}{dL},$$

ou (27)

$$\frac{1}{\rho_1\rho_2} = -\frac{1}{G}\frac{d^2G}{dL^2}.$$

Remplaçons le second membre par sa valeur, il viendra

$$(103) \qquad \frac{1}{\rho_1\rho_2} = -\frac{\left(\frac{d\varpi}{ds} - \frac{1}{r}\right)^2}{\left[\left(L\frac{\cos\varpi}{\rho} - 1\right)^2 + L^2\left(\frac{d\varpi}{ds} - \frac{1}{r}\right)^2\right]^2}.$$

On peut en conclure que *la courbure de la surface varie le long d'une génératrice rectiligne dans le rapport inverse du carré de la perpendiculaire menée à cette génératrice et terminée à la génératrice infiniment voisine*, résultat dû à M. Ossian Bonnet.

En remplaçant L par L_0 (98), ce qui fournit la courbure de la normalie au point central, on trouve l'inverse du paramètre de distribution (102).

En faisant $L = 0$, ce qui fournit la courbure de la normalie en son pied, on trouve la torsion géodésique de la surface directrice correspondant à l'azimut de la direction suivie.

VII. — *Courbes des segments normaux.*

31. Concevons, avec M. Laguerre, que l'on porte sur les génératrices de la normalie, à partir de la surface donnée, une longueur L fonction de la position du point sur la directrice. Soient A et A′ deux points infiniment voisins de cette directrice, T et T′ les angles que font avec la

corde AA′ les segments L et L′ portés sur les normales en A et A′, nous allons calculer l'expression

$$AA'(L\cos T + L'\cos T')$$

ordonnée suivant les puissances croissantes de ds.

Soient, à cet effet, l, m, n les angles de la normale en A à la surface avec les axes; on a (8)

$$\begin{aligned}\delta x &= I_1\cos\alpha + I_2\cos\xi + I_3\cos\lambda,\\ \delta y &= I_1\cos\beta + I_2\cos\eta + I_3\cos\mu,\\ \delta z &= I_1\cos\gamma + I_2\cos\zeta + I_3\cos\nu,\end{aligned}$$

I_1, I_2, I_3 désignant, pour abréger, les expressions compliquées infiniment petites du premier, du second et du troisième ordre qui sont tout au long au n° 8. On en tire

$$\begin{aligned}AA'\cos T = {} & I_1\cos\alpha\cos l + I_2\cos\xi\cos l + I_3\cos\lambda\cos l\\ & + I_1\cos\beta\cos m + I_2\cos\eta\cos m + I_3\cos\mu\cos m\\ & + I_1\cos\gamma\cos n + I_2\cos\zeta\cos n + I_3\cos\nu\cos n,\end{aligned}$$

et, à cause des formules (96),

$$AA'\cos T = I_2\cos\varpi + I_3\sin\varpi.$$

Soient l', m', n' les angles que fait la normale en A′ à la surface avec les axes; on aura

$$\begin{aligned}AA'\cos T' = {} & I_1(\cos\alpha\cos l' + \cos\beta\cos m' + \cos\gamma\cos n')\\ & + I_2(\cos\xi\cos l' + \cos\eta\cos m' + \cos\zeta\cos n')\\ & + I_3(\cos\lambda\cos l' + \cos\mu\cos m' + \cos\nu\cos n').\end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}\cos l' &= \cos l + d\cos l + \frac{1}{1.2}d^2\cos l + \ldots,\\ \cos m' &= \cos m + d\cos m + \frac{1}{1.2}d^2\cos m + \ldots,\\ \cos n' &= \cos n + d\cos n + \frac{1}{1.2}d^2\cos n + \ldots,\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
AA'\cos T' = I_1 \Big[& \cos\alpha\, d\cos l + \cos\beta\, d\cos m + \cos\gamma\, d\cos n \\
& + \frac{1}{1.2}(\cos\alpha\, d^2\cos l + \cos\beta\, d^2\cos m + \cos\gamma\, d^2\cos n) + \ldots \Big] \\
+ I_2 \Big[& \cos\varpi + \cos\xi\, d\cos l + \cos\eta\, d\cos m + \cos\zeta\, d\cos n \\
& + \frac{1}{1.2}(\cos\xi\, d^2\cos l + \cos\eta\, d^2\cos m + \cos\zeta\, d^2\cos n) + \ldots \Big] \\
+ I_3 \Big[& \sin\varpi + \cos\lambda\, d\cos l + \cos\mu\, d\cos m + \cos\nu\, d\cos n \\
& + \frac{1}{1.2}(\cos\lambda\, d^2\cos l + \cos\mu\, d^2\cos m + \cos\nu\, d^2\cos n) + \ldots \Big].
\end{aligned}$$

On a trouvé plus haut (96 *bis*)

$$(104)\quad \left\{ \begin{aligned}
& \cos\alpha\, d\cos l + \cos\beta\, d\cos m + \cos\gamma\, d\cos n = -\frac{ds}{\rho}\cos\varpi, \\
& \cos\xi\, d\cos l + \cos\eta\, d\cos m + \cos\zeta\, d\cos n = -\sin\varpi\, d\varpi + \frac{ds}{r}\sin\varpi, \\
& \cos\lambda\, d\cos l + \cos\mu\, d\cos m + \cos\nu\, d\cos n = \cos\varpi\, d\varpi - \frac{ds}{r}\cos\varpi.
\end{aligned} \right.$$

Différentions la première de ces équations, il viendra

$$\begin{aligned}
& \cos\alpha\, d^2\cos l + \cos\beta\, d^2\cos m + \cos\gamma\, d^2\cos n \\
& \quad = -(d\cos\alpha\, d\cos l + d\cos\beta\, d\cos m + d\cos\gamma\, d\cos n) \\
& \qquad - ds\cos\varpi\, d\frac{1}{\rho} + \frac{ds}{\rho}\sin\varpi\, d\varpi.
\end{aligned}$$

Mais, en vertu des formules de M. Serret,

$$\begin{aligned}
& d\cos\alpha\, d\cos l + d\cos\beta\, d\cos m + d\cos\gamma\, d\cos n \\
& \quad = \frac{ds}{\rho}(\cos\xi\, d\cos l + \cos\eta\, d\cos m + \cos\zeta\, d\cos n) = -\frac{ds}{\rho}\sin\varpi\, d\varpi + \frac{ds^2}{r\rho}\sin\varpi,
\end{aligned}$$

d'où

$$(105)\quad \begin{aligned}
& \cos\alpha\, d^2\cos l + \cos\beta\, d^2\cos m + \cos\gamma\, d^2\cos n \\
& \quad = -ds\cos\varpi\, d\frac{1}{\rho} + \frac{2\,ds}{\rho}\sin\varpi\, d\varpi - \frac{ds^2}{r\rho}\sin\varpi.
\end{aligned}$$

Différentions la seconde des équations (104), il viendra

$$\begin{aligned}
&\cos\xi\, d^2\cos l + \cos\eta\, d^2\cos m + \cos\zeta\, d^2\cos n \\
&\quad = -(d\cos\xi\, d\cos l + d\cos\eta\, d\cos m + d\cos\zeta\, d\cos n) + ds\sin\varpi\, d\frac{1}{r} \\
&\qquad + \frac{ds}{r}\cos\varpi\, d\varpi - \cos\varpi\, d\varpi^2 - \sin\varpi\, d^2\varpi.
\end{aligned}$$

Mais, en vertu des formules de M. Serret,

$$\begin{aligned}
&d\cos\xi\, d\cos l + d\cos\eta\, d\cos m + d\cos\zeta\, d\cos n \\
&\quad = -\frac{ds}{r}\cos\varpi\, d\varpi + ds^2\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}\right)\cos\varpi,
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
(105)\qquad &\cos\xi\, d^2\cos l + \cos\eta\, d^2\cos m + \cos\zeta\, d^2\cos n \\
&\quad = -\cos\varpi\, d\varpi^2 - \sin\varpi\, d^2\varpi + \frac{2\,ds}{r}\cos\varpi\, d\varpi \\
&\qquad + ds\sin\varpi\, d\frac{1}{r} - ds^2\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}\right)\cos\varpi.
\end{aligned}$$

Différentions la troisième des équations (104), il viendra

$$\begin{aligned}
&\cos\lambda\, d^2\cos l + \cos\mu\, d^2\cos m + \cos\nu\, d^2\cos n \\
&\quad = -(d\cos\lambda\, d\cos l + d\cos\mu\, d\cos m + d\cos\nu\, d\cos n) - \sin\varpi\, d\varpi^2 \\
&\qquad + \cos\varpi\, d^2\varpi + \frac{ds}{r}\sin\varpi\, d\varpi - ds\cos\varpi\, d\frac{1}{r}.
\end{aligned}$$

Mais, en vertu des formules de M. Serret,

$$d\cos\lambda\, d\cos l + d\cos\mu\, d\cos m + d\cos\nu\, d\cos n = -\frac{ds}{r}\sin\varpi\, d\varpi + \frac{ds^2}{r^2}\sin\varpi,$$

d'où

$$\begin{aligned}
(105)\qquad &\cos\lambda\, d^2\cos l + \cos\mu\, d^2\cos m + \cos\nu\, d^2\cos n \\
&\quad = -\sin\varpi\, d\varpi^2 + \cos\varpi\, d^2\varpi + \frac{2\,ds}{r}\sin\varpi\, d\varpi - ds\cos\varpi\, d\frac{1}{r} - \frac{ds^2}{r^2}\sin\varpi.
\end{aligned}$$

Différentions la première des équations (105), il viendra

$$\begin{aligned}
&\cos\alpha\, d^3\cos l + \cos\beta\, d^3\cos m + \cos\gamma\, d^3\cos n \\
&\quad = -(d\cos\alpha\, d^2\cos l + d\cos\beta\, d^2\cos m + d\cos\gamma\, d^2\cos n) - ds\cos\varpi\, d^2\frac{1}{\rho} \\
&\qquad + \frac{2\,ds}{\rho}\sin\varpi\, d^2\varpi + \frac{2\,ds}{\rho}\cos\varpi\, d\varpi^2 + 3\,ds\sin\varpi\, d\varpi\, d\frac{1}{\rho} \\
&\qquad - \frac{ds^2}{r\rho}\cos\varpi\, d\varpi - \frac{ds^2}{r}\sin\varpi\, d\frac{1}{\rho} - \frac{ds^2}{\rho}\sin\varpi\, d\frac{1}{r}.
\end{aligned}$$

Mais, en vertu des formules de M. Serret,

$$\begin{aligned}
&d\cos\alpha\, d^2\cos l + d\cos\beta\, d^2\cos m + d\cos\gamma\, d^2\cos n \\
&\quad = \frac{ds}{\rho}(\cos\xi\, d^2\cos l + \cos\eta\, d^2\cos m + \cos\zeta\, d^2\cos n),
\end{aligned}$$

ou, à cause de l'équation (105),

$$\begin{aligned}
&d\cos\alpha\, d^2\cos l + d\cos\beta\, d^2\cos m + d\cos\gamma\, d^2\cos n \\
&\quad = -\frac{ds}{\rho}\cos\varpi\, d\varpi^2 - \frac{ds}{\rho}\sin\varpi\, d^2\varpi + \frac{2\,ds^2}{r\rho}\cos\varpi\, d\varpi \\
&\qquad + \frac{ds^2}{\rho}\sin\varpi\, d\frac{1}{r} - \frac{ds^3}{\rho}\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}\right)\cos\varpi,
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
(106)\quad &\cos\alpha\, d^3\cos l + \cos\beta\, d^3\cos m + \cos\gamma\, d^3\cos n \\
&\quad = \frac{3\,ds}{\rho}\cos\varpi\, d\varpi^2 + \frac{3\,ds}{\rho}\sin\varpi\, d^2\varpi - \frac{3\,ds^2}{r\rho}\cos\varpi\, d\varpi - \frac{2\,ds^2}{\rho}\sin\varpi\, d\frac{1}{r} \\
&\qquad + \frac{ds^3}{\rho}\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}\right)\cos\varpi - ds\cos\varpi\, d^2\frac{1}{\rho} + 3\,ds\sin\varpi\, d\varpi\, d\frac{1}{\rho} - \frac{ds^2}{r}\sin\varpi\, d\frac{1}{\rho}.
\end{aligned}$$

Différentions la deuxième des équations (105), il viendra

$$\begin{aligned}
&\cos\xi\, d^3\cos l + \cos\eta\, d^3\cos m + \cos\zeta\, d^3\cos n \\
&\quad = -(d\cos\xi\, d^2\cos l + d\cos\eta\, d^2\cos m + d\cos\zeta\, d^2\cos n) + \sin\varpi\, d\varpi^3 - \sin\varpi\, d^3\varpi \\
&\qquad - 3\cos\varpi\, d\varpi\, d^2\varpi + \frac{2\,ds}{r}\cos\varpi\, d^2\varpi - \frac{2\,ds}{r}\sin\varpi\, d\varpi^2 + ds\sin\varpi\, d^2\frac{1}{r} \\
&\qquad + 3\,ds\cos\varpi\, d\varpi\, d\frac{1}{r} + ds^2\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}\right)\sin\varpi\, d\varpi - \frac{2\,ds^2}{\rho}\cos\varpi\, d\frac{1}{\rho} - \frac{2\,ds^2}{r}\cos\varpi\, d\frac{1}{r}.
\end{aligned}$$

Mais, en vertu des formules de M. Serret,

$$\begin{aligned}
&d\cos\xi\, d^2\cos l + d\cos\eta\, d^2\cos m + d\cos\zeta\, d^2\cos n \\
&\quad = -\frac{ds}{\rho}(\cos\alpha\, d^2\cos l + \cos\beta\, d^2\cos m + \cos\gamma\, d^2\cos n) \\
&\qquad - \frac{ds}{r}(\cos\lambda\, d^2\cos l + \cos\mu\, d^2\cos m + \cos\nu\, d^2\cos n),
\end{aligned}$$

ou, à cause des équations (105),

$$\begin{aligned}
&d\cos\xi\, d^2\cos l + d\cos\eta\, d^2\cos m + d\cos\zeta\, d^2\cos n \\
&\quad = \frac{ds^2}{\rho}\cos\varpi\, d\frac{1}{\rho} - 2\,ds^2\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)\sin\varpi\, d\varpi + \frac{ds^2}{r}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)\sin\varpi \\
&\qquad + \frac{ds}{r}\sin\varpi\, d\varpi^2 - \frac{ds}{r}\cos\varpi\, d^2\varpi + \frac{ds^2}{r}\cos\varpi\, d\frac{1}{r};
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
(106)\quad &\cos\xi\, d^3\cos l + \cos\eta\, d^3\cos m + \cos\zeta\, d^3\cos n \\
&\quad = \sin\varpi\, d\varpi^3 - \sin\varpi\, d^3\varpi - 3\cos\varpi\, d\varpi\, d^2\varpi + 3\,ds\cos\varpi\, d\varpi\, d\frac{1}{r} \\
&\qquad + ds\sin\varpi\, d^2\frac{1}{r} - \frac{3\,ds}{r}\sin\varpi\, d\varpi^2 + \frac{3\,ds}{r}\cos\varpi\, d^2\varpi - \frac{3\,ds^2}{r}\cos\varpi\, d\frac{1}{r} \\
&\qquad + 3\,ds^2\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)\sin\varpi\, d\varpi - \frac{3\,ds^2}{r}\cos\varpi\, d\frac{1}{\rho} - \frac{ds^3}{r}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)\sin\varpi.
\end{aligned}$$

Différentions la première des équations (106), il viendra

$$\begin{aligned}
&\cos\alpha\, d^4\cos l + \cos\beta\, d^4\cos m + \cos\gamma\, d^4\cos n \\
&\quad = -(d\cos\alpha\, d^3\cos l + d\cos\beta\, d^3\cos m + d\cos\gamma\, d^3\cos n) + \frac{9\,ds}{\rho}\cos\varpi\, d\varpi\, d^2\varpi \\
&\qquad - \frac{3\,ds}{\rho}\sin\varpi\, d\varpi^3 + 6\,ds\cos\varpi\, d\varpi^2\, d\frac{1}{\rho} + \frac{3\,ds}{r}\sin\varpi\, d^3\varpi + 6\,ds\sin\varpi\, d^2\varpi\, d\frac{1}{\rho} \\
&\qquad - \frac{3\,ds^2}{r\rho}\cos\varpi\, d^2\varpi + \frac{3\,ds^2}{r\rho}\sin\varpi\, d\varpi^2 - \frac{4\,ds^2}{r}\cos\varpi\, d\varpi\, d\frac{1}{\rho} - \frac{5\,ds^2}{\rho}\cos\varpi\, d\varpi\, d\frac{1}{r} \\
&\qquad - \frac{2\,ds^2}{\rho}\sin\varpi\, d^2\frac{1}{r} - 3\,ds^2\sin\varpi\, d\frac{1}{r}\, d\frac{1}{\rho} - \frac{ds^3}{\rho}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)\sin\varpi\, d\varpi \\
&\qquad + ds^3\left(\frac{3}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)\cos\varpi\, d\frac{1}{\rho} + \frac{2\,ds^3}{r\rho}\cos\varpi\, d\frac{1}{r} - ds\cos\varpi\, d^3\frac{1}{\rho} \\
&\qquad + 4\,ds\sin\varpi\, d\varpi\, d^2\frac{1}{\rho} - \frac{ds^2}{r}\sin\varpi\, d^2\frac{1}{\rho}.
\end{aligned}$$

Mais, en vertu des formules de M. Serret,

$$\begin{aligned} &d\cos\alpha\, d^3\cos l + d\cos\beta\, d^3\cos m + d\cos\gamma\, d^3\cos n \\ &\quad = \frac{ds}{\rho}(\cos\xi\, d^3\cos l + \cos\eta\, d^3\cos m + \cos\zeta\, d^3\cos n), \end{aligned}$$

ou, à cause de l'équation (106),

$$\begin{aligned} &d\cos\alpha\, d^3\cos l + d\cos\beta\, d^3\cos m + d\cos\gamma\, d^3\cos n \\ &= \frac{ds}{\rho}\sin\varpi\, d\varpi^3 - \frac{ds}{\rho}\sin\varpi\, d^3\varpi - \frac{3\,ds}{\rho}\cos\varpi\, d\varpi\, d^2\varpi + \frac{3\,ds^2}{\rho}\cos\varpi\, d\varpi\, d\frac{1}{r} \\ &\quad + \frac{ds^2}{\rho}\sin\varpi\, d^2\frac{1}{r} - \frac{3\,ds^2}{r\rho}\sin\varpi\, d\varpi^2 + \frac{3\,ds^2}{r\rho}\cos\varpi\, d^2\varpi - \frac{3\,ds^3}{r\rho}\cos\varpi\, d\frac{1}{r} \\ &\quad + \frac{3\,ds^3}{\rho}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)\sin\varpi\, d\varpi - \frac{3\,ds^3}{\rho^2}\cos\varpi\, d\frac{1}{\rho} - \frac{ds^4}{r\rho}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)\sin\varpi; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} (107)\quad &\cos\alpha\, d^4\cos l + \cos\beta\, d^4\cos m + \cos\gamma\, d^4\cos n \\ &= \frac{12\,ds}{\rho}\cos\varpi\, d\varpi\, d^2\varpi - \frac{4\,ds}{\rho}\sin\varpi\, d\varpi^3 + 6\,ds\cos\varpi\, d\varpi^2\, d\frac{1}{\rho} \\ &\quad + \frac{4\,ds}{\rho}\sin\varpi\, d^3\varpi + 6\,ds\sin\varpi\, d^2\varpi\, d\frac{1}{\rho} - \frac{6\,ds^2}{r\rho}\cos\varpi\, d^2\varpi \\ &\quad + \frac{6\,ds^2}{r\rho}\sin\varpi\, d\varpi^2 - \frac{4\,ds^2}{r}\cos\varpi\, d\varpi\, d\frac{1}{\rho} - \frac{8\,ds^2}{\rho}\cos\varpi\, d\varpi\, d\frac{1}{r} \\ &\quad - \frac{3\,ds^2}{\rho}\sin\varpi\, d^2\frac{1}{r} - 3\,ds^2\sin\varpi\, d\frac{1}{r}\, d\frac{1}{\rho} - \frac{4\,ds^3}{\rho}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)\sin\varpi\, d\varpi \\ &\quad + ds^3\left(\frac{6}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)\cos\varpi\, d\frac{1}{\rho} + \frac{5\,ds^3}{r\rho}\cos\varpi\, d\frac{1}{r} - ds\cos\varpi\, d^3\frac{1}{\rho} \\ &\quad + 4\,ds\sin\varpi\, d\varpi\, d^2\frac{1}{\rho} - \frac{ds^2}{r}\sin\varpi\, d^2\frac{1}{\rho} + \frac{ds^4}{r\rho}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)\sin\varpi. \end{aligned}$$

On a enfin

$$L' = L + dL + \frac{d^2L}{2} + \frac{d^3L}{6} + \ldots.$$

Portons les différentes valeurs que nous venons d'obtenir dans l'expression

$$AA'\,(L\cos T + L'\cos T'),$$

il viendra, en s'arrêtant aux termes du cinquième ordre,

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{L}\left(\frac{\sin\varpi}{2\rho}\frac{d\varpi}{ds}-\frac{\cos\varpi}{6}\frac{d\frac{1}{\rho}}{ds}-\frac{\sin\varpi}{3r\rho}\right)ds^3-\frac{d\mathrm{L}}{ds}\frac{\cos\varpi}{2\rho}ds^3\\
&+\mathrm{L}\left(\frac{\sin\varpi}{4\rho}\frac{d^2\varpi}{ds^2}+\frac{\cos\varpi}{4\rho}\frac{d\varpi^2}{ds^2}+\frac{\sin\varpi}{3}\frac{d\varpi}{ds}\frac{d\frac{1}{\rho}}{ds}-\frac{\cos\varpi}{12}\frac{d^2\frac{1}{\rho}}{ds^2}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{\cos\varpi}{6r\rho}\frac{d\varpi}{ds}-\frac{\sin\varpi}{6r}\frac{d\frac{1}{\rho}}{ds}-\frac{\sin\varpi}{6\rho}\frac{d\frac{1}{r}}{ds}\right)ds^4\\
&+\frac{d\mathrm{L}}{ds}\left(\frac{\sin\varpi}{2\rho}\frac{d\varpi}{ds}-\frac{\cos\varpi}{3}\frac{d\frac{1}{\rho}}{ds}-\frac{\sin\varpi}{6r\rho}\right)ds^4-\frac{d^2\mathrm{L}}{ds^2}\frac{\cos\varpi}{4\rho}ds^4\\
&+\mathrm{L}\left(\frac{\cos\varpi}{40\rho^2}\frac{d\frac{1}{\rho}}{ds}-\frac{\cos\varpi}{40}\frac{d^3\frac{1}{\rho}}{ds^3}-\frac{\cos\varpi}{120r^2}\frac{d\frac{1}{\rho}}{ds}+\frac{\cos\varpi}{30r\rho}\frac{d\frac{1}{r}}{ds}+\frac{\cos\varpi}{4\rho}\frac{d\varpi}{ds}\frac{d^2\varpi}{ds^2}+\frac{\cos\varpi}{6}\frac{d\frac{1}{\rho}}{ds}\frac{d\varpi^2}{ds^2}\right.\\
&\qquad-\frac{\sin\varpi}{12\rho}\frac{d\varpi^3}{ds^3}-\frac{11\sin\varpi}{120}\frac{d\frac{1}{r}}{ds}\frac{d\frac{1}{\rho}}{ds}-\frac{\sin\varpi}{20r}\frac{d^2\frac{1}{\rho}}{ds^2}-\frac{7\sin\varpi}{120\rho}\frac{d^2\frac{1}{r}}{ds^2}+\frac{\sin\varpi}{12\rho}\frac{d^3\varpi}{ds^3}\\
&\qquad+\frac{\sin\varpi}{6}\frac{d\frac{1}{\rho}}{ds}\frac{d^2\varpi}{ds^2}-\frac{\cos\varpi}{8\rho}\frac{d\frac{1}{r}}{ds}\frac{d\varpi}{ds}-\frac{\sin\varpi}{24\rho^3}\frac{d\varpi}{ds}-\frac{\sin\varpi}{24r^2\rho}\frac{d\varpi}{ds}+\frac{\sin\varpi}{8}\frac{d\varpi}{ds}\frac{d^2\frac{1}{\rho}}{ds^2}\\
&\qquad\left.+\frac{\sin\varpi}{12r\rho}\frac{d\varpi^2}{ds^2}-\frac{\cos\varpi}{12r\rho}\frac{d^2\varpi}{ds^2}-\frac{\cos\varpi}{12r}\frac{d\frac{1}{\rho}}{ds}\frac{d\varpi}{ds}+\frac{\sin\varpi}{60r\rho^3}+\frac{\sin\varpi}{60r^3\rho}\right)ds^5\\
&+\frac{d\mathrm{L}}{ds}\left(\frac{\cos\varpi}{4\rho}\frac{d\varpi^2}{ds^2}+\frac{\sin\varpi}{4\rho}\frac{d^2\varpi}{ds^2}-\frac{\sin\varpi}{8\rho}\frac{d\frac{1}{r}}{ds}+\frac{\sin\varpi}{3}\frac{d\frac{1}{\rho}}{ds}\frac{d\varpi}{ds}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{\cos\varpi}{8}\frac{d^2\frac{1}{\rho}}{ds^2}-\frac{\sin\varpi}{12r}\frac{d\frac{1}{\rho}}{ds}-\frac{\cos\varpi}{6r\rho}\frac{d\varpi}{ds}+\frac{\cos\varpi}{24\rho^3}+\frac{\cos\varpi}{24r^2\rho}\right)ds^5\\
&+\frac{d^2\mathrm{L}}{ds^2}\left(\frac{\sin\varpi}{4\rho}\frac{d\varpi}{ds}-\frac{\cos\varpi}{6}\frac{d\frac{1}{\rho}}{ds}-\frac{\sin\varpi}{12r\rho}\right)ds^5-\frac{d^3\mathrm{L}}{ds^3}\frac{\cos\varpi}{12\rho}ds^5.
\end{aligned}
$$

Il est facile de voir sur ce développement que le coefficient du terme en ds^4 est la demi-dérivée par rapport à s du coefficient du terme en ds^3, et que le cofficient du terme en ds^5 n'est pas uniquement fonction de celui du terme en ds^3.

En posant

$$(108)\qquad K = L\left(\frac{\sin\varpi}{2\rho}\frac{d\varpi}{ds} - \frac{\cos\varpi}{6}\frac{d\frac{1}{\rho}}{ds} - \frac{\sin\varpi}{3r\rho}\right) - \frac{dL}{ds}\frac{\cos\varpi}{2\rho},$$

on a donc

$$(109)\qquad AA'(L\cos T + L'\cos T') = K\,ds^3 + \frac{1}{2}\frac{dK}{ds}ds^4 + \ldots$$

D'où cette conclusion, due à M. Laguerre ([1]), que l'expression ci-dessus est généralement du troisième ordre; mais que, lorsqu'elle est d'un ordre supérieur au troisième, elle est au moins du cinquième.

32. Pour que K soit égal à zéro, il faut et il suffit que L satisfasse à l'équation différentielle

$$\frac{dL}{L} = \frac{2\rho\,ds}{\cos\varpi}\left(\frac{\sin\varpi}{2\rho}\frac{d\varpi}{ds} - \frac{\cos\varpi}{6}\frac{d\frac{1}{\rho}}{ds} - \frac{\sin\varpi}{3r\rho}\right)$$

ou

$$\frac{dL}{L} = \operatorname{tang}\varpi\,d\varpi - \frac{2}{3}\operatorname{tang}\varpi\frac{ds}{r} - \frac{1}{3}\rho\,d\frac{1}{\rho}$$

ou

$$(110)\qquad \frac{dL}{L} = \operatorname{tang}\varpi\left(d\varpi - \frac{2}{3}\frac{ds}{r}\right) + \frac{1}{3}\frac{d\rho}{\rho},$$

ou, en intégrant,

$$(111)\qquad L = \frac{C\sqrt[3]{\rho}}{\cos\varpi}\,e^{-\frac{2}{3}\int\operatorname{tang}\varpi\frac{ds}{r}},$$

C étant une constante arbitraire.

La valeur du segment L étant déterminée par cette relation, on aura

---

([1]) *Bulletin de la Société Philomathique de Paris*, t. VII, p. 49; 1870.

alors cette proposition que l'expression (109) en chacun des points de la directrice de la normalie sera une quantité infiniment petite du cinquième ordre.

C'est aux courbes tracées sur la normalie, et correspondant aux différentes valeurs de la constante C dans l'équation (111), que nous donnerons le nom de *courbes des segments normaux*.

33. L'équation (110) se présente sous une forme plus commode, en introduisant le rayon de courbure R de la section normale tangente à la directrice de la normalie. On a, par le théorème de Meusnier,

$$\rho = \mathrm{R}\cos\varpi,$$

d'où

$$d\rho = \cos\varpi\, d\mathrm{R} - \mathrm{R}\sin\varpi\, d\varpi,$$

et

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{d\mathrm{R}}{\mathrm{R}} - \operatorname{tang}\varpi\, d\varpi.$$

Substituant dans l'équation (110), il vient

$$\frac{d\mathrm{L}}{\mathrm{L}} = \frac{1}{3}\frac{d\mathrm{R}}{\mathrm{R}} + \frac{2}{3}\operatorname{tang}\varpi\left(d\varpi - \frac{ds}{r}\right). \tag{112}$$

Or, pour une géodésique, $\operatorname{tang}\varpi = 0$, et pour une ligne de courbure $d\varpi - \frac{ds}{r} = 0$; réciproquement, le produit $\operatorname{tang}\varpi\left(d\varpi - \frac{ds}{r}\right)$ ne s'annule que pour une géodésique et pour une ligne de courbure. Ces deux genres de courbes sont donc caractérisés par cette propriété des normalies auxquelles elles servent de directrices, que

$$\frac{d\mathrm{L}}{\mathrm{L}} = \frac{1}{3}\frac{d\mathrm{R}}{\mathrm{R}}, \tag{113}$$

ou, en intégrant, que

$$\mathrm{L} = \mathrm{C}\sqrt[3]{\mathrm{R}}, \tag{114}$$

C désignant une constante, c'est-à-dire que, dans les deux cas, la valeur du segment normal est proportionnelle à la racine cubique de R.

Cette propriété géométrique, commune aux géodésiques et aux lignes de courbure, a été découverte par M. Laguerre [1]; elle correspond à l'équation différentielle du second ordre donnée par Joachimsthal.

Quant aux asymptotiques, l'expression (108) montre que L doit être constamment nul; de sorte qu'une asymptotique tient lieu sur la normalie correspondante de toutes les courbes des segments normaux.

(*La suite prochainement.*)

---

[1] *Loc. cit.*