Annales scientifiques de l'É.N.S.

Y. Katznelson

Sur les algèbres dont les éléments non négatifs admettent des racines carrées

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 77, nº 2 (1960), p. 167-174
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1960_3_77_2_167_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
3e série, t. 77, 1960, p. 167 à 174.

SUR LES ALGÈBRES DONT LES ÉLÉMENTS NON NÉGATIFS ADMETTENT DES RACINES CARRÉES

PAR M. Y. KATZNELSON (1).

1. Dans tout ce qui suit, B est une algèbre commutative de Banach, semi-simple et auto-adjointe. Nous supposerons également que B admet un élément unité, hypothèse qui ne restreint pas la généralité vu la possibilité d'ajouter l'unité si elle est absente. Notre but est de démontrer que si chaque élément non négatif de B admet une racine carrée non-négative, B est l'algèbre de toutes les fonctions continues sur son espace d'idéaux maximaux $\mathfrak{M}$. Ceci complète quelques résultats partiels, obtenus dans [1], dont nous nous servons dans la présente démonstration.

La même méthode de démonstration permet d'obtenir quelques résultats d'ordre un peu plus général (*cf.* théorèmes 1 et 2).

Nous gardons la terminologie de [1].

2. LEMME 1. — *Si l'ensemble des idempotents de* B *n'est pas borné, il existe une suite non bornée d'idempotents mutuellement orthogonaux.*

Démonstration. — Pour un idempotent $h \in B$, posons

$$N(h) = \operatorname{Sup} \| hx \|,$$

le supremum étant pris pour tous les idempotents x. L'hypothèse du lemme peut s'écrire $N(1) = \infty$. Soit h_1^* un idempotent de norme supérieure à 10, on a $N(h_1^*) = \infty$ ou bien $N(1 - h_1^*) = \infty$. Si $N(1 - h_1^*) = \infty$, posons $h_1 = h_1^*$, sinon $h_1 = 1 - h_1^*$, de façon que

$$\| h_1 \| > 9, \qquad N(1 - h_1) = \infty.$$

(1) L'auteur tient à exprimer sa reconnaissance à MM. Kakutani, Malliavin et Rudin pour leur aide précieuse.

De manière générale, h_n peut être choisi inférieur à

$$1-\sum_{1}^{n-1} h_m$$

tel que

$$\| h_n \| > 9^n \qquad \text{et que} \qquad N\left(1-\sum_{1}^{n} h_m\right)=\infty.$$

C. Q. F. D.

Pour une suite $\{A_n\}$ $A_n \geqq 1$, nous désignons par $\sigma\{A_n\}$ l'algèbre des suites $a=\{a_n\}$ telles que

$$\| a \| = \sum | a_n | A_n < \infty,$$

avec les opérations algébriques usuelles

$$\{a_n\}+\{b_n\}=\{a_n+b_n\}, \qquad \{a_n\}\{b_n\}=\{a_n b_n\}, \qquad \lambda\{a_n\}=\{\lambda a_n\}.$$

Nous désignons par $s\{A_n\}$ l'algèbre des suites $a=\{a_n\}$ telles que

$$\lim | a_n | A_n = 0,$$

avec les mêmes opérations algébriques. $s\{A_n\}$ est une algèbre de Banach si l'on pose

$$\| a \| = \operatorname{Sup} | a_n | A_n.$$

LEMME 2. — *Soit $\{h_n\}$ une suite d'idempotents orthogonaux dans* B. *Soit $\{A_n\}$ une suite de nombres positifs. Supposons que toute fonction f définie sur $\mathfrak{M}$ qui prend la valeur a_n sur le support de h_n et qui s'annule ailleurs appartienne à* B *dès que*

$$\sum | a_n | A_n < \infty; \qquad \textit{alors} \quad \| h_n \| \leqq K A_n.$$

Démonstration. — L'application $\{a_n\} \to f$, f étant définie comme dans l'énoncé du lemme, est un homomorphisme de $\sigma\{A_n\}$ dans B. L'hypothèse que B soit semi-simple entraîne, d'après un théorème connu de Šylov [3], la continuité de cet homomorphisme. Il existe, par conséquent, une constante K telle que

$$\| f \| \leqq K \| a \| = K \sum | a_n | A_n,$$

et le théorème résulte en prenant pour f l'idempotent h_n.

3. Rappelons qu'une fonction $F(t)$, définie dans une partie I du plan complexe, opère dans B si $F(f) \in B$ pour toute $f \in B$ dont le spectre est contenu dans I.

THÉORÈME 1. — *S'il existe une fonction* $F(x)$ *définie pour* $0 \leqq x \leqq 1$, *qui opère* *dans* B *telle que* $F(0)=0$ *et que* $\lim_{x\to 0} x^{-1}F(x)=\infty$, *alors l'ensemble des idempotents de* B *est borné.*

Démonstration. — Si l'ensemble des idempotents n'est pas borné, il existe, d'après le lemme 1, une suite d'idempotents $\{h_n\}$ telle que $h_n h_m = 0$ pour $n \neq m$, $\|h_n\| \to \infty$. En prenant, si nécessaire, une sous-suite de $\{h_n\}$ on peut supposer

$$F(x) > nx \qquad \text{pour} \quad x < \|h_n\|^{-1}.$$

Posons $A_n = n^{-1}\|h_n\|$; soit $\{d_n\}$ une suite de nombres non négatifs telle que

$$\sum d_n A_n < \infty.$$

On a

$$F\left(\frac{d_n}{n}\right) > n\frac{d_n}{n} = d_n \qquad \text{si} \quad d_n A_n < 1$$

et comme la fonction F est continue ([1], th. 2.1) (²) il existe

$$a_n < \frac{d_n}{n} \qquad \text{tel que} \quad F(a_n) = d_n.$$

Or

$$\sum a_n \|h_n\| \leq \sum \frac{d_n}{n}\|h_n\| = \sum d_n A_n < \infty$$

et, par conséquent,

$$f = \sum a_n h_n \in B, \qquad \text{donc} \quad F(f) \in B.$$

Si $\sum |d_n| A_n < \infty$, la fonction qui prend la valeur d_n sur le support de h_n est une combinaison linéaire de quatre fonctions non négatives du même type et appartient donc à B. D'après le lemme 2, on a

$$\|h_n\| \leq KA_n = \frac{K}{n}\|h_n\|,$$

ce qui est impossible.

Corollaire. — *Si l'espace* $\mathfrak{M}$ *des idéaux maximaux de* B *est totalement discontinu, on a, sous les hypothèses du théorème* 1, $B = C(\mathfrak{M})$.

Démonstration. — Soit B_0 la sous-algèbre de B de toutes les combinaisons linéaires finies d'idempotents. La norme induite sur B_0 par B est équivalente, d'après le théorème 1, à celle induite sur B_0 par $C(\mathfrak{M})$. Comme B_0 est dense dans $C(\mathfrak{M})$, on a $B = C(\mathfrak{M})$.

(²) Dans [1], l'emploi de la fonction $G(z)$ dans la démonstration du théorème 2.1 est erroné et superflu. Cette partie de la démonstration peut se faire directement.

Remarque. — La condition

$$\lim_{x \to 0} x^{-1} F(x) = \infty$$

dans l'énoncé du théorème 1 ne peut être remplacée par

$$\overline{\lim_{x \to 0}}\, x^{-1} F(x) = \infty$$

comme le montre l'exemple suivant :

Soit $\{A_n\}$ une suite croissante telle que

$$\overline{\lim_{n \to 0}} \frac{A_{n+1}}{A_n} = \infty.$$

Considérons l'algèbre $s\{A_n\}$. Pour simplifier les notations, supposons aussi $\frac{A_{n+1}}{A_n} > 3$ et soit $F(x)$ définie comme suit :

$$F(\alpha_n) = F(2\alpha_{n+1}) = \sqrt{\alpha_n \alpha_{n+1}}, \qquad \alpha_n = A_n^{-1},$$

$F(x)$ étant linéaire pour $\alpha_n \geqq x \geqq 2\alpha_{n+1}$ et pour $2\alpha_n \geqq x \geqq \alpha_n$. On voit facilement que $F(x)$ opère dans $s\{A_n\}$ et l'on a

$$\overline{\lim}\, x^{-1} F(x) \geqq \overline{\lim}\, (2\alpha_{n+1})^{-1} \sqrt{\alpha_n \alpha_{n+1}} = \frac{1}{2} \overline{\lim} \sqrt{\alpha_n \alpha_{n+1}^{-1}} = \infty.$$

La condition $\overline{\lim} \frac{A_{n+1}}{A_n} = \infty$ est essentielle dans la construction de cet exemple; signalons, en effet, le résultat suivant :

THÉORÈME 2. — *S'il existe dans* B *une suite d'idempotents orthogonaux* $\{h_n\}$ *dont les normes* $A_n = \|h_n\|$ *satisfont aux conditions*

$$(a) \quad A_n \to \infty,$$
$$(b) \quad A_{n+1} A_n^{-1} \leqq K,$$

alors toute fonction qui opère dans B *est lipschitzienne d'ordre* 1 *en tout point.*

Démonstration. — Supposons que $F(x)$ soit définie dans $[0, 1]$, qu'elle opère dans B et qu'elle n'est pas Lip 1 à l'origine. On ne restreint pas la généralité en supposant que $F(x)$ est réelle et s'annule à l'origine. En prenant, si nécessaire, $-F(x)$ au lieu de $F(x)$ on peut affirmer qu'il existe une suite $\{\alpha_n\}$ telle que $F(\alpha_n) > n^4 \alpha_n$. Pour tout n il existe $m = m_n$ tel que

$$\alpha_n n^2 \leqq \frac{1}{A_{m_n}} < \alpha_n n^3.$$

Posons $g_n = h_{m_n}$. $\sum b_n g_n$ appartient à B dès que $|b_n| < \alpha_n$, la série étant absolument convergente. Par un raisonnement tout à fait analogue à celui utilisé dans la démonstration du théorème 1, on obtient que la fonction qui prend la valeur d_n sur le support de g_n appartient à l'algèbre dès que

$$|d_n| < n^4 \alpha_n < \mathrm{F}(\alpha_n)$$

et, en particulier, si

$$\sum |d_n| \alpha_n^{-1} n^{-4} < \infty,$$

ce qui implique, d'après le lemme 2,

$$\|g_n\| \leqq \mathrm{K} n^{-1} \mathrm{A}_{m_n}.$$

4. Rappelons quelques notations et résultats de [1].

a. Définition. — Une fonction $\mathrm{F}(x)$ qui opère dans B est bornée au voisinage d'un idéal maximal $\mathrm{M} \in \mathfrak{M}$ s'il existe un voisinage V de M dans $\mathfrak{M}$ et un $\eta > 0$ tels que l'image par F de l'ensemble des éléments de B à support dans V et de norme inférieure à η est bornée.

Nous dirons également que M est ordinaire par rapport à F.

b. Théorème ([1], lemme 3.2). — *Soit* B *régulière,* F *une fonction qui opère dans* B. *Il n'existe qu'un nombre fini d'idéaux maximaux non ordinaires par rapport à* F.

c. Théorème ([1], lemmes 3.1 et 6.1). — *Si* $\mathrm{F}(x) = \sqrt{x}$ *opère dans* B *et si* $\mathrm{F}(x)$ *est bornée au voisinage de chaque* $\mathrm{M} \in \mathfrak{M}$, *on a* $\mathrm{B} = \mathrm{C}(\mathfrak{M})$.

d. Théorème ([1], théorème 6.2 *a*). — *Si toutes les fonctions continues opèrent dans* B, *on a* $\mathrm{B} = \mathrm{C}(\mathfrak{M})$.

5. Théorème 3. — *Si* $\mathrm{F}(x) = \sqrt{x}$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ *opère dans* B, *alors* $\mathrm{B} = \mathrm{C}(\mathfrak{M})$.

Démonstration. — Remarquons d'abord que B doit être régulière. En effet, $\mathrm{F}_1(x) = |x| = \sqrt{x^2}$, pour $|x| \leqq 1$, opère dans B. Soit H un fermé dans $\mathfrak{M}$, $\mathrm{M}_0 \notin \mathrm{H}$, il existe une fonction réelle $h(\mathrm{M}) \in \mathrm{C}(\mathfrak{M})$ égale à -1 sur H telle que $h(\mathrm{M}_0) = 1$. Comme B est dense dans $\mathrm{C}(\mathfrak{M})$ il existe une fonction réelle $f(\mathrm{M}) \in \mathrm{B}$ telle $|f(\mathrm{M}) - h(\mathrm{M})| < \frac{1}{2}$. $f(\mathrm{M}) + |f(\mathrm{M})|$ s'annule sur H, $f(\mathrm{M}_0) + |f(\mathrm{M}_0)| \geqq 1$.

Pour avoir le cas général il suffirait de démontrer le théorème sous l'hypothèse supplémentaire $\mathfrak{M} \leqq [-1, 1]$; ceci se voit comme suit :

Soit $f \in \mathrm{B}$ de spectre contenu dans $[-1, 1]$. Désignons par $[f]$ la sous-algèbre de B des éléments constants sur les lignes de niveau de f, en d'autres termes :

$$g \in [f] \Leftrightarrow \{ f(\mathrm{M}_1) = f(\mathrm{M}_2) \Rightarrow g(\mathrm{M}_1) = f(\mathrm{M}_2) \}.$$

L'espace $\mathfrak{M}_f$ des idéaux maximaux de $[f]$ coïncide avec le spectre de f et fait donc partie de $[-1, 1]$; si cela implique $[f] = \mathrm{C}(\mathfrak{M}_f)$, toute fonction continue opérera sur f et, f étant quelconque, toute fonction continue opérera dans B et et l'on n'a qu'à appliquer 4.*d*.

Une deuxième simplification nous est permise par 4.b. Nous pouvons supposer que $\sqrt{x}$ est bornée au voisinage de chaque $M \in \mathfrak{M}$, sauf peut-être l'un d'eux, M_0. Nous montrerons que $\sqrt{x}$ est bornée au voisinage de M_0 également.

1^er^ *cas :* $\mathfrak{M}$ est totalement discontinu en M_0.

Il est clair qu'il suffit de montrer que $\sqrt{x}$ est bornée au voisinage de M_0; lorsqu'on restreint son opération à l'algèbre B_1 des éléments de B nuls au voisinage de $M_0[f \in B_1$ si et seulement si $f \in B$ et s'il existe un voisinage $V = V(f)$ de M_0 tel que $f(M) = 0$ pour $M \in V(F)]$. Ceci montrera, en effet, l'équivalence de la norme dans B_1 et la norme uniforme ([2], p. 78). Si $\sqrt{x}$ n'est pas bornée au voisinage de M_0 dans B_1, on peut choisir une suite $P_n \in B_1$, $P_n \geqq 0$, P_n ayant son support dans un voinage V_n fermé et ouvert de M_0 tel que

$$V_n \subseteq V(P_{n-1}), \qquad \| P_n \| \leqq 2^{-n}, \qquad \| \sqrt{P_n} \| > n.$$

Le support de P_n est contenu dans $V_n - V_{n+1}$ qui est un ouvert-fermé, et dont la fonction caractéristique h_n est un idempotent dans B.

Posons $f = \sum_{n-1}^{\infty} P_n$; on a

$$n \leqq \| \sqrt{P_n} \| = \| \sqrt{f}\, h_n \| \leqq \| \sqrt{f} \| . \| h_n \| < K \| \sqrt{f} \|,$$

d'après le théorème 1; $\sqrt{f}$ ne peut donc appartenir à B contrairement à l'hypothèse.

Le cas général. — Si $\mathfrak{M}$ n'est pas totalement discontinu en M_0, M_0 est, soit une extrémité, soit un point intérieur d'un intervalle appartenant à $\mathfrak{M}$.

Montrons que si $B \neq C(\mathfrak{M})$, il existe une algèbre quotient B_0 de B dont l'espace des idéaux maximaux $\mathfrak{M}_1$ est totalement discontinu en M_0, tel que $\sqrt{x}$ opère dans B_0 et tel que $B_0 \neq C(\mathfrak{M}_1)$ ou, ce qui revient au même, que l'idéal maximal M_0 dans B_0 est différent de l'ensemble de toutes les fonctions continues sur $\mathfrak{M}_1$ nulles en M_0.

Pour tout $t > 0$, l'algèbre des restrictions des éléments de M_0 à

$$\mathfrak{M}_t = \mathfrak{M} \cap \{ x ; | x - M_0 | \geqq t \}$$

est isomorphe à $C(\mathfrak{M}_t)$ d'après 4 c. La norme dans l'algèbre quotient est, par conséquent, équivalente à la norme dans $C(\mathfrak{M}_t)$. Soit $A(t)$ la constante de cette équivalence. Cela veut dire que toute fonction $f(x)$ continue sur $\mathfrak{M}_t$ est une restriction d'une fonction de M_0 dont la norme dans B est inférieure à

$$A(t) \operatorname*{Sup}_{x \in \mathfrak{M}_t} | f(x) |.$$

LEMME. — $B = C(\mathfrak{M})$ *si et seulement si* $A(t)$ *est bornée.*

Démonstration. — Il est clair que si $B = C(\mathfrak{M})$, $A(t)$ est bornée, montrons donc que si $A(t) < K$ on a $B = C(\mathfrak{M})$.

Soit $g \in M_0$. Soit δ_1 tel que $\operatorname*{Sup}_{|x-M_0|\leq\delta_1} |g(x)| < \varepsilon_1$. D'après les hypothèses il existe une fonction h_1 dans M_0, à support dans

$$\mathfrak{M} \cap \left[M_0 - \frac{\delta_1}{2},\, M_0 + \frac{\delta_1}{2}\right],$$

telle que

$$\| g + h_1 \| \leq K \operatorname{Sup} | g(x) |.$$

Soit $\Delta_1(x)$, la fonction égale à 1 pour

$$| x - M_0 > \delta_1,$$

égale à zéro pour

$$| x - M_0 | < \frac{\delta_1}{2},$$

et linéaire pour

$$\frac{\delta_1}{2} \leq | x - M_0 | \leq \delta_1.$$

$\Delta_1 \in M_0$ et, d'après les hypothèses, on peut lui ajouter un élément H'_1 à support voisin de M_0 de façon que

$$\| \Delta_1 + h'_1 \| < K$$

et que, si l'on pose

$$g_1 = (\Delta_1 + h'_1)(g + h_1),$$

on ait

$$\operatorname{Sup} | g(x) - g_1(x) | < \varepsilon_1.$$

Pour $g \in M_0$ et $\varepsilon_1 > 0$ on peut donc trouver deux éléments, g_1 et f_1 tels que $g = g_1 + f_1$

$$\| g_1 \| \leq K^2 \operatorname{Sup} | g(x) |, \qquad \operatorname{Sup} | f_1(x) | < \varepsilon_1.$$

Par le même argument $f_1 = g_2 + f_2$ tel que $\| g_2 \| \leq K^2 \varepsilon_1$,

$$\operatorname{Sup} | f_2 | \leq \frac{\varepsilon_1}{2}, \qquad \ldots, \qquad f_n = g_{n+1} + f_{n+1}, \qquad \| g_{n+1} \| \leq K^2 \frac{\varepsilon_1}{2^{n-1}},$$

$$\operatorname{Sup} | f_{n+1}(x) | \leq \frac{\varepsilon_1}{2^n}.$$

On a $g = \sum g_n$, par conséquent

$$\| g \| \leq \sum \| g_n \| \leq 2 K^2 \operatorname{Sup} | g(x) |$$

et le lemme est démontré.

Revenons maintenant à notre algèbre B et à l'hypothèse que $\sqrt{x}$ y opère.

Si $B \neq C(\mathfrak{M})$, $A(t)$ tend vers $+\infty$ lorsque $t \to 0$, choisissons t_1 tel que

$A(t_1) > 10$. Considérons l'algèbre B_1 des restrictions des éléments de B à

$$\mathfrak{M} - \mathfrak{M} \cap \left\{ x;\ \frac{t_1}{2} < |x - M_0| < t_1 \right\}.$$

Soit $A_1(t)$ la fonction correspondant à B_1 de la même manière que $A(t)$ correspondait à B. Il est clair que $A_1(t) \doteq A(t)$ pour $t > t_1$ et, d'après le lemme, $A_1(t) \to \infty$ lorsque $t \to 0$.

Soit t_2 tel que

$$A_1(t_2) > 10^2 \quad \text{et} \quad t_2 < \frac{t_1}{2}$$

et enlevons du spectre de B_1 la partie contenue dans

$$\frac{t_2}{2} < |x - M_0| < t_2.$$

Nous obtenons une algèbre B_2 avec une fonction $A_2(t)$ qui satisfait

$$A_2(t) = A_1(t) \quad \text{pour } t > t_2, \qquad A_2(t) \to \infty.$$

De manière générale on enlève la partie de $\mathfrak{M}$ incluse dans

$$\frac{t_n}{2} < |x - M_0| < t_n$$

et l'on obtient une algèbre B_n et une fonction $A_n(t)$ qui satisfait aux conditions

$$A_n(t) = A_{n-1}(t) \quad \text{pour } t > t_n, \qquad A_n(t_n) > 10^n.$$

Soit I la réunion de tous les intervalles qu'on enlève de cette façon. Soit B_0 l'algèbre des restrictions des éléments de B à $\mathfrak{M} - I$. Soit $A_0(t)$ la fonction correspondant à B_0. On a

$$A_0(t_n) = A_n(t_n) > 10^n$$

et, par conséquent, $B_0 \neq C(\mathfrak{M} - I)$. Or $\sqrt{x}$ opère dans B_0 et $\mathfrak{M} - I$ est totalement discontinu en M_0; la démonstration du premier cas implique $B_0 = C(\mathfrak{M} - I)$, contradiction qui prouve le théorème.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Y. Katznelson, *Sur le calcul symbolique dans quelques algèbres de Banach* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, 3e série, t. **76**, 1959, p. 83).

[2] L. H. Loomis, *An Introduction to Abstract Harmonic Analysis*, Van Nostrand, 1953.

[2] G. E. Šilov, *On regular normed rings* (*Travaux de l'Institut Mathématique Stekloff*, t. **21**, 1947).