ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

A. CORNU

De la réfraction à travers un prisme suivant une loi quelconque

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 3 (1874), p. 1-46
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1874_2_3__1_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1874, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

DE LA RÉFRACTION A TRAVERS UN PRISME SUIVANT UNE LOI QUELCONQUE,

PAR M. A. CORNU,
PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

TROISIÈME PARTIE [1].

ÉTUDES EXPÉRIMENTALES DESTINÉES A CONTRÔLER LES THÉORÈMES PRÉCÉDEMMENT ÉTABLIS.

38. Dans les deux premières Parties du présent Mémoire, un certain nombre de théorèmes géométriques assez simples, relatifs à la marche des rayons lumineux à travers un prisme, ont été établis indépendamment de toute connaissance sur la surface d'onde dans le milieu considéré. Dans ce qui va suivre, on va voir l'application de ces théorèmes à l'étude de la marche de la lumière à travers des prismes formés de diverses substances cristallisées qui se prêtent utilement à ce genre d'observations : les déterminations numériques qui s'y rencontrent justifient de tout point l'exactitude de ces propositions; en outre, elles

[1] *Voir* 2e Série, t. I, p. 231.

apportent un certain nombre de vérifications très-précises relatives à la surface d'onde des milieux à un axe optique, découverte ou plutôt devinée par Huyghens.

39. Les expériences ont été faites, pour la plupart, avec des prismes de spath d'Islande, substance qui se recommande spécialement, pour ce genre d'études, par son homogénéité, sa transparence, la perfection géométrique de ses clivages et l'énergie de sa double réfraction; le seul reproche qu'on puisse adresser à ce cristal est son peu de dureté, qui rend très-difficile la taille de faces artificielles aussi planes que la précision des mesures l'exigerait. Toutes ces conditions sont nécessaires pour que les vérifications numériques aient une valeur effective. En général, les substances que la nature nous offre en beaux cristaux transparents, le spath d'Islande excepté, ont toujours quelque défaut grave qui les fait rejeter; par exemple, le quartz, la topaze, l'orthose, la baryte sulfatée sont trop peu biréfringentes pour qu'on puisse les employer utilement à de semblables observations. L'aragonite serait très-intéressante à étudier, à cause de sa biréfringence avec deux axes optiques; mais elle a deux défauts : le premier, de ne présenter aucun repère cristallographique précis pour l'orientation des sections, car les facettes planes et polies sont rares et les clivages peu marqués; le second, de différer trop peu d'un cristal à un seul axe optique; son emploi introduirait toutes les complications des cristaux à deux axes, sans apporter le bénéfice des contrôles théoriques relatifs à cette complexité de constitution. Parmi les cristaux artificiels, l'azotate de soude se recommande par une biréfringence énorme et une facilité de clivage rhomboédrique remarquable; mais il est encore plus mou que le spath d'Islande et de plus un peu déliquescent, de sorte que la taille de faces artificielles suffisamment planes est à peu près impossible; on peut néanmoins utiliser, comme on le verra plus loin, la réfraction du rayon extraordinaire à travers l'angle aigu de deux clivages, et en déduire une vérification intéressante. Le soufre cristallisé dans le sulfure de carbone devra aussi donner des résultats importants, car il est biaxe; mais la taille en est également très-difficile; aussi son étude a-t-elle dû être remise à une époque où l'on disposerait d'échantillons de transparence suffisante et convenablement taillés.

40. Le spath d'Islande offre encore un avantage : c'est la constance de ses propriétés optiques; tous les échantillons limpides et à clivages bien réguliers présentent la double réfraction à un seul axe optique avec des indices de réfraction principaux si bien définis, que les déterminations faites par un grand nombre de physiciens sont presque identiques.

Cette *homogénéité optique* est précieuse dans les études présentes, non-seulement parce qu'elle est une condition nécessaire à l'application des principes adoptés, mais parce qu'elle permet un système de vérifications sur lesquelles on ne pourrait pas compter si la substance réfringente présentait une structure optiquement irrégulière. En effet, il ne s'agit pas seulement d'appliquer aux données numériques de l'observation des formules qui permettent d'affirmer que, dans l'intérieur du milieu, les ondes lumineuses se comportent de telle ou telle manière : il faut montrer qu'il en est réellement ainsi; il est donc nécessaire de se ménager un moyen de connaître la marche de ces ondes par une méthode tout à fait indépendante. C'est justement ce que permet la connaissance de la surface de l'onde lumineuse dans les cristaux à un axe optique. Ces études ont donc le double avantage de vérifier les propositions géométriques très-générales relatives à la propagation des ondes, et en même temps de contrôler l'exactitude de la surface d'onde des uniaxes.

41. Ces considérations font comprendre la marche suivie, dans cette troisième Partie, pour l'exposé des observations et des calculs qui en dérivent. Chaque série de mesures donne lieu à deux séries de calculs : la première est l'application des théorèmes généraux exposés précédemment, indépendants de la connaissance de la surface d'onde lumineuse; la seconde est, au contraire, la détermination théorique des mêmes éléments, en partant de l'ellipsoïde d'Huyghens défini par les indices mesurés par Rudberg.

Les vérifications numériques constitueront donc un contrôle de l'exactitude, non-seulement des formules nouvelles, mais encore de l'ellipsoïde d'Huyghens.

PREMIÈRE SÉRIE D'OBSERVATIONS.

DÉTERMINATION DES ÉLÉMENTS GÉOMÉTRIQUES D'UNE ONDE RÉFRACTÉE PAR UN PRISME CORRESPONDANT AU MINIMUM DE DÉVIATION.

42. *Choix du prisme.* — Pour la série d'expériences faites en vue de vérifier les théorèmes dans leur généralité, on a choisi un prisme de spath d'Islande à faces artificielles; l'orientation a été déterminée par les trois conditions suivantes :

1° L'onde réfractée intérieure correspondant au minimum de déviation devra, comme onde suivant la loi *extraordinaire*, différer, autant qu'il sera possible, d'une onde suivant la loi ordinaire et avoir le moins possible d'éléments de symétrie communs avec les faces du prisme, afin d'accentuer la divergence entre les phénomènes que produisent ces deux espèces d'ondes.

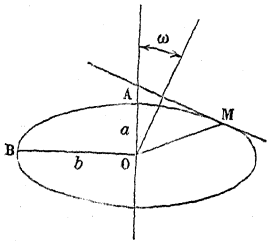
2° L'orientation cristallographique de l'onde devra être facile à définir [1].

---

[1] On a profité de la connaissance de la surface de l'onde extraordinaire du spath d'Islande pour satisfaire à ces conditions. En effet, les ondes qui diffèrent le plus d'une onde suivant la loi ordinaire sont celles pour lesquelles la direction lumineuse efficace fait l'angle le plus grand avec la normale à l'onde. L'axe du rhomboèdre ou axe optique étant un axe de révolution, il suffit de rechercher, dans une section méridienne quelconque de l'ellipsoïde, la tangente à l'ellipse qui fait le plus grand angle avec le rayon vecteur du point de contact.

Soient (*fig.* 10) a le demi-axe de révolution de l'ellipsoïde; b l'axe équatorial; ω l'angle

Fig. 10.



que fait la perpendiculaire à la tangente avec l'axe optique.

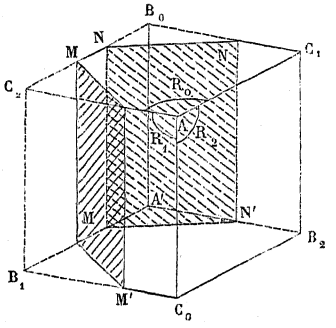
L'équation de la tangente à l'ellipse sera

$$x\cos\omega + y\sin\omega = p = \sqrt{a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega};$$

3° Les faces seront inclinées à 60 degrés, cet angle étant commode pour la mesure de la déviation et des incidences.

Voici la figure représentant la coupe du prisme adopté, taillé dans un rhomboïde de spath d'Islande (*fig.* 11).

Fig. 11.



$AB_0C_1B_2C_0B_1C_2A'$ est le parallélépipède de clivage choisi; les faces artificielles MM′ et NN′ font respectivement des angles de 30 degrés avec

---

sa dérivée par rapport à ω donne l'équation d'une droite passant par le point de contact M

$$-x\sin\omega + y\cos\omega = -\frac{(a^2-b^2)\sin\omega\cos\omega}{p};$$

les valeurs de x et y, communes à ces deux équations, sont les coordonnées du point M. Posant

$$\operatorname{tang}\omega' = \frac{y}{x},$$

et divisant membre à membre les deux équations, il vient

$$\frac{+x\sin\omega - y\cos\omega}{x\cos\omega + y\sin\omega} = \frac{(a^2-b^2)\sin\omega\cos\omega}{a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega}$$

ou

$$\frac{\operatorname{tang}\omega - \operatorname{tang}\omega'}{1+\operatorname{tang}\omega\operatorname{tang}\omega'} = \operatorname{tang}(\omega-\omega') = \frac{(a^2-b^2)\operatorname{tang}\omega}{a^2+b^2\operatorname{tang}^2\omega};$$

on en déduirait aussi

$$\operatorname{tang}\omega' = \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tang}\omega.$$

Le maximum de $\omega-\omega'$ s'obtiendra en égalant à zéro la dernière expression de $\operatorname{tang}(\omega-\omega'$ prise par rapport à $\operatorname{tang}\omega$

$$(a^2+b^2\operatorname{tang}^2\omega)(a^2-b^2) - (a^2-b^2)\operatorname{tang}\omega\, 2b^2\operatorname{tang}\omega = 0, \quad b^2\operatorname{tang}^2\omega = a^2,$$

les faces $AC_2B_1C_0$, $A'B_0C_1B_2$, et sont toutes deux parallèles à l'arête AC_0 ou B_1C_2 ou B_0A'.

De cette manière l'axe du rhomboèdre est orienté d'une manière quelconque par rapport au prisme, de sorte qu'il n'y a aucun élément de symétrie commun entre le prisme et le cristal.

Pour éviter des confusions, on a donné un nom à chaque face du cristal.

Les trois faces rhomboédriques adjacentes au sommet obtus A sont R_0, R_1, R_2; les trois autres, qui leur sont respectivement parallèles, sont R'_0, R'_1, R'_2.

Les faces artificielles sont désignées par M et N.

---

d'où

$$\tang^2\omega = \frac{a^2}{b^2}, \quad \tang\omega = \pm\frac{a}{b}, \quad \tang\omega' = \pm\frac{b}{a}.$$

La valeur correspondante de $\omega - \omega'$

$$\tang(\omega - \omega') = \frac{(a^2 - b^2)\frac{a}{b}}{a^2 + a^2} = \frac{a^2 - b^2}{2ab}.$$

Rappelant que les indices de réfraction sont les inverses des demi-axes

$$\tang(\omega - \omega') = \frac{n_e^2 - n_o^2}{2n_e n_o}, \qquad \begin{array}{ll} n_e \ldots\ldots\ldots & \text{indice extraordinaire,} \\ n_o \ldots\ldots\ldots & \text{indice ordinaire,} \end{array}$$

on voit ainsi que les ondes qui satisfont à la question correspondent aux deux diamètres conjugués égaux de l'ellipse méridienne. Substituant les valeurs de n_e, n_o de Rudberg correspondant à la raie D (*voir* plus loin, p. 29), il vient

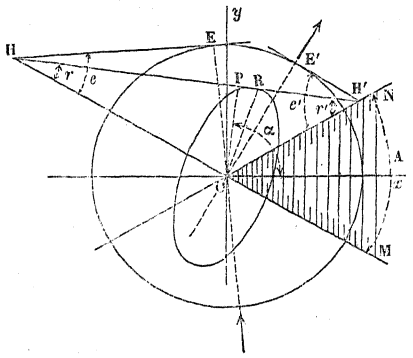
$$\left.\begin{array}{l} \omega = 41^\circ 52' \ 3'' \\ \omega' = 48^\circ \ 7' 57'' \end{array}\right\} \omega' - \omega = 6^\circ 15' 54''.$$

Ce calcul préliminaire montre que, dans le spath d'Islande, la normale à l'onde extraordinaire fait, avec la direction lumineuse efficace, un angle qui atteint presque 6° 16', et, comme cet angle est un maximum, les ondes voisines ne s'écarteront donc pas beaucoup de ces conditions. Quant à la direction de ces ondes, leur normale fait un angle d'environ 42 degrés avec l'axe optique.

Pratiquement voici comment, en partant de ces données, on a construit le prisme : on a remarqué que les faces de clivage du rhomboèdre de spath faisaient avec son axe un angle de 44° 37', très-voisin de la direction des ondes qu'on vient de définir ; il en résulte qu'une onde qui se propagerait dans le cristal parallèlement à une face du rhomboèdre jouirait sensiblement de la propriété en question. On a donc pris pour plan bissecteur du prisme un plan de clivage; on était ainsi assuré que l'onde réfractée serait très-voisine de la direction voulue. Quant à l'arête du prisme, elle a été choisie parallèle à une des arêtes du rhomboèdre formant l'hexagone gauche autour de l'axe.

D'après les conventions établies dans le premier Mémoire (p. 237), l'angle d'incidence sur la face M sera désigné par e, sur la face N par e'. La bissectrice intérieure de la section droite du prisme sera l'axe des x,..., comme il est indiqué (*fig.* 12).

Fig. 12.



Observations faites avec le prisme de spath d'Islande.

43. Ce prisme était placé sur la plate-forme d'un excellent goniomètre de Babinet, construit par MM. Brunner frères; il a servi à faire quatre séries d'observations; on déterminait

1° L'angle du prisme;

2° Les déviations minimum du rayon extraordinaire;

3° Les incidences correspondant à ce minimum, incidences qui ne sont pas égales, comme on l'a démontré précédemment, n° 24 (p. 252);

4° L'inclinaison de l'image de la fente verticale du collimateur après réfraction.

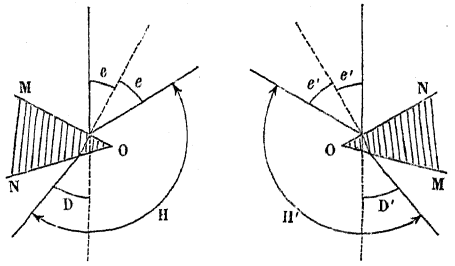
Dans toutes ces observations, on employait la lumière monochromatique très-intense, produite par la flamme d'un brûleur à gaz (ou d'un jet d'hydrogène pur) dans laquelle sont placés une spirale de platine et du sel marin fondu. Les deux premières déterminations s'effectuaient suivant la méthode ordinaire; on observait la réflexion des rayons du collimateur sur les deux faces du prisme fixé invariablement: la différence des lectures donnait le double de l'angle du prisme; de

même, la réfraction à droite, puis à gauche, fournissait le double de la déviation minimum.

La détermination de l'incidence, correspondant au minimum de déviation, est un peu moins facile à faire : la première méthode consiste à amener avec beaucoup de soin le prisme au minimum de déviation et à lire l'azimut du rayon réfracté et celui du rayon réfléchi sur la face d'incidence; l'incertitude que comporte nécessairement la position du prisme oblige à répéter l'observation un assez grand nombre de fois : la différence des lectures donne évidemment (*fig.* 13) un angle définitif H.

$$H = \pi - 2e + D.$$

Fig. 13. Fig. 14.



En recommençant la même série d'opérations sur l'autre face, on obtient un autre angle H' (*fig.* 14).

$$H' = \pi - 2e' + D.$$

Ces deux déterminations se contrôlent mutuellement et permettent, jusqu'à un certain point, d'assigner l'approximation du résultat final, qui est la valeur $e - e'$.

En effet, on a dans tous les cas

$$A + D = e + e';$$

substituant la valeur de D dans les valeurs de H et H', il vient

$$H + A = \pi + e' - e,$$
$$H' + A = \pi + e - e',$$

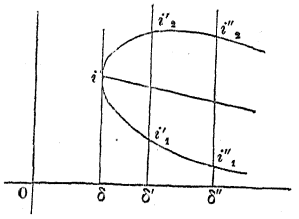
d'où

$$H + H' + 2A = 2\pi;$$

de sorte que la somme de $H + H'$ et du double de l'angle du prisme doit être égale à 2π. Si cette condition n'est pas satisfaite, le demi-excès sur 2π mesure l'erreur à craindre, c'est-à-dire l'approximation qu'on peut espérer des mesures.

Une seconde marche plus laborieuse, mais aussi plus exacte, a été également employée; elle est calquée sur celle qu'a imaginée Despretz pour déterminer la température du maximum de densité de l'eau; elle consiste à observer le minimum de déviation et les doubles incidences qui correspondent à deux déviations très-voisines de ce minimum. Si l'on se représente graphiquement (*fig.* 15) les déviations δ, δ', δ'' en

Fig. 15.



abscisses et les incidences i, i'_1, i'_2, i''_1, i''_2 correspondantes en ordonnées, on construira la conique osculatrice de la courbe $i = \varphi(\delta)$, définie par ces quatre points et par une tangente; il est inutile de construire cette conique, mais on obtiendra le point de contact en joignant les milieux des deux cordes parallèles. Une simple proportion permet donc de calculer l'ordonnée du point cherché; ce point définit l'incidence i, correspondant au minimum de déviation (*voir* plus loin, n° 48).

44. L'observation de l'inclinaison de l'image de la fente a été faite de deux manières. Il eût été plus commode d'avoir un micromètre semblable à ceux que les astronomes emploient au foyer des lunettes équatoriales, c'est-à-dire portant un fil mobile entraîné par l'alidade d'un cercle divisé, normal à l'axe optique de l'instrument. Le goniomètre dont on faisait usage ne portant pas une semblable pièce, on a dû utiliser d'autres moyens de mesure : on a profité de ce que la lunette était mobile autour de deux colliers concentriques à son axe optique. Dans le premier mode opératoire, on amenait le fil vertical de la lunette à coïncider avec l'image de la fente, par une rotation conve-

nable de la lunette autour de ses colliers; pour évaluer cette inclinaison, on en mesurait la tangente trigonométrique en ramenant la lunette dans l'alignement du collimateur; on mesurait alors la hauteur angulaire apparente de la fente verticale avec le fil devenu oblique; le quotient de cette lecture, par la valeur de la hauteur angulaire réelle de la fente, mesurée préalablement, donnait la tangente trigonométrique de l'angle cherché.

Ce procédé fort simple s'appliquerait à toutes les lunettes dont le tirage portant le réticule pourrait tourner autour de son axe de figure. L'autre mode opératoire a consisté à fixer sur la monture de la lunette un petit miroir permettant de mesurer la rotation autour des colliers, à l'aide d'une lunette auxiliaire et d'une échelle divisée; on faisait deux lectures : d'abord en fixant le zéro, c'est-à-dire l'azimut de la lunette, lorsque le fil vertical coïncidait avec l'image directe de la fente du collimateur; puis en ramenant dans cette même direction la lunette, après l'avoir tournée de l'angle convenable par la mise en coïncidence du fil avec l'image de la fente; les deux lectures de l'échelle divisée fournissaient les éléments de l'angle de rotation cherché ([1]).

L'exactitude de ces deux opérations est subordonnée tout entière à la netteté de l'image de la fente; on ne doit pas choisir une hauteur de fente trop considérable parce que l'image réfractée serait notablement arquée; il faut aussi qu'elle soit fine. C'est là que l'imperfection des surfaces, les phénomènes de diffraction dus à la petitesse, à la forme et à l'obliquité des faces du prisme jouent un rôle fâcheux; car ces causes tendent à élargir l'image optique, à en rendre les bords estompés et même à la déformer un peu. Pour éliminer cette influence,

---

([1]) *Note sur le réglage de la fente.* — Il est nécessaire que la fente du collimateur soit bien verticale, c'est-à-dire exactement perpendiculaire au plan du limbe ou parallèle à l'axe de l'instrument. Pour obtenir cette condition, on dispose sur la plate-forme centrale une glace argentée, et on la règle à l'aide de la lunette (par réflexion normale et retournement), de manière que son plan soit parallèle à l'axe de l'instrument. Alors on observe la fente avec la lunette, en ayant soin de faire coïncider le fil vertical du réticule avec elle sur toute sa longueur; puis on observe l'image réfléchie sur la glace : si la fente est bien réglée, le réticule coïncide encore avec l'image, sinon l'angle des deux directions est le double de l'erreur de verticalité de la fente; on peut donc la corriger par les moyens de réglage dont on dispose.

on a répété les mêmes mesures sur le rayon ordinaire et l'on a rapporté l'inclinaison de la fente, vue par réfraction extraordinaire, non pas à l'image directe, mais à l'image vue par réfraction ordinaire; c'est le résultat consigné dans le tableau suivant, dans la douzième série. Quoi qu'il en soit, dans le cas où quelque observateur voudrait effectuer des mesures analogues, on ne saurait trop lui conseiller de mettre un soin extrême à l'exécution des faces du prisme, tant au point de vue du poli que de la *planitude*, et, à cet effet, de choisir un prisme de spath ayant des dimensions aussi grandes que possible.

45. Nous allons déduire de ces données expérimentales les trois éléments géométriques de l'onde, réfractée dans l'intérieur du cristal, correspondant au minimum de déviation.

Ces trois éléments sont, ainsi qu'il a été dit au n° 5 (p. 233) :

1° La vitesse suivant la normale à l'onde plane;

2° L'angle que fait la direction lumineuse efficace avec cette normale;

3° L'orientation du plan parallèle à cette normale et au rayon efficace.

Il faut ajouter à ces trois éléments constitutifs de l'onde les éléments qui définissent sa position relativement au cristal. Dans les observations précédentes, l'onde plane réfractée étant, comme les ondes émergentes, parallèle à l'arête du prisme, sa position est déterminée par sa trace sur la section droite.

Soit α l'angle que forme la normale à cette onde plane réfractée avec la bissectrice intérieure de la section droite du prisme, suivant les conventions du n° 12 (*fig.* 12). On a (n° 20, p. 247)

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{r - r'}{2}, \quad r + r' = A.$$

Cet élément de *position* se calcule par la formule du n° 35,

$$\operatorname{tang} \alpha = -\frac{\nu}{\mu} \cot \frac{e - e'}{2},$$

dans laquelle

$$\mu = \frac{\cos \frac{A + D}{2}}{\cos \frac{A}{2}}, \quad \nu = \frac{\sin \frac{A + D}{2}}{\sin \frac{A}{2}}.$$

Le premier élément géométrique défini plus haut, à savoir la vitesse normale de propagation, est l'inverse de l'indice de réfraction actuel n; il est fourni par l'une ou l'autre des deux formules (10) du n° 15, (p. 240) :

$$n = \nu \frac{\cos\frac{e-e'}{2}}{\cos\frac{r-r'}{2}} = \nu \frac{\cos\frac{e-e'}{2}}{\sin\alpha},$$

$$n = \mu \frac{\sin\frac{e-e'}{2}}{\sin\frac{r-r'}{2}} = -\mu \frac{\sin\frac{e-e'}{2}}{\cos\alpha},$$

lesquelles se servent mutuellement de contrôle pour le calcul numérique.

Les deux autres éléments qui se rapportent à la direction lumineuse efficace se déduisent très-simplement de la connaissance des coordonnées x_0, y_0, z_0 du point de contact de l'onde plane avec la surface d'onde. Les formules du n° 37 (p. 267), applicables au cas du minimum de déviation, donnent,

$$x_0 = -\frac{1}{\mu}\sin\frac{e-e'}{2}, \quad y_0 = +\frac{1}{\nu}\cos\frac{e-e'}{2}, \quad z_0 = -\frac{\cos e \cos e'}{\sin(A+D)}\operatorname{tang}\varphi'_0.$$

La projection du rayon lumineux efficace sur la section droite fait avec l'axe des x un angle α', tel que

$$\operatorname{tang}\alpha' = \frac{y_0}{x_0};$$

la comparaison avec la valeur de $\operatorname{tang}\alpha$ montre que

$$\operatorname{tang}\alpha' = \frac{\mu^2}{\nu^2}\operatorname{tang}\alpha.$$

Comme vérification, il est bon de rappeler la relation du n° 24 (p. 253)

$$\operatorname{tang}^2\beta = \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha',$$

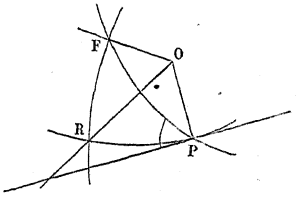
dans laquelle $\beta = \frac{\pi}{2} + \frac{e-e'}{2}$.

Le rayon lumineux fait avec le plan de la section droite un angle $\varkappa$, défini par

$$\operatorname{tang}\varkappa = \frac{z_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} = \frac{z_0 \cos\alpha'}{x_0}.$$

On pourrait calculer aussi en fonction des x_0, y_0, z_0 l'angle ζ de la normale d'onde et du rayon efficace; mais les expressions ne seraient pas calculables par logarithmes : aussi est-il plus commode d'employer la trigonométrie sphérique. Les trois directions ci-dessus indiquées forment les trois sommets d'un triangle sphérique rectangle, à savoir (*fig.* 16) :

Fig. 16.



OP normale d'onde,
OF rayon lumineux efficace,
OR projection du rayon sur la section droite,
$PR = \alpha - \alpha'$, $\widehat{FPR} = \Omega$,
$FR = \varkappa$,
$FP = \zeta$.

On conclut facilement

$$\operatorname{tang}\varkappa = \frac{z_0}{\frac{1}{n}\cos(\alpha - \alpha')} = \frac{n z_0}{\cos(\alpha - \alpha')},$$

relation qui fournit une vérification pour $\varkappa$:

$$\cos\zeta = \cos\varkappa \cos(\alpha - \alpha'), \quad \text{et aussi} \quad \operatorname{tang}\Omega = \frac{\operatorname{tang}\varkappa}{\sin(\alpha - \alpha')}.$$

46. Voici le résumé des observations faites avec ce prisme : le tableau comprend quatre colonnes principales qui renferment les observations angulaires, à savoir : les mesures relatives à l'angle du prisme, à la déviation minimum du rayon extraordinaire et aux incidences correspondantes. Comme vérifications ultérieures, on y a joint les mêmes mesures relatives au rayon ordinaire : les nombres de la colonne θ représentent la température ambiante de l'observation mesurée par un thermomètre placé le long du collimateur; les deux autres colonnes comprennent, l'une le résultat du contrôle indiqué au n° 43 (p. 9), l'autre les observations de l'inclinaison de l'image de la fente du collimateur.

SÉRIE.	DOUBLE de l'angle du prisme. 2A	θ	RAYON EXTRAORDINAIRE. DOUBLE DÉVIATION 2D	θ	DIFFÉRENCE des incidences $e'-e=H-H'$	θ	RAYON ORDINAIRE. DOUBLE DÉVIATION 2D	θ	DIFFÉRENCE des incidences $e'-e$	DIFFÉRENCE $(H+H'+2A-2\pi)$	VALEUR de $\tang \varphi'_0$.
1	120°.50'.47"	15°,8	86°.52'.33"	15°,8	5°.36'.59"	16°,0	105°.22'.48"	15°,8		+ 36'.50"	—0,011140
2	50.44	16,0	53.18	16,0	5.37.12	16,0	22.42	15,8		39. 2	
3	50.45	18,5									
4	50.39	12,1									
5	49.51	6,8					22.30	9,4			
6	50.38	20,6					23.41	21,0			
7	50.41	20,6									
8	50.11	15,8	53. 0	15,5			23.18	15,7			
9	50.54	17,3			5.35.20	17,0				4.50	
10	51. 8	12,7	52.21	12,5							
11	49.55	8,3	52.21	12,5							
12	50. 8	12,5	52.22	12,5							—0,010888
13	50.33	13,9	52.33	14,4			23.23	14,2			
14	50.23	15,5	52.42	15,4			23.26,3				
15	50.27	15,4									
16	50.14	12,5	52. 3	12,5	5.34.28	12,5	23. 7	12,5		— 5.25	
17	50.21	12,5									
18	50.18	12,0	52.44	12,0							
19	50.20	12,2									
20	50.29	13,9	52.42	14,0							
21	50.27	14,6	52.42	14,5	5.38.22	14,5				— 2.20	
22	50.26	12,9	52.37	13,0							
23	50.32	13,4	52.35	13,5	5.37.51	13,5	23.26	12,4	—0°.0'.26"	+ 1.31	
24	50.10	12,2					23.24	12,5			
25	50.13	12,6					23.16	12,6			

47. La concordance de ces observations est très-satisfaisante; on pourrait prendre la moyenne de chaque colonne comme point de départ des calculs ultérieurs; mais, comme la variation des éléments avec la température n'est pas à négliger, il vaut mieux choisir une série qui ait été faite complétement dans les mêmes circonstances. La meilleure, sous ce rapport, et surtout relativement à la régularité des mesures, est celle qui porte le n° 23; en effet, c'est celle qui présente la vérification indiquée au n° 43 avec la plus grande approximation, ainsi que le montre la colonne intitulée *différence*, $H + H' + 2A - 2\pi$. De plus, la même série d'opérations appliquée au rayon ordinaire fournit un autre contrôle; on devrait avoir $e' - e = 0$; l'observation a donné $e' - e = -0°0'26''$: ce qui tendrait à prouver que l'erreur est négative et égale environ à $26''$, valeur de même ordre que la moitié de la différence $H + H' + 2A - 2\pi = 1'31''$.

On adoptera donc, pour tous ces motifs, la série n° 23.

Détail des observations.

48. Le tableau précédent n'indique que le résumé des séries; celui qui va suivre donnera une idée complète des observations avec le détail des lectures du cercle et des verniers; c'est la série n° 23, elle fournit la valeur des incidences correspondant au minimum de déviation par la seconde méthode du n° 43.

Le cercle est divisé de 0 à 360 degrés dans le sens des aiguilles d'une montre : les divisions représentent 5 minutes; les deux verniers permettent de lire 3 secondes et d'estimer $1'',5$. On n'a écrit que la moyenne des deux lectures des verniers, à 180 degrés de distance, ce qui donne parfois des quarts de seconde.

1° *Observation préliminaire.*

Direction des rayons incidents (zéro arbitraire) venant du collimateur..... $90°2'20'',25$.

Cette lecture sert de vérification pour empêcher les erreurs d'inadvertance dans la mesure des doubles déviations.

2° *Angle du prisme.*

Arête placée du côté du collimateur : les rayons incidents se réfléchissent simultanément à gauche et à droite, sur les faces M et N; $\theta = 12°,9$.

Lecture à gauche.....	155°29′34″,5	d'où $2A = 120°50'25'',5$
Lecture à droite.....	34°39′ 9″,0	

3° *Déviation minimum.*

Opération comme à l'ordinaire; $\theta = 13°,0$:

Déviation à gauche (incidence sur la face M).....	133°28′26″,25	$2D = 86°52'36'',75$.
Deviation à droite (incidence sur la face N).....	46°35′49″,50	
Somme.....	180° 4′15″,75	

4° *Incidences voisines de celle qui correspond au minimum de déviation.*

Réflexion sur la face N.

La déviation minimum à droite correspondait à l'azimut 46°35′49″,50; on déplace la lunette jusqu'à 46°35′0″, alors la déviation correspond à deux positions du prisme; on règle soigneusement le prisme dans les deux positions qui amènent l'image lumineuse sur le réticule de la lunette, placée à 46°35′0″, et l'on déplace la lunette de façon à recevoir le rayon réfléchi ; on obtient les deux lectures suivantes :

158°42′42″,75	Moyenne...	160°32′0″,75.
162°21′18″,75		

De la même manière, après avoir déplacé la lunette jusqu'à 46°34′0″, on a obtenu

157°53′27″,00	Moyenne...	160°25′14″,63.
163° 7′ 2″,25		

5° *Déviation minimum.*

Pour contrôler la stabilité du cercle et l'invariabilité des déviations, on a répété la mesure de la déviation minimum, avant de passer à l'autre série; $\theta = 13°,5$.

Déviation à droite (incidence sur N).	$46^\circ 35' 53'',25$	$2D = 86^\circ 52' 33'',75.$
Déviation à gauche (incidence sur M).	$133^\circ 28' 27''$	
Somme.....	$180^\circ\ 4' 20'',25$	

Les azimuts ont varié l'un de $0'',75$, l'autre de $3'',5$, quantités excessivement petites et dues probablement à la variation de température.

6° *Incidences voisines de celle qui correspond au minimum de déviation.*

Réflexion sur la face M; $\theta = 13^\circ,2$:

Lunette à $133^\circ 29' 0''$.....	$6^\circ 48' 35''$	Moyenne...	$8^\circ 15' 12'',$
	$9^\circ 41' 48''$		
Lunette à $133^\circ 30' 0''$.....	$5^\circ 49'\ 3''$	Moyenne...	$8^\circ 15' 15''.$
	$10^\circ 41' 27''$		

7° *Déviation minimum.*

Incidence sur M.....	$133^\circ 28' 36'',75$	$2D = 86^\circ 52' 45'',75.$
Incidence sur N.....	$46^\circ 35' 51,00$	
Somme.....	$180^\circ\ 4' 27'',75$	

8° *Angle du prisme.*

La température est alors $\theta = 13^\circ,4$.

$156^\circ 24' 21'',75$	$2A = 120^\circ 50' 31'',5.$
$35^\circ 33' 50'',25$	

La température ayant été en croissant d'une manière régulière, on a éliminé son influence par le mode d'observations croisées qu'on a adopté : ainsi l'on prendra pour l'angle du prisme la moyenne des deux valeurs du commencement et de la fin de la série

$$2A = 120^\circ 50' 28'',5.$$

La déviation sera la moyenne des deux valeurs correspondantes du commencement et de la fin :

$$2D = 86^\circ 52' 40'',50.$$

Il reste à calculer les azimuts de réflexion pour en déduire les incidences.

1° *Réflexion sur* N.

Azimut de déviation minimum...	46° 35′ 49″,50	avant la série,
	46° 35′ 53″,25	après la série,
Moyenne.....	46° 35′ 51″,38	

Tel est l'azimut qu'on adoptera pour la déviation minimum, et l'on écrira

A 46° 35′ 51″,38	51″,38	correspond l'azimut x'		
A 46° 35′ 0″,00	60″,00		160° 32′ 0″,75	1′46″,12
A 46° 34′ 0″,00			160° 30′ 14″,63	

d'où l'on conclut

$$\frac{x - 160^\circ 32' 0'',75}{51'',38} = \frac{106'',12}{60''},$$

d'où

$$x' = 160^\circ 33' 31'',64$$

Retranchant l'azimut de la déviation minimum. $46^\circ 35' 51'',38$

Il vient..... $\pi + D - 2e' = H' = 113^\circ 57' 40'',26$

2° *Réflexion sur* M.

Azimut de déviation minimum...	133° 28′ 27″,00	avant la série,
	36″,75	après la série.
Moyenne.....	133° 28′ 31″,88	

d'où l'on conclut le tableau suivant :

A 133° 28′ 31″,88	29″,12	correspond l'azimut x		
A 133° 29′ 0″,00	60″,00		8° 15′ 12″,00	3″,00
A 133° 30′ 0″,00			8° 15′ 15″,00	

donc

$$\frac{x - 8^\circ 15' 12''}{29,12} = -\frac{3''}{60},$$

d'où

$$x = 8^\circ\, 15'\, 10'',54$$

Retranchant x de l'azimut de déviation minimum. $133^\circ 28' 31'',88$

Il vient. . . . . $\pi + D - 2e = H = 125^\circ\, 13'\, 21'',34$

Les valeurs de H et H′ satisfont à la vérification $H + H' + 2A = 2\pi$:

$$\begin{aligned} H &= 125^\circ 13' 21'',34 \\ H' &= 113^\circ 57' 40'',26 \\ 2A &= 120^\circ 50' 28'',50 \\ \hline H + H' + 2A &= 360^\circ\ 1' 30'',10 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} H - H' = 2(e' - e) &= 11^\circ 15' 41'',08 \\ e' - e &= 5^\circ 37' 50'',54 \end{aligned}$$

L'excès est de $1' 30'',10$; l'erreur à craindre sur $e' - e$ doit donc être de l'ordre de $\frac{1}{2}(1^\circ 30'',10) = 45'',05$.

Les valeurs de H et H′ jointes à celles de A et D fournissent une relation de trop, et comme la vérification précédente n'est pas rigoureusement satisfaite, il y a lieu de choisir la donnée à supprimer pour faire les calculs. Évidemment, les incertitudes sont surtout à craindre sur H et H′; si l'on n'utilise que leur différence $H = H' = 2(e' - e)$, ces données entreront d'une manière aussi symétrique que possible : on aura donc comme données définitives

$$2A,\ 2D = 2(e + e') - 2A \quad \text{et} \quad H - H' = 2(e' - e),$$

d'où l'on conclut

$$\begin{aligned} A &= 60^\circ 25' 14'',25 \\ D &= 43^\circ 26' 20'',25 \\ e &= 49^\circ\ 6' 51'',98 \ \text{(réflexion sur M)} \\ e' &= 54^\circ 44' 42'',52 \ \text{(réflexion sur N)} \end{aligned}$$

C'est avec ces données expérimentales que le calcul des éléments de l'onde réfractée a été effectué; les résultats obtenus sont consignés dans la deuxième colonne du tableau ci-après; la troisième contient ceux qui sont obtenus par la méthode décrite dans les paragraphes qui suivent.

ÉLÉMENTS A DÉTERMINER	RÉSULTATS NUMÉRIQUES	
	d'après les théorèmes généraux et les observations précédentes.	d'après l'orientation cristallographique du prisme et les données de Rudberg.
$\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{r - r'}{2}$	$\alpha = 88^\circ 42' 54'',79$ $\alpha' = 83^\circ 50' 44'',04$	$88^\circ 42' 17'',87$ $83^\circ 47' 42'',68$
Indice de réfraction.....	$n = 1,563079$	$1,563093$
Angle du rayon projeté et de la normale d'onde.....	$\alpha - \alpha' = 4^\circ 52' 15'',07$	$4^\circ 54' 35'',19$
Distance du point de contact de la surface d'onde à la section droite du prisme.	$z_0 = + 0,042280$	$+ 0,042692$
Angle du rayon avec la section droite.	$\varkappa = 3^\circ 47' 47'',5$	$3^\circ 48' 13'',75$
Angle de la normale d'onde et du rayon.	$\zeta = 6^\circ 10' 7''$	$6^\circ 12' 28'',90$
Angle du plan contenant le rayon et la normale d'onde avec le plan de la section droite.....	$\Omega = 38^\circ 0', 5''$	$37^\circ 50' 28'',37$
Indice du rayon ordinaire.....	$n_0 = 1,658347$	$n_0 = 1,65846$ raie D.

Calcul théorique des résultats précédents.

49. Le contrôle de ces résultats a été obtenu par leur comparaison avec ceux qu'on déduit de la connaissance de la surface d'onde du spath d'Islande. Le calcul ne laisse pas que d'être assez laborieux, surtout à cause des calculs préliminaires relatifs à l'orientation de l'axe optique par rapport aux faces artificielles du prisme ; les résultats sont consignés dans la troisième colonne du tableau précédent. Voici la marche qui a été suivie.

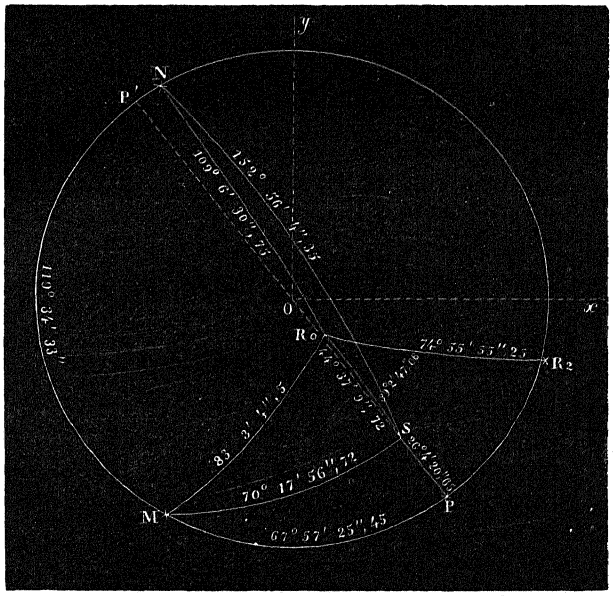
La première opération a consisté à rapporter les deux faces artificielles du prisme MN aux faces du rhomboèdre. Le parallélépipède de spath, ayant été choisi parmi un grand nombre d'échantillons, présen-

tait des clivages remarquables par leur poli et la perfection de leur plan : aussi les mesures angulaires dont le détail va suivre se sont-elles effectuées avec une grande exactitude.

Pour se rendre compte des calculs de trigonométrie à effectuer, il est nécessaire d'employer le mode de représentation graphique usité en cristallographie, à savoir la représentation sphérique des normales au polyèdre en projection stéréographique; à cet effet, on suppose que les directions des normales à toutes les faces du polyèdre passent par le centre d'une sphère et vont percer la sphère en des points qui définissent complétement les faces en direction. Ce sont ces traces qu'on projette stéréographiquement sur un plan convenablement choisi; ce mode de projection jouit, comme on sait, de la double propriété qu'un cercle tracé sur la surface de la sphère se projette suivant un cercle et que les angles se conservent en projection.

La *fig.* 17 représente stéréographiquement les normales aux faces MN

Fig. 17.



du prisme et aux trois faces du rhomboèdre R_0, R_1, R_2. Le plan de projection est le plan des deux normales MN ou plan de la section

droite du prisme : on remarquera que la normale à R_2 est un peu au-dessous du plan de MN. Par l'observation au goniomètre, on a mesuré le double de chaque angle dièdre; voici les résultats obtenus ou plutôt le supplément de la moitié de ces lectures, c'est-à-dire l'angle des normales représentées sur la figure :

$$\widehat{MN} = 119^\circ 34' 33'',00 \text{ (1)},$$
$$\widehat{MR_0} = 83^\circ\ 3'\ 4'',5,$$
$$\widehat{NR_0} = 109^\circ\ 6' 30'',75,$$
$$\widehat{MR_2} = 105^\circ 18'\ 6'',75,$$
$$\widehat{R_0R_2} = 74^\circ 55' 55'',25.$$

Comme vérification on a mesuré un angle surabondant

$$\widehat{NR_2} = 135^\circ 6' 48'',75;$$

on a, en effet,

$$\widehat{MN} + \widehat{MR_2} + \widehat{NR_2} = 359^\circ 59' 28'',5 = 2\pi - 31'',5.$$

Les trois faces M, N, R_2 n'étant pas rigoureusement parallèles à une même droite, les trois normales ne sont pas dans un même plan, et, par suite, la somme des trois angles doit être un peu inférieure à 360 de-

---

(1) On remarquera une légère différence entre l'angle MN observé dans cette série

$$A = 60^\circ 25' 27'', \quad \theta = 17^\circ,2,$$

et la valeur obtenue dans la série n° 23, employée dans les calculs antérieurs,

$$A = 60^\circ 25' 14'',25, \quad \theta = 13^\circ,3;$$

mais cette différence (12",75) s'explique très-bien par la différence de température; d'après la discussion de l'ensemble des séries, l'angle du prisme croîtrait d'environ 3 secondes pour un accroissement de la température de 1 degré. Malgré cette petite divergence, on n'a pas cru devoir modifier la seconde valeur de l'angle du prisme pour le calcul théorique des éléments de l'onde réfractée; la comparaison du nouveau calcul avec les résultats obtenus par la première méthode est donc entachée d'une petite erreur d'environ 12 à 15 secondes; mais cette erreur est négligeable vis-à-vis de l'incertitude qui pèse sur la détermination expérimentale de $e - e'$, laquelle peut s'élever de 1 à 2 minutes. D'ailleurs cette comparaison est destinée bien plutôt à montrer la validité et l'usage commode des théorèmes géométriques employés qu'à faire une confrontation rigoureuse du calcul et de l'observation.

grés : le sens de la différence est donc une vérification qualitative des mesures.

Les calculs de trigonométrie sphérique qu'on a à effectuer ne présentent aucune difficulté; mais ils sont fort longs par eux-mêmes et par les vérifications qu'on est obligé de faire.

Pour définir l'orientation de l'axe optique S (*fig.* 17), relativement aux faces du prisme, on a choisi deux angles, à savoir :

1° L'azimut xOP' du plan projetant cet axe sur le plan de la section droite, compté à partir de l'axe des x ou bissectrice intérieure du prisme,

$$\sigma = 127^\circ 44' 41'',95;$$

2° L'angle $\widehat{SP}$ que fait cet axe avec le plan de la section droite

$$\omega = 26^\circ 4' 20'',65.$$

Ces résultats ont été obtenus par la marche suivante :

1° On a adopté comme angle du rhomboèdre la valeur

$$\widehat{R_0R_2} = 74^\circ 55' 55'',25;$$

on a calculé l'angle $\widehat{R_0S}$ que fait l'axe S avec la face R_0; on trouve

$$SR_0 = 44^\circ 37' 9'',72,$$

et pour l'angle

$$SR_0R_2 = 39^\circ 2' 47'',06;$$

2° On a calculé l'angle dièdre MR_0R_2, d'après la connaissance de $\widehat{MR_0}$, $\widehat{R_0R_2}$, $\widehat{R_2M}$,

$$MR_0R_3 = 107^\circ 56' 48'',80$$

(vérifié par le calcul direct des deux autres dièdres et de l'excès sphérique).

Par soustraction on a obtenu le dièdre MR_0S,

$$MR_0S = 68^\circ 54' 1'',74.$$

3° On a calculé l'angle dièdre $\widehat{MR_0N}$,

$$MR_0N = 118^\circ 56' 48'',70$$

(vérifié par le calcul direct des deux autres dièdres et de l'excès sphérique.

D'où l'on a conclu par addition avec l'angle précédent,

$$NR_0S = 172^\circ 9' 9'', 56.$$

La connaissance de ces deux angles a permis de calculer de deux manières différentes les angles σ et ω définis plus haut : il ne reste plus en effet qu'à résoudre un triangle rectangle, connaissant un côté et l'angle adjacent; les résultats des deux calculs ont été concordants à quelques centièmes de seconde; les dièdres qu'il fallait connaître étaient

$$R_0NM = 92^\circ 49' 53'', 26,$$
$$R_0MN = 108^\circ\ 3' 37'', 70;$$

ils avaient déjà été calculés dans le triangle MNR_0.

50. La connaissance de la position de l'axe optique relativement aux faces du prisme permet d'appliquer les données de Rudberg au calcul théorique des éléments de l'onde réfractée. Les formules à employer sont celles du n° 22, p. 250, à savoir (29) et (30).

Calcul des éléments de l'onde réfractée au minimum de déviation. — L'équation (29) développée se met sous la forme

$$\frac{1}{\mu^2\nu^2} - \frac{1}{\mu^2}(a^2\sin^2\sigma + b^2\cos^2\sigma) - \frac{1}{\nu^2}(a^2\cos^2\sigma + b^2\sin^2\sigma) + a^2b^2 = 0,$$

dans laquelle a et b sont les axes de l'ellipse qui forme la ligne d'onde sur la section droite. Si l'on convient de réserver les lettres a et b pour désigner le demi-axe longitudinal et le demi-axe équatorial de l'ellipsoïde d'Huyghens, l'ellipse considérée aura aussi b comme demi-axe perpendiculaire à la projection de l'axe optique (parce que l'axe équatorial se projette en vraie grandeur) et pour axe perpendiculaire la valeur a', tel que

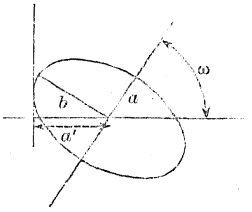
$$a'^2 = a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega,$$

ω étant l'angle que fait l'axe de l'ellipsoïde de révolution avec le plan de la section droite (*fig.* 18).

La direction α de la normale à l'onde plane réfractée, qui correspond au minimum de déviation, est fournie par les formules (30)

$$(30)\qquad \cot\alpha = -\frac{(a^2-b^2)\sin\sigma\cos\sigma}{a^2\cos^2\sigma + b^2\sin^2\sigma - \frac{1}{\mu^2}} = +\frac{a^2\sin^2\sigma + b^2\cos^2\sigma - \frac{1}{\nu^2}}{(a^2-b^2)\sin\sigma\cos\sigma}.$$

Fig. 18.



Dans ces formules a ou a', b et σ sont connus, mais μ et ν, qui renferment la valeur de la déviation, ne le sont pas; il faut éliminer ces deux inconnues entre l'équation de l'ellipse et la suivante, bien connue (16, p. 246),

$$(16)\qquad \mu^2\cos^2\frac{A}{2} + \nu^2\sin^2\frac{A}{2} = 1.$$

A cet effet, on tire μ^2 et ν^2 des deux équations (30), en fonction de $\cot\alpha$, et l'on substitue dans l'équation (16). On arrive, après quelques transformations faciles, à l'équation du second degré

$$NQ\tang^2\alpha + (MN - P^2 + Q^2)\tang\alpha + MQ = 0,$$

dans laquelle

$$M = a'^2\cos^2\sigma + b^2\sin^2\sigma - \cos^2\frac{A}{2},$$

$$N = a'^2\sin^2\sigma + b^2\cos^2\sigma - \sin^2\frac{A}{2},$$

$$P = \sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2},$$

$$Q = (a'^2 - b^2)\sin\sigma\cos\sigma,$$

$$a'^2 = a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega.$$

L'équation en $\tang\alpha$ se résout sans difficulté : quant à la racine à adopter, elle se reconnaît aisément par la condition que l'onde réfractée

doit être à peu près parallèle à la bissectrice de la section droite du prisme, c'est-à-dire que α doit être voisin de 90 degrés.

L'indice de réfraction de l'onde plane au minimum de déviation s'obtient en substituant la valeur de α dans l'équation (22) du n° 22, p. 248,

$$\frac{1}{n} = p' = \sqrt{a'^2 \cos^2(\alpha - \sigma) + b^2 \sin^2(\alpha - \sigma)}.$$

La connaissance de l'indice permet de calculer les angles d'émergence, car on a

$$\frac{r - r'}{2} = \alpha - \frac{\pi}{2}; \quad \sin e = n \sin r,$$

$$\frac{r + r'}{2} = \frac{A}{2}, \quad \sin e' = n \sin r'.$$

Comme vérification, on se sert de la formule

$$\frac{\operatorname{tang} \frac{r - r'}{2}}{\operatorname{tang} \frac{r + r'}{2}} = \frac{\operatorname{tang} \frac{e - e'}{2}}{\operatorname{tang} \frac{e + e'}{2}}.$$

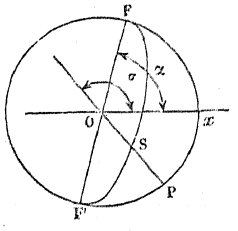
L'angle de la projection du rayon avec l'onde plane est donné par l'expression (34), n° 23, p. 252,

$$\operatorname{tang} \alpha' = \frac{\mu^2}{\nu^2} \operatorname{tang} \alpha = \frac{\operatorname{tang}^2 \frac{A}{2}}{\operatorname{tang}^2 \frac{e + e'}{2}} \operatorname{tang} \alpha,$$

d'où l'on tire $\alpha - \alpha'$, angle cherché.

L'angle du rayon lumineux avec la normale à l'onde plane se dé-

Fig. 19.



duit de la même propriété géométrique appliquée à l'ellipse méridienne. A cet effet, on commence par calculer (*fig.* 19) l'angle θ que

fait la direction α (représenté par F sur la figure) avec l'axe optique S : le triangle sphérique rectilatère FOS donne sans difficulté

$$\cos\theta = \sin\widehat{OS}\cos FOS = -\sin\omega\cos(\sigma - \alpha),$$

appliquant le théorème

$$\operatorname{tang}\theta' = \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tang}\theta,$$

d'où l'on conclut $\theta - \theta'$.

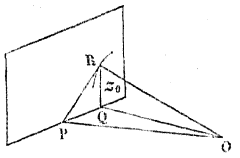
C'est l'angle appelé ζ au n° 45, p. 13.

L'angle du plan de l'axe optique et de la normale d'onde avec la section droite Ω se calcule aussi à l'aide du même triangle SOF : c'est le complément de F; ou mieux à l'aide du triangle rectangle SPF′ où il est représenté par F′,

$$\operatorname{tang}\omega = \operatorname{tang}\Omega\sin(\sigma - \alpha).$$

Enfin la coordonnée z_0, distance du point de contact de la surface d'onde à la section droite (*fig.* 20) (z_0 est positif comme étant au-dessus de ce plan).

Fig. 20.



Sur la figure, le plan PRQ représente le plan d'onde, OP la normale d'onde, O le centre de l'ellipsoïde, R le point de contact,

$$z_0 = RQ, \quad OP = \frac{1}{n}, \quad POR = \alpha - \alpha' \quad \text{et} \quad RPQ = \Omega, \quad ROQ = \varkappa.$$

Exprimant z_0 de trois manières, il vient

$$z_0 = \frac{1}{n}\operatorname{tang}(\theta - \theta')\sin\Omega = \frac{1}{n}\frac{\operatorname{tang}\varkappa}{\cos(\alpha - \alpha')} = \frac{1}{n}\operatorname{tang}(\alpha - \alpha')\operatorname{tang}\Omega,$$

où l'on retrouve les formules de la page 13, n° 45 : on peut donc calculer Ω, $\varkappa$ et z_0.

51. Les nombres qui figurent dans la troisième colonne du tableau de la page 21, n° 48, ont été obtenus à l'aide de ces formules par la substitution des valeurs

$$\omega = 26^\circ\ 4'\,20'',65,$$
$$\sigma = 127^\circ 44'\,41'',95,$$
$$A = 60^\circ 25'\,27'',00,$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{a} &= n_0 = 1,65846 \\ \frac{1}{b} &= n_e = 1,48635 \end{aligned}\right\} \text{pour la raie D (Rudberg).}$$

Les différences entre les résultats déduits des théorèmes généraux et ceux déduits de l'ellipsoïde d'Huyghens sont partout assez faibles. La plus grande concordance correspond aux valeurs de α et de n, où elle est véritablement remarquable; la plus grande discordance a lieu pour Ω : elle s'élève à $9\frac{1}{2}$ minutes; mais il y a lieu de remarquer que cet azimut est, par sa nature même, assez mal défini au point de vue expérimental, puisque la normale d'onde et le rayon efficace qui déterminent l'un des deux plans du dièdre font un angle très-petit ($6^\circ 10'$). Quant aux autres valeurs, elles s'accordent en général à 2 minutes près; c'est l'ordre d'approximation qu'impose la détermination de $e' - e$ et φ'_0.

En résumé, on peut conclure que les théorèmes généraux démontrés précédemment sont vérifiés par l'expérience; leur simplicité relative dans une question si complexe rend leur emploi très-commode. On peut affirmer, en outre, que dans un cas très-général l'ellipsoïde de Huyghens rend un compte aussi précis que possible des observations. Ces expériences et ces calculs confirment donc l'exactitude, la validité de la forme de la surface d'onde adoptée pour les cristaux uniaxes.

Remarque. Pour avoir un contrôle plus direct des nombres de Rudberg, on a observé dans la même série la déviation minimum du rayon ordinaire : en mesurant à nouveau l'angle du prisme, on a trouvé

$$\left.\begin{aligned} 2D_0 &= 105^\circ 23'\,24'',00, \\ 2A &= 120^\circ 50'\,11'',25, \end{aligned}\right. \quad \theta = 12^\circ,4.$$

De ces données, on a déduit l'indice de réfraction ordinaire du spath d'Islande correspondant à la raie D

$$n_0 = 1,658\,389,$$

qui ne diffère du nombre de Rudberg que d'une quantité presque insignifiante.

Vérification expérimentale du cas où le prisme produit une déviation constante et indépendante de l'incidence.

52. Les observations et les calculs précédents ont été effectués spécialement en vue de la vérification des théorèmes généraux qui définissent les éléments géométriques d'une onde réfractée, indépendamment de la connaissance de la surface de l'onde; l'introduction, dans le second calcul, de l'ellipsoïde de Huyghens fournit une vérification laborieuse, il est vrai, mais très-effective, de la nature de la surface d'onde des cristaux uniaxes.

Mais on pourrait objecter que les petites divergences, inévitables dans des observations aussi délicates, sont peut-être causées par l'inexactitude de la forme adoptée comme surface d'onde; heureusement on peut trouver, parmi les propriétés géométriques exposées dans la première partie de ce Mémoire, un phénomène qui permet de vérifier *synthétiquement* l'exactitude de la forme ellipsoïdale de la surface de l'onde du spath d'Islande : c'est le phénomène correspondant aux théorèmes qui font l'objet de la Note du n° 16. On peut résumer ainsi les propositions démontrées dans cet article :

Si l'on considère un prisme dont la ligne d'onde correspondant à la section droite ait ses axes orientés parallèlement aux bissectrices de cette section

$$M^2 x^2 + N y^2 = 1,$$

ce prisme produira une déviation constante D, indépendante de l'incidence des rayons, lorsqu'il sera placé dans un milieu dont l'indice sera k, à la condition qu'on ait

$$\text{(K)} \qquad \tang^2 \frac{A}{2} = \frac{M^2 - k^2}{k^2 - N^2},$$

la déviation constante étant donnée par la formule

$$\text{(K')} \qquad \tang \frac{A + D}{2} = \frac{N}{M} \tang \frac{A}{2}.$$

53. Il est facile de démontrer la proposition réciproque, à savoir que, si un prisme produit une déviation constante et indépendante de l'incidence, la ligne d'onde correspondant à la section droite est nécessairement elliptique.

En effet, d'après l'équation (12) du n° 15, p. 240, on a, dans le cas général, pour l'indice de l'onde réfractée correspondant à un angle A et une déviation D qui définissent μ et ν,

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{\mu^2}\sin^2\frac{r-r'}{2} + \frac{1}{\nu^2}\cos^2\frac{r-r'}{2};$$

substituant $\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{r-r'}{2}$, α étant l'angle avec l'axe des x de la normale à l'onde plane réfractée,

$$p^2 = \frac{1}{n^2} = \frac{1}{\mu^2}\cos^2\alpha + \frac{1}{\nu^2}\sin^2\alpha.$$

Si D est indépendant de e et e', c'est-à-dire de r et r' ou α, μ et ν sont des constantes, et l'on a, pour la loi qui lie la vitesse de propagation p de l'onde réfractée avec sa direction,

$$p^2 = \frac{1}{\mu^2}\cos^2\alpha + \frac{1}{\nu^2}\sin^2\alpha.$$

L'enveloppe de cette onde plane, sur la section droite ou ligne d'onde, est l'ellipse

$$\mu^2x^2 + \nu^2y^2 = 1.$$

Cette ellipse doit donc être identique à l'ellipse du milieu considéré

$$M^2x^2 + N^2y^2 = k^2,$$

k étant l'indice du milieu extérieur : l'identification conduit aux deux formules rapportées plus haut (K), (K').

54. Il était donc très-naturel de soumettre l'ellipsoïde à cette vérification : la difficulté pratique était de parvenir, pour le liquide, à l'indice convenable k : là une étude approfondie des données mêmes de la question a permis une grande simplification expérimentale.

Le prisme de spath d'Islande le plus facile à utiliser était évidemment l'angle aigu ou l'angle obtus d'un rhomboïde de clivage; or il se

rencontre une simplification inattendue lorsqu'on opère à la fois sur l'angle aigu et l'angle obtus : c'est que l'indice du liquide fournissant la déviation constante est le même dans les deux cas, et que de plus cette déviation constante reste la même en valeur absolue, mais se trouve de signe contraire.

En effet, lorsqu'on intervertit l'angle aigu et l'angle obtus, on intervertit les axes de l'ellipse dans la section droite : la première formule (K) devient donc

$$\tang^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{A}{2}\right)=\frac{N^2-k^2}{k^2-M^2}=\cot^2\frac{A}{2},$$

c'est-à-dire reste identique après la substitution; la seconde (K′) devient

$$\tang^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}+\frac{D}{2}\right)=\frac{M}{N}\cot^2\frac{A}{2}=\cot^2\left(\frac{A}{2}-\frac{D}{2}\right),$$

qui s'identifie avec la première forme en changeant le signe de D.

55. La méthode d'observation destinée à vérifier ces particularités curieuses de la réfraction extraordinaire, dans un cas très-général, devient très-facile à mettre en œuvre d'après les propositions qu'on vient de démontrer.

Le rhomboïde de spath d'Islande était soutenu par un support particulier, formé d'une petite plaque au-dessous de laquelle il était fixé; cette petite plaque était, par l'intermédiaire de trois vis de réglage, soudée à la partie inférieure d'une tige glissant à frottement dans un tube fixé lui-même à une potence; cette tige faisait fonction d'axe vertical et, à l'aide du réglage, on disposait quatre des arêtes du rhomboïde parallèlement à cet axe : le tout était disposé sur la plate-forme du goniomètre.

Une petite cuve de verre, à faces bien planes et parallèles, contenait le liquide; le rhomboïde y plongeait et pouvait y tourner librement dans tous les azimuts.

Quant au liquide, il était en grande partie formé d'essence de girofle ($n = 1,5345$, raie D), dont l'indice est très-voisin de l'indice convenable (théoriquement 1,537182); pour augmenter l'indice, on ajoutait quelques gouttes d'essence de cannelle ($n = 1,610$); dans le cas où l'on dépassait la limite, on abaissait l'indice avec de l'essence de térébenthine ($n = 1,48$).

Il eût été très-incommode de composer le liquide en prenant comme base la valeur numérique de son indice; les déterminations eussent été fastidieuses, d'autant plus que l'évaporation inégale des essences était un obstacle presque insurmontable pour l'obtention d'un résultat précis. Heureusement le phénomène lui-même indiquait si l'indice était trop élevé ou trop faible; en effet, lorsque l'indice était voisin de la valeur limite, la déviation du rayon émergent était presque constante, mais elle n'avait pas atteint sa vraie valeur; pour l'angle aigu, elle était au-dessus, pour l'angle obtus au-dessous. Comme les rayons incidents traversaient à la fois les deux angles aigus ou les deux angles obtus, suivant l'azimut du cristal, on pouvait recevoir successivement, dans le champ de la lunette, la déviation à droite de l'angle aigu de gauche, par exemple, et la déviation à droite de l'angle obtus de droite; ces deux déviations, égales lorsque l'indice est arrivé à la limite, ne le sont pas dans le cas contraire. Pour savoir s'il fallait augmenter ou diminuer l'indice, on examinait laquelle des deux déviations était la plus grande; la règle était celle-ci : l'indice est *trop fort* si la déviation est *plus forte* que celle de l'angle aigu, et réciproquement; un moment d'attention la rend évidente.

56. En opérant ainsi, on arrivait à coup sûr à obtenir deux déviations aussi égales que possible, et l'on vérifiait que la déviation était constante et indépendante de l'incidence. Ce phénomène présente ainsi *deux vérifications,* l'une *qualitative,* à savoir l'existence d'un indice extérieur produisant une déviation indépendante de l'incidence; l'autre *quantitative,* l'égalité, au signe près, des deux déviations constantes pour des prismes supplémentaires dont les bissectrices intérieures sont cristallographiquement rectangulaires. Mais il présente une troisième vérification numérique très-importante, c'est l'accord de la déviation observée avec la valeur théorique de cette déviation, calculée d'après l'ellipsoïde d'Huyghens et les données de Rudberg; pour effectuer ce calcul, il suffit de connaître les axes de l'ellipse, projection orthogonale de l'ellipsoïde sur le plan de la section droite du prisme.

A cet effet, on commence par calculer l'angle v que fait l'arête du rhomboèdre avec l'axe; pour cela on a déterminé l'angle du rhomboïde de clivage sur lequel on a opéré, et l'on a trouvé sur les quatre

arêtes réfringentes (α, β, α', β', désignant les quatre faces)

$$\begin{array}{ll} \widehat{\alpha\beta} = 105^\circ 4' 15'', & \widehat{\alpha\beta'} = 74^\circ 56' \ 1'', \\ \widehat{\alpha'\beta'} = 105^\circ 4' \ 5'', & \widehat{\alpha'\beta} = 74^\circ 56' 15'', \end{array} \qquad \theta = 17^\circ,2.$$

La somme des quatre angles égale $360^\circ 0' 36''$; il y a donc une petite erreur de 36 secondes à répartir sur les quatre angles (due probablement à un défaut de réglage des arêtes à mesurer), ce qui conduit à la valeur définitive pour l'angle du rhomboèdre

$$\widehat{\alpha\beta} = 105^\circ 4' 1'',$$

valeur qui diffère si peu de celle qui fait partie de la série relative au prisme à faces artificielles [1]

$$R = 105^\circ 4' 4'',75, \quad \theta = 17^\circ,4,$$

qu'on n'a pas cru devoir la substituer à ce dernier nombre admis comme une donnée fondamentale dans tous les calculs de ce Mémoire.

La formule à employer s'obtient en considérant un trièdre rectangle ayant pour arêtes, l'arête du rhomboèdre, l'axe et la trace sur l'une des faces du rhomboèdre du plan projetant cet axe,

$$\cos v = \cot 60^\circ \cot \frac{R}{2},$$

d'où

$$v = 63^\circ 44' 17'',69.$$

L'ellipse, projection de l'ellipsoïde, aura pour axe perpendiculaire à la projection de l'axe optique la valeur même de l'axe équatorial $2b$, qui se projette en vraie grandeur; suivant l'axe optique, l'axe de l'ellipse sera $2a''$,

$$a''^2 = a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v;$$

---

[1] Ces mesures montrent combien la structure du spath d'Islande est régulière, puisque deux échantillons, pris au hasard, donnent, pour l'angle de leurs clivages, des nombres identiques; toutefois il est bon d'ajouter que ces deux échantillons sont de la même provenance.

numériquement, d'après les indices de Rudberg,

$$\frac{1}{a''} = 1{,}620061 = \mathrm{M}\ (^1),$$

$$\frac{1}{b} = 1{,}46835 = \mathrm{N}.$$

Appliquant les formules (K) et (K'), on trouve pour l'indice du liquide k et pour la déviation D

$$k = 1{,}537182,$$
$$\mathrm{D} = 4^\circ 48' 50'', 04.$$

Mais cette déviation est celle qui correspond à un milieu extérieur indéfini d'indice k. Comme le liquide est compris entre les deux plans parallèles de la cuve, il y a lieu de corriger l'effet de la réfraction dans l'air; les deux cas les plus simples qui peuvent se présenter sont les suivants :

1° La cuve est fixe; la face d'entrée est normale aux rayons incidents; la déviation apparente D' sera donnée par l'expression

$$\sin \mathrm{D}' = k \sin \mathrm{D},$$

d'où

$$\mathrm{D}' = 7^\circ 24' 42'', 4.$$

2° Les faces de la cuve sont parallèles au plan bissecteur du prisme et solidaires de son mouvement :

$$\sin \frac{\mathrm{D}''}{2} = k \sin \frac{\mathrm{D}}{2},$$

d'où

$$\mathrm{D}'' = 7^\circ 24' 10''.$$

C'est à cette dernière disposition qu'on s'est arrêté; l'observation a

---

(1) On a pu contrôler directement ce nombre par l'observation de la déviation minimum du rayon extraordinaire à travers l'angle aigu; l'image de la fente est inclinée : aussi faut-il incliner le réticule de la lunette sous le même angle et mesurer le double de la déviation; l'observation est difficile à cause du peu d'intensité de la lumière; on a trouvé

$$2\mathrm{A} = 149^\circ 52' 29'',$$
$$2\mathrm{D} = 170^\circ 53' 04'',$$

d'où

$$k = 1{,}61982. \quad \text{Différ.} = 0{,}00024.$$

donné pour la déviation constante, dans sept séries bien concordantes,

$$\left.\begin{array}{r} \Delta' = 7^\circ 22' 38'' \\ 28'' \\ 27'' \end{array}\right\} \theta = 16^\circ,$$

$$\begin{array}{rl} 00'' & \\ 15'' & \theta = 16^\circ,1, \\ 47'' & \quad\;\; 17^\circ,7, \\ 45'' & \quad\;\; 18^\circ,1. \\ \hline \text{Moyenne...}\;\; 7^\circ 22' 28'' & \end{array}$$

La différence avec le nombre calculé est $1'42''$; elle est de l'ordre des erreurs que les phénomènes de diffraction causés par les stries des faces naturelles de clivage produisent dans l'image de la fente.

57. Il est nécessaire d'ajouter quelques indications sur la manière d'effectuer les mesures; en effet, on arrive assez aisément à amener l'égalité apparente des déviations par l'angle aigu et l'angle obtus du rhomboïde; mais, lorsqu'on exécute les mesures précises, on trouve que cette égalité n'est exacte qu'à quelques minutes près. S'il fallait modifier l'indice jusqu'à l'égalité absolue des déviations, l'opération serait interminable, surtout avec l'évaporation inégale des essences : il était donc nécessaire de déduire le résultat limite des observations obtenues dans le voisinage de l'indice limite. Rien n'est si simple : il suffit de prendre la moyenne des déviations par l'angle obtus et l'angle aigu; c'est ce que justifie, pour les *données spéciales adoptées*, le calcul suivant.

Considérons les déviations minimum par l'angle aigu et l'angle obtus; elles satisfont aux relations

$$\frac{\sin(\alpha+\delta)}{\sin\alpha} = \frac{n_1}{k}, \quad \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha + \delta'\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{n_2}{k},$$

dans lesquelles les lettres grecques remplacent les grandes lettres divisées par 2.

La condition pour que $\delta = -\delta' = \Delta$ donne

$$\frac{\sin(\alpha+\delta)}{\sin\alpha} = \frac{n_1}{k}, \quad \frac{\cos(\alpha+\delta)}{\cos\alpha} = \frac{n_2}{k},$$

ou, en éliminant k,

$$\operatorname{tang}(\alpha+\delta)=\frac{n_1}{n_2}\operatorname{tang}\alpha,$$

et k est donné par

$$N^2=k^2 n_1 \sin^2\alpha+n_2^2\cos^2\alpha$$

[laquelle est identique avec la relation (K)]. Si k n'a pas la valeur précédente N, δ et $-\delta'$ ne sont pas égaux à Δ, et l'on a

$$\frac{\sin(\alpha+\delta)}{n_1\sin\alpha}=\frac{\cos(\alpha-\delta')}{n_2\cos\alpha};$$

comparant avec l'équation (K′),

$$\frac{\sin(\alpha+\delta)}{\sin(\alpha+\Delta)}=\frac{\cos(\alpha-\delta')}{\cos(\alpha+\Delta)}.$$

L'observation donne δ et δ'. Posons

$$\delta=\quad\Delta+\varepsilon,$$
$$\delta'=-\Delta-\varepsilon'$$

et calculons

$$\frac{\delta-\delta'}{2}=\Delta+\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{2};$$

substituant les valeurs de δ, δ' et développant, il vient, en négligeant les carrés de $\varepsilon, \varepsilon'$,

$$\varepsilon\cot(\alpha+\Delta)=-\varepsilon'\operatorname{tang}(\alpha+\Delta),$$

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}=-\operatorname{tang}^2(\alpha+D).$$

Il se trouve que, *avec les données adoptées*, on a sensiblement

$$\operatorname{tang}(\alpha+\Delta)=1 \quad \text{et} \quad \varepsilon=-\varepsilon',$$

d'où

$$\varepsilon+\varepsilon'=0;$$

en effet,

$$\alpha=\frac{A}{2}=37^\circ 28' \quad (\text{angle aigu}),$$
$$\Delta=\frac{D''}{2}=\ 3^\circ 42'$$
$$\alpha+\ \Delta=\overline{41^\circ 10'}\quad=45^\circ-3^\circ 50'.$$

Donc la demi-somme des *valeurs absolues* des déviations par l'angle aigu et l'angle obtus donne sensiblement la valeur limite [1].

58. Outre ces trois genres de vérifications qui viennent d'être indiqués, le phénomène de la déviation constante du prisme en offre encore un autre sur lequel il est nécessaire d'insister : c'est une particularité assez singulière au premier abord, mais qui est une conséquence évidente des propositions démontrées dans la première partie de ce Mémoire. L'image rectiligne de la fente lumineuse, l'indice du liquide étant bien réglé, tourne autour de son milieu lorsque le prisme tourne autour de son arête; ce *pivotement* de l'image ne laisse pas que de surprendre, la première fois qu'on l'observe; mais, si l'on réfléchit que le milieu seul

---

[1] Pour effectuer la correction, d'ailleurs très-petite, provenant de ce que la condition $\varepsilon : \varepsilon' = -\tang^2 41^\circ 10' = -0,7646$ et non pas zéro, on remarquera qu'il suffit de calculer la valeur $-(\varepsilon + \varepsilon')$, car on a

$$2\Delta = \delta - \delta' - (\varepsilon + \varepsilon'),$$

or la somme algébrique $\delta + \delta'$ est égale à $\varepsilon - \varepsilon'$; on connaît donc la différence $\varepsilon - \varepsilon'$ et le rapport $\varepsilon : \varepsilon'$, d'où l'on conclut

$$\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\varepsilon - \varepsilon'} = -\frac{1 - \tang^2(\alpha + \Delta)}{1 + \tang^2(\alpha + \Delta)} = -\cos 2(\alpha + \Delta) = -0,1334.$$

Le calcul a été appliqué aux quatre dernières séries dans lesquelles on a croisé les observations (pour éliminer l'influence de l'évaporation inégale des essences et l'effet de la température), de façon à obtenir séparément δ et δ'.

RÉFRACTION PAR L'ANGLE aigu $= 2\delta$.	RÉFRACTION PAR L'ANGLE obtus $= 2\delta'$.	$(\varepsilon - \varepsilon')$.	CORRECTION $-(\varepsilon + \varepsilon')$.	$2\Delta = D''$ corrigé.
$7^\circ.25'.26''$	$-7^\circ.18'.34''$	$+206''$	$+27''$	$7^\circ.22'.27''$
25.35	18.54	$+201$	$+27$	42
21.47	23.46	-60	-8	39
24.54	20.37	$+129$	$+17$	63
			Moyenne.....	7.22.43

Ce qui réduit à $1'27''$ la différence entre le calcul et l'observation.

de l'image correspond au plan de la section droite et que les autres points sont formés par des rayons obliques sur ce plan, on se reportera à l'étude, faite au n° 33, p. 263, de l'image d'une fente rectiligne, et l'on verra que l'image par réfraction doit être inclinée toutes les fois que le point de contact de l'onde plane avec la surface de l'onde est en dehors de la section droite. Dans le cas présent, l'onde, par une rotation continue du prisme autour de son arête, peut occuper toutes les positions du plan tangent du cylindre circonscrit à l'ellipsoïde; la ligne de contact est une ellipse dont le plan est oblique sur le plan de la section droite (plan diamétral conjugué de la direction de l'arête du prisme).

En deux points seulement la courbe de contact se trouve dans le plan de la section droite, suivant le diamètre équatorial : l'onde est alors parallèle à l'axe optique. Ce sont les deux seuls cas où l'image soit verticale; ils correspondent évidemment au cas où l'angle réfringent est l'angle obtus du rhomboèdre, car le plan bissecteur de l'angle obtus est parallèle à l'axe optique, et l'onde réfractée au minimum de déviation est parallèle à ce plan. Dans tous les autres cas, le point de contact de la surface de l'onde avec l'onde plane est en dehors de la section droite, et l'image est inclinée; cette inclinaison se calcule par la formule (43) du n° 33, p. 263,

$$\operatorname{tang}\varphi'_0 = -\frac{z_0}{x_0 \sin\frac{A}{2} + y_0 \cos\frac{A}{2}} \frac{\sin A}{\cos e'}.$$

On voit que $\operatorname{tang}\varphi'_0$ peut devenir infini, c'est-à-dire que l'image de la fente verticale peut devenir horizontale; il suffit qu'on ait soit

$$x_0 \sin\frac{A}{2} + y_0 \cos\frac{A}{2} = 0,$$

soit

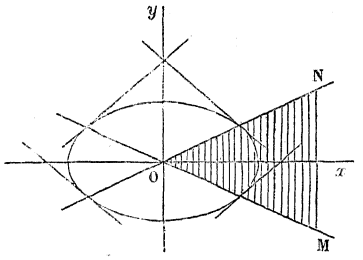
$$\cos e' = 0.$$

La première condition indique que le point de contact de l'onde doit avoir lieu sur la droite

$$\frac{y_0}{x_0} = -\operatorname{tang}\frac{A}{2},$$

c'est-à-dire au point d'intersection de la ligne d'onde avec la trace de l'une des faces du prisme, M, celle sur laquelle on compte les incidences e (*fig.* 21).

Fig. 21.



Il est facile de voir que cette condition revient à $\cos e = 0$ ou $e = 90°$; en effet, l'onde émergente correspondant à l'onde réfractée dans cette position est normale à la face M du prisme, car le cercle, ligne d'onde du milieu extérieur, passe par l'intersection de l'ellipse et des deux droites, traces des faces; c'est l'interprétation géométrique de la condition que l'ellipse $\left(\frac{1}{\mu}, \frac{1}{\nu}\right)$ soit la ligne d'onde.

Soit, en effet, l'ellipse

$$M^2x^2 + N^2y^2 + 1, \quad \text{identifiée à} \quad \mu^2x^2 + \nu^2y^2 = 1;$$

soit le cercle

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{k^2},$$

l'équation de toute conique passant par l'intersection de ces deux courbes est

$$x^2(M^2 + \lambda) + y^2(N^2 + \lambda) = 1 + \frac{\lambda}{k^2}.$$

Cette conique devient un système de deux droites concentriques à l'origine; si $\lambda = -k^2$,

$$x^2(M^2 - k^2) + y^2(N^2 - k^2) = 0,$$

d'où

$$\frac{y^2}{x^2} = \tang^2\frac{\varphi}{2} = \frac{M^2 - k^2}{k^2 - N^2}.$$

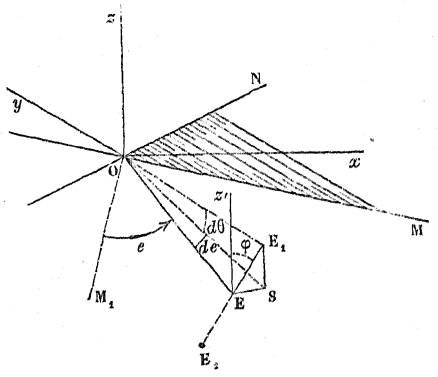
Cette condition est identique à l'équation (K), page 29 : il n'y a de changé que la notation φ substituée à A.

En résumé, l'image sera horizontale pour $e = 90°$, c'est-à-dire quand le rayon incident sera rasant.

La seconde condition $\cos e' = 0$ donne de même $e' = 90°$: elle correspond au rayon émergent rasant.

59. L'expérience donne une vérification qualitative immédiate de ces deux conditions; à mesure que l'image réfractée s'incline vers l'horizontale, son intensité décroît, si bien que, à la limite, lorsqu'elle devrait être tout à fait horizontale, elle est éteinte; c'est qu'en effet, sous l'incidence ou sous l'émergence rasante, la quantité de lumière qui traverse le prisme est nulle.

Fig. 22.



On n'entrera pas dans la discussion qui permet de suivre la rotation simultanée du prisme autour de son arête et de l'image de la fente autour de son centre; on appellera seulement l'attention sur la vérification que présente le sens de l'inclinaison de l'image; d'après la formule (43), p. 263, on voit que φ'_0 est de signe contraire à z_0 (au moment où l'angle aigu donnerait le minimum de déviation); remontant au n° 32, p. 261 et 262, sur le signe conventionnel de φ' (*fig.* 22),

$$\operatorname{tang}\varphi' = -\frac{de'}{d\theta};$$

par suite, tant que l'onde plane réfractée touchera l'ellipsoïde au-

dessus du plan de la section droite, l'image paraîtra avoir tourné en sens inverse des aiguilles d'une montre et réciproquement. Cette remarque prouve que la déviation, à droite ou à gauche, présente l'image inclinée dans le même sens.

APPENDICE I.

CALCUL DE L'INDICE EXTRAORDINAIRE DU SPATH D'ISLANDE D'APRÈS LES FORMULES DE DE SENARMONT MODIFIÉES.

Les nombreuses séries d'observations effectuées sur le prisme MN, à diverses reprises, ont été discutées au point de vue de la température; l'influence est très-nette, et l'on a pu calculer une formule empirique de correction; la concordance des observations est assez grande pour qu'il ait paru intéressant de faire concourir le résultat moyen de ces observations au calcul de l'indice extraordinaire du spath d'Islande. C'était d'ailleurs une occasion d'appliquer les formules du n° 22 et de contrôler leur exactitude.

Ces formules sont, au fond, celles que de Senarmont a données dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. XVI, p. 273; mais la forme sous laquelle elles se présentent est plus commode pour le calcul et la simplicité de la démonstration qui permet de les obtenir assure de leur exactitude.

La moyenne de toutes les mesures effectuées sur l'angle du prisme, la déviation minima ordinaire et la déviation minima extraordinaire, donne

$$2A = 120^\circ 50' 26'',82, \quad \theta = 14^\circ,01, \quad \text{variation } + 6'',00 \text{ pour 1 degré};$$
$$2D_o = 105^\circ 23' 10'',83, \quad \theta = 14^\circ,32, \quad \text{variation } + 4'',13 \text{ pour 1 degré};$$
$$2D_e = 86^\circ 52' 16'',57, \quad \theta = 13^\circ,82, \quad \text{variation } + 6'',38 \text{ pour 1 degré}.$$

Un tracé graphique a même permis de déterminer approximativement la variation de chacun de ces angles pour 1 degré, de sorte qu'on

peut les ramener tous à la même température de 15 degrés vrais ($\theta = 15^\circ,50$, car le thermomètre employé était en avance de $0^\circ,50$) :

$$2\,A = 120^\circ 50' 35'',76,$$
$$2\,D_o = 105^\circ 23' 15'',70,$$
$$2\,D_e = 86^\circ 52' 47'',03.$$

L'indice ordinaire se calcule par la formule bien connue des milieux isotropes ; on trouve

$$(\text{raie D}),\quad n_o = \frac{1}{a} = 1,658325;\quad \text{Rudberg}: 1,65850.$$

L'indice extraordinaire $n_e = \frac{1}{b}$ se calcule avec les formules qu'on va établir; l'équation (29) du n° 22, p. 260, peut se mettre sous la forme

$$\frac{1}{\mu^2\nu^2} - \frac{1}{\mu^2}(a'^2\sin^2\sigma + b'^2\cos^2\sigma) - \frac{1}{\nu^2}(a'^2\cos^2\sigma + b'^2\sin^2\sigma) + a'^2b'^2 = 0,$$

a' et b' étant les axes de l'ellipse ligne d'onde dans la section droite du prisme considéré. Dans le cas actuel, on a

$$a'^2 = a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega.$$

On se rappelle que σ est l'azimut de la projection de l'axe optique sur la section droite du prisme rapportée à l'axe des x (bissectrice aiguë) et que ω est l'angle aigu que forme cet axe avec le plan de la section droite (*voir* n° 49, p. 23).

$$\sigma = 127^\circ 44' 41'',95,$$
$$\omega = 26^\circ\ 4' 20'',65.$$

Substituant la valeur de a' après avoir posé

$$M = \frac{\cos^2\sigma}{\mu^2} + \frac{\sin^2\sigma}{\nu^2},$$
$$N = \frac{\sin^2\sigma}{\mu^2} + \frac{\cos^2\sigma}{\nu^2},$$

il vient finalement, après réductions, l'équation qui donne b,

$$b^4\sin^2\omega - b^2\left[\frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{\nu^2} - (a^2 + N^2)\cos^2\omega\right] + \frac{1}{\mu^2\nu^2} - a^2N\cos^2\omega = 0.$$

Les quantités μ, ν, N se calculent aisément; on connaît d'ailleurs a et ω; l'inconnue b est donc fournie par une équation bicarrée facile à résoudre. En rejetant la racine inadmissible, on trouve

$$(\text{raie D}),\quad n_e = \frac{1}{b} = 1{,}48637;\quad \text{Rudberg}: n_e = 1{,}48635.$$

La concordance est encore plus complète que dans le cas du rayon ordinaire.

APPENDICE II.

INDICES PRINCIPAUX DE L'AZOTATE DE SOUDE.

L'azotate de soude est un sel neutre, incolore, d'une transparence parfaite, cristallisé en rhomboèdres et aussi facilement clivable que le spath d'Islande. Sa biréfringence, mesurée par la différence des deux indices de réfraction, ordinaire et extraordinaire, est environ une fois et demie plus grande que celle du spath et négative comme elle; ce serait donc un cristal éminemment propre aux expériences de double réfraction, s'il n'était pas un peu hygrométrique, de sorte que les faces artificielles se ternissent en quelques minutes à l'air ordinaire; les faces de clivage, souvent très-planes, résistent beaucoup mieux à l'humidité atmosphérique.

Deux séries d'observations ont été faites avec des cristaux de cette substance, la première ayant pour objet la détermination des deux indices; la seconde, la vérification approchée de l'inclinaison de l'image verticale par réfraction extraordinaire.

Première série. — On a utilisé l'arête aiguë du rhomboèdre de clivage d'un très-bel échantillon d'azotate de soude ayant environ 4 centimètres cubes en volume, et d'une limpidité remarquable; le faible pouvoir réfringent du cristal permet aux deux rayons de passer, si bien qu'on peut observer les déviations minima ordinaire et extraordinaire.

L'indice ordinaire se calcule d'après la déviation du rayon correspondant; l'indice extraordinaire se déduit aisément de la déviation minima de l'autre rayon de la manière suivante :

L'axe optique du rhomboèdre se projetant suivant une perpendiculaire à la bissectrice de la section droite, l'onde extraordinaire, au minimum de déviation, se trouve parallèle à cet axe; les formules de la réfraction ordinaire peuvent donc s'appliquer au calcul de l'indice de cette onde.

La connaissance de l'angle du rhomboèdre permet de calculer l'angle que fait cette onde ou plutôt sa normale avec l'axe optique; la formule bien connue

$$\frac{1}{n'^2} = a'^2 = a^2 \cos^2\omega + b^2 \sin^2\omega$$

permet de calculer b quand on connaît a, a' et ω.

L'observation a donné, pour l'angle aigu A du rhomboèdre et pour les déviations D_o D_e,

	DÉVIATIONS MINIMA.	
	Ordinaire.	Extraordinaire.
$2A = 137°7'36''$,	$2D_o = 139°7'53''$,	$2D_e = 117°35'41''$;

d'où l'on déduit sans peine

$$\frac{1}{a} = n_o = 1,5852,$$

$$\frac{1}{a'} = n' = 1,52783.$$

L'angle obtus du rhomboèdre R est égal au supplément de la moitié de 2 A

$$R = 106°26'12'',$$

d'où l'on conclut, par un calcul cristallographique déjà indiqué (n° 49, p. 24), l'angle v que fait l'axe du rhomboèdre avec l'arête du prisme

$$\cos v = \cot 60° \cot \frac{R}{2},$$

d'où

$$v = \frac{\pi}{2} - \omega = 64^\circ 25' 46''.$$

Substituant cette valeur dans la formule qui donne a', on en déduit la valeur de $b = \frac{1}{n_e}$; les résultats définitifs sont [1] :

$$\left.\begin{array}{l} \text{Indice ordinaire.....} \ \frac{1}{a} = n_o = 1,5852, \\ \text{Indice extraordinaire.} \ \frac{1}{b} = n_e = 1,3348, \end{array}\right\} \text{raie D.}$$

Seconde série. — Elle se rapporte à la mesure de l'inclinaison de l'image extraordinaire de la fente verticale du collimateur. Le mode de mesure à l'aide duquel on l'a mesurée était assez grossier; mais c'était la première fois que l'auteur rencontrait ce phénomène d'une façon si nette, et il avait plutôt en vue une mesure approximative qu'une détermination soignée : cette observation est même l'origine du présent travail.

On a trouvé, pour cette inclinaison,

$$\operatorname{tang} \varphi'_0 = 0,427, \quad \varphi'_0 = 23^\circ 8'.$$

Théoriquement on peut calculer cette inclinaison par la formule

$$\operatorname{tang} \varphi'_0 = - z_0 \frac{\sin(A + D)}{\cos e \cos e'};$$

comme par symétrie $e = e' = \frac{A + D}{2}$, la formule devient

$$\operatorname{tang} \varphi'_0 = - 2 z_0 \operatorname{tang} \frac{A + D}{2}.$$

---

[1] Une autre série, faite avec un prisme présentant une face de clivage et une face artificielle, a donné, sous l'incidence normale à la face naturelle,

$$A = 32^\circ 52' 27'', \quad D_o = 26^\circ 26' 0'', \quad D_e = 19^\circ 0' 27'',$$

d'où l'on conclut

$$n_o = 1,5842,$$
$$n_e = 1,3355.$$

Quant à z_0, on le calcule d'après la connaissance de l'angle ω comme au n° 50 :

$$\operatorname{tang}\omega' = \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tang}\omega, \qquad z_0 = \frac{1}{n'}\operatorname{tang}(\omega - \omega'),$$

d'où

$$\omega - \omega' = 8^\circ 26' 28'',$$
$$\varphi'_0 = 23^\circ 45' 00''.$$

La différence entre le calcul et l'observation n'est que de $0^\circ 37'$, approximation tout à fait en rapport avec le mode d'observation.