

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

H. RÉSAL

**Théorie des effets observés par Savart sur l'influence  
mutuelle de deux pendules**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 2<sup>e</sup> série*, tome 2 (1873), p. 445-460

[<http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1873\\_2\\_2\\_445\\_0>](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1873_2_2_445_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1873, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

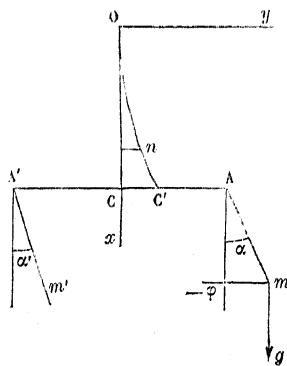
THÉORIE DES EFFETS OBSERVÉS PAR SAVART

SUR

# L'INFLUENCE MUTUELLE DE DEUX PENDULES,

PAR M. H. RESAL,  
MEMBRE DE L'INSTITUT.

Les résultats obtenus par Savart, en observant les mouvements de deux pendules oscillant sur des couteaux placés aux extrémités d'une barre horizontale suspendue, en son milieu, à une verge élastique verticale, se trouvent implicitement compris dans deux équations diffé-



rentielles simultanées du second ordre, qui sont la conséquence de l'analyse suivante :

Soient

O le point d'encastrement de la lame de suspension ;

$OC = h$  la longueur de cette lame ;

$AA' = 2 CA = 2 CA' = 2 a$  la longueur de la verge horizontale ;

$Am = l, A'm' = l'$  les longueurs des pendules de droite et de gauche ;

$\alpha, \alpha'$  les angles qu'ils forment avec la verticale, positifs ou négatifs selon qu'ils sont situés à droite ou à gauche;

$m, m'$  les masses qui terminent les pendules;

E le coefficient d'élasticité de la lame OC;

I le moment d'inertie de sa section par rapport à la perpendiculaire au plan de la figure passant par son centre de gravité.

Nous supposerons que la barre AA' est assez épaisse ou assez courte pour que l'on puisse la considérer comme rigide.

Nous ne considérerons que le cas de faibles flexions en négligeant l'allongement, d'ailleurs insignifiant, et l'inertie de la lame.

Il résulte de là que C et, par suite, AA' sont censés se déplacer constamment suivant une même horizontale. Soient, à un instant quelconque, OC' la lame déformée, et  $\varphi$  l'accélération de C', considérée comme positive ou négative selon qu'elle est dirigée de la gauche vers la droite ou inversement.

Concevons que l'on imprime à tout le système une vitesse et une accélération égales et contraires à celles de C ou C', de manière à ramener les points A et A' au repos.

Le point  $m$ , par exemple, possédera les deux accélérations  $-\varphi \cos \alpha$ ,  $-g \sin \alpha$ , et l'on reconnaît facilement que l'on a

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \alpha + \frac{\varphi}{l} \cos \alpha = 0.$$

Supposant que les angles  $\alpha$  et  $\alpha'$  soient assez petits pour que l'on puisse en négliger les puissances supérieures à la seconde,  $\varphi$  étant du même ordre de grandeur, il vient tout simplement

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{g}{l} \alpha + \frac{\varphi}{l} = 0 \\ \text{et de même} \\ \frac{d^2 \alpha'}{dt^2} + \frac{g}{l} \alpha' + \frac{\varphi}{l} = 0. \end{cases}$$

En appelant N et N' les tensions des fils Am et Am', on a

$$N = ml \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + mg \cos \alpha - m \varphi \sin \alpha.$$

La vitesse angulaire  $\frac{d\alpha}{dt}$  restera très-petite si les pendules ne sont pas très-courts, de sorte que l'on peut poser tout simplement

$$N = mg \quad \text{et de même} \quad N' = m'g.$$

Soient maintenant

$n$  un point de la lame;

$x$  son abscisse verticale mesurée à partir de l'origine  $O$ ;

$y$  son ordonnée horizontale, considérée comme positive ou négative, selon qu'elle est située à droite ou à gauche de la verticale du point  $O$ .

On reconnaît facilement que

$$\begin{aligned} EI \frac{d^2 y}{dx^2} &= -N [a \cos \alpha - (h - x) \sin \alpha] + N' [a \cos \alpha' + (h - x) \sin \alpha] \\ &= ag(m' - m) + g(h - x)(m\alpha + m'\alpha'). \end{aligned}$$

En intégrant et remarquant que l'on a  $\frac{dy}{dx} = 0$ , et  $y = 0$  pour  $x = 0$ , on trouve successivement

$$\begin{aligned} EI \frac{dy}{dx} &= ag(m' - m)x + gx \left( h - \frac{x}{2} \right) (m\alpha + m'\alpha'), \\ EI y &= ag(m' - m) \frac{x^2}{2} + g \frac{x^2}{2} \left( h - \frac{x}{3} \right) (m\alpha + m'\alpha'), \end{aligned}$$

d'où, pour  $x = h$  et en appelant  $f$  la flèche,

$$(A) \quad EIf = ag(m' - m) \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} g(m\alpha + m'\alpha').$$

En différentiant deux fois cette expression par rapport à  $t$ , on trouve

$$(B) \quad \varphi = \frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{h^3 g}{3EI} \left( m \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + m' \frac{d^2 \alpha'}{dt^2} \right),$$

par suite

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{g}{l} \alpha + \frac{h^3 g}{3EI l} \left( m \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + m' \frac{d^2 \alpha'}{dt^2} \right) = 0, \\ \frac{d^2 \alpha'}{dt^2} + \frac{g}{l'} \alpha' + \frac{h^3 g}{3EI l'} \left( m \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + m' \frac{d^2 \alpha'}{dt^2} \right) = 0, \end{cases}$$

équations dont il est facile de trouver les intégrales.

Pour plus de simplicité, supposons que les deux masses  $m, m'$  soient égales et posons

$$(3) \quad \frac{h^3 m}{3EI} = \varepsilon;$$

nous aurons

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{d^2 \alpha}{dt^2} \left( 1 + \varepsilon \frac{g}{l} \right) + \varepsilon \frac{g}{l} \frac{d^2 \alpha'}{dt^2} + \frac{g}{l} \alpha = 0, \\ \frac{d^2 \alpha'}{dt^2} \left( 1 + \varepsilon \frac{g}{l'} \right) + \varepsilon \frac{g}{l'} \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{g}{l'} \alpha = 0. \end{cases}$$

En posant

$$\alpha = A \cos K(t + \beta), \quad \alpha' = A' \cos K(t + \beta),$$

$A, A', K$  étant des constantes, il vient

$$(5) \quad \begin{cases} A \left[ K^2 \left( 1 + \varepsilon \frac{g}{l} \right) - \frac{g}{l} \right] = -\varepsilon \frac{g}{l} A' K^2, \\ A' \left[ K^2 \left( 1 + \varepsilon \frac{g}{l'} \right) - \frac{g}{l'} \right] = -\varepsilon \frac{g}{l'} A K^2. \end{cases}$$

Nous supposons dorénavant que le pendule de gauche ne peut pas avoir une longueur inférieure à celle de l'autre pendule et nous posons  $l' = \gamma l$ .

L'élimination de  $K$  entre les équations (5) donne

$$(6) \quad \frac{A}{A'} = \frac{1 - \gamma \pm \sqrt{(1 - \gamma)^2 + 4 \varepsilon^2 \frac{g^2}{l^2}}}{2 \varepsilon \frac{g}{l}}.$$

Les équations (5), multipliées respectivement par  $l$  et  $l'$ , puis retranchées l'une de l'autre, donnent

$$\frac{A}{A'} \left( K^2 - \frac{g}{l} \right) = K^2 \gamma - \frac{g}{l},$$

d'où

$$(7) \quad K = \sqrt{\frac{\frac{g}{l} \left( \frac{A}{A'} - 1 \right)}{\frac{A}{A'} - \gamma}}.$$

Nous n'entrerons pas dans plus de détails, quant à présent, sur la

détermination des deux valeurs de  $K$ , que nous représenterons par  $K_1$  et  $K_2$ . En appelant  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A'_1$ ,  $A'_2$  les valeurs correspondantes de  $A$  et  $A'$ , dont les rapports sont définis par l'équation (6), nous aurons

$$(8) \quad \begin{cases} \alpha = A_1 \cos K_1 (t + \beta_1) + A_2 \cos K_2 (t + \beta_2), \\ \alpha' = A'_1 \cos K_1 (t + \beta_1) + A'_2 \cos K_2 (t + \beta_2), \end{cases}$$

$\beta_1$  et  $\beta_2$  étant deux arbitraires dépendant des conditions initiales du mouvement.

## APPLICATIONS.

### I. — Pendules égaux.

Les équations (6) et (7) donnent, en y supposant  $l = l'$  ou  $\gamma = 1$ ,

$$A_1 = A'_1, \quad A_2 = -A'_2,$$

$$K_1 = \sqrt{\frac{g}{l \left( 1 + 2\varepsilon \frac{g}{l} \right)}},$$

$$K_2 = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

On a donc

$$\alpha = A_1 \cos \sqrt{\frac{g}{l \left( 1 + 2\varepsilon \frac{g}{l} \right)}} (t + \beta_1) + A_2 \cos \sqrt{\frac{g}{l}} (t + \beta_2),$$

$$\alpha' = A_1 \cos \sqrt{\frac{g}{l \left( 1 + 2\varepsilon \frac{g}{l} \right)}} (t + \beta_1) - A_2 \cos \sqrt{\frac{g}{l}} (t + \beta_2).$$

1° *Les pendules sont abandonnés à eux-mêmes après avoir été également écartés en sens inverse de la verticale.*

Comme on peut choisir à volonté l'origine du temps, nous suppo-

serons que la mise en mouvement a lieu lorsque  $t = -\beta_2$ , ce qui revient à supposer  $\beta_2 = 0$ , en comptant maintenant le temps à partir de cette dernière époque. Nous aurons ainsi

$$(9) \quad \begin{cases} \alpha = A_1 \cos(t + \beta_1) \sqrt{\frac{g}{l(1 + 2\varepsilon \frac{g}{l})}} + A_2 \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t, \\ \alpha' = A_1 \cos(t + \beta_1) \sqrt{\frac{g}{l(1 + 2\varepsilon \frac{g}{l})}} - A_2 \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t, \end{cases}$$

Soient  $\alpha_0$  et  $-\alpha_0$  les écarts initiaux des pendules de droite et de gauche, on doit avoir

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= A_1 \cos \beta_1 \sqrt{\frac{g}{l(1 + 2\varepsilon \frac{g}{l})}}, \\ -\alpha_0 &= A_1 \cos \beta_1 \sqrt{\frac{g}{l(1 + 2\varepsilon \frac{g}{l})}} - A_2, \end{aligned}$$

ce qui exige que  $A_1 = 0$ ,  $A_2 = \alpha_0$ , d'où

$$\alpha = -\alpha' = \alpha_0 \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t.$$

Les deux pendules se meuvent donc comme s'ils étaient complètement isolés, et la lame OC n'éprouve aucune déviation, résultat obtenu par Savart, et que l'on devait prévoir en raison de la symétrie.

2° *Les pendules sont abandonnés à eux-mêmes après avoir été également écartés de la verticale dans le même sens.*

En vertu des équations (9) on a

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= A_1 \cos \beta_1 \sqrt{\frac{g}{l(1 + 2\varepsilon \frac{g}{l})}} + A_2, \\ \alpha_0 &= A_1 \cos \beta_1 \sqrt{\frac{g}{l(1 + 2\varepsilon \frac{g}{l})}} - A_2, \end{aligned}$$

d'où  $A_2 = 0$ , et comme  $\frac{d\alpha}{dt} = 0$ ,  $\frac{d\alpha'}{dt} = 0$ , pour  $t = 0$ , on a

$$\sin \beta_2 \sqrt{\frac{g}{l \left( 1 + 2 \varepsilon \frac{g}{l} \right)}} = 0,$$

ce qui exige que  $\beta_2 \sqrt{\frac{g}{l \left( 1 + 2 \varepsilon \frac{g}{l} \right)}}$  soit un multiple de  $\pi$ . Supposons que ce soit un multiple pair, l'hypothèse inverse conduirait au même résultat; nous aurons

$$\alpha_0 = A_1, \quad \alpha = \alpha' = \alpha_0 \cos t \sqrt{\frac{g}{l \left( 1 + 2 \varepsilon \frac{g}{l} \right)}}.$$

Le mouvement des pendules est donc le même et de plus isochrone; la durée  $T$  d'une oscillation est donnée par

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g} \left( 1 + 2 \varepsilon \frac{g}{l} \right)}.$$

Il suffit de se rappeler la signification de  $\varepsilon$  pour trouver dans cette formule l'énoncé suivant de Savart :

*La durée des oscillations est d'autant plus grande que la verge verticale est plus longue et plus mince, et que les pendules sont plus lourds et plus courts.*

Savart ajoute :

*La verge verticale fait alors des oscillations isochrones avec celles des pendules.*

C'est ce qui résulte des formules (A) et (B), en y supposant  $m = m'$ .

3° *L'un des pendules est en repos lorsque l'autre commence à se mettre en marche.*



On a

$$\alpha_0 = A_1 \cos \beta_1 \sqrt{\frac{g}{l \left( 1 + 2\varepsilon \frac{g}{l} \right)}} + A_2,$$

$$0 = A_1 \cos \beta_1 \sqrt{\frac{g}{l \left( 1 + 2\varepsilon \frac{g}{l} \right)}} - A_2.$$

On est conduit comme plus haut, en exprimant que  $\frac{d\alpha}{dt} = 0$  pour  $t = 0$ , à admettre que le coefficient de  $A_1$  est égal à l'unité, d'où

$$\alpha_0 = A_1 + A_2, \quad 0 = A_1 - A_2,$$

par suite,

$$A_1 = A_2 = \frac{\alpha_0}{2},$$

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{2} \left[ \cos t \sqrt{\frac{g}{l \left( 1 + 2\varepsilon \frac{g}{l} \right)}} + \cos t \sqrt{\frac{g}{l}} \right],$$

$$\alpha' = \frac{\alpha_0}{2} \left[ \cos t \sqrt{\frac{g}{l \left( 1 + 2\varepsilon \frac{g}{l} \right)}} - \cos t \sqrt{\frac{g}{l}} \right].$$

Posant pour plus de simplicité

$$2\lambda = \sqrt{\frac{g}{l}} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{1 + 2\varepsilon \frac{g}{l}}} \right),$$

$$2\mu = \sqrt{\frac{g}{l}} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 2\varepsilon \frac{g}{l}}} \right),$$

il vient

$$\alpha = \alpha_0 \cos \lambda t \cos \mu t,$$

$$\alpha' = \alpha_0 \sin \lambda t \sin \mu t,$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\alpha_0 (\lambda \sin \lambda t \cos \mu t + \mu \cos \lambda t \sin \mu t),$$

$$\frac{d\alpha'}{dt} = \alpha_0 (\lambda \cos \lambda t \sin \mu t + \mu \sin \lambda t \cos \mu t).$$

L'angle  $\alpha$  s'annulera, ou le premier pendule se trouvera dans la verticale, pour des valeurs de  $t$  données par

$$t = \frac{i}{\lambda} \frac{\pi}{2}$$

ou

$$t = \frac{i}{\mu} \frac{\pi}{2},$$

$i$  étant un nombre impair. Les vitesses angulaires correspondantes seront

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= -\alpha_0 \lambda \sin \frac{i\pi}{2} \cos \frac{\mu}{\lambda} \frac{i\pi}{2}, \\ \frac{d\alpha}{dt} &= -\alpha_0 \mu \sin \frac{i\pi}{2} \cos \frac{\lambda}{\mu} \frac{i\pi}{2}. \end{aligned}$$

Elles ne peuvent respectivement s'annuler que si  $\frac{\mu}{\lambda}$  ou  $\frac{\lambda}{\mu}$  est un nombre impair. Considérons le second cas ou supposons que  $n = \frac{\lambda}{\mu}$  est un nombre impair. L'écart  $\alpha$  s'annulera sans qu'il en soit de même de  $\frac{d\alpha}{dt}$  pour les valeurs successives du temps  $\frac{1}{n\mu} \frac{\pi}{2}, \frac{3}{n\mu} \frac{\pi}{2}, \frac{5}{n\mu} \frac{\pi}{2}, \dots$ , inférieures à  $\frac{1}{\mu} \frac{\pi}{2}$ . Quant  $t$  aura atteint cette dernière valeur, le pendule s'arrêtera dans la verticale, puis se remettra en mouvement. Le nombre des oscillations comprises dans cette période sera d'autant plus grand que

$$n = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{1 + 2\varepsilon \frac{g}{l}}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 2\varepsilon \frac{g}{l}}}} = -1 + \frac{2}{1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 2\varepsilon \frac{g}{l}}}}$$

sera lui-même plus grand ou  $\frac{\varepsilon}{l}$  plus petit.

On comprend que, par l'influence de causes que nous n'avons pas fait intervenir dans le calcul, les choses se passeront encore de la même manière si  $\frac{\lambda}{\mu}$ , n'étant pas exactement un nombre impair, en diffère très-peu. On vérifie ainsi cet énoncé de Savart :

*Le pendule, primitivement en repos, se met en marche peu à peu et l'autre s'arrête graduellement, puis se remet en mouvement, et le premier*

*s'arrête et ainsi de suite; le nombre des oscillations comprises dans chacune de ces périodes est d'autant plus grand que la verge verticale est plus rigide et les pendules sont plus longs et moins pesants.*

Savart ajoute que  $n$  est d'autant plus grand que la verge horizontale est plus épaisse et plus courte, ce qui est dû à l'intervention de l'élasticité de cette verge, dont nous avons fait abstraction.

## II. — Pendules inégaux.

Pour bien faire ressortir l'influence de l'inégalité de longueur des pendules, nous supposerons que le rapport  $\frac{l'}{l} = \gamma$  soit assez petit pour que l'on puisse en négliger les puissances supérieures à la première; et, pour arriver à des résultats simples, nous admettrons que  $\varepsilon \frac{g}{l}$  est du même ordre de grandeur que  $\lambda$ .

L'équation (6) donne

$$\frac{A_1}{A'_1} = \frac{1}{\varepsilon \frac{g}{l}}, \quad \frac{A_2}{A'_2} = - \frac{2\varepsilon \frac{g}{l}}{1 - \gamma + \sqrt{(1 - \gamma)^2 + 4\varepsilon^2 \frac{g^2}{l^2}}} = -\varepsilon \frac{g}{l},$$

et l'équation (7)

$$K_1 = \sqrt{\frac{g}{l \left(1 + \varepsilon \frac{g}{l}\right)}}, \quad K_2 = \sqrt{\frac{g}{l \left(\gamma + \varepsilon \frac{g}{l}\right)}}.$$

Ces simplifications, dans les valeurs  $K_1$  et  $K_2$ , ne sont admissibles que pour de petites valeurs de  $\varepsilon$  ou pour un nombre restreint d'oscillations.

L'expression  $l \sqrt{1 + \varepsilon \frac{g}{l}} = l_1$  est la longueur du pendule attaché à un point fixe qui serait isochrone avec le pendule  $l$  supposé fixé à l'extrémité de la lame de suspension; c'est ce que nous appellerons la *longueur réduite* du pendule. Dans tous les termes en  $\varepsilon$ , nous pourrions remplacer  $l$  par  $l_1$ .

Nous poserons en outre

$$l \left( \gamma + \varepsilon \frac{g}{l} \right) = l'_1,$$

et nous aurons ainsi, en continuant à supposer  $\beta_1 = 0$ , et remplaçant  $l$  par  $l_1$  dans les termes en  $\varepsilon$ ,

$$(10) \quad \begin{cases} \alpha = A_1 \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t - A'_2 \varepsilon \frac{g}{l_1} \cos \sqrt{\frac{g}{l'_1}} (t + \beta_2), \\ \alpha' = A_1 \varepsilon \frac{g}{l_1} \cos \sqrt{\frac{g}{l_1}} t + A'_2 \sqrt{\frac{g}{l'_1}} (t + \beta_2). \end{cases}$$

1° Les pendules sont écartés du même angle avec la verticale, mais en sens contraire, avant d'être abandonnés à eux-mêmes.

On a

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= A_1 - \varepsilon \frac{g}{l_1} A'_2 \cos \sqrt{\frac{g}{l'_1}} \beta_2, \\ -\alpha_0 &= \varepsilon \frac{g}{l_1} A_1 + A'_2 \cos \sqrt{\frac{g}{l'_1}} \beta_2. \end{aligned}$$

On reconnaîtra, comme plus haut, en raison de ce que les vitesses initiales sont nulles, que l'on peut supposer

$$\beta_2 = 0,$$

d'où

$$A_1 = \alpha_0 \left( 1 - \varepsilon \frac{g}{l_1} \right), \quad A'_1 = -\alpha_0 \left( 1 + \varepsilon \frac{g}{l_1} \right)$$

et

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha_0} = \left( 1 - \varepsilon \frac{g}{l_1} \right) \cos \sqrt{\frac{g}{l_1}} t + \varepsilon \frac{g}{l_1} \cos \sqrt{\frac{g}{l'_1}} t, \\ \frac{\alpha'}{\alpha_0} = \varepsilon \frac{g}{l_1} \cos \sqrt{\frac{g}{l_1}} t - \left( 1 + \varepsilon \frac{g}{l_1} \right) \cos \sqrt{\frac{g}{l'_1}} t. \end{cases}$$

La durée des oscillations du pendule  $l$  sera donnée par

$$\sin \sqrt{\frac{g}{l_1}} t = -\varepsilon \frac{g}{l_1} \sqrt{\frac{l_1}{l'_1}} \sin \sqrt{\frac{g}{l'_1}} t = -\varepsilon \frac{g}{l_1 \sqrt{\gamma}} \sin \sqrt{\frac{g}{l'_1}} t.$$

Quoique  $\gamma$  soit une petite fraction, comme  $\sqrt{\gamma}$  est plus grand, nous admettrons que  $\varepsilon$  est assez petit pour que l'axe puisse négliger le carré de  $\varepsilon \frac{g}{l_1 \sqrt{\gamma}}$ .

Soient  $t_1, t_2, \dots, t_i, \dots$  les temps au bout desquels se terminent la première, la seconde, etc. oscillation. On voit sans difficulté, en ne perdant pas de vue le mode d'approximation adopté, que

$$t_i = \sqrt{\frac{l_1}{g}} \left( i\pi + \varepsilon \frac{g}{l_1 \sqrt{\gamma}} \sin \frac{i\pi}{\sqrt{\gamma}} \right),$$

et que l'écart, au bout de la  $i^{\text{ème}}$  amplitude est

$$(12) \quad \alpha_i = \alpha_0 \left( 1 - \varepsilon \frac{g}{l_1} \right) \cos i\pi + \alpha_0 \varepsilon \frac{g}{l_1} \cos \frac{i\pi}{\sqrt{\gamma}} = \alpha_0 \cos i\pi - \varepsilon \frac{g \alpha_0}{l_1} \left( \cos i\pi - \cos \frac{i\pi}{\sqrt{\gamma}} \right).$$

Désignons par  $t'_i, \alpha'_i$  les équivalents de  $t_i$  et  $\alpha_i$  pour le second pendule; nous aurons

$$(12') \quad \begin{cases} t'_i = \left( i\pi - \varepsilon \frac{g \sqrt{\gamma}}{l_1} \sin i\sqrt{\gamma}\pi \right) \sqrt{\frac{l'_1}{g}}, \\ \alpha'_i = -\alpha_0 \left( 1 + \varepsilon \frac{g}{l_1} \right) \cos i\pi + \alpha_0 \varepsilon \frac{g}{l_1} \cos i\sqrt{\gamma}\pi \\ \quad = -\alpha_0 \cos i\pi - \alpha_0 \varepsilon \frac{g}{l_1} (\cos i\pi - \cos i\sqrt{\gamma}\pi). \end{cases}$$

Pour faire voir plus nettement la marche des pendules, supposons que  $\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$  soit un nombre entier  $n$ ; la durée des oscillations du petit pendule sera constante et la même que s'il était seulement fixé à l'extrémité de la lame de suspension.

La durée de la  $i^{\text{ème}}$  oscillation du second pendule

$$T_i = \left[ \pi + \varepsilon \frac{g}{l_1} \left( \sin \frac{i\pi}{n} - \sin \frac{(i-1)\pi}{n} \right) \right] \sqrt{\frac{l'_1}{g}}$$

sera plus grande que s'il était fixé à l'extrémité de la lame à partir de  $i=1$  jusqu'au moment où l'on aura  $i=n$ ; à partir de là, l'inverse aura lieu jusqu'au moment où l'on aura  $i=2n$ , et ainsi de suite.

Les écarts impairs et pairs de  $l$  seront d'abord respectivement plus grands et plus petits que  $\alpha_0$ ; le maximum des écarts pairs sera égal ou un peu inférieur, selon la valeur de  $n$ , à

$$\alpha_0 \left( 1 + 2\varepsilon \frac{g}{l_1} \right),$$

et le minimum des écarts impairs égal ou un peu inférieur à

$$\alpha_0 \left( 1 - 2\varepsilon \frac{g}{l} \right).$$

Ces deux écarts maximum et minimum se succéderont, puis les choses auront lieu en sens inverse et ainsi de suite.

Les écarts impairs et pairs, au contraire, seront d'abord respectivement plus petits et plus grands que  $\alpha_0$ ; le maximum et le minimum de  $\alpha'_i$  seront atteints moins rapidement que ceux de  $\alpha_i$ .

En supposant  $m = m'$ , l'équation (A) donne, pour la flèche de la lame,

$$f = \varepsilon(\alpha + \alpha'),$$

et, comme le maximum de  $\alpha'$  se produit bien plus tardivement que celui de  $\alpha$ , on voit que les plus grands écarts de la lame correspondront d'abord à ceux du long pendule.

Ces différentes conséquences sont d'accord avec les résultats obtenus par Savart.

2° *Les pendules partent sous un même angle mesuré du même côté de la verticale.*

On a

$$\alpha_0 = A_1 - \varepsilon \frac{g}{l_1} A'_2, \quad \alpha_0 = \varepsilon \frac{g}{l_1} A_1 + A'_2;$$

d'où

$$A_1 = \alpha_0 \left( 1 + \varepsilon \frac{g}{l_1} \right), \quad A'_2 = \alpha_0 \left( 1 - \varepsilon \frac{g}{l_1} \right)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\alpha_0} &= \left( 1 + \varepsilon \frac{g}{l_1} \right) \cos \sqrt{\frac{g}{l_1}} t - \varepsilon \frac{g}{l_1} \cos \sqrt{\frac{g}{l_1}} t, \\ \frac{\alpha'}{\alpha_0} &= \varepsilon \frac{g}{l_1} \cos \sqrt{\frac{g}{l_1}} t + \left( 1 - \varepsilon \frac{g}{l_1} \right) \cos \sqrt{\frac{g}{l_1}} t. \end{aligned}$$

En conservant les notations ci-dessus, on trouve

$$t_i = \sqrt{\frac{l_1}{g}} \left( i\pi - \varepsilon \frac{g}{l_1 \sqrt{\gamma}} \sin \frac{i\pi}{\sqrt{\gamma}} \right),$$

$$t'_i = \sqrt{\frac{l'_1}{g}} \left( i\pi + \varepsilon \frac{g}{l_1} \sqrt{\gamma} \sin i\pi \sqrt{\gamma} \right),$$

$$\alpha_i = \alpha_0 \left( 1 + \varepsilon \frac{g}{l_1} \right) \cos i\pi - \alpha_0 \varepsilon \frac{g}{l_1} \cos \frac{i\pi}{\sqrt{\gamma}} = \alpha_0 \cos i\pi + \varepsilon \frac{g\alpha_0}{l_1} \left( \cos i\pi - \cos \frac{i\pi}{\sqrt{\gamma}} \right),$$

$$\alpha'_i = \alpha_0 \varepsilon \frac{g}{l_1} \cos i\pi \sqrt{\gamma} + \alpha_0 \left( 1 - \varepsilon \frac{g}{l_1} \right) \cos i\pi = \alpha_0 \cos i\pi - \varepsilon \frac{g}{l_1} (\cos i\pi - \cos i\sqrt{\gamma}\pi).$$

La discussion de ces formules dans l'hypothèse où  $\sqrt{\gamma}$  est un nombre entier conduit à des résultats semblables à ceux du numéro précédent; mais les inégalités dans les écarts pairs et impairs se produisent dans un ordre inverse.

3° *Le pendule le plus long est au repos lorsque l'autre se met en mouvement.*

On a

$$0 = A_1 - \varepsilon \frac{g}{l_1} A'_2, \quad \alpha_0 = \varepsilon \frac{g A'_1}{l_1} + A'_1,$$

d'où

$$A_1 = \alpha_0 \varepsilon \frac{g}{l_1},$$

$$A'_2 = \alpha_0,$$

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = \varepsilon \frac{g}{l_1} \left( \cos \sqrt{\frac{g}{l_1}} t - \cos \sqrt{\frac{g}{l'_1}} t \right),$$

$$\frac{\alpha'}{\alpha_1} = \cos \sqrt{\frac{g}{l'_1}} t.$$

Le petit pendule est donc isochrone.

On a de plus

$$(14) \quad \begin{cases} t_i = \sqrt{\frac{l_1}{g}} \left( i\pi - \sin \frac{i\pi}{\sqrt{\gamma}} \right), \\ \alpha_i = \alpha_0 \varepsilon \frac{g}{l_1} \left( \cos i\pi - \cos \frac{i\pi}{\sqrt{\gamma}} \right). \end{cases}$$

En mettant en regard l'une de l'autre les secondes équations (12) et (14), on reconnaît que les variations éprouvées par  $\alpha_i$  suivent la même loi dans le cas actuel et dans celui que nous avons étudié en premier lieu, ce qui est conforme à un résultat de l'expérience obtenu par Savart.

Les oscillations du pendule long restent très-petites si  $\frac{1}{\sqrt{\gamma}} = n$  est entier et pair; tous les écarts de rang pair seront nuls ou le pendule ne décrira que des demi-oscillations. Dans le cas où  $n$  est impair, ce sont, au contraire, les écarts de rang impair qui sont nuls.

4° *Le pendule le plus court est en repos lorsque l'autre se met en mouvement.*

On a

$$\alpha_1 = A_1 - \varepsilon \frac{g}{l_1} A'_2, \quad 0 = \varepsilon \frac{g}{l_1} A_1 + A'_2,$$

d'où

$$A_1 = \alpha_0,$$

$$A'_2 = -\alpha_0 \varepsilon \frac{g}{l_1},$$

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = \cos \sqrt{\frac{g}{l_1}} t,$$

$$\frac{\alpha'}{\alpha_0} = \varepsilon \frac{g}{l_1} \left( \cos \sqrt{\frac{g}{l_1}} t - \cos \sqrt{\frac{g}{l'_1}} t \right).$$

Le pendule le plus long se mouvra donc sensiblement comme s'il était fixé directement à l'extrémité de la lame de suspension.

On a ensuite

$$(15) \quad \begin{cases} t'_i = \sqrt{\frac{l'_1}{g}} (i\pi - \sin i\pi \sqrt{\gamma}), \\ \alpha'_i = \sqrt{\frac{l'_2}{g}} (\cos i\pi - \cos i\pi \sqrt{\gamma}). \end{cases}$$

La loi des variations de  $\alpha'_i$  est la même que dans le second des cas que nous venons d'étudier, et qui est conforme à l'expérience.

On remarquera que les écarts de  $\alpha'$  resteront toujours très-petits.



Si  $\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$  est de la forme  $2n$ ,  $n$  étant un nombre entier, le pendule sera au repos au bout de  $(4n - 1)$  oscillations, puis le mouvement reprendra, et ainsi de suite.

Dans le cas où  $\frac{1}{\sqrt{\gamma}} = n$ ,  $n$  étant impair, le repos aura lieu à la fin de la  $(n - 1)^{i\grave{e}m^e}$  oscillation.

FIN DU TOME DEUXIÈME.