ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

SIMONE DOLBEAULT-LEMOINE

# Sur la déformabilité des variétés plongées dans un espace de Riemann

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série*, tome 73, nº 4 (1956), p. 357-438

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1956_3_73_4_357_0>

SUR LA

# DÉFORMABILITÉ DES VARIÉTÉS
## PLONGÉES DANS UN ESPACE DE RIEMANN

PAR M[me] SIMONE DOLBEAULT-LEMOINE.

### INTRODUCTION.

Étant donné un espace de Riemann $V_n$ à $n$ dimensions, il semble naturel de considérer les variétés $V_p$, à $p$ dimensions qui y sont plongées. Par ce plongement, $V_p$ est elle-même douée d'une structure de variété riemannienne à métrique induite par celle de $V_n$. Alors se pose d'elle-même une question d'unicité : dans quels cas la métrique induite sur $V_p$ permet-elle, ou non, de déterminer complètement $V_p$ dans l'espace $V_n$, autrement dit, dans quels cas $V_p$ est-elle rigide ou déformable pour son plongement dans $V_n$ ?

D'importantes simplifications se produisent si $p = n - 1$, c'est pourquoi de nombreux mathématiciens se sont intéressés à l'étude de la déformabilité des $V_{n-1}$ plongées dans $V_n$. Nous citerons seulement R. Beez, U. Sbrana, É. Cartan et E. Bompiani. Tous ont envisagé le problème du seul point de vue local, en se limitant aux espaces $V_n$ euclidiens. Leurs travaux sont déjà anciens et ce problème n'a, depuis lors, jamais été repris systématiquement, bien qu'il comporte encore des questions non résolues. C'est pourquoi nous l'avons pris comme sujet de recherches en nous efforçant de l'étendre d'une part en n'imposant pas à $V_n$ la condition très restrictive d'être euclidien, d'autre part en envisageant quelques-uns de ses aspects globaux. Ce travail nous a permis d'obtenir des résultats nouveaux qui constituent les chapitres I, II, III, et IV. Il repose sur des notions qui, n'étant pas entièrement originales, ont été exposées dans un chapitre préliminaire. En voici un résumé.

Le chapitre préliminaire a pour objet l'étude sommaire des espaces de Riemann et de certaines de leurs sous-variétés. Les paragraphes A et B contiennent d'une part des résultats connus, d'autre part des résultats qui sont seulement des extensions de propriétés connues. Quels qu'ils soient, nous les avons exposés de la façon qui, pour n'être pas celle habituellement utilisée, nous a semblé la mieux adaptée à l'étude des propriétés locales et globales des $V_{n-1}$ localement déformables dans un espace de Riemann $V_n$. Le paragraphe C est une étude rapide de ces $V_{n-1}$ ayant surtout pour but de prouver l'existence, en tout point de $V_{n-1}$, d'une variété de dimension $n-1$, géodésique en ce point dans $V_{n-1}$ et dans $V_n$. La place de cette partie de notre travail dans les préliminaires se trouve justifiée par le fait que nous nous y référerons constamment dans la suite.

Le chapitre I a trait aux plus simples des variétés $V_{n-1}$ localement déformables dans un espace $V_n$ localement euclidien; il se divise en deux paragraphes : le paragraphe A est l'étude de la réductibilité locale des $V_{n-1}$ régulièrement déformables ou variétés dont la déformation locale ne fait intervenir aucun élément privilégié. Le paragraphe B a pour but la détermination de la forme générale de la métrique des $V_{n-1}$ plongées dans $V_n$ et localement déformables avec persistance, en chaque point, d'une direction asymptotique pour ce plongement.

Dans ce chapitre I, ainsi que dans le chapitre II, nous adoptons un point de vue différent de celui des auteurs déjà cités, car nous cherchons à mettre nos résultats sous une forme qui puisse nous conduire à des remarques sur la structure globale des $V_{n-1}$ localement déformables dans $V_n$.

Le chapitre II est réservé aux variétés $V_{n-1}$ localement déformables avec persistance, en chaque point, de deux directions conjuguées distinctes. L'étude de ces variétés est assez longue et présente des difficultés qui, pour être écartées, exigent l'emploi d'une technique que nous développons largement aux paragraphes A et B et qui consiste essentiellement en une adaptation de la méthode du repère mobile et du formalisme de É. Cartan. A la fin du paragraphe B, nous faisons allusion à un résultat concernant l'angle de deux directions conjuguées persistant au cours d'une déformation. Ce résultat a fait l'objet d'une Note (1). Au paragraphe C, nous envisageons le cas plus simple des variétés déformables avec persistance des directions principales; ce cas se subdivise en trois parties et, dans chacune d'elles, des résultats précis sont obtenus en ce qui concerne la métrique.

Le chapitre III est une étude des variétés $V_{n-1}$ plongées dans un espace $V_n$ à courbure constante et localement déformables pour ce plongement. Il contient des résultats entièrement nouveaux : au paragraphe A, il est démontré que les seuls $V_n$ à courbure constante qui peuvent contenir des $V_{n-1}$ localement déformables douées de la métrique induite par le plongement sont de dimension 3 et 4.

(1) *C. R. Acad. Sc.*, t. 232, 1951, p. 1630.

Au paragraphe B, des calculs basés sur des méthodes analogues à celles employées au chapitre II permettent d'obtenir les expressions possibles des formes quadratiques susceptibles d'être prises comme métriques des $V_3$ localement déformables dans un $V_4$ à courbure constante.

Au chapitre IV, nous examinons les conséquences que peuvent avoir sur la structure globale des variétés $V_{n-1}$ les propriétés établies dans les chapitres précédents, lorsque $V_n$ est un espace complet et lorsque $V_{n-1}$ est elle-même une variété complète pour la métrique induite par plongement dans $V_n$. Au paragraphe A, nous étudions la compacité de $V_{n-1}$, à partir de propriétés des géodésiques des espaces complets qui ont été exposées dans les Préliminaires. Au paragraphe B, nous obtenons des conditions d'existence pour $V_{n-1}$ en cherchant s'il peut y avoir compatibilité entre la structure de variété complète et la déformabilité locale de $V_{n-1}$ pour la métrique induite par plongement dans $V_n$. Cette étude fait jouer un rôle important à la courbure gaussienne scalaire et met en évidence une famille de $V_{n-1}$ localement réductibles. Ceci nous amène à étudier, au paragraphe C, la réductibilité des $V_{n-1}$ complètes pour leur plongement dans l'espace euclidien $R_n$.

Une partie des résultats exposés dans les Préliminaires et dans les chapitres III et IV ont été publiés dans trois Notes ([2]).

L'ensemble de mon travail a été profondément marqué par l'influence d'Élie Cartan dont je suis fière d'avoir reçu les encouragements lors de mes tout premiers essais dans la recherche mathématique. L'étude présente n'aurait cependant pu être menée à bien sans l'aide de M. A. Lichnerowicz qui ne s'est pas borné à suivre mes efforts avec bienveillance, mais a contribué à les orienter par ses conseils. Je suis heureuse de pouvoir l'en remercier ici. Je tiens aussi à exprimer ma gratitude aux nombreux mathématiciens qui ont bien voulu me faire profiter de leurs réflexions et, en particulier, à MM. G. de Rham et S. S. Chern, ainsi qu'à M. Ch. Ehresmann. Enfin, il me reste à dire ma reconnaissance à M. G. Darmois.

## PRELIMINAIRES.

Les deux premiers paragraphes de ce chapitre sont un résumé rapide de définitions et de propriétés relatives aux espaces de Riemann et à certaines de leurs sous-variétés. Nous nous proposons de les exposer sous une forme immédiatement utilisable dans l'étude des variétés $V_{n-1}$ localement déformables pour leur

---

([2]) *C. R. Acad. Sc.*, t. 238, 1954, p. 559, et 2052; t. 240, 1955, p. 1962.

plongement dans un espace de Riemann $V_n$. Ceci nous amènera, presque constamment, à adopter un point de vue différent de celui des auteurs qui se sont occupés des mêmes questions et à chercher des extensions de résultats classiques. Le paragraphe C est une contribution à l'étude des espaces de Riemann $V_n$ à $n$ dimensions contenant des variétés $V_{n-1}$ localement développables ou localement déformables pour la métrique induite par ce plongement. Nous nous proposons surtout de mettre en relief le caractère exceptionnel de l'existence de tels espaces dès que la dimension $n$ est supérieure à 3. Sur la structure des $V_{n-1}$ localement déformables, nous nous bornerons à une remarque importante, et nous réserverons pour les chapitres I, II et III l'étude complète des $V_{n-1}$ déformables dans un espace $V_n$ localement euclidien ou à courbure constante.

## A. — Espaces de Riemann.

1. *Variétés différentiables.* — Soit $V_n$ une variété, c'est-à-dire un espace topologique séparé et connexe jouissant de la propriété suivante : A tout point $x \in V_n$, nous associons un système de $n$ nombres réels qui peuvent être considérés comme les coordonnées d'un point $\xi$ de l'espace numérique réel à $n$ dimensions, et nous supposons que l'application ainsi définie est un homéomorphisme d'un voisinage ouvert U de $x$ sur une boule de centre $\xi$ dans $R_n$. Cette représentation topologique constitue un *système de coordonnées locales* de $V_n$, ou *carte locale*, dont U est le domaine [14], [22]. Elle doue $V_n$ d'une structure de variété différentiable de classe $C^r$ [32] si, de plus, on peut trouver un ensemble A de cartes, ou *atlas*, satisfaisant aux deux axiomes :

$A_1$. La réunion des domaines des cartes de A est identique à $V_n$.

$A_2$. Si $U_1$ et $U_2$ sont deux domaines de cartes de A, si $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ et si $x \in U_1 \cap U_2$, les coordonnées du point $x$ dans l'une des cartes sont des fonctions de classe $C^r$, à jacobien non nul, des coordonnées de ce même point $x$ dans l'autre.

La plus grande partie de ce travail, visant à des résultats de nature purement locale, sera consacrée à l'étude d'une région de $V_n$ couverte par un seul système de coordonnées; seul le dernier chapitre, par sa portée globale, exigera un recouvrement de la variété tout entière.

2. Espace vectoriel tangent en un point d'une variété différentiable. — Considérons l'ensemble $D(x)$ des fonctions réelles de classe $C^r$, définies au point $x \in V_n$. Leurs différentielles définissent un espace vectoriel $T_n^*(x)$ de classe $C^{r-1}$ du champ réel [13], [23], [24]. Tout élément de $T_n^*(x)$ s'exprime linéairement en fonction des différentielles des coordonnées locales de $x$ et est, de ce fait, appelé indifféremment *vecteur covariant* ou *forme linéaire* en $x$. Les

différentielles des coordonnées locales de $x$ fournissent ainsi une base de $T_n^*(x)$ et $T_n^*(x)$ est de même dimension $n$ que $V_n$.

Soit $T_n(x)$ l'espace vectoriel dual de $T_n^*(x)$ : ses éléments sont appelés *vecteurs contravariants* ou, plus simplement *vecteurs* d'origine $x$. Sa dimension est, évidemment $n$ et sa classe $C^{r-1}$; toute base de $T_n(x)$, ensemble ordonné de $n$ vecteurs linéairement indépendants $\vec{e}_1(x), \ldots, \vec{e}_n(x)$ est un *repère* d'origine $x$, tandis que toute base de $T_n^*$ est un *corepère*.

Considérons l'opération classique [19] qui, à deux espaces vectoriels quelconques V et W, de dimensions respectives $p$ et $q$, fait correspondre un troisième espace vectoriel, de dimension $pq$, appelé leur *produit tensoriel* et noté $V \otimes W$, suivant une loi qui associe un élément $V \otimes W$ à tout couple d'éléments pris l'un dans V, l'autre dans W et qui satisfait aux axiomes habituels.

La notion de produit tensoriel d'un nombre fini d'espaces vectoriels se déduit sans difficulté de cette définition, de même que celle de puissance tensorielle, et, revenant à la variété différentiable $V_n$, nous appellerons tenseur au point $x \in V_n$ tout élément du produit des puissances tensorielles de $T_n(x)$ et $T_n^*(x)$. Dans un système de coordonnées locales déterminé, un tenseur est défini par ses composantes pour lesquelles nous adopterons les notations classiques : la position supérieure indique le caractère contravariant d'un indice, la position inférieure le caractère covariant; enfin nous utiliserons la convention d'Einstein : si le même indice figure deux fois dans le même monôme, une fois en position inférieure, une fois en position supérieure, on doit sommer tous les monômes obtenus en donnant à cet indice toutes les valeurs possibles, sauf si la valeur numérique de cet indice est déterminée d'une manière unique.

3. Espace de Riemann. — D'après le numéro précédent, on définit sans difficulté un champ de tenseurs sur $V_n$ et l'on peut considérer, en particulier, un champ de tenseurs symétriques à deux indices, de classe $C^{r-1}$.

Soient $\{\omega^I(x)\}$, pour $I \in \{1, \ldots, n\}$, une base de $T_n^*(x)$, $\{\vec{e}_I(x)\}$ la base duale et $g_{IJ}(x)$ les composantes covariantes, au point $x$, du tenseur envisagé. Ces éléments définissent, au voisinage du point $x$ de $V_n$, une *métrique* qui est la forme quadratique

$$ds^2 = g_{IJ}\,\omega^I\omega^J$$

manifestement invariante dans tout changement de carte locale.

Les $g_{IJ}$ et les $\omega^I$ sont des fonctions du point $x$. A la métrique qui vient d'être définie sur $V_n$, on associe une métrique sur $T_n(x)$ en fixant le point $x$; ainsi $T_n(x)$ est doué d'une structure *d'espace vectoriel euclidien* et $V_n$ d'une structure *d'espace de Riemann* de classe $C^r$.

La distance $d(x, y)$ de deux points quelconques $x$ et $y$ de $V_n$ sera la borne inférieure de l'intégrale de $ds$ prise le long de tous les chemins, continûment différentiables par morceaux, joignant $y$ à $x$ dans $V_n$; un arc de géodésique joignant $y$ à $x$ sera une extrémale de cette intégrale.

Signalons un théorème important dû à H. Whitney [41] : *toute variété riemannienne* $V_n$ *est homéomorphe de classe* $C^r$ *à un espace de Riemann de classe* $C^\infty$.

La métrique de $V_n$ sera dite *régulière* au point $x$ si la forme quadratique $g_{IJ}X^IX^J$ est, en ce point, définie, positive et à Jacobien non nul pour tout élément de $T_n(x)$.

Rappelons rapidement, dans le but principal de fixer les notations, les formules essentielles de la méthode du repère mobile de É. Cartan [10]; $dx$ désignant un vecteur tangent à $V_n$ en $x$, on a

$$dx = \omega^I(x)\,\vec{e}_I(x).$$

Considérons sur $V_n$ un chemin d'origine $x$, continûment différentiable par morceaux, dont chaque point est muni d'un repère. Développons ce chemin sur $T_n(x)$ et supposons que, par ce développement, l'extrémité ait pour image le point $x+\omega^I\vec{e}_I$. Ce point se trouve muni d'un repère que nous noterons $\{\vec{e}_I + d\vec{e}_I\}$ et la connexion de variété riemannienne de $V_n$ est telle que l'on peut poser

$$d\vec{e}_I = \omega_I{}^K\,\vec{e}_K,$$

introduisant ainsi $n^2$ formes de Pfaff $\omega_I{}^K$ qui s'expriment linéairement à l'aide des $\omega^I$

$$\omega_I{}^K = \gamma_I{}^K{}_J\,\omega^J,$$

les $\gamma_I{}^K{}_J$ étant des *symboles de Christoffel* en repère naturel, c'est-à-dire lorsque les $\omega^I$ sont des différentielles exactes, des *coefficients de rotation de Ricci* en repère orthonormé et pouvant, dans tous les cas, être calculés à partir de la donnée de deux bases duales de $T_n(x)$ et $T_n^*(x)$.

Les équations quadratiques extérieures

$$d\omega^I = \omega^K \wedge \omega_K{}^I, \qquad d\omega_K{}^I = \omega_K{}^J \wedge \omega_J{}^I + \Omega_K{}^I,$$

appelées *équations de structure* par É. Cartan, constituent deux systèmes dont le premier exprime que la connexion riemannienne est *sans torsion* et dont le second introduit les *formes de courbure* $\Omega_K{}^I$, liées au *tenseur de Riemann-Christoffel* par

$$\Omega_K{}^I = \frac{1}{2} R_K{}^I{}_{,JH}\,\omega^J \wedge \omega^H.$$

Par contraction, le tenseur de Riemann-Christoffel conduit d'abord au tenseur de Ricci $R_{KJ} = R_K{}^I{}_{,JI}$ et ensuite à la courbure riemannienne scalaire $R = R_K{}^I{}_,{}^K{}_I$ qui est un invariant attaché au point $x$ de $V_n$. Les vecteurs propres de la matrice $(R_{KJ})$ par rapport à la matrice $(g_{KJ})$ sont les *directions principales de Ricci* de $V_n$ en $x$.

Rappelons les symétries du tenseur de Riemann-Christoffel $R_{KI,\,JH}$ : symétrie par rapport aux deux couples d'indices (K, I) et (J, H), symétrie gauche par rapport aux deux indices de chacun de ces couples; rappelons aussi les identités

$$R_{KI,\,JH}+R_{KJ,\,HI}+R_{KH,\,IJ}=0,$$

et signalons enfin les *identités de Bianchi*

$$\nabla_L R_{KI,\,JH}+\nabla_H R_{KI,\,LJ}+\nabla_J R_{KI,\,HL}=0,$$

où $\nabla$ est l'opérateur de dérivation covariante par rapport au corepère employé.

4. Les espaces complets et leurs géodésiques. — Considérons un ensemble infini de points sur $V_n$. Cet ensemble constitue une suite de Cauchy s'il est dénombrable et s'il peut être ordonné de manière que la distance de deux de ses points $x_p$ et $x_q$ tende vers zéro quand $p$ et $q$ tendent vers l'infini.

Un *espace complet* [17] (ou *espace normal* de Cartan [10]) sera, par définition, un espace de Riemann, sur lequel toute suite de Cauchy est convergente.

Un théorème important, énoncé par H. Hopf et W. Rinow dans le cas des surfaces [17] affirme que tout espace complet jouit des trois propriétés suivantes :

*a*. Toutes les géodésiques sont infinies dans les deux sens ou fermées;

*b*. Tout ensemble de points de $V_n$ qui est borné est relativement compact;

*c*. Deux points quelconques de $V_n$ peuvent être joints par un arc de géodésique de longueur égale à leur distance.

De plus, chacune des propriétés *a*, *b* est caractéristique, moyennant la régularité de la métrique en tout point de $V_n$.

Une démonstration élégante de ce théorème, due à G. de Rham [31] utilise la notion de *vecteur initial* d'un arc de géodésique qui nous sera utile au dernier chapitre : le vecteur initial d'un arc de géodésique d'origine $x$ est le vecteur obtenu par développement, sur $T_n(x)$, de l'arc de géodésique envisagé. Ainsi la propriété *a* est équivalente à

*a'*. Tout vecteur de $T_n(x)$ est vecteur initial d'un arc de géodésique d'origine $x$ et d'un tel arc seulement.

Des recherches récentes ont visé à étendre l'idée d'espace complet à des espaces de Riemann doués de métriques de signature quelconque, en particulier de métriques de type hyperbolique normal, ce qui conduit à envisager des géodésiques réelles de longueur nulle dont l'existence n'est pas sans créer quelque difficulté dans l'étude que nous nous proposons d'entreprendre. Nous nous limiterons donc, dans toutes les questions globales, aux espaces complets dont la définition a été rappelée au début de ce numéro et nous allons maintenant faire une étude rapide du recouvrement d'un espace complet par les géodésiques issues de l'un de ses points.

A tout point $x$ de l'espace complet $V_n$, nous allons faire correspondre un ensemble fermé $\Delta(x)$ lui-même contenu dans $V_n$. Un ensemble peu différent, déjà considéré par H. Poincaré [29], sous le nom de *ligne de partage*, dans le cas des surfaces convexes, a été étudié par S. B. Myers [26] et J. H. C. Whitehead [40] sur les variétés complètes à $n$ dimensions.

Considérons le point $x \in V_n$ et l'ensemble des géodésiques issues de $x$; introduisons *l'ensemble de partage* $\Delta(x)$ relatif au point $x$ de $V_n$ ayant pour éléments :

1° Les points à l'infini, s'il en existe, de toute géodésique passant par $x$;

2° Les points $\xi$ tels que $g$ étant une géodésique passant par $x$ et $\xi$, ce point $\xi$ soit le premier pour lequel la longueur de l'arc $x\xi$ de $g$ cesse d'être égale à la distance de $\xi$ à $x$ sur $V_n$.

De la propriété $a$ des espaces complets, il résulte, trivialement, qu'il existe au moins un tel point $\xi$ sur toute géodésique contenue toute entière dans un domaine compact de $V_n$. Toute géodésique issue de $x$ a donc au moins un point dans $\Delta(x)$ et, par suite, quel que soit $x$, $\Delta(x)$ n'est jamais vide

$$\Delta(x) \neq \emptyset \qquad (x \in V_n);$$

$\Delta(x)$ est un ensemble compact si la variété $V_n$ est elle-même compacte, ayant des points à l'infini si $V_n$ en possède.

Soit $C_n(x)$ le complémentaire de $\Delta(x)$,

$$V_n = \Delta(x) \cup C_n(x);$$

$C_n(x)$ est un ensemble connexe de dimension $n$; tout point $y \in C_n(x)$ peut être joint à $x$ par un seul arc géodésique contenu dans $C_n(x)$ et la longueur de l'arc $xy$ de cette géodésique n'est autre que la distance de $y$ à $x$ dans $V_n$. Inversement, $C_n(x)$ est couvert par les arcs des géodésiques issues de $x$, limités à leurs intersections avec $\Delta(x)$. Ainsi, $C_n(x)$ est homéomorphe à une boule euclidienne de dimension $n$; c'est une cellule ouverte de dimension $n$ et de bord $\Delta(x)$; l'ensemble de partage $\Delta(x)$ est, par suite, de dimension au plus égale à $n - 1$.

## B. — Variétés plongées dans un espace de Riemann.

**1.** Plongement d'une variété dans un espace de Riemann. Métrique induite. — Soient $V_p$ et $V_n$ deux variétés différentiables de même classe $C^r$ et de dimension respectives $p$ et $n$ $(p < n)$. Considérons une application

$$f:\quad V_p \rightarrow V_n,$$

qui identifie un point de $V_n$ à tout point de $V_p$. Cette application réalise un *plongement* de classe $C^r$ de $V_p$ dans $V_n$ et s'exprime par $n$ équations, de classe $C^r$, liant le système des $n+p$ coordonnées locales d'un même point $x$ de $V_p$, système constitué par les $p$ coordonnées locales $x^1, \ldots, x^p$ de $x$ considéré comme point de $V_p$ et par les $n$ coordonnées locales $X^1, \ldots, X^n$ de ce même $x$ considéré comme point de $V_n$.

Le plongement de $V_p$ dans $V_n$ est *régulier* au voisinage d'un point si, d'une part, ce système de $n$ équations, considérées comme équations aux inconnues $X^1, \ldots, X^n$, admet une solution et une seule pourvu que le voisinage du point envisagé soit convenablement choisi et si, d'autre part, le système final

$$X^I = \varphi^I(x^1, \ldots, x^p), \qquad I \in \{1, \ldots, n\}$$

obtenu par résolution du système initial, est tel que la matrice $\left(\frac{\partial \varphi^I}{\partial x^{I'}}\right)$ $(J' \in \{1, \ldots, p\})$ soit de rang $p$ dans le même voisinage.

Considérons les deux espaces vectoriels $T_p^*(x)$ et $T_p(x)$ correspondant à $V_p$ au point $x$. Supposons que le plongement de $V_p$ dans $V_n$ est régulier dans un voisinage de $x$. Il résulte immédiatement de ce plongement et de la définition des espaces vectoriels attachés à $x$ que $T_p^*(x)$ et $T_p(x)$ sont contenus respectivement dans $T_n^*(x)$ et $T_n(x)$

$$T_p^*(x) \subset T_n^*(x), \qquad T_p(x) \subset T_n(x);$$

par suite, toute base de $T_p(x)$ peut être complétée de manière à fournir une base de $T_n(x)$ et, inversement, toute base de $T_n(x)$ induit sur $T_p(x)$ une base qui en est la restriction; des relations semblables lient les bases de $T_p^*(x)$ et $T_n^*(x)$; tout champ de tenseurs sur $V_n$ induit sur $V_p$ un champ de tenseurs analogues. Considérons, en particulier, le tenseur métrique de $V_n$ défini, par exemple, par ses composantes covariantes $g_{IJ}$ en repère naturel. Nous en déduisons le tenseur

$$[g_{I'J'}]_{V_p} = g_{IJ}(\varphi^1, \ldots, \varphi^n) \frac{\partial \varphi^I}{\partial x^{I'}} \frac{\partial \varphi^J}{\partial x^{J'}}$$

$$\begin{pmatrix} I, J \in \{1, \ldots, n\} \\ I', J' \in \{1, \ldots, p\} \end{pmatrix}.$$

La forme quadratique

$$[ds^2]_{V_p} = [g_{I'J'}]_{V_p} \, dx^{I'} \, dx^{J'},$$

associée, sur $V_p$, à ce tenseur et prise comme métrique de $V_p$, doue $V_p$ *de la structure de variété riemannienne induite par son plongement dans* $V_n$.

2. Repère mobile pour une variété plongée. — A tout point $x$ de la variété $V_p$, associons un repère $R(x)$ de $V_n$ à l'aide duquel nous étudierons la connexion de variété riemannienne induite sur $V_p$ par son plongement dans $V_n$. Ce repère $R(x)$ sera formé de $p$ vecteurs $\vec{e}_I(x)$ pour $I \in \{1, \ldots p\}$ constituant une

base quelconque de $T_p(x)$ et de $n-p$ vecteurs orthonormés $\vec{e}_{I'}(x)$, pour $I' \in \{p+1, \ldots, n\}$, l'ensemble des vecteurs $\vec{e}_I(x)$ et $\vec{e}_{I'}(x)$ constituant une base de $T_n(x)$. Considérons les formes $\omega^I(x)$, $\omega^{I'}(x)$ dont l'ensemble est le dual de $R(x)$. En tout point $x \in V_p$, on a

$$\omega^{I'}(x) = 0,$$

et le système constitué par les équations $\omega^{I} = 0$ est complètement intégrable, chacune de ses solutions constituant un système de coordonnées locales sur $V_p$ [9]. Appliquée à $V_p$, la méthode du repère mobile donne

$$dx = \omega^I \vec{e}_I,$$

$$d\vec{e}_I = \omega_I{}^K \vec{e}_K + \omega_I{}^{K'} \vec{e}_{K'}, \qquad d\vec{e}_{I'} = \omega_{I'}{}^K \vec{e}_K + \omega_{I'}{}^{K'} \vec{e}_{K'};$$

outre les $\omega_I{}^K$, parfaitement définis sur $V_p$ par la donnée des bases duales $\{\omega^I\}$ et $\{\vec{e}_I\}$, s'introduisent des formes de Pfaff $\omega_{I'}{}^K$, $\omega_I{}^{K'}$, $\omega_{I'}{}^{K'}$, dont les premières sont liées par la relation

$$g_{K'H'}\,\omega_I{}^{H'} + g_{IJ}\,\omega_{K'}{}^J = 0,$$

et qui, exprimées linéairement en fonction des $\omega^I$, ont pour coefficients les *courbures eulériennes* de $V_p$ relativement à son plongement dans $V_n$ [7].

Une variété dont toutes les courbures eulériennes sont nulles en un point est dite *géodésique en ce point*. Elle est *totalement géodésique* si toutes ses courbures eulériennes sont nulles partout.

Les équations de structure de $V_p$ pour son plongement dans $V_n$ sont d'une part celles qui expriment la complète intégrabilité du système $\omega^{I'} = 0$, c'est-à-dire

$$d\omega^I = \omega^K \wedge \omega_K{}^I,$$

d'autre part les équations de Gauss-Codazzi

$$d\omega_K{}^I = \omega_K{}^J \wedge \omega_J{}^I + \omega_K{}^{J'} \wedge \omega_{J'}{}^I + \Omega_K{}^I,$$
$$d\omega_{K'}{}^I = \omega_{K'}{}^J \wedge \omega_J{}^I + \omega_{K'}{}^{J'} \wedge \omega_{J'}{}^I + \Omega_{K'}{}^I,$$

où les $\Omega_K{}^I$, $\Omega_{K'}{}^I$ sont les restrictions à $V_p$ des formes de courbure de $V_n$, et enfin les équations dont le premier membre est $d\omega_{K'}{}^{I'}$, que nous n'expliciterons pas, car elles disparaissent dans le cas $p = n-1$ que nous avons pour but d'étudier et auquel nous nous restreindrons dans le reste de ce numéro. Alors

$$d\vec{e}_n = \omega_n{}^K \vec{e}_K.$$

Introduisons la seconde forme fondamentale de $V_{n-1}$ pour son plongement dans $V_n$ comme étant la forme quadratique définie par

$$\varphi = -d\vec{e}_n\,dx = \omega_I{}^n \omega^I.$$

Désignons par $\varphi_{\mathrm{JK}}$ les coefficients de cette forme. Ces $\varphi_{\mathrm{JK}}$ définissent un tenseur symétrique à deux indices, appelé parfois tenseur asymptotique de $V_{n-1}$.

Les valeurs caractéristiques de la matrice $(\varphi_{\mathrm{JK}})$ par rapport à la matrice unité $(g_{\mathrm{JK}})$ sont les *courbures normales principales* de $V_{n-1}$ pour son plongement dans $V_n$ et les vecteurs propres correspondants sont les *directions principales*. Si l'équation caractéristique admet, en un point $x$, une racine multiple d'ordre $q$, les $q$ directions principales correspondantes ne sont astreintes qu'à être orthogonales aux $n-q-1$ autres directions principales. Très souvent, dans la suite de cette étude, il sera commode de considérer des repères principaux : un *repère principal* sera un repère orthonormé constitué par $n-q-1$ vecteurs unitaires portés par les directions principales à courbures normales différentes, par $q$ vecteurs qui, joints aux précédents, constituent une base orthonormée de $T_{n-1}(x)$ et, enfin, par le vecteur $\vec{e}_n(x)$ qui, avec les $\vec{e}_{\mathrm{I}}(x)$, forme une base de $T_n(x)$.

3. Unicité du plongement $V_{n-1}$ dans $V_n$. — Considérons deux variétés $V_{n-1}$ et $\overline{V}_{n-1}$ plongées dans un espace de Riemann $V_n$, contenant le même point $x$ et ayant en ce point le même espace vectoriel tangent $T_{n-1}(x)$. Soient U un voisinage de $x$ dans $V_{n-1}$, $\overline{U}$ un voisinage de $x$ dans $\overline{V}_{n-1}$ ; supposons qu'il existe un homéomorphisme local de $\overline{U}$ sur U et que cet homéomorphisme conserve la métrique aux points correspondants. Soient $y$ et $\overline{y}$ deux tels points. Les espaces vectoriels $T_{n-1}(y)$ et $\overline{T}_{n-1}(\overline{y})$ sont homéomorphes entre eux et l'application de $\overline{U}$ dans U fait passer d'une base $\{\vec{\overline{e}}_{\mathrm{I}}(\overline{y})\}$ de $\overline{T}_{n-1}(\overline{y})$ à une base $\{\vec{e}_{\mathrm{I}}(y)\}$ de $T_{n-1}(y)$. Transportons ces bases en $x$, par parallélisme le long de chemins homéomorphes contenus respectivement dans U et dans $\overline{U}$. Pour que les deux bases déduites de ces transports coïncident, il faut et il suffit que les formes $\omega_{\mathrm{I}}{}^n$, $\overline{\omega}_{\mathrm{I}}{}^n$ soient identiques, c'est-à-dire que les deux variétés $V_{n-1}$ et $\overline{V}_{n-1}$ aient, au point $x$, la même seconde forme quadratique fondamentale. Mais alors, il existe un voisinage de $x$ dans lequel ces deux variétés $V_{n-1}$ et $\overline{V}_{n-1}$ coïncident et, par suite, nous dirons que la variété $V_{n-1}$ plongée dans l'espace de Riemann $V_n$ est *intrinsèquement rigide* si sa seconde forme fondamentale $\varphi(x)$ est déterminée, au signe près, par les équations de Gauss-Codazzi et leurs conditions de compatibilité. Ces équations peuvent, comme il résulte du numéro précédent, être obtenues à partir de la donnée des métriques de $V_{n-1}$ et $V_n$. La rigidité intrinsèque est une propriété locale.

Nous allons maintenant étendre au cas où $V_n$ est un espace de Riemann quelconque un théorème important dû à R. Beez [1] pour les $V_n$ euclidiens. Ce théorème a déjà été étendu au cas où $V_n$ est à courbure constante [15] et une première démonstration simple en a été donnée par T. Y. Thomas [36]. Nous l'énoncerons sous une forme qui ne fait intervenir que les métriques de $V_{n-1}$ et

$V_n$, par un tenseur qui s'en déduit : *Pour qu'une variété* $V_{n-1}$ *plongée dans un espace de Riemann* $V_n$ *soit intrinsèquement rigide, il suffit que le tenseur de Gauss, différence des tenseurs de Riemann-Christoffel de* $V_{n-1}$ *et* $V_n$ *possède au moins deux composantes non identiquement nulles dans tout système de coordonnées locales.*

Nous en proposons une démonstration très simple. Le tenseur de Gauss est lié au tenseur asymptotique de $V_{n-1}$ par les équations de Gauss relatives aux variétés plongées que, d'après le numéro précédent, nous pouvons écrire

$$K_{IJ,HL} = \varphi_{IH}\varphi_{JL} - \varphi_{IL}\varphi_{JH}.$$

Attachons au point $x$ un repère principal pour le plongement de $V_{n-1}$ dans $V_n$. Ce repère est formé de vecteurs de $T_n(x)$ dont les $n-1$ premiers sont aussi des vecteurs propres de la matrice $(K_{IH})$ obtenue par une contraction à partir du tenseur de Gauss, matrice qui est la même pour $V_{n-1}$ et pour toute variété isométrique à $V_{n-1}$ tangente en $x$ au même espace vectoriel $T_{n-1}(x)$.

Le tenseur de Gauss ayant au moins deux composantes non nulles au point $x$, la matrice $(K_{IH})$ admet au moins trois vecteurs propres bien déterminés en ce point et ces vecteurs sont portés par les directions principales non seulement de $V_{n-1}$ mais aussi de toute variété isométrique à $V_{n-1}$, tangente en $x$ à $T_{n-1}(x)$. Ainsi le repère principal attaché au point $x$ de $V_{n-1}$ est le repère principal attaché au même point $x$ de toute variété isométrique, s'il en existe.

Avec un tel repère, l'équation précédente se simplifie : $K_{IJ,HL}$ est nul si les couples (I, J), (H, L) ne sont pas formés des mêmes indices et il reste au moins deux équations

$$K_{IJ,IJ} = \varphi_{II}\varphi_{JJ},$$
$$K_{IH,IH} = \varphi_{II}\varphi_{HH},$$

d'après lesquelles $\varphi_{II}$, $\varphi_{JJ}$ et $\varphi_{HH}$ ne sont pas nuls en $x$. Le tenseur de Gauss a donc une troisième composante $K_{JH,JH}$ non identiquement nulle, puisque

$$K_{JH,JH} = \varphi_{JJ}\varphi_{HH},$$

Mais les trois équations précédentes permettent le calcul de $\varphi_{II}$, $\varphi_{JJ}$ et $\varphi_{HH}$. En particulier, on a

$$(\varphi_{II})^2 = \frac{K_{IJ,IJ}K_{IH,IH}}{K_{JH,JH}};$$

ceci suffit pour démontrer le théorème.

### C. — Déformabilité des variétés $V_{n-1}$ plongées dans un espace de Riemann $V_n$.

1. Définition des variétés localement développables. — Le théorème de Beez-Thomas ne fournit aucun renseignement sur la rigidité locale, dans $V_n$, des variétés $V_{n-1}$ ayant, au plus, deux courbures eulériennes principales non iden-

tiquement nulles en chaque point. D'après É. Cartan [7], nous dirons qu'une $V_{n-1}$ plongée dans un espace de Riemann $V_n$ est *développable* si :

*a.* $n-2$ des courbures eulériennes principales de cette $V_{n-1}$ sont nulles en tout point $x \in V_{n-1}$ ;

*b.* les valeurs possibles de la seule courbure eulérienne non identiquement nulle ne sont pas déterminées, en nombre fini, par la donnée des métriques de $V_{n-1}$ et $V_n$ en chaque point $x$.

Supposons que $V_{n-1}$ et $V_n$ soient deux variétés différentiables de classe $C^r(r \geqq 4)$, douées de métriques régulières dans un voisinage d'un point de $V_{n-1}$. Dans un tel voisinage, nous attacherons à tout point $x \in V_{n-1}$ un repère principal dont le premier vecteur $\vec{e}_1(x)$ est porté par la direction principale à courbure eulérienne non nulle. Pour faire ressortir le rôle particulier de $\vec{e}_1(x)$ dans l'espace vectoriel $T_{n-1}(x)$ tangent en $x$ à $V_{n-1}$, nous ferons usage non seulement des indices latins I, J, K, ... éléments de l'ensemble $\{1, \ldots, n-1\}$, mais encore d'indices grecs $\Theta$, $\Psi$, $\Phi$, ..., éléments de l'ensemble $\{2, \ldots, n-1\}$.

La développabilité locale de $V_{n-1}$ a comme conséquence le fait, pour la matrice $(\varphi_{IJ})$ associée au tenseur asymptotique de $V_{n-1}$, d'être de rang 1, ce qui, dans le formalisme de É. Cartan et relativement au repère principal envisagé, se traduit par

$$\omega_1{}^n = \varphi_{11}\omega^1, \qquad \omega_\Theta{}^n = 0. \tag{1}$$

2. Courbure riemannienne induite par $V_n$ sur $V_{n-1}$. — Différentions extérieurement la seconde équation du système (1)

$$\omega_\Theta{}^1 \wedge \omega_1{}^n + \Omega_\Theta{}^n = 0.$$

Cette condition est une équation quadratique par rapport aux formes $\omega^I$; ses coefficients s'expriment à l'aide des composantes du tenseur de Riemann-Christoffel de $V_n$, des composantes du tenseur asymptotique de $V_{n-1}$ et des coefficients de rotation de Ricci relatifs à un déplacement infinitésimal du repère principal dans l'espace vectoriel $T_n(x)$, ce qui permet de l'écrire

$$\gamma_\Theta{}^1{}_K \varphi_{11}\omega^K \wedge \omega^1 + \frac{1}{2} R_\Theta{}^n{}_{;KI}\,\omega^K \wedge \omega^I = 0.$$

En vertu de l'indépendance des formes $\omega^I$, elle est équivalente à

$$\gamma_\Theta{}^1{}_\Psi \varphi_{11} + R_\Theta{}^n{}_{,\Psi 1} = 0, \qquad R_\Theta{}^n{}_{,\Psi\Phi} = 0.$$

Si la première de ces équations n'est pas identiquement vérifiée, elle permet de calculer, au plus, une valeur de $\varphi_{11}$. Cette unicité n'est pas contraire à nos hypothèses, car nous ne pouvons affirmer que les variétés isométriques à $V_{n-1}$ admettent $\vec{e}_1(x)$ comme direction principale à courbure eulérienne nulle. S'il y a persistance des directions principales, les équations précédentes impliquent

$$\gamma_{\Theta}{}^{1}{}_{\Psi}=0, \qquad R_{\Theta}{}^{n}{}_{,\Psi 1}=0.$$

De plus, dans l'hypothèse où $V_n$ est à courbure constante, la matrice de courbure $(R_0{}^{n}{}_{,\Psi 1})$ est nulle ; par suite, dans le cas d'une variété non totalement géodésique,

$$\gamma_{\Theta}{}^{1}{}_{\Psi}=0.$$

En général, les matrices $(\varphi_{\Theta}{}^{1}{}_{\Psi})$, $R_{\Theta}{}^{n}{}_{,\Psi 1})$ sont seulement proportionnelles.

Quel que soit le cas envisagé, *les conditions imposées aux formes de courbure montrent suffisamment le caractère exceptionnel des espaces de Riemann* $V_n$ *contenant une sous-variété* $V_{n-1}$ *localement déformable, tangente en un point* $x$ *à un sous-espace* $T_{n-1}(x)$ *arbitrairement choisi dans* $T_n(x)$.

3. Espaces de Riemann contenant des variétés développables avec persistance des directions principales. — Nous nous proposons d'apporter maintenant quelques précisions sur la structure de variété riemannienne des espaces $V_n$ contenant des $V_{n-1}$ pour lesquelles la matrice $(\gamma_{\Theta}{}^{1}{}_{\Psi})$ est de rang o. Alors

$$\omega_{\Theta}{}^{1}=\gamma_{\Theta}{}^{1}{}_{1}\omega^{1}. \tag{2}$$

Formons les équations de Gauss déduites de la différentiation extérieure de cette équation et de l'indépendance des formes $\omega^1$, $\omega^{\Theta}$. Soit $\partial_{\Theta}$ l'opérateur de dérivation pfaffienne par rapport à $\omega^{\Theta}$ ; ces équations s'écrivent

$$\begin{cases} R_{\Theta}{}^{1}{}_{,\Psi 1}=\partial_{\Psi}\gamma_{\Theta}{}^{1}{}_{1}-\gamma_{\Theta}{}^{\Phi}{}_{\Psi}\gamma_{\Phi}{}^{1}{}_{1}+\gamma_{\Theta}{}^{1}{}_{1}\gamma_{\Psi}{}^{1}{}_{1}, \\ R_{\Theta}{}^{1}{}_{,\Phi\Psi}=0. \end{cases} \tag{3}$$

Considérées comme équations aux dérivées partielles du premier ordre par rapport aux $\gamma_{\Theta}{}^{1}{}_{1}$, les premières équations de ce système admettent une condition de compatibilité qui, compte tenu des identités de Bianchi relatives à $V_{n-1}$, se réduit à

$$(\gamma_{\Psi}{}^{\Xi}{}_{\Phi}-\gamma_{\Phi}{}^{\Xi}{}_{\Psi})\gamma_{\Theta}{}^{\Sigma}{}_{\Xi}\gamma_{\Sigma}{}^{1}{}_{1}=0. \tag{4}$$

Il nous reste encore à étudier les équations de Codazzi obtenues par différentiation extérieure de $\omega_1{}^{n}=\varphi_{11}\omega^1$. Celles-ci comportent une condition portant sur le tenseur de Riemann-Christoffel de $V_n$

$$R_{1}{}^{n}{}_{,\Theta\Psi}=0.$$

et $n-2$ équations qui sont résumées par

$$\partial_{\Theta}\varphi_{11}-\varphi_{\Theta}{}^{1}{}_{1}\varphi_{11}+R_{1}{}^{n}{}_{,1\Theta}=0. \tag{5}$$

Elles nous permettent d'abord une remarque : Si $R_1{}^{n}{}_{,1\Theta}$ n'est pas identiquement nul, elles ne sont pas homogènes par rapport à $\varphi_{11}$ et, de ce fait, n'admettent pas de solution nulle : *Dans une famille de variétés développables isométriques et tangentes en un point $x$, il n'existe pas, en général, de variété géodésique en $x$.* Si $R_1{}^n{}_{,1\Theta}$ est nul, la direction $\vec{e}_n(x)$ est une direction principale de Ricci pour $V_n$, ce qui permet d'énoncer un résultat voisin d'un théorème classique [15].

*Pour qu'une famille de variétés développables $V_{n-1}$ isométriques et tangentes en un point $x$ contienne une variété géodésique en $x$ pour le plongement dans $V_n$, il faut et il suffit que la normale commune en $x$ à ces $V_{n-1}$ soit direction principale de Ricci de l'espace de Riemann $V_n$.*

Compte tenu des conditions antérieures et, en particulier, de (3), la condition de compatibilité de (5) s'écrit

$$\delta_\Psi R_1{}^n{}_{,1\Theta} - \delta_\Theta R_1{}^n{}_{,1\Psi} + (\gamma_\Psi{}^\Phi{}_\Theta - \gamma_\Theta{}^\Phi{}_\Psi) R_1{}^n{}_{,1\Phi} - \gamma_\Theta{}^1{}_1 R_1{}^n{}_{,1\Psi} + \gamma_\Psi{}^1{}_1 R_1{}^n{}_{,1\Theta} = 0.$$

Les diverses conditions obtenues ne permettent pas le calcul de $\varphi_{11}$ par des procédés algébriques, par suite les $V_{n-1}$ envisagées sont développables avec persistance, en chaque point $x$, de la direction principale $\vec{e}_1(x)$.

Résumons les conditions imposées à $V_n$ et, pour en donner une expression plus simple, considérons les formes de courbure de $V_n$ et désignons par $[\Omega]_{V_{n-1}}$ la restriction à $V_{n-1}$ d'une forme quelconque $\Omega$ de degré $p(0 \leqq p \leqq n)$ définie sur $V_n$. Ces conditions s'écrivent

$$[\Omega_\Theta{}^n]_{V_{n-1}} = 0, \qquad [d\Omega_1{}^n]_{V_{n-1}} = 0,$$

de sorte que nous avons démontré le théorème : *Pour qu'un espace de Riemann $V_n$ contienne une famille de variétés développables, isométriques, ayant en un point $x$ les mêmes directions principales, il est nécessaire que la restriction à $V_{n-1}$ des formes $\Omega_\Theta{}^n$, $d\Omega_1{}^n$ définies sur $V_n$ s'annule en $x$.*

4. Variétés localement développables avec persistance des directions principales. — Les conditions obtenues nous permettent encore quelques remarques sur la structure de $V_{n-1}$. Considérons un point $x \in V_{n-1}$ ; d'après (2), l'équation $\omega^1 = 0$ est complètement intégrable : elle définit, en $x$ et dans un voisinage suffisamment petit de $x$, une variété $V_{n-2}(x)$ contenue dans $V_{n-1}$.

D'autre part, le système $\omega^\Theta = 0$ est, lui aussi, complètement intégrable, car les différentielles extérieures des $\omega^\Theta$ appartiennent à l'anneau des $\omega^\Theta$ [9], comme le montre la formule

$$d\omega^\Theta = \omega^\Psi \wedge \omega_\Psi{}^\Theta,$$

formule qui résulte aussi de (2) et des symétries des coefficients de rotation de Ricci. Les équations $\omega^\Theta = 0$ admettent un système de $n-2$ intégrales premières indépendantes qui constitue une carte locale sur $V_{n-2}(x)$. De plus, pour son plongement dans $V_n$, cette $V_{n-2}(x)$ a toutes ses courbures eulériennes nulles d'après (1) et (2) : elle est donc géodésique en $x$ à la fois dans $V_{n-1}$ et dans $V_n$; ceci démontre que :

*Si une variété $V_{n-1}$ plongée dans un espace de Riemann $V_n$ est localement développable avec persistance, en chaque point, des directions principales relatives à ce plongement, il existe en chaque point $x \in V_{n-1}$ une variété $V_{n-2}(x)$ qui est totalement géodésique à la fois dans $V_{n-1}$ et dans $V_n$.*

La condition (4) a des conséquences très restrictives sur la métrique de $V_{n-1}$. En effet on a

$$\omega^1 = F\, du^1,$$

F pouvant, *a priori*, dépendre des $n-1$ coordonnées locales de $V_{n-1}$, tandis que les $\omega^\Theta$ sont $n-2$ formes de Pfaff indépendantes, à coefficients indépendants de $u^1$. La condition (4) prend la forme

$$\gamma_\Theta{}^\Psi{}_\Xi \delta_\Psi F\, d\omega^\Xi = 0.$$

Elle nous conduit à subdiviser l'ensemble d'indices $\{2, \ldots, n-1\}$ en deux ensembles complémentaires

$$\overline{A} = \{2, \ldots, p\}, \qquad A^\star = \{p+1, \ldots, n-1\},$$

tels que chacun des deux systèmes $\omega^{\overline{\Theta}} = 0$, $\omega^{\Theta^\star} = 0$ $(\overline{\Theta} \in \overline{A}, \Theta^\star \in A^\star)$ soit complètement intégrable et que la variété $V_{p-1}(x)$ définie par $\omega^{\Theta^\star} = 0$ ait la dimension maxima compatible avec une structure de variété localement euclidienne contenue dans $V_{n-1}$. Désignons par $u^{\Theta}$, $u^{\Theta^\star}$ un système de $n-2$ intégrales premières indépendantes des $\omega^{\overline{\Theta}}$, $\omega^{\Theta^\star}$ : il est possible de choisir les $u^{\overline{\Theta}}$ de manière que tout $\gamma_\Theta{}^\Psi{}_\Phi$ ayant un indice dans $\overline{A}$ soit nul; alors il n'y a aucune restriction sur la manière dont F dépend des $u^{\Theta}$. Au contraire, la variété $V_{n-p-1}(x)$, définie par $\omega^{\overline{\Theta}} = 0$, n'étant pas localement euclidienne, la condition envisagée exprime que F est indépendant des $u^{\Theta^\star}$.

Les conditions (3) déterminent les valeurs du tenseur de Riemann-Christoffel de $V_{n-1}$ en fonction de F, sans apporter de nouvelles restrictions et nous obtenons le théorème : *Pour qu'une forme quadratique puisse être prise pour métrique d'une variété $V_{n-1}$ localement développable avec persistance des directions principales pour son plongement dans un espace de Riemann $V_n$, il faut et il suffit qu'elle puisse être écrite*

$$ds^2 = (F\, du^1)^2 + \delta_{\overline{\Theta}\,\overline{\Psi}}\, du^{\overline{\Theta}}\, du^{\overline{\Psi}} + \delta_{\Theta^\star\Psi^\star}\omega^{\Theta^\star}\omega^{\Psi^\star},$$

*F étant une fonction arbitraire des $u^1$, $u^{\overline{\Theta}}$, les $\delta_{\Theta\Psi}$ des symboles de Kronecker et les $\omega^{\Theta^\star}$ des formes de Pfaff constituant un système complètement intégrable à coefficients indépendants des $u^1$, $u^{\overline{\Theta}}$.*

Ces résultats recevront une application très simple au chapitre III, où nous étudierons les variétés plongées dans un espace $V_n$ à courbure constante non nulle, car, du fait de la libre mobilité autour d'un point de $V_n$, les $V_{n-1}$ développables peuvent toujours être considérées comme ayant en chaque point les mêmes directions principales.

5. Définition des variétés localement déformables. — Il est un autre cas où le théorème de Beez-Thomas ne fournit aucun renseignement sur la rigidité intrinsèque d'une $V_{n-1}$ plongée dans un espace de Riemann $V_n$ : c'est celui où la $V_{n-1}$ admet deux courbures eulériennes principales non nulles pour le plongement envisagé dans $V_n$.

Par *définition*, nous dirons qu'une $V_{n-1}$ plongée dans un espace de Riemann $V_n$ est *déformable* si :

*a.* $n-3$ des courbures eulériennes principales de cette $V_{n-1}$ sont nulles en tout point $x \in V_{n-1}$ ;

*b.* les valeurs possibles des deux courbures principales non nulles ne sont pas déterminées, en nombre fini, par la donnée des métriques de $V_{n-1}$ et $V_n$ en $x$.

Remarquons qu'alors les directions principales à courbure normale non nulle ne sont pas non plus déterminées univoquement par ces mêmes données.

Nous supposerons encore que $V_{n-1}$ et $V_n$ sont deux variétés différentiables douées de métriques régulières dans des voisinages d'un point de $V_{n-1}$, mais il suffira dans le reste de ce chapitre, de les supposer de classe $C^3$.

En chaque point $x$ d'un tel voisinage, attachons à $V_{n-1}$ un repère orthonormé dont les $n-1$ premiers vecteurs appartiennent à l'espace vectoriel $T_{n-1}(x)$ tangent en ce point $x$ à $V_{n-1}$. Dans le reste de ce paragraphe et dans toutes les questions se rapportant aux variétés localement déformables, il sera commode d'employer trois sortes d'indices :

— des indices latins majuscules, éléments de l'ensemble $\{1, \ldots, n-1\}$,

— des indices latins minuscules pouvant prendre les valeurs 1 et 2,

— des indices grecs minuscules, éléments de l'ensemble $\{3, \ldots, n-1\}$.

La déformabilité locale de $V_{n-1}$ dans $V_n$ implique le fait que le tenseur asymptotique $\varphi_{IJ}$ de $V_{n-1}$ est de rang 2. Il existe donc un espace vectoriel réel $T_2(x)$, de dimension 2, contenu dans $T_{n-1}(x)$ et tel que $\varphi_{IJ}$ soit un élément de $T_2(x) \otimes T_2(x)$. Cet espace vectoriel $T_2(x)$ est défini, sans ambiguïté, en chaque point $x \in V_{n-1}$, par la donnée des métriques de $V_{n-1}$ et de $V_n$, car tout vecteur de composantes $K_{IJ,IIL} X^J Y^{II} Z^L$ est un élément quelconque de $T_2(x)$. Prenons comme vecteurs $\vec{e}_i(x)$ du repère attaché à $x$ deux éléments de $T_2(x)$. Par rapport à ce repère, dans le formalisme de É. Cartan, la connexion de variété localement déformable, induite sur $V_{n-1}$ par son plongement dans $V_n$, implique

$$\omega_i^n = \varphi_{ik}\omega^k, \qquad \omega_0^n = 0. \tag{6}$$

6. Une propriété des variétés localement déformables. — Différentions extérieurement la seconde équation de ce système (6)

$$\omega_0{}^i \wedge \omega_i{}^n - \Omega_0{}^n = 0.$$

Par analogie avec le cas des $V_{n-1}$ localement développables, nous écrivons cette condition

$$\gamma_0{}^i{}_{\mathrm{H}} \varphi_{ik} \omega^{\mathrm{H}} \wedge \omega^k + \frac{1}{2} R_0{}^n{}_{,\mathrm{HK}} \omega^{\mathrm{H}} \wedge \omega^{\mathrm{K}} = 0,$$

ce qui, en raison de l'indépendance des formes $\omega^{\mathrm{I}}$ est équivalent à

$$(7) \quad \begin{cases} \gamma_0{}^i{}_h \varphi_{ik} - \gamma_0{}^i{}_k \varphi_{ih} + R_0{}^n{}_{,hk} = 0, \\ \gamma_0{}^i{}_\psi \varphi_{ik} + R_0{}^n{}_{,\psi k} = 0, \\ R_0{}^n{}_{,\psi\varphi} = 0. \end{cases}$$

Étudions rapidement la seconde de ces équations; elle s'écrit, après développement partiel,

$$(7') \quad \begin{cases} \gamma_0{}^1{}_\psi \varphi_{11} + \gamma_0{}^2{}_\psi \varphi_{21} = R_0{}^n{}_{,1\psi}, \\ \gamma_0{}^1{}_\psi \varphi_{21} + \gamma_0{}^2{}_\psi \varphi_{22} = R_0{}^n{}_{,2\psi}, \end{cases}$$

ce système est constitué par un nombre pair d'équations linéaires, indépendantes, aux inconnues $\varphi_{11}$, $\varphi_{12}$, $\varphi_{22}$. Ces inconnues vérifient, en outre, l'équation de Gauss

$$\varphi_{11}\varphi_{22} - \varphi_{12}\varphi_{21} = K_{12,12}.$$

Trois cas peuvent se présenter :

1° Le système (7′) comporte plus de deux équations indépendantes : il est incompatible;

2° Le système (7′) comporte deux équations indépendantes : ce cas réserve deux possibilités :

— s'il y a un couple de $\gamma_0{}^1{}_\psi$, $\gamma_0{}^2{}_\psi$ non nuls, les équations (7′) et l'équation de Gauss déterminent deux systèmes de valeurs des $\varphi_{ik}$;

— si un seul des $\gamma_0{}^i{}_\psi$ n'est pas nul les équations (7′) et l'équation de Gauss déterminent un seul système des valeurs des $\varphi_{ik}$;

— dans les deux hypothèses, il y a rigidité locale des $V_{n-1}$;

3° Le système (7′) est identiquement nul; il y a possibilité de déformation locale, mais alors

$$(8) \quad \gamma_0{}^i{}_\psi = 0, \qquad R_0{}^n{}_{,\psi k} = 0.$$

Remarquons que la première des conditions (7) peut se réduire à *une seule* équation, ce qui n'implique pas la nullité des $\gamma_0{}^i{}_k$ et des $R_0{}^n{}_{,hk}$; quoi qu'il en soit, les conditions $R_0{}^n{}_{,\psi k} = 0$, $R_0{}^n{}_{,\psi\varphi} = 0$ imposées au tenseur de Riemann-Christoffel de $V_n$ suffisent pour montrer que *les espaces de Riemann* $V_n$ *contenant une sous-*

*variété* $V_{n-1}$ *localement déformable et tangente en un point* $x$ *à un sous-espace réel donné de* $T_n(x)$ *sont exceptionnels.*

Par suite de la nullité de tous les $\gamma_0{}^i{}_\psi$, on a

$$\omega_0{}^i = \gamma_0{}^i{}_k \omega^k. \tag{9}$$

et le système de Pfaff $\omega^i = 0$ est complètement intégrable. Soit $V_{n-3}(x)$ la variété intégrale, de dimension $n-3$, passant par un point $x \in V_{n-1}$. Cette variété est contenue dans $V_{n-1}$ et, d'après les relations (6) et (9), elle est géodésique en $x$, aussi bien pour son plongement dans $V_n$ que pour son plongement dans $V_{n-1}$, et ceci est une propriété importante par les conséquences à la fois locales et globales qu'elle entraîne sur $V_{n-1}$. Cette propriété a lieu en tout point de $V_{n-3}(x)$ et nous énoncerons : *Si une variété* $V_{n-1}$ *plongée dans un espace de Riemann* $V_n$ *est localement déformable pour la métrique induite par ce plongement, il existe en chaque point* $x \in V_{n-1}$ *une variété* $V_{n-3}(x)$ *de dimension* $n-3$ *qui est totalement géodésique à la fois dans* $V_{n-1}$ *et dans* $V_n$.

Nous ne poursuivrons pas l'étude des $V_{n-1}$ localement déformables dans un espace de Riemann $V_n$ quelconque, car elle nous entraînerait à des calculs pénibles, mais nous examinerons successivement les cas des $V_n$ localement euclidiens et des $V_n$ à courbure constante : dans chacun de ces cas, des simplifications importantes s'introduisent et des résultats précis peuvent être obtenus.

## CHAPITRE I.

### SUR LES VARIÉTÉS DÉFORMABLES DANS UN ESPACE LOCALEMENT EUCLIDIEN.

L'étude des $V_{n-1}$ localement déformables dans un espace de Riemann $V_n$, esquissée au paragraphe C du chapitre préliminaire, se simplifie beaucoup si $V_n$ est localement euclidien. Le cas le plus simple est celui des variétés développables [6], [35] qui, actuellement, se trouvent être des variétés localement euclidiennes, ce qui constitue un résultat entièrement satisfaisant du point de vue local.

Après une première classification due à Sbrana [34], les variétés déformables dans l'espace euclidien ordinaire ont fait l'objet de travaux de É. Cartan [5] et E. Bompiani [3] et sont :

*a.* Soit des variétés ayant le même mode de déformation que les surfaces d'un espace, euclidien ou à courbure constante positive, à trois dimensions; par rapport à des axes cartésiens rectangulaires fixes, l'équation de ces variétés peut être mise sous l'une des formes

$$f(x^1, x^2, x^3) = 0, \qquad f(x^1, x^2, x^3, x^4) = 0,$$

cette dernière étant homogène;

*b*. Soit des variétés dont la déformation dépend d'une seule fonction arbitraire d'un argument et qui sont des lieux de variétés planes à n — 2 dimensions;

*c*. Soit, enfin, des variétés dont la déformation ne dépend que d'un paramètre; ce sont des enveloppes d'hyperplans à deux paramètres dont les coordonnées tangentielles satisfont à des conditions qui généralisent celles auxquelles sont soumis les éléments de la représentation sphérique des réseaux conjugués persistants dans la déformation des surfaces de l'espace euclidien ordinaire.

Il reste à traiter le problème suivant : caractériser les formes quadratiques susceptibles d'être prises pour métriques des variétés $V_{n-1}$ localement déformables pour leur plongement dans un espace de Riemann $V_n$ localement euclidien; c'est ce problème, analogue à celui que s'est posé T. Y. Thomas pour les variétés intrinsèquement rigides [36], que nous allons envisager dans les chapitres I et II, en nous limitant, pour simplifier l'écriture, à la recherche de métriques définies positives, le passage à des métriques de type quelconque se faisant d'ailleurs sans difficulté, dans toute question de portée purement locale. Le chapitre I sera réservé aux variétés des catégories *a* et *b*, que nous supposerons respectivement de classe de différentiation $C^3$ et $C^4$, au moins.

## A. — Définition et réductibilité locale des variétés régulièrement déformables.

1. Classification des variétés localement déformables. — Soit $V_{n-1}$ une variété localement déformable pour son plongement dans un espace de Riemann $V_n$ localement euclidien : les conditions (7) et (8) se réduisent à

$$(\mathrm{I}.1)\qquad \begin{cases} \gamma_\theta{}^i{}_\psi = 0, \\ \gamma_\theta{}^i{}_h \varphi_{ik} - \gamma_\theta{}^i{}_k \varphi_{ih} = 0. \end{cases}$$

Le cas le plus simple sera, d'une manière évidente, celui où toutes les équations résumées par la seconde condition (I.1) sont identiquement satisfaites, c'est-à-dire celui où tous les $\gamma_\theta{}^i{}_h$ sont identiquement nuls, sauf, peut-être, les $\gamma_\theta{}^1{}_1$ et $\gamma_\psi{}^2{}_2$ qui ont les mêmes valeurs pour $\theta = \psi$, de sorte que

$$(\mathrm{I}.2)\qquad \omega_\theta{}^i = \gamma_\theta{}^1{}_1 \omega^i.$$

Nous proposons d'appeler *variétés régulièrement déformables* les variétés pour lesquelles la condition (I.2) est satisfaite; cette dénomination sera justifiée par le fait que les variétés auxquelles elle s'applique ont le même mode de déformation que les surfaces plongées dans un espace localement euclidien ou à courbure constante, à trois dimensions, ainsi que nous le montrerons dans la suite de ce paragraphe.

Mais, comme nous l'avons déjè remarqué, il peut arriver que la seconde des conditions (I.1) se réduise à une seule équation [5] dont l'interprétation est simple dans le cas actuellement envisagé d'un espace $V_n$ localement euclidien : cette équation exprime en effet que les deux directions, déterminées dans l'espace vectoriel $T_2(x)$ par la relation

$$\gamma_0{}^2{}_1\,\omega^1\omega^1 + (\gamma_0{}^2{}_2 - \gamma_0{}^1{}_1)\,\omega^1\omega^2 - \gamma_0{}^1{}_2\,\omega^2\omega^2 = 0,$$

sont conjuguées au sens de Dupin. Ces deux directions sont déterminées par la métrique de $V_{n-1}$ : elles resteront conjuguées au cours de la déformation de cette variété, mais elles peuvent être distinctes ou confondues; nous serons ainsi amenés à envisager séparément ces deux cas qui conduisent à des résultats entièrement différents.

En définitive, nous avons obtenu une première classification : les variétés $V_{n-1}$ déformables dans un espace $V_n$ localement euclidien sont :

*a.* soit des variétés régulièrement déformables;

*b.* soit des variétés déformables avec persistance d'une direction asymptotique;

*c.* soit des variétés déformables avec persistance de directions conjuguées distinctes.

Cette classification coïncide avec celle de É. Cartan. Nous étudierons les cas *a* et *b* dans le chapitre actuel, réservant le cas *c* pour le chapitre II.

2. Connexion riemannienne des variétés régulièrement déformables. — Nous considérons donc les variétés $V_{n-1}$ régulièrement déformables pour leur plongement dans un espace $V_n$ localement euclidien. Les équations de structure relatives aux formes $\omega^0$, $\omega_0{}^\psi$ qui s'écrivent, en général,

$$d\omega^0 = \omega^{\mathrm{I}} \wedge \omega_{\mathrm{I}}{}^0,$$
$$d\omega_0{}^\psi = \omega_0{}^{\mathrm{I}} \wedge \omega_{\mathrm{I}}{}^\psi + \omega_0{}^n \wedge \omega_n{}^\psi,$$

se réduisent, dans le cas actuel, d'après (6) et (I.2) d'une part, d'après les symétries des coefficients de rotation de Ricci d'autre part, à

$$\text{(I.3)} \qquad \begin{cases} d\omega^0 = \omega^\varphi \wedge \omega_\varphi{}^0, \\ d\omega_0{}^\psi = \omega_0{}^\varphi \wedge \omega_\varphi{}^\psi. \end{cases}$$

Les seconds membres de ces équations appartiennent à l'anneau des formes $\omega^0$, $\omega_0{}^\psi$. Les équations $\omega^0 = 0$, $\omega_0{}^\psi = 0$ constituent donc un système de Pfaff complètement intégrable. Considérons l'espace $V_{n-3}(x)$ de ces formes en un point $x$ de $V_{n-1}$ : c'est, d'après (I.3), une variété à courbure riemannienne nulle, c'est-à-dire une variété localement euclidienne à n — 3 dimensions. On pourra donc, dans un voisinage suffisamment petit de chaque point $x$ dans $V_{n-1}$, choisir un système de coordonnées locales telles que la métrique induite sur $V_{n-3}(x)$ soit

$$d_\sigma{}^2 = \delta_{0\psi}\, dx^0\, dx^\psi,$$

$\delta_{0\psi}$ étant le symbole de Kronecker. Pour cela, il suffira que les $x^0$ constituent un système de coordonnées normales de Riemann d'origine $x$, pour $V_{n-3}(x)$, dans un voisinage du point $x$. Alors tous les $\omega_0{}^\psi$ sont nuls, puisque la métrique $d\sigma^2$ est euclidienne.

$$\omega_0{}^\psi = 0. \tag{I.4}$$

Reprenons les équations (I.2) et différentions-les extérieurement. Cela donne, en général,

$$\omega_0{}^J \wedge \omega_J{}^i + \omega_0{}^n \wedge \omega_n{}^i = (d\gamma_0{}^1{}_1) \wedge \omega^i + \gamma_0{}^1{}_1 \omega^J \wedge \omega_J{}^i,$$

ce qui, d'après (6), (I.2) et (I.4), se réduit à

$$\gamma_k{}^i{}_J \omega^k \wedge \omega^J = (d \log \gamma_0{}^1{}_1) \wedge \omega^i + \gamma_k{}^i{}_J \omega^k \wedge \omega^J + \gamma_\psi{}^1{}_1 \, dx^\psi \wedge \omega^i.$$

Simplifions

$$(d \log \gamma_0{}^1{}_1 + \gamma_\psi{}^1{}_1 \, dx^\psi) \wedge \omega^i = 0.$$

En raison de l'indépendance des formes $\omega^i$, $dx^0$, cette relation est équivalente à

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_k \log \gamma_0{}^1{}_1 = 0, \\ \partial_\psi \log \gamma_0{}^1{}_1 + \gamma_\psi{}^1{}_1 = 0, \end{array} \right. \tag{I.4}$$

$\partial_I$ étant le symbole de dérivation pfaffienne.

Ce système (I.4) est compatible et sa solution générale est

$$\gamma_0{}^1{}_1 = \frac{C_0}{C_\psi x^\psi + H}, \tag{I.5}$$

les $C_0$ et H étant $n - 2$ constantes.

Nous devons distinguer deux cas, suivant que tous les $\gamma_\lambda{}^1{}_1$ sont nuls ou non.

3. Première famille de variétés régulièrement déformables. — Supposons d'abord tous les $\gamma_0{}^1{}_1$ nuls. Alors les $\omega_0{}^i$ sont nuls et les seules formes de Pfaff qui nous restent à étudier sont les $\omega^i$, $\omega_i{}^k$ et $\omega_i{}^n$. Les équations de structure relatives à ces formes se réduisent à

$$\begin{aligned} d\omega^i &= \omega^j \wedge \omega_j{}^i, \\ d\omega_i{}^k &= \omega_i{}^j \wedge \omega_j{}^k + \omega_i{}^n \wedge \omega_n{}^k, \\ d\omega_i{}^n &= \omega_i{}^j \wedge \omega_j{}^n. \end{aligned}$$

Le système $\omega^i = 0$ est complètement intégrable et indépendant des $x^0$, ce qui montre la réductibilité locale de toute $V_{n-1}$ appartenant à cette famille.

Les équations précédentes sont, précisément, celles qui sont vérifiées par une surface plongée localement dans un espace euclidien à trois dimensions; ceci permet d'affirmer que, étant données deux formes de Pfaff indépendantes, $\omega^1$ et $\omega^2$, s'exprimant à l'aide de deux paramètres et de leurs différentielles, il est possible de calculer des formes $\omega_i^n$ à coefficients $\varphi_{ik}$ dont les dérivées prennent, pour des valeurs données des paramètres, des valeurs arbitrairement choisies. Ce résultat s'obtient par application du théorème de Cauchy-Kowalewska et prouve l'existence et la déformabilité des $V_{n-1}$ envisagées; il nous permet d'énoncer le théorème suivant, évidemment trivial :

*Il existe une famille de variétés riemanniennes* $V_{n-1}$ *à* $n-1$ *dimensions, localement déformables pour leur plongement dans un espace de Riemann* $V_n$ *localement euclidien à* $n$ *dimensions; cette famille est constituée par les variétés réductibles dont la métrique se décompose en la somme d'une métrique localement euclidienne à* $n-3$ *dimensions et d'une métrique quelconque à deux dimensions.*

4. Réductibilité de toutes les variétés régulièrement déformables. — Supposons que les $C_0$ ne sont pas tous nuls : ce sont alors, en repère orthonormé quelconque, des constantes définies à un facteur près sur une $V_{n-1}$ de $ds^2$ donné. Il est possible de choisir, dans le groupe orthogonal, une transformation après laquelle, relativement au nouveau repère attaché à chaque point de $V_{n-1}$, tous les $\gamma_0{}^1{}_1$ sont nuls, à l'exception d'un seul. Cette transformation se traduit par une rotation laissant fixes les vecteurs $\vec{e}_1(x)$, $\vec{e}_2(x)$ et $\vec{e}_n(x)$, suivie, éventuellement, d'une translation destinée à faire disparaître H. Elle permettra de simplifier l'écriture et l'énoncé des résultats que nous avons en vue, sans en diminuer la généralité.

Soit $(A_0{}^{\bar\psi})$ la matrice de cette transformation et $(A_{\bar 0}{}^{\psi})$ la matrice inverse. Comme valeurs des $A_0{}^{\bar\psi}$ et $A_{\bar 0}{}^{\psi}$, on peut prendre des constantes et, en particulier,

$$A_0{}^{\bar 3} = C_0.$$

Dans un tel changement de repère, on a

$$x^{\bar 3} = C_0 x^0 + H$$

et les $\gamma_0{}^1{}_1$ se comportent comme les composantes d'un vecteur

$$\gamma_{\bar 0}{}^{\bar 1}{}_{\bar 1} = A_{\bar 0}{}^{\psi} \gamma_{\psi}{}^1{}_1,$$

c'est-à-dire, d'après la valeur (I.5) de $\gamma_\psi{}^1{}_1$

$$\gamma_{\bar 0}{}^{\bar 1}{}_{\bar 1} = \frac{A_{\bar 0}{}^{\psi} A_{\psi}{}^{\bar 3}}{x^{\bar 3}},$$

soit encore, les matrices $(A_{\bar 0}{}^{\psi})$, $(A_0{}^{\bar\psi})$ étant inverses l'une de l'autre,

$$\gamma_{\bar 0}{}^{\bar 1}{}_{\bar 1} = \frac{\delta_{\bar 0}^{\bar 3}}{x^{\bar 3}},$$

de sorte que, dans le nouveau système de coordonnées locales, toutes les $\gamma_{\bar 0}{}^1{}_{\bar 1}$ sont nuls pour $\bar{\theta} > \bar{3}$, tandis que

$$\gamma_{\bar{3}}{}^{\bar{1}}{}_{\bar{1}} = \frac{1}{x^{\bar{3}}}.$$

Pour simplifier l'écriture, nous pouvons supposer que le repère initialement choisi était précisément celui où les $\gamma_0{}^1{}_1$ ont ces valeurs et, ainsi, nous ne surlignerons pas les indices. Avec ces conventions, le système (I.2) est à remplacer par

$$\text{(I.6)} \qquad \omega_3{}^i = \frac{\omega^i}{x^3}, \qquad \omega_0{}^i = 0 \qquad \text{pour} \quad \theta > 3.$$

Il nous reste encore à étudier les formes $\omega^i$, $\omega_k{}^i$ et $\omega_i{}^n$. Écrivons les équations de structure relatives à ces formes. Pour $\omega^i$, nous avons en général

$$d\omega^i = \omega^J \wedge \omega_J{}^i,$$

ce qui se réduit, d'après (I.6), à

$$d\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k{}^i + \frac{1}{x^3}\, dx^3 \wedge \omega^i.$$

Formons, de même, les équations de structure relatives aux $\omega_k{}^i$ et $\omega_i{}^n$ et simplifions-les à l'aide du système (I.6). Au total, nous obtenons le système d'équations quadratiques

$$\text{(I.7)} \qquad \begin{cases} d\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k{}^i + \dfrac{1}{x^3}\, dx^3 \wedge \omega^i, \\ d\omega_i{}^k = \omega_i{}^n \wedge \omega_n{}^k - \dfrac{\delta_{ij}}{x^3}\, \omega^j \wedge \omega^k, \\ d\omega_i{}^n = \omega_i{}^k \wedge \omega_k{}^n. \end{cases}$$

Ce système est indépendant des variables $x^4, \ldots, x^{n-1}$ et, en tenant compte du résultat obtenu au nº 3, nous pouvons énoncer : *Toute variété riemannienne* $V_{n-1}$ *de dimension supérieure à* 3, *régulièrement déformable pour son plongement dans un espace* $V_n$ *localement euclidien, est localement réductible.*

5. Seconde famille de variétés régulièrement déformables. — Nous nous proposons maintenant de former le tenseur métrique des $V_{n-1}$ qui vérifient le système (I.7) et de montrer qu'elles sont localement déformables. La première des relations (I.7) exprime que les équations $\omega^i = 0$ constituent un système complètement intégrable, autrement dit, que chacune des formes $\omega^i$ est le produit d'une forme de Pfaff $\overset{*}{\omega}{}^i$ de deux différentielles indépendantes entre elles et indépendantes des $dx^0$, à coefficients indépendants des $x^0$, par une fonction qui peut dépendre, *a priori*, de tous les paramètres constituant une carte locale de $V_{n-1}$. Un calcul simple montre que l'on peut prendre

$$\text{(I.8)} \qquad \omega^i = x^3 \overset{*}{\omega}{}^i.$$

Toujours des premières relations du système (I.7), il résulte que $\omega_1{}^2$ est une forme indépendante des $dx^0$ et que l'on a

$$\omega_1{}^2 = \overset{\star}{\omega}_1{}^2 = \overset{\star}{\gamma}_1{}^2{}_k \overset{\star}{\omega}{}^k,$$

les $\overset{\star}{\gamma}_i{}^j{}_k$ étant les coefficients de rotation de Ricci calculés à l'aide des $\overset{\star}{\omega}{}^i$. Différentions extérieurement les deux membres extrêmes de cette relation, en désignant par $\overset{\star}{\partial}_i$ l'opérateur de dérivation pfaffienne par rapport aux $\overset{\star}{\omega}{}^i$

$$\omega_1{}^3 \wedge \omega_3{}^2 + \omega_1{}^n \wedge \omega_n{}^2 = (\overset{\star}{\partial}_1 \overset{\star}{\gamma}_1{}^2{}_2 - \overset{\star}{\partial}_2 \overset{\star}{\gamma}_1{}^2{}_1 - \overset{\star}{\gamma}_1{}^2{}_1 \overset{\star}{\gamma}_2{}^1{}_1 + \overset{\star}{\gamma}_1{}^2{}_2 \overset{\star}{\gamma}_1{}^2{}_2)\, \overset{\star}{\omega}{}^1 \wedge \overset{\star}{\omega}{}^2,$$

d'où, en remarquant que le second membre n'est autre que la courbure riemannienne de la variété $\overset{\star}{V}_2$ de métrique $(\overset{\star}{\omega}{}^1)^2 + (\overset{\star}{\omega}{}^2)^2$,

$$\varphi_{11}\varphi_{22} - \varphi_{12}\varphi_{21} = \frac{R^{\star}_{12,12} - 1}{(x^3)^2}; \tag{I.9}$$

telle est l'équation de Gauss. Les $\varphi_{ik}$ doivent vérifier, en outre, les équations de Codazzi, c'est-à-dire les dernières équations du système (I.7), équations qui s'écrivent, en les développant, et en désignant par $\nabla$ le symbole de dérivation pfaffienne covariante,

$$\nabla_k \varphi_{ij} \omega^k \wedge \omega^j + \left(\partial_3 \varphi_{ik} + \frac{\varphi_{ik}}{x^3}\right) dx^3 \wedge \omega^k = 0;$$

ces équations sont équivalentes à

$$\nabla_k \varphi_{ij} - \nabla_j \varphi_{ik} = 0,$$
$$\partial_3 \varphi_{ik} + \frac{\varphi_{ik}}{x^3} = 0,$$

d'où il résulte que l'on peut prendre

$$\varphi_{ik} = \frac{\overset{\star}{\varphi}_{ik}}{x^3};$$

les valeurs des $\varphi_{ik}$ ainsi déterminées sont compatibles avec l'équation de Gauss (I.9) et les $\overset{\star}{\varphi}_{ik}$ peuvent être interprétés comme les composantes du tenseur asymptotique de $\overset{\star}{V}_2$ plongée localement dans un espace à trois dimensions, de sorte que nous avons ainsi ramené le problème à la recherche des solutions du système

$$d\overset{\star}{\omega}{}^i = \overset{\star}{\omega}{}^k \wedge \overset{\star}{\omega}_k{}^i,$$
$$d\overset{\star}{\omega}_k{}^i = \overset{\star}{\omega}_k{}^n \wedge \overset{\star}{\omega}_n{}^i + \delta_{kj} \overset{\star}{\omega}{}^i \wedge \overset{\star}{\omega}{}^j,$$
$$d\overset{\star}{\omega}_i{}^n = \overset{\star}{\omega}_i{}^k \wedge \overset{\star}{\omega}_k{}^n.$$

Ce système est celui qui est vérifié par une variété $\overset{\star}{V}_2$ quelconque plongée dans un espace à trois dimensions et à courbure constante égale à $+1$, ce qui permet, comme au n° 3, d'affirmer, par application du théorème de Cauchy-

Kowalewska, pour des formes $\overset{\star}{\omega}{}^i$ quelconques, l'existence de systèmes de valeurs des $\varphi^{\star}_{ik}$ en nombre infini. Ceci prouve l'existence et la déformabilité d'une seconde famille de $V_{n-1}$ régulièrement déformables et nous pouvons énoncer : *Il existe une famille de variétés riemanniennes $V_{n-1}$, à $n-1$ dimensions, régulièrement déformables pour leur plongement dans un espace $V_n$ localement euclidien; cette famille est constituée par les variétés dont la métrique peut être mise sous la forme.*

$$ds^2 = (x^3)^2\left((\overset{\star}{\omega}{}^1)^2 + (\overset{\star}{\omega}{}^2)^2\right) + \delta_{0\psi}\, dx^0\, dx^\psi,$$

*où $\overset{\star}{\omega}{}^1$ et $\overset{\star}{\omega}{}^2$ sont deux formes de Pfaff indépendantes, quelconques, s'exprimant à l'aide de deux paramètres. Pour $n > 4$, les $V_{n-1}$ appartenant à cette famille sont localement réductibles.*

6. Conclusion. — En comparant les hypothèses faites depuis le n° 3, nous constatons que nous avons étudié toutes les $V_{n-1}$ qui peuvent être des variétés régulièrement déformables dans l'espace localement euclidien $V_n$ et nous groupons les résultats obtenus dans le théorème : *Pour qu'une variété $V_{n-1}$ soit régulièrement déformable pour la métrique induite par son plongement dans l'espace localement euclidien $V_n$, il faut et il suffit que sa métrique puisse être ramenée à l'une des deux formes suivantes :*

*a.*
$$ds^2 = \delta_{ik}\,\omega^i\omega^k + \delta_{0\psi}\, dx^0\, dx^\psi,$$

*où $\omega^1$ et $\omega^2$ désignent deux formes de Pfaff quelconques, à deux paramètres indépendants des $x^0$.*

*b.*
$$ds^2 = (x^3)^2\,\delta_{ik}\,\overset{\star}{\omega}{}^i\overset{\star}{\omega}{}^k + \delta_{0\psi}\, dx^0\, dx^\psi,$$

*où $\overset{\star}{\omega}{}^1$ et $\overset{\star}{\omega}{}^2$ sont encore deux formes de Pfaff quelconques, à deux paramètres indépendants des $x^0$.*

## B. — Variétés déformables avec persistance d'une direction asymptotique.

1. Remarques sur les $V_{n-1}$ déformables avec persistance d'une direction asymptotique. — Nous considérons maintenant, parmi les variétés localement déformables pour lesquelles le système (I.1) se réduit à une seule équation, celles pour lesquelles les directions conjuguées persistantes sont confondues, c'est-à-dire les $V_{n-1}$ déformables avec persistance d'une direction asymptotique et nous cherchons la forme générale du tenseur métrique de ces variétés.

Restreignons-nous au cas des variétés à métrique définie positive; les coefficients de rotation de Ricci correspondant à un repère orthonormé quelconque sont réels : l'équation déterminant les directions conjuguées persistantes est à coefficients réels et la direction double qu'elle détermine actuellement est elle-même réelle. Donc, en admettant momentanément l'existence des variétés étudiées, existence qui sera démontrée plus loin, nous pouvons énoncer :

*Dans l'espace euclidien à n dimensions ($n > 3$), toute variété réelle à $n - 1$ dimensions, déformable avec persistance, en chaque point, d'une direction asymptotique, mais n'appartenant pas à une famille régulièrement déformable, est à directions asymptotiques réelles partout.*

Supposons, de plus, que $V_{n-1}$ soit une variété complète pour la métrique induite par son plongement dans l'espace euclidien ordinaire à $n$ dimensions. S. S. Chern et N. H. Kuiper [11] ont démontré qu'une variété compacte plongée dans l'espace euclidien a au moins un point où il n'y a pas de direction asymptotique réelle. Comparant ce théorème avec la remarque précédente, nous en déduisons que :

*Dans l'espace euclidien à n dimensions ($n > 3$), toute variété $V_{n-1}$ complète et déformable avec persistance, en chaque point, d'une direction asymptotique possède un domaine à l'infini.*

Nous démontrerons, au chapitre IV, que cet énoncé n'est qu'un cas particulier d'un théorème sur la structure globale des $V_{n-1}$ plongées dans un espace de Riemann $V_n$ et localement déformables pour ce plongement.

2. Emploi de coordonnées normales de Riemann. — Le repère attaché au point $x \in V_{n-1}$ étant toujours un repère orthonormé, nous supposons que $\vec{e}_2(x)$ est porté par la direction asymptotique persistante. L'équation déterminant cette direction se réduisant alors nécessairement à

$$(\omega^1)^2 = 0,$$

on doit avoir

$$\gamma_0{}^1{}_1 = \gamma_0{}^2{}_2, \qquad \gamma_0{}^1{}_2 = 0, \tag{I.10}$$

de sorte que

$$d\omega^1 = \gamma_K{}^1{}_1 \omega^K \wedge \omega^1;$$

l'équation $\omega^1 = 0$ est complètement intégrable [9] et la variété $V_{n-2}(x)$ à $n - 2$ dimensions qu'elle définit au voisinage du point $x \in V_{n-1}$ est contenue dans $V_{n-1}$

$$V_{n-2}(x) \subset V_{n-1}.$$

Cette variété $V_{n-2}(x)$, considérée comme variété plongée dans $V_n$, a toutes ses courbures eulériennes nulles non seulement en $x$, mais en chacun de ses points : elle est totalement géodésique dans $V_n$, c'est-à-dire localement euclidienne, de sorte que $V_{n-1}$ est engendrée par une famille de variétés localement euclidiennes, à $n - 2$ dimensions dépendant d'un paramètre et réciproquement.

Soit $u^1$ une intégrale première quelconque de $\omega^1$

$$\omega^1 = F\, du^1; \tag{I.11}$$

F est une fonction qui peut dépendre, *a priori*, des $n-1$ paramètres constituant une carte locale sur $V_{n-1}$ ; son expression sera précisée au n° 4 de ce paragraphe.

Considérons, dans un voisinage du point $x$ de $V_{n-1}$, un système de $n-2$ variables $x^2, x^3, \ldots, x^{n-1}$, qui constituent un système de coordonnées normales de Riemann pour la $V_{n-2}(x)$ locale. Les vecteurs $\vec{e}_2(x), \ldots, \vec{e}_{n-1}(x)$ ne sont définis qu'à une rotation près autour du bivecteur $\vec{e}_1(x) \wedge \vec{e}_n(x)$, de sorte que nous pouvons supposer qu'ils constituent le repère adapté à ces coordonnées normales de Riemann pour $V_{n-2}(x)$. Par suite, sur $V_{n-1}$, on a, d'une part

$$(\text{I}.12) \qquad \begin{cases} \omega^2 = dx^2 + \gamma^2{}_1\, du^1, \\ \omega^0 = dx^0 + \gamma^0{}_1\, du^1 \end{cases}$$

et, d'autre part,

$$(\text{I}.13) \qquad \gamma_2{}^0{}_2 = 0, \qquad \gamma_2{}^0{}_\psi = 0, \qquad \gamma_0{}^\psi{}_2 = 0, \qquad \gamma_0{}^\psi{}_\varphi = 0,$$

puisque, dans une telle carte locale, les formes $\omega^2$, $\omega^0$ doivent se réduire à des différentielles exactes sur toute variété locale $V_{n-2}(x)$.

Les conditions (I.10) sont toujours vérifiées, de sorte que l'on a

$$(\text{I}.14) \qquad \omega_0{}^1 = 0, \qquad \omega_0{}^2 = \gamma_0{}^2{}_1\, \omega^1, \qquad \omega_0{}^\psi = \gamma_0{}^\psi{}_1\, \omega^1.$$

Nous avons maintenant introduit deux systèmes de $n-1$ formes différentielles sur $V_{n-1}$ : le premier est constitué par les $du^1$, $dx^2$, $dx^0$, le second par les $\omega^K$. Une question se pose : quelles relations lient les opérateurs de dérivation relatifs à ces deux systèmes ?

Soient $\partial_I$ l'opérateur de dérivation ordinaire, correspondant au premier système, et $\delta_I$ l'opérateur de dérivation pfaffienne correspondant au second. Les différentielles d'une même fonction $\Phi$ de classe $C^s (s \geqq 1)$ doivent être identiques, donc

$$\partial_1 \Phi\, du^1 + \partial_2 \Phi\, du^2 + \partial_0 \Phi\, dx^0 \equiv \delta_1 \Phi \omega^1 + \delta_2 \Phi \omega^2 + \delta_0 \Phi \omega^0 ;$$

de cette relation et des équations (I.11) et (I.12), on déduit que les opérateurs $\partial_I$ et $\delta_I$ sont identiques pour toutes les valeurs de l'indice I, sauf 1, et que

$$(\text{I}.15) \qquad \partial_1 - F \delta_1 = \gamma^2{}_1 \partial_2 + \gamma^0{}_1 \partial_0.$$

3. Forme nécessaire de la métrique. — La différentiation extérieure de la première des équations (I.14) donne

$$\omega_2{}^1 = \gamma_2{}^1{}_1\, \omega^1,$$

résultat déjà obtenu par É. Cartan [5]; nous avons ainsi démontré que tous les $\omega_I{}^K$ sont des formes monômes proportionnelles à $\omega^1$.

D'après les équations (I.10) et (I.13), les équations de structure relatives aux formes $\omega^I$ se résument en

$$d\omega^I = \delta_K{}^I \omega^K \wedge \omega^1.$$

L'identification de ces équations quadratiques avec celles, obtenues par différentiation extérieure de (I.11) et (I.12), donne

$$(\mathrm{I}.16)\qquad \begin{cases} \partial_0 \mathrm{F} = 0, & \partial_2 \log \mathrm{F} = \gamma_2{}^1{}_1, \\ \partial_0 \gamma^2{}_1 = \mathrm{F}\gamma_0{}^2{}_1, & \partial_2 \gamma^2{}_1 = 0, \\ \partial_0 \gamma^\psi{}_1 = \mathrm{F}\gamma_0{}^\psi{}_1, & \partial_2 \gamma^\psi{}_1 = \mathrm{F}\gamma_2{}^\psi{}_1. \end{cases}$$

De la première de ces équations, il résulte que F est une fonction indépendante des $x^0$. D'autre part, la différentiation extérieure des deux dernières équations du système (I.14) donne

$$(\mathrm{I}.17)\qquad \begin{cases} \partial_2 \gamma_0{}^2{}_1 + \gamma_0{}^2{}_1 \gamma_2{}^1{}_1 = 0, & \partial_2(\gamma_0{}^\psi{}_1 \mathrm{F}) = 0, \\ \partial_\psi \gamma_0{}^2{}_1 = 0; & \partial_\varphi(\gamma_0{}^\psi{}_1 \mathrm{F}) = 0. \end{cases}$$

D'après les conditions (I.16) et (I.17), $\gamma^2{}_1$ et les $\gamma^0{}_1$ sont des fonctions linéaires de $x^2$ et de $x^0$ qui peuvent être rendues homogènes par l'introduction d'une variable supplémentaire $x^0$ qui vaudra 1 sur toute la variété $V_{n-1}$. En désignant par $\gamma_0{}^2{}_1$ et $\gamma_0{}^0{}_1$ les coefficients de cette variable d'homogénéité et en convenant que les indices latins majuscules soulignés sont des éléments de l'ensemble $\{0, 2, \ldots, n-1\}$, il résulte donc des équations (I.16) et (I.17) que :

*Pour qu'une variété $V_{n-1}$ à $n-1$ dimensions plongée dans un espace $V_n$, à $n$ dimensions, localement euclidien, soit déformable avec persistance, en chaque point $x$, d'une direction asymptotique $\vec{e}_2(x)$, il est nécessaire que sa métrique puisse être mise sous la forme $ds^2 = \delta_{\mathrm{IK}}\omega^{\mathrm{I}}\omega^{\mathrm{K}}$, avec*

$$(\mathrm{I}.18)\qquad \begin{cases} \omega^1 = \mathrm{F}\, du^1, \\ \omega^2 = dx^2 + \mathrm{F}\gamma_{\underline{\mathrm{K}}}{}^2{}_1 x^{\underline{\mathrm{K}}} du^1, \\ \omega^0 = dx^0 + \mathrm{F}\gamma_{\underline{\mathrm{K}}}{}^0{}_1 x^{\underline{\mathrm{K}}} du^1, \end{cases}$$

*où F est une fonction de $u^1$ et de $x^2$, et les $\gamma_{\underline{\mathrm{K}}}{}^{\mathrm{I}}{}_1$ des fonctions de $u^1$ seul, symétriques gauches par rapport aux indices I et K.*

*Remarque.* — La relation (I.15) liant les opérateurs $\partial_1$ et $\delta_1$ s'explicite

$$(\mathrm{I}.19)\qquad \frac{1}{\mathrm{F}}\partial_1 - \delta_1 = x^{\underline{\mathrm{K}}}(\gamma_{\underline{\mathrm{K}}}{}^2{}_1 \partial_2 + \gamma_{\underline{\mathrm{K}}}{}^0{}_2 \partial_0).$$

4. Conditions nécessaires et suffisantes de déformabilité. — L'expression qui vient d'être obtenue pour la métrique de $V_{n-1}$ est nécessaire, mais non suffisante, car il reste encore à former les équations de structure relatives aux formes $\omega_1{}^2$, $\omega_1{}^n$ et $\omega_2{}^n$ et à exprimer leur compatibilité : ceci va permettre de préciser l'expression générale de la fonction F.

Tirons l'expression de $\gamma_2{}^1{}_1$ du système (I.16). Il vient

$$\omega_2{}^1 = \partial_2 \mathrm{F}\, du^1,$$

tandis que, $\vec{e}_2(x)$ étant une direction asymptotique de $V_{n-1}$ au point $x$,

(I.20) $$\omega_1{}^n = \varphi_{11}\omega^1 + \varphi_{12}\omega^2, \qquad \omega_2{}^n = \varphi_{21}\omega^1.$$

Alors la différentiation extérieure de $\omega_2{}^1$ et $\omega_2{}^n$ montre que $\varphi_{12}$ est indépendant des $x^0$ et lié à F par les relations

$$\varphi_{12}\varphi_{21} = \frac{1}{F}\partial_{22}F, \qquad \partial_2 \log(F^2\varphi_{12}) = 0;$$

$k$ désignant une fonction de la seule variable $u^1$, ces deux équations ont pour conséquence

$$F^3\partial_{22}F = k^2,$$

ce qui entraîne

$$(\partial_2 F)^2 + \left(\frac{F}{k}\right)^2 = h.$$

La métrique étant supposée définie positive, nous avons vu que, pour $n > 3$, la direction $\vec{e}_2(x)$ est nécessairement réelle. Par suite, $h$ est une fonction de $u^1$ strictement positive et un choix convenable du paramètre $u^1$ nous permettra de prendre $h = 1$. Alors la forme générale de F sera, $c$ désignant une nouvelle fonction arbitraire de $u^1$,

(I.21) $$F = ((x^2 - c)^2 + k^2)^{\frac{1}{2}},$$

et $\varphi_{12}$ sera déterminé au signe près

(I.22) $$\varphi_{12} = k/((x^2 - c)^2 + k^2).$$

Nous avons maintenant exprimé toutes les conditions auxquelles doit satisfaire la métrique d'une $V_{n-1}$ déformable avec persistance de la direction asymptotique $\vec{e}_2(x)$, car il ne nous reste à calculer que $\varphi_{11}$ qui, d'après la première équation du système (I.20) vérifie une équation aux dérivées partielles du premier ordre. En effet, différentions extérieurement cette première équation (I.20)

$$0 = d(\varphi_{11}F) \wedge du^1 + \delta_1\varphi_{12}\omega^1 \wedge \omega^2 + \varphi_{12}d\omega^2;$$

compte tenu des expressions de $\omega^1$, $\omega^2$ et F, ceci donne les conditions

$$\partial_2(\varphi_{11}F) = F\delta_1\varphi_{12}, \qquad \partial_0\varphi_{11} + \varphi_{12}\gamma_0{}^2{}_1 = 0,$$

dont la seconde exprime que $\varphi_{11}$ est une fonction linéaire des $x^0$, de sorte que $\varphi^*_{11}$ désignant une fonction de $u_1$ et $x_2$ seulement, on peut écrire

$$\varphi_{11} = \varphi^*_{11} - \varphi_{12}x^{\underline{K}}\gamma_{\underline{K}}{}^2{}_1,$$

et, compte tenu de la relation (I.19) liant les opérateurs $\partial_1$ et $\delta_1$, la condition restante se réduit à

$$\partial_2(\varphi_{11}^{\star}\,\mathrm{F}) = \partial_1 \varphi_{12}.$$

$\varphi_{11}^{\star}$ étant la nouvelle inconnue, l'intégration de cette équation introduit une fonction arbitraire de $u^1$, ce qui prouve la déformabilité des $\mathrm{V}_{n-1}$ envisagées et nous avons ainsi démontré que :

*Pour qu'une variété riemannienne* $\mathrm{V}_{n-1}$ *à* $n-1$ *dimensions plongée dans un espace* $\mathrm{V}_n$ *localement euclidien à n dimensions soit déformable avec persistance, en chacun de ses points x d'une direction asymptotique* $\vec{e}_2(x)$, *il faut et il suffit que sa métrique puisse être mise sous la forme* $ds^2 = \delta_{\mathrm{IK}}\,\omega^{\mathrm{I}}\omega^{\mathrm{K}}$, *avec*

$$\begin{aligned}
\omega^1 &= \mathrm{F}\,du^1,\\
\omega^2 &= dx^2 + \mathrm{F}\gamma_{\underline{\mathrm{K}}}{}^2{}_1\, x^{\underline{\mathrm{K}}}\,du^1,\\
\omega^0 &= dx^0 + \mathrm{F}\gamma_{\underline{\mathrm{K}}}{}^0{}_1\, x^{\underline{\mathrm{K}}}\,du^1,
\end{aligned}$$

*où, k et c étant des fonctions arbitraires de* $u^1$, F *désigne la fonction* $((x^2-c)^2+k^2)^{\frac{1}{2}}$ *et où les* $\gamma_{\underline{\mathrm{K}}}{}^{\underline{\mathrm{I}}}{}_1$ *sont des fonctions arbitraires de* $u^1$, *symétriques gauches par rapport aux indices* K et I.

5. Remarques. — *a*. Les calculs précédents supposent $n > 3$. Ils sont cependant valables dans le cas $n=3$, grâce à la variable d'homogénéité $x^0$, pourvu que la direction $\vec{e}_2(x)$ soit réelle au point $x$ de $\mathrm{V}_{n-1}$. La métrique obtenue est alors celle des surfaces réglées à génératrices réelles mises sous sa forme classique

$$ds^2 = ((u^2-c)^2+k^2)\,(du^1)^2 + (du^2 + \lambda(u^1)\,du^1)^2,$$

avec

$$\lambda(u^1) = \mathrm{F}\gamma_0{}^2{}_1.$$

Ceci donne une interprétation géométrique simple de $c$ et $k$ : $c$ détermine le point central de chaque génératrice et $1/k$ est le paramètre de distribution.

*b*. Bien que la déformation locale de toute variété régulièrement déformable dépende de deux fonctions arbitraires d'un argument, il n'existe pas, dans la seconde famille, de variété déformable avec persistance d'une direction asymptotique; en effet, sur toute variété de cette famille, on a bien $\gamma_0{}^1{}_1 = \gamma_0{}^2{}_2$, mais il est impossible de trouver un système de coordonnées normales de Riemann dans lequel tous les $\gamma_0{}^1{}_1$ soient nuls, contrairement à ce qui a lieu pour les variétés à direction asymptotique persistante. Cette propriété apparaîtra, au paragraphe A du chapitre IV, en relation étroite avec la possibilité, pour une variété $\mathrm{V}_{n-1}$ plongée dans l'espace euclidien ordinaire à $n$ dimensions, d'être complète pour la métrique induite par ce plongement.

# CHAPITRE II.

## Variétés déformables a directions conjuguées persistantes et distinctes dans un espace localement euclidien.

L'espace de Riemann $V_n$ étant toujours localement euclidien, il reste à étudier le cas des $V_{n-1}$ localement déformables avec persistance, en chaque point, de deux directions conjuguées distinctes, directions qui ne sont, d'ailleurs, pas nécessairement réelles pour $V_{n-1}$ réelle. La classe de différentiation de $V_{n-1}$ sera $C^5$, au moins.

La subdivision, en deux chapitres, de l'étude des $V_{n-1}$ plongées dans un espace $V_n$ localement euclidien peut, *a priori*, sembler arbitraire. Cependant les différences de degré de généralité des déformations locales des diverses $V_{n-1}$ envisagées séparément en fournissent une première justification. Une autre justification, *a posteriori*, sera apportée, au chapitre IV par des considérations sur la structure globale de ces mêmes $V_{n-1}$.

### A. — Généralités.

1. Choix d'un repère mixte. — Soient $d_1(x)$ et $d_2(x)$ les deux directions conjuguées déterminées au point $x$ de $V_{n-1}$ par les équations (I.1). Ces directions sont supposées distinctes, mais elle ne sont pas nécessairement orthogonales; au lieu du repère orthonormé que nous avons utilisé jusqu'à maintenant, attachons à chaque point $x$ de $V_{n-1}$ un repère dont les deux premiers vecteurs $\vec{e}_1(x)$ et $\vec{e}_2(x)$, portés respectivement par $d_1(x)$ et $d_2(x)$, ont des longueurs arbitraires, tandis que les vecteurs $\vec{e}_0(x)$ sont unitaires, orthogonaux entre eux et orthogonaux aux $e_i(x)$.

La transformation subie par ce repère lorsque son origine effectue un déplacement infinitésimal sur $V_{n-1}$ ne se réduit pas à un simple déplacement dans $V_n$, mais $g_{\mathrm{IK}}$ désignant toujours les composantes du tenseur métrique de $V_{n-1}$, ses composantes relatives sont liées par les relations suivantes :

$$\text{(II.1)} \qquad \begin{cases} g_{\mathrm{IK}}\,\omega_0{}^{\mathrm{I}} + g_{\psi\theta}\,\omega_{\mathrm{K}}{}^{\psi} = 0, \\ g_{ik}\,\omega_n{}^k + \omega_i{}^n = 0, \qquad g_{0\psi}\,\omega_n{}^{\psi} + \omega_0{}^n = 0. \end{cases}$$

Tous les $\omega_0{}^n$ sont, du reste, nuls puisque les $\vec{e}_0(x)$ sont orthogonaux, en $x$, à l'espace vectoriel $T_2(x)$ correspondant à la courbure riemannienne non nulle, et nous pouvons poser

$$\omega_k{}^n = \varphi_{ki}\,\omega^i;$$

les $\varphi_{ki}$ sont les composantes du tenseur asymptotique de $V_{n-1}$, donc, puisque les directions $\omega^1 = 0$, $\omega^2 = 0$ sont conjuguées,

$$\varphi_{12} = 0.$$

Les équations de structure de É. Cartan n'exigent aucune hypothèse sur la nature du repère utilisé. On a donc, en considérant en particulier celles qui se déduisent de $\omega_0{}^n = 0$ par différentiation extérieure,

$$\omega_0{}^i \wedge \omega_i{}^n = 0,$$

ce qui s'écrit encore

$$\gamma_0{}^i{}_J \varphi_{ik} \omega^J \wedge \omega^k = 0,$$

en introduisant, comme au paragraphe A des Préliminaires, les coefficients $\gamma_K{}^I{}_J$ qui ne sont, en général, ni des symboles de Christoffel, ni des coefficients de rotation de Ricci.

De l'indépendance des formes $\omega^I$, nous déduisons que la condition précédente est équivalente à des équations qui doivent être identiquement satisfaites, compte tenu de la nullité de $\varphi_{12}$. Ceci entraîne la nullité de tous les $\gamma_0{}^i{}_\psi$ et celle de $\gamma_0{}^1{}_2$ et $\gamma_0{}^2{}_1$ ; les seuls $\gamma_0{}^i{}_K$ qui peuvent ne pas être nuls sont $\gamma_0{}^1{}_1$ et $\gamma_0{}^2{}_2$, donc

$$\text{(II.2)} \qquad \gamma_0{}^i{}_\psi = 0, \qquad \gamma_0{}^1{}_2 = 0, \qquad \gamma_0{}^2{}_1 = 0.$$

Tous les $\gamma_i{}^0{}_k$ sont calculables en fonction des $\gamma_\psi{}^j{}_k$ et du tenseur métrique $g_{IK}$ de $V_{n-1}$. En effet, la première équation du système (II.1) implique

$$g_{ki}\gamma_0{}^i{}_J + g_{0\psi}\gamma_k{}^\psi{}_J = 0\,;$$

compte tenu de (II.2), cette équation est équivalente à

$$\text{(II.3)} \qquad \left\{\begin{array}{ll} \multicolumn{2}{c}{\gamma_i{}^0{}_\psi = 0,} \\ \gamma_1{}^0{}_1 = -g_{11}g^{0\psi}\gamma_\psi{}^1{}_1, & \gamma_1{}^0{}_2 = -g_{12}g^{0\psi}\gamma_\psi{}^2{}_2, \\ \gamma_2{}^0{}_1 = -g_{21}g^{0\psi}\gamma_\psi{}^1{}_1, & \gamma_2{}^0{}_2 = -g_{22}g^{0\psi}\gamma_\psi{}^2{}_2, \end{array}\right.$$

Considérons d'abord les équations de structure relatives aux formes $\omega^i$; elles s'écrivent

$$d\omega^i = \omega^k \wedge (\omega_k{}^i - \gamma_0{}^i{}_k\omega^0).$$

Les seconds membres de ces équations appartenant à l'anneau des formes $\omega^i$, les équations $\omega^i = 0$ constituent un système complètement intégrable; soit $u^i$ une intégrale première quelconque de $\omega^i$, la longueur du vecteur $\vec{e}_i(x)$ peut être choisie de manière que

$$\text{(II.4)} \qquad \omega^i = du^i$$

Considérons enfin les équations de structure relatives aux formes $\omega^0$; elles s'écrivent, en général,

$$d\omega^0 = \omega^\psi \wedge \omega_\psi{}^0 + \omega^i \wedge \omega_i{}^0,$$

ce qui, d'après les résultats que nous venons d'obtenir, se réduit à

$$d\omega^\theta = \omega^\psi \wedge \omega_\psi{}^\theta + g_{12}g^{\psi\theta}(\gamma_\psi{}^1{}_1 - \gamma_\psi{}^2{}_2)\, du^1 \wedge du^2.$$

Formons de même les équations de structure relatives aux formes $\omega_\theta{}^\psi$. Au total, nous obtenons le système d'équations quadratiques

$$\text{(II.5)} \qquad \begin{cases} d\omega^\theta = \omega^\psi \wedge \omega_\psi + g_{12}g^{\psi\theta}(\gamma_\psi{}^1{}_1 - \gamma_\psi{}^2{}_2)\, du^1 \wedge du^2, \\ d\omega_\varphi{}^\theta = \omega_\varphi{}^\psi \wedge \omega_\psi{}^\theta + g_{12}g^{\psi\theta}(\gamma_\varphi{}^2{}_2\gamma_\psi{}^1{}_1 - \gamma_\psi{}^2{}_2\gamma_\varphi{}^1{}_1)\, du^1 \wedge du^2 \end{cases}$$

et nous avons ainsi démontré que *dans un espace localement euclidien* $V_n$, *il est possible d'attacher à chaque point* $x$ *d'une variété* $V_{n-1}$ *déformable avec persistance de directions conjuguées distinctes, un repère mixte constitué de la manière suivante :*

— *les deux vecteurs* $\vec{e}_i(x)$, *portés par les directions conjuguées persistantes, font partie d'un repère naturel pour la* $V_{n-1}$ *;*

— *les* $n - 3$ *vecteurs* $\vec{e}_\theta(x)$ *sont unitaires, tangents à* $V_{n-1}$, *orthogonaux entre eux et orthogonaux aux* $\vec{e}_i(x)$*; les équations de groupe qui leur correspondent sont les équations* (II.5);

— *le vecteur* $\vec{e}_n(x)$ *est unitaire et normal en* $x$ *à* $V_{n-1}$.

2. Remarques sur les cas de complète intégrabilité. — D'après le système (II.5), les équations $\omega^\theta = 0$ ne constituent pas, en général, un système complètement intégrable. Pour qu'il y ait complète intégrabilité, il faut et il suffit que la condition

$$g_{12}(\gamma_\psi{}^1{}_1 - \gamma_\psi{}^2{}_2) = 0$$

soit réalisée, ce qui a lieu dans deux cas :

*a*. Le premier cas, pour lequel on a

$$g_{12} = 0,$$

est celui où les directions conjuguées persistantes sont les directions principales correspondant aux courbures normales non nulle : ce n'est qu'un cas particulier de la déformation à réseau conjugué persistant que nous examinerons en détail comme application de ce qui va être dit dans le cas général.

*b*. Le second cas, pour lequel

$$\gamma_\theta{}^1{}_1 - \gamma_\theta{}^2{}_2 = 0,$$

ne donne pas autre chose que des cas particuliers des deux familles de variétés régulièrement déformables, ainsi que nous le montrons rapidement.

Dans les deux cas, le système (II.5) se réduit à (I.3) et un raisonnement analogue à celui fait au n° 2 du paragraphe A du chapitre I, montre que l'on peut choisir les vecteurs $\vec{e}_0(x)$ de manière que

$$\omega^0 = dx^0, \qquad \omega_\psi{}^0 = 0.$$

Restreignons-nous au cas où

$$g_{12} \neq 0.$$

Comme nous l'avons montré au numéro précédent, nous pouvons prendre

$$\omega^i = du^i;$$

le repère attaché au point $x$ de $V_{n-1}$ est maintenant un repère naturel, de sorte que les coefficients $\gamma_I{}^K{}_J$ sont des symboles de Christoffel présentant la symétrie ordinaire par rapport aux indices inférieurs.

Pour arriver rapidement au résultat envisagé, il est avantageux de ne pas conserver ce repère naturel, mais de lui substituer un repère orthonormé $\{\vec{e}_{i'}(x), \vec{e}_0(x), \vec{e}_n(x)\}$ conservant $\vec{e}_n(x)$, les $\vec{e}_0(x)$ et la direction de l'un des vecteurs $\vec{e}_i(x)$, que nous supposerons être $\vec{e}_1(x)$. La matrice $(A_{I'}{}^K)$ de cette transformation a pour éléments

$$A_{1'}{}^1 = \frac{1}{\eta_1}, \qquad A_{1'}{}^2 = \frac{\cos\Omega}{\eta_1}, \qquad A_{2'}{}^1 = 0, \qquad A_{2'}{}^2 = \frac{\sin\Omega}{\eta_2}, \qquad A_{0'}{}^K = \delta_{0'}{}^K,$$

$\Omega$ désignant l'angle de $\vec{e}_1(x)$ et $\vec{e}_2(x)$, tandis que $\eta_1$ et $\eta_2$ sont des fonctions du point $x$, telles que $\vec{e}_{1'}(x)$ et $\vec{e}_{2'}(x)$ soient deux vecteurs normés. Soit $(A_I{}^{K'})$ la matrice inverse de $(A_{I'}{}^K)$. Les coefficients $\gamma_J{}^K{}_I$, $\gamma_{L'}{}^{M'}{}_{N'}$ sont liés par des formules identiques aux formules de transformation des symboles de Christoffel

$$\gamma_I{}^J{}_K = A_I{}^{L'} A^J{}_{M'} A_K{}^{N'} \gamma_{L'}{}^{M'}{}_{N'} + A_{L'}{}^J \partial_K A_I{}^{L'},$$

ce qui, compte tenu de $\gamma_0{}^1{}_2 = \gamma_0{}^2{}_1 = 0$ montre que les $\gamma_{0'}{}^{i'}{}_{k'}$ sont égaux aux $\gamma_0{}^i{}_k$ lorsque les indices correspondants sont numériquement égaux. Le problème de la recherche des $V_{n-1}$ pour lesquelles $g_{12}$ n'est pas identiquement nul se ramène donc à un cas particulier de ceux que nous avons traités au paragraphe A du chapitre I, et, par suite, *dans un espace $V_n$ localement euclidien les deux familles de variétés régulièrement déformables contiennent les $V_{n-1}$ déformables avec persistance, en chaque point $x$, d'un réseau conjugué non orthogonal, pourvu que le système de Pfaff $\omega^0 = 0$ déterminant l'espace vectoriel $T_2(x)$ de ce réseau soit complètement intégrable.*

3. Expression générale des formes $\omega^0$. — Reprenons la plus générale des variétés $V_{n-1}$ localement déformables avec persistance des directions conjuguées, pour son plongement dans un espace $V_n$ localement euclidien. Le repère attaché au point $x \in V_{n-1}$ étant le repère mixte défini au n° 1 du paragraphe actuel, le

système (II.5) peut être écrit

$$\text{(II.6)} \qquad \begin{cases} d\omega^0 - \omega^\psi \wedge \omega_\psi{}^0 = g^{0\psi} g_{11}(\gamma_\psi{}^1{}_1 - \gamma_\psi{}^2{}_2)\, du^1 \wedge du^2, \\ d\omega_\varphi{}^0 - \omega_\varphi{}^\psi \wedge \omega_\psi{}^0 = g^{0\psi} g_{11}(\gamma_\varphi{}^2{}_2 \gamma_\psi{}^1{}_1 - \gamma_\psi{}^2{}_2 \gamma_\varphi{}^1{}_1)\, du^1 \wedge du^2. \end{cases}$$

Considérons la variété $V_{n-3}(x)$ qui est la variété intégrale, contenant $x$, du système $\omega^i = 0$. De l'étude faite au paragraphe C des Préliminaires, il résulte que cette $V_{n-3}(x)$ est contenue dans $V_{n-1}$ et qu'elle est localement euclidienne. Considérons un système de coordonnées normales de Riemann $u^0$ dans un voisinage suffisamment petit de $x$ sur $V_{n-3}(x)$. Dans le repère mixte employé, les vecteurs $\vec{e}_0(x)$ sont déterminés à une rotation près autour du 3-vecteur déterminé par $\vec{e}_n(x)$ et les $\vec{e}_i(x)$; ceci permet de supposer que les $\vec{e}_0(x)$ constituent le repère adapté aux coordonnées normales $u^0$, de sorte que, sur $V_{n-3}(x)$, les formes $\omega^0$ se réduisent à $du^0$, tandis que les $\omega_\varphi{}^0$ sont identiquement nulles. C'est donc que l'on a, sur $V_{n-1}$,

$$\text{(II.7)} \qquad \begin{cases} \omega^0 = du^0 + \gamma^0{}_i\, du^i, \\ \omega_\varphi{}^0 = \gamma_\varphi{}^0{}_i\, du^i; \end{cases}$$

nous dirons que le repère mixte ainsi construit est *adapté à la déformation*.

Nous avons introduit des coefficients $\gamma^0{}_i$ qui ne sont pas arbitraires, du fait que les seconds membres des équations du système (II.6) ne sont pas quelconques ; la différentiation extérieure des équations (II.7) et l'identification avec les équations (II.6) donne en effet les relations

$$\text{(II.8)} \qquad \begin{cases} \partial_1 \gamma^0{}_2 - \partial_2 \gamma^0{}_1 = \gamma_\psi{}^0{}_2 \gamma^\psi{}_1 - \gamma_\psi{}^0{}_1 \gamma^\psi{}_2 + g^{0\psi} g_{12}(\gamma_\psi{}^1{}_1 - \gamma_\psi{}^2{}_2), \\ \partial_\varphi \gamma^0{}_i = \gamma_\varphi{}^0{}_i, \\ \partial_1 \gamma_\varphi{}^0{}_2 - \partial_2 \gamma_\varphi{}^0{}_1 = \gamma_\varphi{}^\psi{}_1 \gamma_\psi{}^0{}_2 - \gamma_\varphi{}^\psi{}_2 \gamma_\psi{}^0{}_1 + g^{0\psi} g_{12}(\gamma_\varphi{}^2{}_2 \gamma_\psi{}^1{}_1 - \gamma_\psi{}^2{}_2 \gamma_\varphi{}^1{}_1), \\ \partial_\varphi \gamma_\psi{}^0{}_i = 0, \end{cases}$$

dans lesquelles le symbole $\partial_K$ est l'opérateur de dérivation ordinaire par rapport à $u^K$.

Des seconde et quatrième relations de ce système, nous déduisons que

— les $\gamma_\psi{}^0{}_i$ sont indépendants des $u^\varphi$;

— les $\gamma^0{}_i$ sont $2(n-3)$ fonctions linéaires des $u^\varphi$, dont les coefficients sont les $\gamma_\varphi{}^0{}_i$, mais qui ne sont pas nécessairement homogènes par rapport aux $u^\varphi$.

Par comparaison avec les deux autres équations du système (II.8) nous voyons que $g_{12}(\gamma_0{}^1{}_1 - \gamma_0{}^2{}_2)$ sera une fonction linéaire des $u^\varphi$, tandis que $g_{12}(\gamma_0{}^2{}_2 \gamma_\psi{}^1{}_1 - \gamma_0{}^1{}_1 \gamma^2{}_2)$ sera indépendant des $u^\varphi$ : c'est bien ce que va montrer un calcul ultérieur.

Pour écrire le plus simplement possible les formules où $\gamma^0{}_i$ va figurer, il sera commode de rendre homogène cette fonction, par l'introduction d'un paramètre supplémentaire $u^0$ qui vaudra 1 sur $V_{n-1}$ et de coefficients $\gamma_0{}^0{}_i$ tels que

$$\gamma^0{}_i = \gamma_{\bar{\psi}}{}^0{}_i u^{\bar{\psi}}, \tag{II.9}$$

les indices grecs prenant toujours les valeurs 3, ..., $n-1$, tandis que les indices grecs surlignés prennent les valeurs 0, 3, ..., $n-1$.

De même que dans le cas des variétés déformables avec persistance d'une direction asymptotique, nous avons maintenant deux systèmes de formes linéaires sur $V_{n-1}$ : celui qui est constitué par les $du^K$ d'une part, celui qui est constitué par les $\omega^K$, d'autre part. Il est naturel de se demander quelles relations lient les dérivées d'une même fonction dans l'un et l'autre système. Soit $\delta_1$ l'opérateur de dérivation pfaffienne par rapport aux formes $\omega^1$. Soit $\Phi$ une fonction quelconque, de classe $C^1$, au moins; calculons sa différentielle dans les deux systèmes de Pfaff : les deux expressions obtenues $\partial_1\Phi du^1$ et $\delta_1\Phi\omega^1$ sont identiques, ce qui, d'après (II.7) donne la relation

$$\partial_i\Phi\, du^i + \partial_0\Phi\, du^0 = \delta_i\Phi\, du^i + \delta_0\Phi\,(du^0 + \gamma^0{}_i\, du^i).$$

Les $du^K$ étant $n-1$ formes indépendantes, cette relation est équivalente à

$$\begin{cases} \partial_i\Phi - \delta_i\Phi = \gamma^0{}_i\partial_0\Phi, \\ \partial_0\Phi - \delta_0\Phi = 0. \end{cases} \tag{II.10}$$

Toujours dans le but de simplifier l'écriture, introduisons un troisième opérateur de dérivation $\nabla_k$, défini par

$$\nabla_k V_{\bar{0}} = \partial_k V_{\bar{0}} - \gamma_{\bar{0}}{}^{\psi}{}_k V_{\psi}, \tag{II.11}$$

qui, si l'on excluait la valeur 0 de $\bar{\theta}$, ne serait pas autre chose que l'opérateur de dérivation covariante relatif à la métrique de $V_{n-1}$, pour les vecteurs de l'espace $T_{n-3}(x)$ tangent en $x$ à $V_{n-3}(x)$. En particulier, si les $V_{\bar{0}}$ sont indépendants des $u^{\psi}$, on a les relations

$$\nabla_k V_{\bar{0}} = \partial_{\bar{0}}\,\delta_k\left(V_{\bar{\psi}}\, u^{\bar{\psi}}\right) \tag{II.12}$$

qui seront aussi importantes pour la suite.

4. Forme nécessaire de la métrique de $V_{n-1}$. — Nous sommes maintenant en mesure de démontrer que les composantes du tenseur métrique de $V_{n-1}$ s'expriment à l'aide des fonctions déjà introduites et de deux nouvelles fonctions linéaires des $u^{\psi}$. En effet, considérons les $n-3$ formes

$$\omega_0{}^1 = \gamma_0{}^1{}_1\, du^1,$$

et calculons-en les différentielles extérieures

$$\omega_0{}^1 \wedge \omega_1{}^1 + \omega_0{}^2 \wedge \omega_2{}^1 + \omega_0{}^{\psi} \wedge \omega_{\psi}{}^1 = (d\gamma_0{}^1{}_1) \wedge du^1,$$

c'est-à-dire, en tenant compte de la symétrie des $\gamma_I{}^j{}_K$ par rapport aux indices inférieurs

$$\begin{aligned}((\gamma_0{}^1{}_1-\gamma_0{}^2{}_2)\gamma_1{}^1{}_2-\gamma_0{}^\psi{}_2\gamma_\psi{}^1{}_1)\,du^1\wedge du^2+\gamma_0{}^1{}_1\gamma_1{}^1{}_\psi\,du^1\wedge du^\psi\\ =\partial_2\gamma_0{}^1{}_1\,du^2\wedge du^1+\partial_\psi\gamma_0{}^1{}_1\,\omega^\psi\wedge du^1,\end{aligned}$$

ce qui, en tenant compte de l'indépendance des formes $\omega^K$, donne $(n-2)(n-3)$ relations. La différentiation extérieure de $\omega_0{}^2$ conduit, de même à $(n-2)(n-3)$ relations. L'ensemble des conditions ainsi obtenues se résume dans le système

$$\text{(II.13)}\qquad \left\{\begin{aligned}&\partial_2\,\gamma_0{}^1{}_1=(\gamma_0{}^2{}_2-\gamma_0{}^1{}_1)\,\gamma_1{}^1{}_2+\gamma_0{}^\psi{}_2\gamma_\psi{}^1{}_1,\\ &\partial_1\,\gamma_0{}^2{}_2=(\gamma_0{}^1{}_1-\gamma_0{}^2{}_2)\,\gamma_2{}^2{}_1+\gamma_0{}^\psi{}_1\gamma_\psi{}^2{}_2;\\ &\partial_\varphi\gamma_0{}^1{}_1+\gamma_0{}^1{}_1\gamma_\varphi{}^1{}_1=0,\\ &\partial_\varphi\gamma_0{}^2{}_2+\gamma_0{}^2{}_2\gamma_\varphi{}^2{}_2=0.\end{aligned}\right.$$

D'après les deux dernières équations de ce système, nous pouvons introduire deux fonctions $F_1$ et $F_2$, linéaires par rapport aux $u^0$, définies chacune à un facteur près fonction de $u^1$ et $u^2$, et telles que

$$\text{(II.14)}\qquad \gamma_0{}^1{}_1=\partial_0 F_1,\qquad \gamma_0{}^2{}_2=\partial_0 F_2.$$

Or, si l'on pose

$$\gamma_{IKJ}=g_{KH}\gamma_I{}^H{}_J,$$

on calcule aisément les coefficients $\gamma_{IKJ}$ en fonction des dérivées premières des $g_{HK}$. Le procédé est identique à celui qui donne les valeurs des symboles de Christoffel pour une variété rapportée à un repère naturel. On obtient

$$\text{(II.15)}\qquad \gamma_{IKJ}=\frac{1}{2}(\partial_J g_{KI}+\partial_I g_{KJ}-\partial_K g_{IJ}+C_{IKJ}-C_{KJI}+C_{JIK}),$$

où l'on a posé, d'après É. Cartan [10],

$$\text{(II.16)}\qquad C_{IKJ}=g_{KH}C_I{}^H{}_J,\qquad d\omega^H=\frac{1}{2}C_I{}^H{}_J\,\omega^I\wedge\omega^J,$$

de sorte que les $C_{IKJ}$ sont antisymétriques par rapport aux indices I et J.

Dans le repère mixte adapté à la déformation $g_{0K}=\delta_{0K}$ et $C_{IKJ}=0$; ainsi

$$\gamma_{0kj}=\frac{1}{2}(\partial_0 g_{kj}-C_{k0j}),$$

et, plus particulièrement encore,

$$\gamma_{011}=\frac{1}{2}\partial_0 g_{11}.$$

Mais, puisque $\gamma_0{}^2{}_1=0$, nous avons

$$\partial_0 g_{11}=2g_{11}\gamma_0{}^1{}_1,$$

ce qui, compte tenu de (II.14), montre que

$$g_{11} = g^{\star}_{11}(\mathrm{F}_1)^2,$$

$g^{\star}_{11}$ étant une fonction indépendante des $u^0$. Un calcul analogue donne les valeurs de $g_{12}$ et $g_{22}$ et fournit l'énoncé :

*Si une* $\mathrm{V}_{n-1}$ *plongée dans un espace* $\mathrm{V}_n$ *localement euclidien est déformable avec persistance de directions conjuguées distinctes et rapportée à un repère mixte adapté à la déformation, il existe deux fonctions* $\mathrm{F}_1$ *et* $\mathrm{F}_2$, *linéaires par rapport aux* $u^0$, *telles que la métrique de* $\mathrm{V}_{n-1}$ *ait pour composantes*

$$g_{11} = g^{\star}_{11}(\mathrm{F}_1)^2, \qquad g_{12} = g^{\star}_{12}\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2, \qquad g_{22} = g^{\star}_{22}(\mathrm{F}_2)^2, \qquad g_{0\mathrm{K}} = \delta_{0\mathrm{K}},$$

*où les* $g^{\star}_{ik}$ *sont indépendants des* $u^0$ *et où les* $\delta_{0\mathrm{K}}$ *sont des symboles de Kronecker.*

Ce résultat implique que l'angle $\Omega$ des directions conjuguées persistantes au cours de la déformation est indépendant des $u^0$.

5. Équations de Codazzi et forme générale du tenseur asymptotique de $\mathrm{V}_{n-1}$. — Les directions $\vec{e}_1(x)$, $\vec{e}_2(x)$ étant conjuguées

$$\omega_1{}'' = \varphi_{11}\, du^1, \qquad \omega_2{}'' = \varphi_{22}\, du^2,$$

$\varphi_{11}$ et $\varphi_{22}$ désignant les composantes non nulles du tenseur asymptotique de $\mathrm{V}_{n-1}$ dans le repère adapté à la déformation. Différentions extérieurement la première de ces équations : nous obtenons

$$\omega_1{}^i \wedge \omega_i{}'' = (d\varphi_{11}) \wedge du^1,$$

c'est-à-dire, en tenant compte des symétries des $\gamma_{\mathrm{K}}{}^i{}_{\mathrm{J}}$ par rapport aux indices inférieurs,

$$(\gamma_1{}^1{}_2\varphi_{11} - \gamma_1{}^2{}_1\varphi_{22})\, du^2 \wedge du^1 + \gamma_0{}^1{}_1\varphi_{11}\,\omega^0 \wedge du^1 = \partial_2\varphi_{11}\, du^2 \wedge du^1 + \partial_0\varphi_{11}\,\omega^0 \wedge du^1.$$

De cette équation et de celle que nous formons de la même manière à partir de $\omega_2{}''$, nous déduisons le système d'équations

$$\begin{aligned} \partial_2\varphi_{11} &= \gamma_1{}^1{}_2\varphi_{11} - \gamma_1{}^1{}_2\varphi_{22}, & \partial_1\varphi_{22} &= \gamma_2{}^2{}_1\varphi_{22} - \gamma_2{}^1{}_2\varphi_{11},\\ \partial_0\varphi_{11} &= \gamma_0{}^1{}_1\varphi_{11}, & \partial_0\varphi_{22} &= \gamma_0{}^2{}_2\varphi_{22}, \end{aligned}$$

qui sont les équations de Codazzi, d'après lesquelles on peut prendre

$$\varphi_{11} = \varphi^{\star}_{11}\mathrm{F}_1, \qquad \varphi_{22} = \varphi^{\star}_{22}\mathrm{F}_2, \tag{II.17}$$

$\varphi^{\star}_{11}$ et $\varphi^{\star}_{22}$ étant deux fonctions indépendantes des $u^0$, mais non identiquement nulles puisque $\mathrm{V}_{n-1}$ est supposée non développable ; il reste, en outre, les deux conditions

$$\partial_2\varphi_{11} = \gamma_1{}^1{}_2\varphi_{11} - \gamma_1{}^2{}_1\varphi_{22}, \qquad \partial_1\varphi_{22} = \gamma_2{}^2{}_1\varphi_{22} - \gamma_2{}^1{}_2\varphi_{11}. \tag{II.18}$$

Nous avons ainsi obtenu une forme nécessaire du tenseur asymptotique de $V_{n-1}$ dont les composantes s'expriment à l'aide des fonctions de $u^0$ déjà introduites pour la métrique.

### B. — Conditions nécessaires et suffisantes de déformabilité à directions conjuguées persistantes distinctes.

1. Remarque sur la métrique et première condition de déformabilité. — Chacune des fonctions $F_1$, $F_2$ introduites à l'avant-dernier numéro peut être multipliée par une fonction indépendante des $u^0$. La variété $V_{n-1}$ étant réelle, supposons d'abord que les directions $\vec{e}_1(x)$, $\vec{e}_2(x)$ sont elles-mêmes réelles; nous pouvons prendre

$$g_{11} = (F_1)^2, \qquad g_{12} = F_1 F_2 \cos\Omega, \qquad g_{22} = (F_2)^2. \tag{II.19}$$

Cette simplification sera possible, quelles que soient la variété $V_{n-1}$ et les directions conjuguées, pourvu que $g_{11}g_{22} \neq 0$; ceci exclut le cas où $V_{n-1}$ est une variété réelle à directions conjuguées persistantes isotropes : nous examinerons ce cas à la fin de ce paragraphe.

Les composantes du tenseur métrique de $V_{n-1}$ étant données par (II.19), les formules (II.15) et (II.16) permettent de calculer les $\gamma_i{}^j{}_k$. Ces coefficients ne sont qu'au nombre de six distincts, puisqu'ils sont symétriques par rapport aux indices inférieurs. On trouve

$$\tag{II.20} \left\{ \begin{aligned} \gamma_1{}^2{}_1 &= \frac{F_1}{(F_2 \sin\Omega)^2}[\partial_1(F_2\cos\Omega) - \partial_2 F_1], \\ \gamma_2{}^1{}_2 &= \frac{F_2}{(F_1 \sin\Omega)^2}[\partial_2(F_1\cos\Omega) - \partial_1 F_2]; \\ \gamma_1{}^1{}_1 &= \partial_1 \log F_1 - \frac{\cos\Omega}{F_2 \sin^2\Omega}[\partial_1(F_2\cos\Omega) - \partial_2 F_1], \\ \gamma_2{}^2{}_2 &= \partial_2 \log F_2 - \frac{\cos\Omega}{F_1 \sin^2\Omega}[\partial_2(F_1\cos\Omega) - \partial_1 F_2]; \\ \gamma_1{}^1{}_2 &= \frac{1}{F_1 \sin^2\Omega}(\partial_2 F_1 - \cos\Omega\, \partial_1 F_2), \\ \gamma_2{}^2{}_1 &= \frac{1}{F_2 \sin^2\Omega}(\partial_1 F_2 - \cos\Omega\, \partial_1 F_1). \end{aligned} \right.$$

D'autre part, nous pouvons écrire les formes $F_i$ dans le système de coordonnées homogènes $u^{\bar 0}$

$$F_i = F_{i\bar 0} u^{\bar 0}.$$

Cette dernière formule et la formule (II.9) permettent de résumer les deux formules du système (II.8) non encore utilisées dans la formule unique

$$\partial_1 \gamma_{\bar 0}{}^{\psi}{}_2 - \partial_2 \gamma_{\bar 0}{}^{\psi}{}_1 + \gamma_{\bar 0}{}^{\varphi}{}_2 \gamma_{\varphi}{}^{\psi}{}_1 - \gamma_{\bar 0}{}^{\varphi}{}_1 \gamma_{\varphi}{}^{\psi}{}_2 = g^{\varphi\psi} \frac{D(F_1, F_2)}{D(u^{\varphi}, u^{\bar 0})} \cos\Omega.$$

En excluant o des valeurs possibles de $u^{\bar{\theta}}$, cette relation exprime que la courbure riemannienne de $V_{n-1}$ est nulle pour tout espace vectoriel à deux dimensions tangent en $x$ à $V_{n-3}(x)$. L'opérateur $\nabla_k$ introduit au n° 3 permet de simplifier le premier membre : en effet, par une convention analogue à celle que l'on fait parfois pour le tenseur de Riemann-Christoffel [20], admettons que $\nabla_k$ n'opère que sur les indices surlignés; ainsi le premier membre de la condition précédente s'écrit $\nabla_1 \gamma_{\bar{\theta}}{}^{\bar{\psi}}{}_2 - \nabla_2 \gamma_{\bar{\theta}}{}^{\bar{\psi}}{}_1$ et nous obtenons la forme définitive de la condition

$$\text{(I)} \qquad \nabla_1 \gamma_{\bar{\theta}\bar{\psi}_2} - \nabla_2 \gamma_{\bar{\theta}\bar{\psi}_1} = \frac{D(F_1, F_2)}{D(u^{\psi}, u^{\bar{\theta}})} \cos\Omega.$$

2. Équation de Gauss et seconde condition de déformabilité. — Considérons la forme

$$\omega_1{}^2 = \gamma_1{}^2{}_1\, du^1 + \gamma_1{}^2{}_2\, du^2.$$

Par différentiation extérieure, nous en déduisons

$$\omega_1{}^{K} \wedge \omega_{K}{}^2 + \omega_1{}^{n} \wedge \omega_n{}^2 = (d\gamma_1{}^2{}_1) \wedge du^1 + (d\gamma_1{}^2{}_2) \wedge du^2,$$

obtenant ainsi une relation quadratique qui, en raison de l'indépendance des $n-1$ formes de Pfaff $\omega^{K}$, est équivalente aux $2n-5$ équations suivantes :

$$\text{(II.21)} \qquad \left\{ \begin{aligned} &\partial_2 \gamma_1{}^2{}_1 - \partial_1 \gamma_1{}^2{}_2 + (\gamma_1{}^1{}_1 - \gamma_2{}^2{}_1)\gamma_1{}^2{}_2 + (\gamma_2{}^2{}_2 - \gamma_1{}^1{}_2)\gamma_1{}^2{}_1 \\ &\qquad\qquad + \gamma_1{}^{\theta}{}_1 \gamma_{\theta}{}^2{}_2 - g^{22}\varphi_{11}\varphi_{22} = 0, \\ &\partial_{\theta} \gamma_1{}^2{}_1 = (\gamma_{\theta}{}^1{}_1 - \gamma_{\theta}{}^2{}_2)\gamma_1{}^2{}_1, \\ &\partial_{\theta} \gamma_1{}^2{}_2 = (\gamma_{\theta}{}^1{}_1 - \gamma_{\theta}{}^2{}_2)\gamma_1{}^2{}_2. \end{aligned} \right.$$

La première équation de ce système n'est autre que l'équation de Gauss exprimant que le produit $\varphi_{11}\varphi_{22}$ est égal à la courbure riemannienne non nulle de $V_{n-1}$, tandis que les $2(n-3)$ autres équations de ce système s'écrivent

$$\partial_{\theta} \log \gamma_1{}^2{}_1 = \partial_{\theta} \log \gamma_1{}^2{}_2 = \partial_{\theta} \log \frac{F_1}{F_2}.$$

Considérons, en particulier, la relation

$$\partial_{\theta} \log \left( \frac{F_2}{F_1} \gamma_1{}^2{}_2 \right) = 0$$

et substituons à $\gamma_1{}^2{}_2$ sa valeur tirée de (II.20)

$$\partial_{\theta} \log \frac{\partial_1 F_2 - \cos\Omega\, \partial_2 F_1}{F_1} = 0.$$

Développons cette condition

$$(\partial_{\theta} \partial_1 F_2 - \cos\Omega\, \partial_{\theta} \partial_2 F_1) F_{1\bar{\psi}} u^{\psi} = (\partial_1 F_2 - \cos\Omega\, \partial_2 F_1) F_{1\theta},$$

soit, d'après la formule (II.12) liant les opérateurs $\partial_k$ et $\nabla_k$, et en convenant, mais pour la prochaine formule seulement, que l'opérateur $\nabla_k$ opérera aussi sur l'indice $\theta$ non surligné,

$$(\nabla_1 F_{2\theta} - \cos\Omega\, \nabla_2 F_{1\theta}) F_{1\bar{\psi}} u^{\bar{\psi}} = (\nabla_1 F_{2\bar{\psi}} - \cos\Omega\, \nabla_2 F_{1\bar{\psi}}) u^{\bar{\psi}} F_{1\theta}.$$

Les $u^{\bar{\psi}}$ sont $n-2$ variables indépendantes et la relation obtenue est linéaire et homogène par rapport à elles. C'est donc une identité, ce qui nous permet d'écrire, $\Lambda$ étant une fonction de $u^1$ et $u^2$,

$$\nabla_1 F_{2\bar{\theta}} - \cos\Omega\, \nabla_2 F_{1\bar{\theta}} + \Lambda \sin^2\Omega\, F_{1\bar{\theta}} = 0,$$

de sorte que les couples de coefficients $F_{1\bar{\theta}}$, $F_{2\bar{\theta}}$ vérifient une même relation, indépendante de l'indice $\bar{\theta}$ considéré. Par symétrie, $\Theta$ désignant une autre fonction de $u^1$ et $u^2$, on obtient sans calculs une nouvelle relation

$$\nabla_2 F_{1\bar{\theta}} - \cos\Omega\, \nabla_1 F_{2\bar{\theta}} + \Theta \sin^2\Omega\, F_{2\bar{\theta}} = 0,$$

qui aurait aussi bien pu être obtenue en transformant

$$\partial_\theta \log \gamma_1{}^2{}_1 = \partial_\theta \log \frac{F_1}{F_2}.$$

La différentiation extérieure de $\omega_1{}^1$, $\omega_2{}^1$ et $\omega_2{}^2$ ne donne que des relations équivalentes au système (II.21). Nous avons donc obtenu une nouvelle condition nécessaire de déformabilité; cette condition s'énonce :

*Si une variété $V_{n-1}$, plongée dans un espace $V_n$ localement euclidien, est déformable avec persistance de deux directions conjuguées distinctes non isotropes, les couples de coefficients $F_{1\bar{\theta}}$, $F_{2\bar{\theta}}$ vérifient un système de deux équations aux dérivées partielles du premier ordre linéaires et indépendantes de l'indice $\bar{\theta}$ considéré. Ce système constitue la condition*

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} \nabla_1 F_{2\bar{\theta}} + \Lambda F_{1\bar{\theta}} + \Theta F_{2\bar{\theta}} \cos\Omega = 0, \\ \nabla_2 F_{1\bar{\theta}} + \Lambda F_{1\bar{\theta}} \cos\Omega + \Theta F_{2\bar{\theta}} = 0. \end{cases}$$

*Remarque.* — Le système (II.13) comporte $2(n-3)$ relations que nous n'avons pas encore employées et qui sont résumées dans les deux premières équations de ce système. Ces relations semblent, à première vue, constituer une nouvelle condition, mais il n'en est rien, ainsi que le montre un calcul facile : les deux premières équations du système (II.13) sont identiquement vérifiées, en vertu de la relation liant les opérateurs $\nabla_k$ et $\partial_k$, pourvu que la condition (II) soit satisfaite.

3. Remarque sur les équations de Gauss et de Codazzi. — Les dernières équations qui nous restent à étudier sont la première équation du système (II.21) et les équations du système (II.18). Ces équations ne contiennent, en plus des $\varphi_{ik}$ et de leurs dérivées pfaffiennes premières, que les $\gamma_i{}^j{}_k$, leurs dérivées

pfaffiennes premières et les $F_{i0}$. Considérant $\varphi_{11}$ et $\varphi_{22}$ comme les deux inconnues, il va donc être possible d'exprimer les coefficients de ces équations à l'aide des $F_{i0}$, de $\Lambda$, $\Theta$, $\Omega$ et de certaines de leurs dérivées partielles *ordinaires* d'ordre 2, au plus.

En effet, nous remarquons d'abord, d'après la condition (II), qu'au système (II.20) donnant les valeurs des $\gamma_i{}^j{}_k$ peut être substitué le système

$$(\text{II}.22)\quad \left\{\begin{aligned} &\gamma_1{}^1{}_1 = \partial_1 \log F_1 - \left(\Theta - \frac{\partial_1\Omega}{\sin\Omega}\right)\cos\Omega, && \gamma_2{}^2{}_2 = \partial_2 \log F_2 - \left(\Lambda - \frac{\partial_2\Omega}{\sin\Omega}\right)\cos\Omega;\\ &\gamma_1{}^2{}_1 = \left(\Theta - \frac{\partial_1\Omega}{\sin\Omega}\right)\frac{F_1}{F_2}, && \gamma_2{}^1{}_2 = \left(\Lambda - \frac{\partial_2\Omega}{\sin\Omega}\right)\frac{F_2}{F_1};\\ &\gamma_1{}^1{}_2 = -\Theta\frac{F_2}{F_1}, && \gamma_2{}^2{}_1 = -\Lambda\frac{F_1}{F_2}. \end{aligned}\right.$$

Portons ces valeurs dans la première équation du système (II.21); celle-ci devient, après simplification,

$$\frac{\varphi_{11}\varphi_{22}}{F_1F_2\sin^2\Omega} = \partial_1\Lambda + \partial_2\Theta - \delta^{0\psi}F_{10}F_2 + \frac{\Theta\,\partial_2\Omega + \Lambda\,\partial_1\Omega}{\operatorname{tg}\Omega} - \frac{\partial_1\partial_2\Omega}{\sin\Omega}.$$

Le second membre est indépendant des $u^0$; il en est de même du premier, d'après les formules (II.17). Posons

$$\varphi^\star_{11}\varphi^\star_{22} = K^\star$$

et groupons les dérivées de mêmes indices dans le second membre de l'équation de Gauss écrite ci-dessus. Il vient

$$(\text{II}.23)\qquad \frac{K^\star}{\sin\Omega} = \partial_1(\Lambda\sin\Omega) + \partial_2(\Theta\sin\Omega) - \delta^{0\psi}F_{10}F_2\sin\Omega - \partial_1\partial_2\Omega.$$

Substituons les valeurs des $\varphi_{ik}$ données par (II.17) dans le système (II.18). D'après (II.22), nous obtenons finalement les équations de Codazzi sous la forme

$$(\text{II}.24)\qquad \left\{\begin{aligned} &\partial_2\varphi^\star_{11} = \Lambda\cos\Omega\,\varphi^\star_{11} + \left(\frac{\partial_1\Omega}{\sin\Omega} - \Theta\right)\varphi^\star_{22},\\ &\partial_1\varphi^\star_{22} = \left(\frac{\partial_2\Omega}{\sin\Omega} - \Lambda\right)\varphi^\star_{11} + \Theta\cos\Omega\,\varphi^\star_{22}. \end{aligned}\right.$$

Il ne nous reste plus qu'à exprimer la compatibilité des équations (II.23) et (II.24).

4. Condition de compatibilité des équations de Gauss et de Codazzi. — Posons

$$\varphi^\star_{11} = (K^\star)^{\frac{1}{2}}e^{\tau}, \qquad \varphi^\star_{22} = (K^\star)^{\frac{1}{2}}e^{-\tau}.$$

Les équations de Codazzi (II.24) se transforment en un système de deux équations aux dérivées partielles du premier ordre à une seule inconnue $\tau$

$$
(\text{II}.25)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\partial_2\tau+\frac{1}{2}\partial_2\log K^\star = \Lambda\cos\Omega+\left(\frac{\partial_1\Omega}{\sin\Omega}-\Theta\right)e^{-2\tau},\\
&-\partial_1\tau+\frac{1}{2}\partial_1\log K^\star=\left(\frac{\partial_2\Omega}{\sin\Omega}-\Lambda\right)e^{2\tau}+\Theta\cos\Omega
\end{aligned}
\right.
$$

et la condition de compatibilité de ces deux équations est

$$
(\text{II}.26)\qquad A\,e^{2\tau}+B\,e^{-2\tau}=C,
$$

où l'on a posé

$$
\begin{aligned}
A&=\partial_2\left(\frac{\partial_2\Omega}{\sin\Omega}-\Lambda\right)+\left(\frac{\partial_2\Omega}{\sin\Omega}-\Lambda\right)(2\Lambda\cos\Omega-\partial_2\log K^\star),\\
B&=\partial_1\left(\frac{\partial_1\Omega}{\sin\Omega}-\Theta\right)+\left(\frac{\partial_1\Omega}{\sin\Omega}-\Theta\right)(2\Theta\cos\Omega-\partial_1\log K^\star),\\
C&=\partial_1\partial_2\log K^\star-\partial_1(\Lambda\cos\Omega)-\partial_2(\Theta\cos\Omega)-4\left(\frac{\partial_1\Omega}{\sin\Omega}-\Theta\right)\left(\frac{\partial_2\Omega}{\sin\Omega}-\Lambda\right).
\end{aligned}
$$

Supposons d'abord que deux au moins des coefficients A, B, C ne soient pas nuls. Alors l'équation (II.26) permet de calculer, au plus, deux valeurs $\tau_1$ et $\tau_2$ de $\tau$, au signe près. Ces deux valeurs sont des solutions *singulières* possibles du système (II.25). Trois cas sont possibles :

*a*. $\tau_1$ et $\tau_2$ ne sont pas solution de (II.25). Il y a contradiction et la métrique dont on est parti, bien que vérifiant les conditions (I) et (II) ne peut être induite sur une variété $V_{n-1}$ par son plongement dans un espace $V_n$ localement euclidien. C'est aussi ce qui se produit si deux des coefficients A, B, C sont nuls sans que le troisième le soit.

*b*. Si une seule des valeurs possibles de $\tau$, soit $\tau_1$, vérifie le système (II.25), il lui correspond un seul couple de valeurs $\varphi_{11}$, $\varphi_{22}$, composantes d'un tenseur asymptotique qui, avec la métrique vérifiant les conditions (I) et (II) détermine localement une variété $V_{n-1}$ intrinsèquement rigide pour son plongement dans l'espace $V_n$.

*c*. Si $\tau_1$ et $\tau_2$ sont solution de (II.25), il leur correspond, de la même manière, un seul couple de variétés $V_{n-1}$ isométriques et rigides pour leur plongement dans l'espace $V_n$ et ces $V_{n-1}$ ne se déduisent pas l'une de l'autre par des déplacements et des symétries.

Nous avons ainsi démontré que *le fait, pour une variété riemannienne $V_{n-1}$ plongée dans un espace $V_n$ localement euclidien, d'avoir $n-3$ courbures eulériennes principales nulles n'entraîne pas la déformabilité, même locale, de cette variété*.

Il nous reste à examiner le cas où A, B, C sont nuls. Alors le système (II.25) est complètement intégrable et son intégration introduit un paramètre. Le tenseur asymptotique associé à la métrique envisagée dépend de ce paramètre, de sorte que la variété $V_{n-1}$ qui les réalise par son plongement dans $V_n$ admet *localement* une déformation continue à un paramètre.

Avant de conclure, nous devons encore vérifier la compatibilité des conditions obtenues. Le système (I) comporte $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ équations, le système (II) en comporte $2(n-2)$ et enfin les équations $A=B=C=0$ constituent, avec l'équation de Gauss quatre autres conditions. Au total, il y a donc $2n+\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ conditions. Les fonctions qui y figurent peuvent être considérées comme les inconnues du problème consistant en la recherche des métriques qui peuvent être induites, par plongement dans un espace $V_n$ localement euclidien, sur une variété $V_{n-1}$ déformable avec persistance de deux directions conjuguées distinctes et non isotropes; ces fonctions sont les $F_{i\bar{0}}$ qui sont au nombre de $2(n-2)$, les $\gamma_{\bar{0}}{}^{\bar{\psi}}{}_{i}$ au nombre de $(n-2)(n-3)$ et enfin les quatre quantités $\Lambda$, $\Theta$, $\Omega$ et $K^{\star}$, soit au total $2n+(n-2)(n-3)$ fonctions. Ainsi le nombre de fonctions surpasse de $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ le nombre de conditions. Ceci suffit pour démontrer l'existence de solutions pour $n \geqq 3$ et montre que la plus générale des métriques cherchées dépend de $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ fonctions arbitraires de deux variables.

Remarquons que tous les résultats obtenus sont valables pour $n=3$, grâce à la présence, dans nos calculs, de la variable d'homogénéité $u^0$.

Résumons les résultats obtenus : *Pour qu'une forme quadratique définie positive à $n-1$ variables puisse être prise pour métrique induite par plongement dans un espace $V_n$ localement euclidien sur une variété $V_{n-1}$ déformable avec persistance, en chacun de ses points $x$, de deux directions conjuguées distinctes et non isotropes, il faut et il suffit qu'elle puisse être écrite*

$$ds^2 = g_{IK}\,\omega^I \omega^K \qquad (I, K \in \{1, \ldots, n-1\})$$

avec

$$\omega^i = du^i, \qquad \omega^0 = du^0 + \gamma_{\bar{\psi}}{}^{0}{}_{i}\, u^{\bar{\psi}}\, du^i \qquad \begin{pmatrix} i \in \{1, 2\} \\ 0 \in \{3, \ldots, n-1\} \\ \bar{\psi} \in \{0, 3, \ldots, n-1\} \end{pmatrix};$$

*$u^0$ est une variable d'homogénéité qui vaut 1 sur la variété et*

$$g_{11} = (F_1)^2, \qquad g_{12} = F_1 F_2 \cos\Omega, \qquad g_{22} = (F_2)^2, \qquad g_{0K} = \delta_{0K};$$

*$\Omega$ et les $\gamma_{\bar{0}}{}^{\bar{\psi}}{}_{i}$ sont indépendants des $u^{\bar{0}}$, tandis que $F_1$ et $F_2$ sont deux fonctions*

*linéaires des $u^{\bar{0}}$ dont les coefficients $F_{i\bar{0}}$ sont liés aux $\gamma_{\bar{0}}{}^{\psi}{}_i$ et à $\Omega$ par les conditions*

$$\text{(I)} \qquad \nabla_1 \gamma_{\bar{0}\psi 2} - \nabla_2 \gamma_{\bar{0}\psi 1} = \frac{D(F_1, F_2)}{D(u^{\psi}, u^{0})} \cos\Omega;$$

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} \nabla_1 F_{2\bar{0}} + \Lambda F_{1\bar{0}} + \Theta F_{2\bar{0}} \cos\Omega = 0, \\ \nabla_2 F_{1\bar{0}} + \Lambda F_{1\bar{0}} \cos\Omega + \Theta F_{2\bar{0}} = 0; \end{cases}$$

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} \partial_1 \log \dfrac{\partial_1 \log \operatorname{tg} \dfrac{\Omega}{2} - \Theta}{K^\star} + 2\Theta \cos\Omega = 0, \\ \partial_2 \log \dfrac{\partial_2 \log \operatorname{tg} \dfrac{\Omega}{2} - \Lambda}{K^\star} + 2\Lambda \cos\Omega = 0, \\ \partial_1 \partial_2 \log K^\star - \partial_1(\Lambda \cos\Omega) - \partial_2(\Theta \cos\Omega) - 4\left(\dfrac{\partial_1 \Omega}{\sin\Omega} - \Theta\right)\left(\dfrac{\partial_2 \Omega}{\sin\Omega} - \Lambda\right) = 0, \\ \dfrac{K^\star}{\sin\Omega} = \partial_1(\Lambda \sin\Omega) + \partial_2(\Theta \sin\Omega) - \delta^{0\psi} F_{10} F_{2\varphi} \sin\Omega - \partial_1 \partial_2 \Omega; \end{cases}$$

*où $\Lambda$ et $\Theta$ sont deux fonctions de $u^1$ et $u^2$.*

5. Exemple. — Dans un espace localement euclidien à quatre dimensions, cherchons s'il existe des variétés $V_3$ déformables avec persistance, en chaque point, de deux directions conjuguées faisant entre elles un angle constant $\Omega$ et telles que $F_{13}$ ne soit fonction que de $u^1$, tandis que $F_{23}$ ne sera fonction que de $u^2$. S'il existe une telle variété, un choix convenable des longueurs des vecteurs $\vec{e}_1(x)$, $\vec{e}_2(x)$ permettra de ramener $F_{12}$ et $F_{23}$ à des constantes arbitrairement choisies. En supposant $0 < \Omega < \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire en écartant le cas où les directions persistantes sont les directions principales, il est commode de prendre

$$F_{13} = F_{23} = (\cos\Omega)^{-\frac{1}{2}},$$

de sorte que les inconnues sont les $F_{i0}$ et les $\gamma_0{}^3{}_i$ qui doivent vérifier les conditions résultant de (I), (II) et (III), c'est-à-dire

$$(a) \qquad \partial_1 \gamma_0{}^3{}_2 - \partial_2 \gamma_0{}^3{}_1 = (F_{20} - F_{10})(\cos\Omega)^{\frac{1}{2}};$$

$$(b) \qquad \partial_1 F_{20} - (\cos\Omega)^{-\frac{1}{2}} \gamma_0{}^3{}_1 = 0, \qquad \partial_2 F_{10} - (\cos\Omega)^{-\frac{1}{2}} \gamma_0{}^3{}_2 = 0,$$

$$(c) \qquad K^\star + \sin\Omega \operatorname{tg}\Omega = 0.$$

Les conditions (III) se réduisent à une seule, $(c)$, déterminant la valeur de $K^\star$, et il ne nous reste que les trois équations $(a)$ et $(b)$ pour déterminer les quatre inconnues $F_{i0}$ et $\gamma_0{}^3{}_i$. Les $\gamma_0{}^3{}_i$ s'éliminent et il reste, pour déterminer les $F_{i0}$ une seule équation du second ordre

$$\partial_1 \partial_2 (F_{20} - F_{10}) + F_{20} - F_{10} = 0$$

qui est une équation de Moutard par rapport à $F_{20} - F_{10}$; elle s'intègre à l'aide des fonctions de Bessel, en introduisant deux fonctions arbitraires d'un argument. La solution générale du problème s'obtient en introduisant une fonction arbitraire de $u^1$ et $u^2$, de classe $C^2$ au moins, ce qui prouve l'existence des $V_3$ cherchées.

Nous avons remarqué, au numéro précédent, que le tenseur métrique de la plus générale des $V_{n-1}$, déformables avec persistance de deux directions conjuguées distinctes et non isotropes, dépend de $2n + (n-2)(n-3)$ fonctions de $u^1$ et de $u^2$ parmi lesquelles figure $\Omega$ et dont $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ peuvent être choisies arbitrairement; il en résulte que *dans l'espace euclidien à n dimensions, il existe des $V_{n-1}$ localement déformables avec persistance, en chaque point, de directions conjuguées faisant entre elles un angle constant arbitrairement choisi, contrairement à ce qui a lieu dans l'espace à trois dimensions où de telles directions sont nécessairement les directions principales.*

6. Variétés déformables avec persistance de directions conjuguées isotropes. — Ces variétés se trouvent exclues des considérations précédentes, du fait que, rapportées au repère adapté à la déformation, $g_{11}$ et $g_{22}$ sont nuls. Elles peuvent cependant être étudiées d'une façon analogue, mais donnant lieu à des calculs plus simples : on peut supposer

$$ds^2 = 2F_1F_2\,du^1\,du^2 + \delta^{0\psi}\omega^0\omega^\psi, \tag{II.27}$$

$F_1$ et $F_2$ pouvant être l'une multipliée, l'autre divisée par une même fonction de $u^1$ et de $u^2$. Le calcul des $\gamma_i{}^j{}_k$ se fait facilement; ils sont tous nuls, sauf $\gamma_1{}^1{}_1$ et $\gamma_2{}^2{}_2$ et l'on trouve, avec les mêmes notations et les mêmes opérateurs que précédemment,

$$\gamma_1{}^1{}_1 = \partial_1 \log(F_1F_2), \qquad \gamma_2{}^2{}_2 = \partial_2 \log(F_1F_2), \tag{II.28}$$

tandis que la condition (I) est remplacée par

$$\nabla_1 \gamma_{\bar{0}\psi_2} - \nabla_2 \gamma_{\bar{0}\psi_1} = \frac{D(F_1, F_2)}{D(u^\psi, u^{\bar{0}})}. \tag{1}$$

Les équations de Gauss résultant de la différentiation extérieure de $\omega_1{}^1$ et $\omega_2{}^2$ conduisent aux conditions

$$\nabla_2 F_{1\bar{0}} + \Lambda F_{1\bar{0}} = 0, \qquad \nabla_1 F_{2\bar{0}} + \Theta F_{2\bar{0}} = 0, \tag{2}$$

qui remplacent les conditions (II), tandis que l'équation de Gauss restante s'écrit

$$\varphi^\star_{11}\varphi^\star_{22} = K^\star = \partial_1\Lambda + \partial_2\Theta - \delta^{0\psi}F_{10}F_{2\psi}, \tag{II.29}$$

car $\varphi^\star_{11}F_1$ et $\varphi^\star_{22}F_2$ sont, de même que dans le cas général, les composantes du tenseur asymptotique de $V_{n-1}$, comme le montrent les équations de Codazzi obtenues par différentiation extérieure de $\omega_1''$ et $\omega_2''$; ces équations font actuellement de $\varphi^\star_{11}$ et $\varphi^\star_{22}$ les solutions du système

$$\text{(II.30)} \qquad \partial_2 \log \varphi^\star_{11} = \Lambda, \qquad \partial_1 \log \varphi^\star_{22} = \Theta,$$

dont la condition de compatibilité avec l'équation (II.29) se réduit à

$$\text{(II.31)} \qquad \partial_1 \partial_2 \log K^\star - \partial_1 \Lambda - \partial_2 \Theta = 0.$$

Cette dernière condition montre l'impossibilité de l'existence de variétés isolées ou de couples de variétés rigides à directions conjuguées isotropes. Nous avons ainsi obtenu les conditions

$$(3) \qquad \partial_1 \partial_2 \log K^\star - \partial_1 \Lambda - \partial_2 \Theta = 0, \qquad K^\star = \partial_1 \Lambda + \partial_2 \Theta - \partial^{\bar{0}\bar{\psi}} F_{1\bar{0}} F_{2\bar{\psi}}.$$

*Remarque.* — Contrairement à ce qui se passe dans le cas où $\vec{e}_1(x)$ et $\vec{e}_2(x)$ ne sont pas des directions isotropes en $x$, l'ensemble des conditions (1), (2) et (3) n'est pas suffisant pour qu'il y ait déformabilité à directions conjuguées persistantes, car seules conviennent les valeurs de $F_1$ et de $F_2$ déterminées chacune à un facteur près, ces deux facteurs étant seulement astreints à être des fonctions de $u^1$ et de $u^2$ inverses l'une de l'autre. Nous pouvons d'ailleurs aisément les éliminer en fixant arbitrairement la valeur d'un des $F_{i\bar{0}}$ non nul; mais il nous semble plus avantageux d'employer un autre procédé qui, bien que rompant la symétrie des conditions (2) et (3), va nous permettre de les simplifier.

7. Conditions nécessaires et suffisantes de déformabilité a directions conjuguées isotropes. — Moyennant la condition (II.31), le système constitué par (II.29) et (II.30) est complètement intégrable : son intégration introduit une constante arbitraire que nous désignerons par C. Supposons connue une forme quadratique (II.27) satisfaisant aux conditions (1), (2) et (3) et une variété $V_{n-1}$ que son plongement dans l'espace $V_n$ localement euclidien doue de la métrique définie par cette forme quadratique. Dans un voisinage suffisamment petit du point $x$ de $V_{n-1}$, la constante C a une valeur bien déterminée; $K^\star$ étant supposé non identiquement nul, ceci nous permet de choisir $F_2$ de façon que $\varphi'_{22}$ se réduise à une fonction de $u^2$ seul, nous réservant ainsi la possibilité de faire ultérieurement une hypothèse sur la nature de ce paramètre $u^2$, possibilité que nous aurions écartée si nous avions astreint $\varphi^\star_{22}$ à se réduire à une constante.

Dans ces conditions, il résulte de la seconde équation du système (II.30) que $\Theta$ est nul dans tout le voisinage considéré. Mais $\Lambda$ et $\Theta$ ont été définis indépendamment de la manière dont $V_{n-1}$ est plongée dans l'espace $V_n$; donc, au moins localement, sur $V_{n-1}$ et sur toute variété isométrique,

$$\Theta = 0.$$

En tenant compte de ceci dans les conditions (2) et (3), nous remarquons d'abord que ces conditions sont valables quel que soit $n \geqq 3$ grâce à la présence de la variable d'homogénéité, ensuite que les conditions (1), (2) et (3) sont compatibles, car elles sont au nombre de $2(n-1)+\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ liant $2(n-1)+(n-2)(n-3)$ fonctions, de sorte que, comme au n° 4, le nombre de fonctions surpasse de $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ le nombre de conditions. Nous obtenons l'énoncé :

*Pour qu'une forme quadratique à $n-1$ variables puisse être considérée comme la métrique induite par plongement dans un espace $V_n$ localement euclidien sur une variété $V_{n-1}$ déformable avec persistance en chacun de ses points $x$, de deux directions conjuguées isotropes $\vec{e}_1(x)$, $\vec{e}_2(x)$, il faut et il suffit qu'elle puisse être écrite*

$$ds^2 = 2\,F_1 F_2\, du^1\, du^2 + \delta_{\theta\psi}\omega^\theta\omega^\psi \qquad (\theta,\ \psi \in \{3,\ \ldots,\ n-1\}),$$

*où les $\omega^\theta$ sont $n-3$ formes de Pfaff réductibles à*

$$\omega^\theta = du^\theta + \gamma_{\bar\psi}{}^{\theta}{}_{i}\, u^{\bar\psi}\, du^i \qquad \begin{pmatrix} i \in \{1,\ 2\} \\ \bar\psi \in \{0,\ 3,\ \ldots,\ n-1\} \end{pmatrix};$$

*$u^0$ est une variable d'homogénéité qui vaut 1 sur $V_{n-1}$, les $\gamma_{\bar\psi}{}^{\theta}{}_{i}$ sont indépendants des $u^\psi$ et les $F_i$ sont deux fonctions linéaires des $u^\psi$ dont les coefficients sont liés aux $\gamma_{\bar\psi}{}^{\theta}{}_{i}$ par les conditions*

$$(1) \qquad \nabla_1 \gamma_{\theta\psi_2} - \nabla_2 \gamma_{\theta\psi_1} = \frac{D(F_1 F_2)}{D(u^\psi,\ u^\theta)},$$

$$(2) \qquad \nabla_2 F_{1\theta} + \Lambda F_{1\theta} = 0, \qquad \nabla_1 F_2 = 0,$$

$$(3) \qquad \partial_1\,\partial_2 \log K^\star - \partial_1 \Lambda = 0, \qquad K^\star = \partial_1 \Lambda + \delta^{\theta\psi} F_{1\theta} F_{2\psi},$$

*dans lesquelles $\Lambda$ et $\Theta$ désignent deux fonctions du $u^1$ et $u^2$.*

*Exemple.* — Pour $n=3$, les deux conditions (3) s'intègrent et donnent

$$K^\star = \partial_1 \Lambda = \frac{2\,\varphi'_1\,\varphi'_2}{(\varphi_1+\varphi_2)^2},$$

en désignant par une lettre affectée de l'indice $i$ une fonction de la seule variable $u^i$. L'intégration des conditions (1) et (2) donne ensuite

$$ds^2 = 2(\varphi_1+\varphi_2)^2 \psi_1 \psi_2\, du^1\, du^2,$$

ce qui est la forme la plus générale de la métrique des surfaces minima.

*Remarque.* — Quel que soit $n \geqq 3$, toute $V_{n-1}$ réalisant l'immersion d'un $ds^2$ solution de (1), (2), (3) est à courbure moyenne nulle. Or la nullité de la courbure moyenne est une propriété caractéristique des variétés minima [15]. Donc : *toute variété $V_{n-1}$ déformable avec persistance de directions conjuguées* *isotropes est une variété minima pour son plongement dans l'espace* $V_n$ *localement euclidien.*

## C. — Variétés déformables avec persistance des directions principales.

1. Conditions générales de déformabilité. — Les résultats obtenus au n° 4 du précédent paragraphe sont valables pourvu que $g_{11}$ et $g_{22}$ ne soient pas identiquement nuls. Ils s'appliquent, en particulier, au cas où les directions conjuguées persistantes sont les directions principales; mais alors de nombreuses simplifications s'introduisent du fait que le système des équations $\omega^0 = 0$ est complètement intégrable. Il n'en résulte cependant pas que les métriques cherchées soient nécessairement réductibles : les variétés déformables avec persistance des directions principales sont, en quelque sorte, intermédiaires entre les variétés régulièrement déformables et les variétés déformables avec persistance de directions conjuguées. C'est pour cette raison que nous allons les étudier avec plus de détails.

Par analogie avec l'étude faite au n° 3 du paragraphe précédent, considérons la variété $V_{n-3}(x)$ relative au point $x$ de $V_{n-1}$. Cette variété $V_{n-3}(x)$ est localement euclidienne et, en raison de la complète intégrabilité du système $\omega^0 = 0$, on peut choisir, dans un voisinage suffisamment petit du point $x$, une carte locale dont $n-3$ paramètres constituent un système de coordonnées normales de Riemann pour $V_{n-3}(x)$; dans ces conditions, on aura, sur $V_{n-1}$,

$$\omega^0 = du^0.$$

Conservant toujours la variable d'homogénéité $u^0$ et les conventions établies sur les indices au paragraphe précédent, nous aurons

$$\gamma_{\bar{\theta}}{}^{\psi}{}_{K} = 0,$$

de sorte que les opérateurs $\partial_k$, $\delta_k$ et $\nabla_k$ seront identiques. Il en résulte que le premier membre de la condition (I) est identiquement nul et l'énoncé qui se déduit du n° 4 est le suivant :

*Pour qu'une forme quadratique à* $n-1$ *variables puisse être la métrique induite par plongement dans un espace localement euclidien* $V_n$ *sur une variété* $V_{n-1}$ *déformable avec persistance des directions principales, il faut et il suffit qu'elle puisse être écrite* $ds^2 = g_{IK}\, du^I\, du^K$, *avec*

$$g_{11} = (F_1)^2, \qquad g_{12} = 0, \qquad g_{22} = (F_2)^2, \qquad g_{0K} = \delta_{0K}$$
$$\begin{pmatrix} I, K \in \{1, \ldots, n-1\} \\ 0 \in \{3, \ldots, n-1\} \end{pmatrix};$$

$F_1$ *et* $F_2$ *sont deux fonctions linéaires des* $u^0$, *rendues homogènes par l'introduction* *de $u^0$ et dont les coefficients $F_{i\bar{0}}$ vérifient les conditions*

$$(A) \qquad \partial_1 F_{2\bar{0}} + \Lambda F_{1\bar{0}} = 0, \qquad \partial_2 F_{1\bar{0}} + \Theta F_{2\bar{0}} = 0, \qquad (\bar{0} \in \{0, 3, \ldots, n-1\});$$

$$(B) \qquad \begin{cases} \partial_1 \dfrac{\Theta}{K^\star} = 0, \qquad \partial_2 \dfrac{\Lambda}{K^\star} = 0, \\ \partial_1 \partial_2 \log K^\star - 4\Lambda\Theta = 0, \qquad K^\star - \partial_1 \Lambda - \partial_2 \Theta + \delta^{0\psi} F_{10} F_{2\psi} = 0; \end{cases}$$

*toutes les quantités qui figurent dans ces conditions sont des fonctions de $u^1$ et $u^2$.*

*Remarques.* — *a.* Le système des équations de Codazzi devient

$$\partial_1 \varphi^\star_{22} + \Lambda \varphi^\star_{11} = 0, \qquad \partial_2 \varphi^\star_{11} + \Theta \varphi^\star_{22} = 0,$$

et la condition (B) précédente est la condition de compatibilité de ces équations.

*b.* L'ensemble des conditions (A) et (B) comporte $2n$ relations liant seulement $2n-1$ fonctions. Le système différentiel constitué par les trois premières équations de (B) s'intègre sans difficulté, en considérant $\Lambda$, $\Theta$ et $K^\star$ comme les inconnues. Il peut arriver que le produit $\Lambda\Theta$ soit nul. En particulier, le fait que $\Theta$ soit nul signifie que le développement sur $T_2(x)$ de la différentielle d'un vecteur porté par $\vec{e}_1(x)$ est, lui aussi, porté par $\vec{e}_1(x)$. Nous allons faire successivement les hypothèses suivantes :

$\Lambda$ et $\Theta$ non identiquement nuls;
$\Theta$ nul;
$\Lambda$ et $\Theta$ nuls.

2. Métrique des variétés pour lesquelles $\Lambda$ et $\Theta$ ne sont pas identiquement nuls. — L'intégration des deux premières équations du système (B) introduit une fonction arbitraire de $u^1$ et une fonction arbitraire de $u^2$. Mais, dans la détermination du repère adapté à la déformation, nous n'avons astreint $u^1$ et $u^2$ qu'à être les paramètres variant seuls dans les directions $\vec{e}_1(x)$, $\vec{e}_2(x)$ respectivement, si bien que nous pouvons les supposer choisis de manière que

$$\Lambda = \Theta = K^\star.$$

Alors, d'après la troisième équation (B), $\Lambda$ vérifie une équation aux dérivées partielles du second ordre

$$\partial_1 \partial_2 \log \Lambda - 4\Lambda^2 = 0,$$

en laquelle nous reconnaissons l'équation de Liouville des surfaces à courbure totale constante et dont l'intégration introduit deux fonctions arbitraires $\varphi_1$ et $\varphi_2$ de $u^1$ et $u^2$ respectivement, ainsi que leurs dérivées $\varphi'_1$ et $\varphi'_2$

$$(II.32) \qquad \Lambda = \Theta = K^\star = \frac{(\varphi'_1 \varphi'_2)^{\frac{1}{2}}}{2(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

et, des conditions (A) et (B), il reste

$$(a) \qquad \begin{cases} \partial_1 F_{2\bar\theta} + \Lambda F_{1\bar\theta} = 0, \qquad \partial_2 F_{1\bar\theta} + \Lambda F_{2\bar\theta} = 0; \\ \delta^{\theta\psi} F_{1\theta} F_{2\psi} + \Lambda - \partial_1 \Lambda - \partial_2 \Lambda = 0. \end{cases}$$

Le calcul de $\varphi^{\star}_{11}$ et $\varphi^{\star}_{22}$ se fait sans difficulté, mettant en évidence le paramètre de déformation.

Il nous reste à vérifier l'existence de solutions du système ($a$). Considérons d'abord le cas $n = 3$; alors, d'après la dernière équation du système ($a$), on devrait avoir

$$\Lambda = e^{u^1 \psi(u^2 - u^1)},$$

ce qui est incompatible avec la valeur de $\Lambda$ donnée par (II.32). Ainsi se trouve démontré très simplement ce résultat bien connu [9] : *une surface de l'espace euclidien à trois dimensions ne peut être déformable avec conservation des directions principales sans que l'une des deux familles de lignes de courbure ne soit formée de géodésiques.*

Il n'en va plus de même dès que $n$ est supérieur à 3 : en effet, dans ce cas, les $F_{10}$, $F_{20}$ sont deux solutions quelconques des deux premières équations du système ($a$), tandis que les $F_{1\theta}$, $F_{2\theta}$ sont des solutions de ces mêmes équations liées par la troisième équation du système ($a$). Il existe de telles solutions, sinon, peut-être lorsque $\varphi_1$ et $\varphi_2$ sont des fonctions arbitraires d'un argument, du moins lorsque ces fonctions sont convenablement choisies, comme nous allons le montrer en donnant un exemple.

Pour la fin de ce numéro, nous conviendrons qu'il n'y a pas lieu de sommer par rapport à l'indice $\theta$ s'il figure deux fois dans un monôme et quelles que soient ses positions dans ce monôme. Ceci nous permet de poser

$$F_{1\theta} F_{2\theta} + M_\theta = 0,$$

de sorte que la dernière des conditions ($a$) devient

$$\text{(II.33)} \qquad \sum_{\theta=3}^{n-1} M_\theta = \Lambda - \partial_1 \Lambda - \partial_2 \Lambda,$$

tandis que les deux premières s'écrivent

$$F_{2\theta}\, \partial_1 F_{2\theta} = \Lambda M_\theta, \qquad \partial_2 \frac{M_\theta}{F_{2\theta}} = \Lambda F_{2\theta}.$$

En posant

$$N_\theta = (F_{2\theta})^2,$$

elles deviennent

$$\partial_1 N_\theta = 2 \Lambda M_\theta, \qquad \partial_2 N_\theta = 2 N_\theta\, \partial_2 \log M_\theta - 2 (N_\theta)^2 \frac{\Lambda}{M_\theta},$$

et ont pour condition de compatibilité

$$(N_\theta)^2\,\partial_1 \frac{\Lambda}{M_\theta} - N_\theta(\partial_1\,\partial_2 \log M_\theta - 4\Lambda^2) + \Lambda M_\theta\,\partial_2 \log \frac{\Lambda}{M_\theta} = 0;$$

elles constituent un système complètement intégrable si

$$\partial_1 \frac{\Lambda}{M_\theta} = 0, \qquad \partial_2 \frac{\Lambda}{M_\theta} = 0, \qquad \partial_1\,\partial_2 \log M_\theta - 4\Lambda^2 = 0,$$

et seulement dans ce cas auquel nous nous limiterons. Les conditions que nous venons d'obtenir sont compatibles avec les équations (II.32) et (II.33) et la solution générale de l'ensemble de ces équations est

$$\Lambda = \frac{1}{2a}\operatorname{ch}\frac{u^2-u^1}{a}, \qquad M_\theta = \frac{C_\theta^2}{2a}\operatorname{ch}\frac{u^2-u^1}{a};$$

les paramètres $u^1$ et $u^2$ sont définis à une constante additive près, $a$ et les $C_\theta$ sont $n-3$ constantes, les $C_\theta$, étant liées par la relation

$$\sum_{n=3}^{n-1} C_\theta^2 = 1.$$

Le calcul des $F_{i\theta}$ s'effectue aisément. On obtient, en introduisant $n-3$ nouvelles constantes arbitraires $b_\theta$,

$$\begin{aligned} F_{1\theta} &= \quad C_\theta\, e^{\frac{u^1}{a}}\left(e^{\frac{u^2}{2a}} - b_\theta\right)^{\frac{1}{2}}\left(e^{\frac{u^1}{2a}} + b_\theta\right)^{-\frac{1}{2}}\left(e^{\frac{u^1}{2a}} + e^{\frac{u^2}{2a}}\right)^{-\frac{1}{2}}, \\ F_{2\theta} &= -C_\theta\, e^{\frac{u^2}{a}}\left(e^{\frac{u^1}{2a}} + b_\theta\right)^{\frac{1}{2}}\left(e^{\frac{u^2}{2a}} - b_\theta\right)^{-\frac{1}{2}}\left(e^{\frac{u_1}{2a}} + e^{\frac{u^2}{2a}}\right)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Les $F_{i\theta}$ sont un couple de solutions quelconques des deux premières équations du système ($a$). Nous avons ainsi mis en évidence le fait qu'*il existe dans l'espace euclidien à n dimensions des variétés* $V_{n-1}$ *déformables avec persistance des directions principales, pourvu que n soit supérieur à* 3.

3. Métriques des variétés pour lesquelles $\Theta$ est identiquement nul. — Pour de telles variétés, s'il en existe, les conditions (A) et (B) se réduisent à

$$(\mathrm{A}') \qquad \partial_2 F_{1\bar\theta} = 0, \qquad \partial_1 F_{2\bar\theta} + \Lambda F_{1\bar\theta} = 0,$$

$$(\mathrm{B}') \qquad \partial_2 \frac{\Lambda}{K^\star} = 0, \qquad \partial_1\,\partial_2 \log K^\star = 0, \qquad K^\star = \partial_1 \Lambda - \delta^{\theta\psi} F_{1\theta} F_{2\psi}.$$

En choisissant convenablement les paramètres $u^1$ et $u^2$ et en désignant par $\lambda_1$ une fonction de $u^1$, de classe $C^2$ au moins, à dérivée première $\lambda'_1$ non identiquement nulle, on peut prendre, puisque $\Lambda$ et $K^\star$ ne sont pas nuls,

$$K^\star = 1, \qquad \Lambda = \lambda'_1,$$

tandis que les équations de Gauss et de Codazzi s'écrivent maintenant

$$\partial_2 \varphi^\star_{11} = 0, \qquad \partial_1 \varphi^\star_{22} + \lambda'_1 \varphi_{11} = 0, \qquad \varphi^\star_{11} \varphi^\star_{22} = 1,$$

et s'intègrent facilement

$$\varphi^\star_{11} = (k - \lambda_1)^{-\frac{1}{2}}, \qquad \varphi^\star_{22} = (k - \lambda_1)^{\frac{1}{2}},$$

mettant ainsi en évidence le paramètre de déformation $k$.

Considérons enfin les équations (A'); elles s'intègrent en introduisant $2(n-2)$ fonctions $\psi_{1\bar{\theta}}$ et $\psi_{2\bar{\theta}}$ de $u^1$ et $u^2$ respectivement : les fonctions $\psi_{10}$ et $\psi_{20}$ sont arbitraires, tandis que les $\psi_{i0}$ sont liés par une relation qui n'est autre que la dernière condition (B'). On obtient ainsi

$$(a') \qquad \left\{ \begin{array}{l} F_{1\bar{\theta}} = \dfrac{\psi_{1\bar{\theta}}}{\lambda'_1}, \qquad F_{2\bar{\theta}} = \psi_{2\bar{\theta}} - \psi_{1\bar{\theta}}, \\ \delta^{0\varphi}(\psi_{20} - \psi_{10})\psi'_{1\varphi} = (\lambda''_1 - 1)\lambda'_1. \end{array} \right.$$

L'ensemble de ces conditions admet des solutions, quel que soit $n \geqq 3$; ceci prouve que, *dans tout espace localement euclidien $V_n$, il existe des $V_{n-1}$ déformables avec persistance des directions principales pour lesquelles $\Theta$ est identiquement nul.*

4. Métriques des variétés pour lesquelles $\Lambda$ et $\Theta$ sont identiquement nuls. — Pour de telles variétés, les conditions (A) et (B) se réduisent à

$$(A'') \qquad \partial_2 F_{1\bar{\theta}} = 0, \qquad \partial_1 F_{2\bar{\theta}} = 0,$$

$$(B'') \qquad \partial_1 \partial_2 \log K^\star = 0, \qquad K^\star + \delta^{0\psi} F_{10} F_{2\psi} = 0.$$

$K^\star$ ne pouvant être identiquement nul, il est encore possible de choisir les paramètres $u^1$ et $u^2$ pour que

$$K^\star = 1.$$

Alors les conditions (A'') et (B'') sont satisfaites pourvu que les $F_{1\bar{\theta}}$ soient des fonctions de $u^1$, les $F_{2\bar{\theta}}$ des fonctions de $u^2$, les $F_{i0}$ étant liés par la relation

$$1 + \delta^{0\psi} F_{10} F_{2\psi} = 0,$$

tandis que les $\varphi^\star_{ik}$ se réduisent à deux constantes inverses l'une de l'autre :

$$\varphi^\star_{11} = k, \qquad \varphi^\star_{22} = \frac{1}{k}.$$

La condition liant les $F_{i0}$ montre l'impossibilité de l'existence, dans l'espace euclidien à trois dimensions, de surfaces déformables avec conservation des lignes de courbure, ces lignes étant des géodésiques de la surface. Par contre, dès que $n$ est supérieur à 3, il est possible de trouver des fonctions $F_{i0}$ satisfaisant à la condition imposée. Nous avons ainsi obtenu le dernier énoncé partiel : *dans un espace localement euclidien $V_n$, il existe des variétés $V_{n-1}$ déformables* *avec persistance des directions principales, pour lesquelles* $\Lambda$ *et* $\Theta$ *sont identiquement nuls, pourvu que n soit supérieur à* 3.

5. Conclusion. — En groupant les résultats partiels obtenus dans ce paragraphe, nous obtenons l'énoncé : *pour qu'une forme quadratique à* $n-1$ *variables puisse être considérée comme la métrique induite par plongement dans un espace* $V_n$ *localement euclidien sur une variété déformable avec persistance des directions principales, il faut et il suffit qu'elle puisse être écrite*

$$ds^2 = (F_1\, du^1)^2 + (F^2\, du^2)^2 + \delta^{\theta\psi}\, du^\theta\, du^\psi \qquad (\theta \in \{3, \ldots, n-1\}),$$

$F_1$ *et* $F_2$ *étant deux fonctions linéaires des* $u^\theta$ *et d'une variable d'homogénéité* $u^0$. *Les coefficients* $F_{i\bar\theta}(\theta \in \{0, 3, \ldots, n-1\})$ *de ces formes appartiennent à l'une des trois catégories suivantes :*

1° *Les* $F_i$ *sont solution du système*

$$(a) \qquad \begin{cases} \partial_1 F_{2\bar\theta} + \Lambda F_{1\bar\theta} = 0, & \partial_2 F_{1\bar\theta} + \Lambda F_{2\bar\theta} = 0; \\ \delta^{\theta\psi} F_{1\theta} F_{2\psi} + \Lambda - \partial_1 \Lambda - \partial_2 \Lambda = 0, & \partial_1 \partial_2 \log \Lambda - 4\Lambda^2 = 0. \end{cases}$$

2° *Les* $F_{i\bar\theta}$ *s'expriment à l'aide de fonctions* $\varphi_{1\bar\theta}$ *et* $\lambda_1$ *de* $u^1$ *et de fonctions* $\varphi_{2\bar\theta}$ *de* $u^2$ *de la manière suivante :*

$$F_{1\bar\theta} = \frac{\varphi'_{1\bar\theta}}{\lambda'_1}, \qquad F_{2\bar\theta} = \varphi_{2\bar\theta} - \varphi_{1\bar\theta};$$
$$\delta^{\theta\psi}(\varphi_{2\theta} - \varphi_{1\theta})\varphi'_{1\psi} = (\lambda''_1 - 1)\lambda'_1.$$

3° *Les* $F_{i\bar\theta}$ *sont des fonctions de* $u^1$, *les* $F_{2\bar\theta}$ *des fonctions de* $u^2$, *les* $F_{i\bar\theta}$ *étant liés par la relation*

$$1 + \delta^{\theta\psi} F_{1\theta} F_{2\psi} = 0.$$

Nous avons démontré, en outre, pour $n \geq 4$, l'existence de métriques correspondant à chacune de ces catégories, tandis que, pour $n = 3$, les métriques envisagées font nécessairement partie de la seconde catégorie.

## CHAPITRE III.

### Variétés déformables dans un espace a courbure constante.

Au cours de l'étude des $V_{n-1}$ localement déformables dans un espace de Riemann $V_n$ esquissée au paragraphe C des Préliminaires, nous avons signalé que des simplifications importantes s'introduisent non seulement dans le cas d'un espace $V_n$ localement euclidien que nous venons d'étudier, mais encore dans le cas d'un $V_n$ à courbure constante que nous allons envisager maintenant.

Nous nous proposons d'abord de montrer que l'existence de $V_{n-1}$ localement déformables dans un espace $V_n$ à courbure constante est étroitement liée à la dimension, contrairement à ce qu'affirment les traités classiques de géométrie riemannienne qui ne se préoccupent pas des conditions de compatibilité des équations de Gauss et de Codazzi. Cette étude fera l'objet du paragraphe A, tandis que, dans le paragraphe B, nous établirons rapidement, par des méthodes très analogues à celles qui nous ont servi dans les chapitres I et II, les différentes expressions possibles des métriques des $V_{n-1}$ localement déformables pour leur plongement dans un espace de Riemann $V_n$ à courbure constante.

### A. — Existence de variétés $V_{n-1}$ déformables dans un espace $V_n$ à courbure constante.

1. Remarque sur la métrique d'un espace a courbure constante. — Sur toute variété riemannienne $V_p$ à $p$ dimensions et à courbure constante K, il existe des systèmes de coordonnées qui permettent d'écrire la métrique sous une forme due à Bianchi [2] et employée, par exemple, par K. Yano [43]. Cette métrique est de signature quelconque, en général, si les coordonnées locales envisagées prennent toutes leurs valeurs dans l'espace numérique réel. Il est très simple de ramener la métrique à être toujours de type elliptique [25] : pour cela, il suffit de choisir, dans un voisinage suffisamment petit de chaque point, un système de coordonnées $u^\rho$ dont chacune est à valeurs soit réelles, soit imaginaires pures. Ceci donne à la métrique la forme cherchée, faisant jouer à la variable $u^p$ un rôle particulier

$$ds^2 = \frac{\delta_{\sigma\tau}\, du^\sigma\, du^\tau}{(\rho u^p)^2} \qquad (\sigma, \tau \in \{1, \ldots, p\}).$$

Dans cette formule, $\delta_{\sigma\tau}$ est le symbole de Kronecker et l'on a posé

$$K = -\rho^2.$$

Il est donc possible d'attacher à chaque point $x \in V_p$ un repère orthonormé $\{\vec{e}_\rho(x)\}$ dont le déplacement infinitésimal a pour composantes relatives

$$\text{(III.1)} \qquad \omega^\sigma = \frac{du^\sigma}{\rho\, u^p}, \qquad \omega_\tau{}^\sigma = \gamma_\tau{}^\sigma{}_\lambda\, \omega^\lambda.$$

Pour ces formes linéaires, les équations de structure sont

$$\text{(III.2)} \qquad d\omega^\sigma = \omega^\lambda \wedge \omega_\lambda{}^\sigma, \qquad d\omega_\tau{}^\sigma = \omega_\tau{}^\lambda \wedge \omega_\lambda{}^\sigma - K\, \delta_{\tau\lambda}\, \omega^\lambda \wedge \omega^\sigma.$$

La différentiation extérieure de la première formule du système (III.1) et l'identification du résultat obtenu avec la première formule du système (III.2) permet de calculer les coefficients de rotation de Ricci

$$\gamma_\lambda{}^\sigma{}_\tau = \frac{\rho}{2}(\delta_{\lambda\tau}\,\delta^\sigma{}_p - \delta_{\lambda p}\,\delta^\sigma{}_\tau).$$

Cette expression se simplifie en désignant par $\delta_\lambda{}^\sigma{}_{\tau p}$ le facteur entre parenthèses.

Ainsi

$$\gamma_{\lambda}{}^{\sigma}{}_{\tau} = \frac{\rho}{2}\,\delta_{\lambda}{}^{\sigma}{}_{\tau\rho}. \tag{III.3}$$

2. VARIÉTÉS $V_{n-1}$ PLONGÉES DANS UN ESPACE $V_n$ A COURBURE CONSTANTE. — Supposons donnée une telle variété et supposons, de plus, que les normales aux différents points de cette $V_{n-1}$ constituent un champ de vecteurs non nuls. A chacun des points $x$ de $V_{n-1}$, nous pouvons faire correspondre un repère orthonormé $\{\vec{e}_1(x), \ldots, \vec{e}_n(x)\}$ de la même manière que lorsque l'espace $V_n$ ambiant est localement euclidien. La $V_{n-1}$ est une hypersurface propre au sens de A. Fialkow [16].

Considérons, parmi les variétés $V_{n-1}$ ainsi plongées, celles sur la rigidité desquelles le théorème de Beez-Thomas ne nous donne aucun renseignement : nous sommes amenées à envisager, comme au paragraphe C des Préliminaires, des variétés localement déformables et des variétés localement développables.

Pour l'étude des $V_{n-1}$ localement déformables qui sera le but principal de ce chapitre, nous ferons, sur les indices, les mêmes conventions qu'aux chapitres I et II.

Pour ces variétés, les formules (7) et (8) des Préliminaires se réduisent encore aux formules (I.1). Il en résulte que, s'il existe dans un espace $V_n$ à courbure constante des variétés $V_{n-1}$ localement déformables, celle-ci doivent se répartir en catégories analogues à celles que nous avons obtenues dans le cas où $V_n$ est localement euclidien. Ces variétés peuvent donc, *a priori*, être :

*a*. des variétés régulièrement déformables;

*b*. des variétés déformables avec persistance d'une direction asymptotique;

*c*. des variétés déformables avec persistance de deux directions conjuguées distinctes.

Mais, contrairement au cas où $V_n$ est localement euclidien, nous aurons à considérer des conditions d'existence des $V_{n-1}$ qui font jouer un rôle essentiel à la dimension.

3. EXISTENCE DE VARIÉTÉS RÉGULIÈREMENT DÉFORMABLES. — Pour ces variétés, s'il en existe, tous les $\gamma_{0}{}^{i}{}_{K}$ sont nuls, sauf peut-être $\gamma_{\theta}{}^{1}{}_{1}$ et $\gamma_{\theta}{}^{2}{}_{2}$. Joint au fait que $V_n$ possède une connexion de variété riemannienne à courbure constante, ceci entraîne que les équations de structure relatives aux formes $\omega^{\theta}$, $\omega_{\psi}{}^{\theta}$ s'écrivent

$$d\omega^{\theta} = \omega^{\varphi} \wedge \omega_{\varphi}{}^{\theta}, \qquad d\omega_{\psi}{}^{\theta} = \omega_{\psi}{}^{\varphi} \wedge \omega_{\varphi}{}^{\theta} - \mathrm{K}\,\delta_{\psi\varphi}\omega^{\varphi} \wedge \omega^{\theta}. \tag{III.4}$$

Au point $x \in V_{n-1}$, considérons la variété $V_{n-3}(x)$ introduite dans le chapitre préliminaire; c'est, d'après le système (III.4), une variété à courbure constante K, comme il résulte, d'ailleurs, du dernier théorème énoncé dans les Préliminaires. Ceci permet, d'après les formules (III.1), de prendre pour expression des $\omega^0$

$$\omega^0 = \frac{1}{\rho x^p}\, du^0,$$

sans qu'il soit nécessaire de préciser la valeur de l'indice $p$ astreint seulement à la condition

$$3 \leqq p \leqq n - 1$$

et les valeurs des $\gamma_{\theta}{}^{\psi}{}_{\varphi}$ sont données par les équations (III.3).

Par différentiation extérieure de l'équation $\omega_{\theta}{}^{i} = \gamma_{\theta}{}^{1}{}_{1}\, \omega^i$, il vient alors

$$\omega_{\theta}{}^{K} \wedge \omega_{K}{}^{i} - K\, \delta_{\theta\psi} \omega^{\psi} \wedge \omega^i = (d\gamma_{\theta}{}^{1}{}_{1}) \wedge \omega^i + \gamma_{\theta}{}^{1}{}_{1}\, d\omega^i.$$

Après simplification, il reste

$$(\gamma_{\varphi}{}^{1}{}_{1} \gamma_{\theta}{}^{\varphi}{}_{\psi} - K\, \delta_{\theta\psi})\, \omega^{\psi} \wedge \omega^i = (d\gamma_{\theta}{}^{1}{}_{1}) \wedge \omega^i + \gamma_{\theta}{}^{1}{}_{1} \gamma_{\psi}{}^{1}{}_{1}\, \omega^{\psi} \wedge \omega^i.$$

Soit $\delta_K$ l'opérateur de dérivation pfaffienne. Les formes $\omega^K$ étant $n - 1$ formes indépendantes, l'équation quadratique précédente est équivalente au système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre suivant

$$\text{(III.5)} \qquad \delta_k \gamma_{\theta}{}^{1}{}_{1} = 0, \qquad \delta_{\psi} \gamma_{\theta}{}^{1}{}_{1} = \gamma_{\theta}{}^{\varphi}{}_{\psi} \gamma_{\varphi}{}^{1}{}_{1} - \gamma_{\theta}{}^{1}{}_{1} \gamma_{\psi}{}^{1}{}_{1} - K\, \delta_{\theta\psi}.$$

Les dernières équations de ce système sont au nombre de $(n - 3)^2$; dans le reste de ce numéro, nous montrerons leur incompatibilité pour $n > 4$.

D'après la convention d'Einstein rappelée au n° 2 du paragraphe A des Préliminaires, il n'y a pas lieu de sommer par rapport à un indice figurant deux fois dans un même monôme et dans la même position covariante. Compte tenu de cette remarque, considérons en particulier, dans le système (III.5), les quatre équations suivantes :

$$\text{(III.6)} \qquad \begin{cases} \delta_0 \gamma_{\theta}{}^{1}{}_{1} = \dfrac{\rho}{2} \gamma_{p}{}^{1}{}_{1} - (\gamma_{\theta}{}^{1}{}_{1})^2 - K, & \delta_0 \gamma_{p}{}^{1}{}_{1} = -\dfrac{\rho}{2} \gamma_{\theta}{}^{1}{}_{1} - \gamma_{p}{}^{1}{}_{1} \gamma_{\theta}{}^{1}{}_{1}, \\ \delta_p \gamma_{\theta}{}^{1}{}_{1} = -\gamma_{\theta}{}^{1}{}_{1} \gamma_{p}{}^{1}{}_{1}, & \delta_p \gamma_{p}{}^{1}{}_{1} = -(\gamma_{p}{}^{1}{}_{1})^2 - K \end{cases}$$

dans lesquelles on a substitué aux $\gamma_{\theta}{}^{\varphi}{}_{\psi}$ leurs valeurs (III.3) et supposé $\theta \neq p$, ce qui implique $n > 4$.

Soit $\partial_K$ l'opérateur de dérivation ordinaire; d'après (III.1) les opérateurs $\delta_0$ et $\partial_0$ sont liés par la relation

$$\text{(III.7)} \qquad \delta_0 = \rho\, x^p \partial_0,$$

de sorte que les deux équations de droite du système (III.6) s'écrivent

$$\rho x^p \partial_0 \gamma_{p}{}^{1}{}_{1} = -\left(\frac{\rho}{2} + \gamma_{p}{}^{1}{}_{1}\right) \gamma_{\theta}{}^{1}{}_{1},$$

$$\rho x^p \partial_p \gamma_{p}{}^{1}{}_{1} = -(\gamma_{p}{}^{1}{}_{1})^2 - K.$$

De la première, nous déduisons

$$\rho x^p \partial_p \partial_0 \gamma_p{}^1{}_1 = -\rho\, \partial_0 \gamma_p{}^1{}_1 - \left(\frac{\rho}{2} + \gamma_p{}^1{}_1\right) \partial_p \gamma_0{}^1{}_1 - \gamma_0{}^1{}_1\, \partial_p \gamma_p{}^1{}_1;$$

tandis que la seconde donne

$$\rho x^p\, \partial_0\, \partial_p \gamma_p{}^1{}_1 = -2\gamma_p{}^1{}_1 \partial_0 \gamma_p{}^1{}_1.$$

De ces deux relations, à cause de la permutabilité de l'ordre des dérivations ordinaires, on déduit l'identité

$$(\rho - 2\gamma_p{}^1{}_1)\, \partial_0 \gamma_p{}^1{}_1 + \left(\frac{\rho}{2} + \gamma_p{}^1{}_1\right) \partial_p \gamma_0{}^1{}_1 + \gamma_0{}^1{}_1\, \partial_p \gamma_p{}^1{}_1 = 0,$$

qui, compte tenu des équations (III.6) et de la relation $K = -\rho^2$, se réduit à

$$\rho(\gamma_p{}^1{}_1 - \rho)\, \gamma_0{}^1{}_1 = 0.$$

Cette condition constitue la condition de compatibilité de deux des équations du système (III.6), mais elle est incompatible, pour $\rho \neq 0$, avec l'ensemble des équations de ce système, ce qui prouve que, *pour* $n \geq 5$, *aucun espace* $V_n$ *à* $n$ *dimensions et à courbure constante non nulle ne contient de variétés* $V_{n-1}$ *régulièrement déformables*.

4. EXISTENCE DE VARIÉTÉS DÉFORMABLES AVEC PERSISTANCES DE DIRECTIONS CONJUGUÉES. — Nous envisagerons successivement le cas où les deux directions conjuguées sont confondues et celui où elles sont distinctes.

*a. Variétés à directions asymptotiques persistantes.* — D'un raisonnement identique à celui que nous avons fait au n° 2 du paragraphe B du chapitre I, il résulte que, s'il existe une $V_{n-1}$ déformable avec persistance, en chaque point, d'une direction asymptotique pour son plongement dans un espace $V_n$ à courbure constante, la variété $V_{n-2}(x)$ totalement géodésique dans $V_n$, contenant le point $x$ de $V_{n-1}$ et vérifiant $\omega^1 = 0$ est contenue dans $V_{n-1}$; ainsi $V_{n-1}$ est un lieu géométrique de variétés à $n-2$ dimensions et à courbure constante K.

D'après la formule (III.3), tous les $\gamma_0{}^2{}_\psi$ ne peuvent être nuls sans que K le soit. Cette propriété est, d'après le n° 6, paragraphe C des Préliminaires, en contradiction avec la structure de variété déformable de $V_{n-1}$ pour son plongement dans un espace à courbure constante K non nulle. Il en résulte que : *pour* $n > 3$, *aucun espace* $V_n$ *à courbure constante non nulle ne contient de variété* $V_{n-1}$ *localement déformable avec persistance d'une direction asymptotique*.

*b. Variétés à directions conjuguées persistantes distinctes.* — L'étude de ces variétés présente une très grande analogie avec celle que nous avons faite ci-dessus pour les variétés régulièrement déformables.

Supposons qu'il existe une variété $V_{n-1}$ déformable avec persistance de deux directions conjuguées $\vec{e}_1(x)$, $\vec{e}_2(x)$ au point $x$. Considérons la variété $V_{n-3}(x)$ attachée au point $x$ qui, d'après les résultats obtenus dans les Préliminaires, est totalement géodésique à la fois dans $V_{n-1}$ et dans $V_n$. Dans le cas actuel, $V_{n-3}(x)$ est donc localement une variété à courbure constante K. Par suite, de même qu'au n° 3 du paragraphe A du chapitre précédent, nous pouvons définir au point $x$ de $V_{n-1}$ un repère adapté à la déformation, pour lequel nous avons

$$\text{(III.8)} \qquad \omega^i = du^i, \qquad \omega^0 = \frac{1}{\rho u^p} du^0 + \gamma^0{}_i du^i;$$

les relations liant les opérateurs $\delta_0$ et $\partial_0$ sont encore les relations (III.7). Considérons les $n-3$ formes

$$\omega_0{}^i = \gamma_0{}^1{}_1 \omega^i.$$

Par différentiation extérieure, nous en déduisons les valeurs des $\delta_K \gamma_0{}^1{}_1$. Pour les $\delta_i \gamma_0{}^1{}_1$, nous trouvons des expressions identiques à celles qui sont fournies par le système (II.13), tandis que nous obtenons

$$\delta_\psi \gamma_0{}^1{}_1 = \gamma_0{}^\varphi{}_\psi \gamma_\varphi{}^1{}_1 - \gamma_0{}^1{}_1 \gamma_\psi{}^1{}_1 - K\,\delta_{0\psi},$$

expression identique à celle fournie par le système (III.5). Par un raisonnement identique à celui que nous avons fait au n° 3, nous en déduisons que, *pour $n \geqq 5$, aucun espace $V_n$ à $n$ dimensions et à courbure constante non nulle ne contient de variétés $V_{n-1}$ localement déformables avec persistance de deux directions conjuguées distinctes.*

5. Existence de variétés développables. Conclusion. — Pour compléter l'étude de la rigidité des $V_{n-1}$ plongées dans un espace de Riemann $V_n$ à courbure constante, il nous reste à examiner le cas des $V_{n-1}$ développables. Reprenons les notations et les premiers résultats obtenus au paragraphe C des Préliminaires. La première relation du système (3) devient

$$\delta_\Psi \gamma_\Theta{}^1{}_1 = \gamma_\Theta{}^\Phi{}_\Psi \gamma_\Phi{}^1{}_1 - \gamma_\Theta{}^1{}_1 \gamma_\Psi{}^1{}_1 - K\,\delta_{\Theta\Psi};$$

elle est analogue à la seconde relation du système (III.5) et, comme cette dernière, résume un système d'équations aux dérivées partielles incompatibles pour $K \neq 0$ dès que les indices grecs peuvent prendre au moins deux valeurs différentes, c'est-à-dire dans le cas actuel, dès que $n$ est au moins égal à 4. Nous avons ainsi démontré que, *pour $n \geqq 4$, aucun espace $V_n$ à $n$ dimensions et à courbure constante non nulle ne contient de variétés $V_{n-1}$ développables.*

*Remarque.* — Ce résultat aurait pu être obtenu sans aucun calcul, comme conséquence des propriétés des variétés localement développables avec persistance d'une direction principale, propriétés qui ont été étudiées au paragraphe C des Préliminaires. De ces propriétés, il résulte en effet que, s'il existe une $V_{n-1}$ développable :

*a*. il existe, parmi les variétés isométriques à $V_{n-1}$, une variété totalement géodésique dans $V_n$, donc à courbure constante K;

*b*. il existe, en chaque point $x \in V_{n-1}$ une variété $V_{n-2}(x)$, elle-même totalement géodésique dans $V_n$, donc de même courbure constante K. Par suite, les métriques de $V_{n-1}$ et $V_{n-2}(x)$ sont irréductibles, ce qui est incompatible avec la forme générale établie au n° 4 du paragraphe cité.

Groupons les résultats partiels concernant les $V_{n-1}$ plongées dans un espace $V_n$ à courbure constante. Nous obtenons l'énoncé suivant :

*Toute variété $V_{n-1}$ à $n-1$ dimensions plongée dans un espace de Riemann $V_n$ à $n$ dimensions à courbure constante non nulle est intrinsèquement rigide pour la métrique induite par ce plongement dès que $n$ est supérieur à 4. De plus, dans un espace $V_4$ à courbure constante non nulle, il n'existe ni $V_3$ développable, ni $V_3$ déformable avec persistance en chacun de ses points, d'une direction asymptotique.*

### B. — Variétés $V_3$ déformables dans un espace $V_4$ à courbure constante.

1. Les $V_3$ régulièrement déformables d'une $V_4$. — Dans ce paragraphe B, nous nous proposons essentiellement de déterminer l'expression générale de la métrique des $V_3$ localement déformables pour leur plongement dans l'espace $V_4$ à courbure constante non nulle et nous étudions d'abord les $V_3$ régulièrement déformables pour lesquelles le système (III.5) se réduit aux trois équations

$$\text{(III.9)} \qquad \partial_k \gamma_3{}^1{}_1 = 0, \qquad \partial_3 \gamma_3{}^1{}_1 + (\gamma_3{}^1{}_1)^2 - \rho^2 = 0.$$

La forme de Pfaff $\omega^3$ est maintenant une différentielle exacte. Nous poserons

$$\omega^3 = dx^3,$$

de sorte que l'opérateur $\partial_3$ sera l'opérateur de dérivation ordinaire par rapport à $x^3$. D'autre part, il résulte de la déformabilité de $V_3$ que le système $\omega^i = 0$ est complètement intégrable. Nous continuerons à désigner par $u^i$ deux intégrales premières quelconques, mais indépendantes, de ce système.

Dans ces conditions, nous pouvons intégrer le système (III.9). Nous remarquons d'abord que, $\rho$ n'étant pas nul, ce système n'admet jamais de solution nulle : la première famille de variétés régulièrement déformables dans un $V_4$ à courbure constante non nulle est vide.

La solution générale du système (III.9) est, A et B désignant deux constantes arbitraires,

$$\gamma_3{}^1{}_1 = \rho(A\, e^{\rho x^3} - B\, e^{-\rho x^3})/(A\, e^{\rho x^3} + B\, e^{-\rho x^3}).$$

Les équations de structure relatives aux formes $\omega^i$ s'écrivent

$$d\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k{}^i + \gamma_3{}^1{}_1\, dx^3 \wedge \omega^1,$$

et, puisque les $u^i$ sont deux intégrales premières indépendantes du système $\omega^i = 0$, nous cherchons des fonctions $F^i{}_k$ telles que

$$\omega^i = F^i{}_k\, du^k.$$

Des valeurs de $d\omega^i$ et de $\gamma_3{}^1{}_1$, nous déduisons

$$\partial_3 F^i{}_k = \rho F^i{}_k (A\, e^{\rho x^3} - B e^{-\rho x^3})/(A\, e^{\rho x^3} + B\, e^{-\rho x^3}),$$

d'où nous déduisons, par une intégration introduisant une fonction C non nulle, indépendante de $u^3$

$$F^i{}_k = C(A\, e^{\rho x^3} + B\, e^{-\rho x^3}),$$

ce qui nous permet de poser

$$\omega^i = (A\, e^{\rho x^3} + B\, e^{-\rho x^3})\, \omega^{\star i},$$

les $\omega^{\star i}$ désignant deux formes de Pfaff quelconques de deux variables $u^1$ et $u^2$.

Pour achever l'étude des variétés régulièrement déformables, il nous reste à vérifier la compatibilité des équations de Gauss et Codazzi provenant de la différentiation extérieure de $\omega_1{}^2$, $\omega_1{}^4$ et $\omega_2{}^4$. Nous ne ferons qu'esquisser cette vérification qui ne présente, avec celle faite, au paragraphe A du chapitre I, pour les variétés régulièrement déformables dans un espace localement euclidien, d'autres différences que celles provenant de la structure des espaces ambiants $V_n$. Nous considérerons encore, en effet, une variété auxiliaire $V_2^\star$ dont la métrique, induite par plongement dans un espace de Riemann $V_3^\star$ sera $\delta_{ik}\omega^{\star i}\omega^{\star k}$. Pour cette variété, les équations de Codazzi nous conduisent à prendre comme composantes $\varphi_{ik}^\star$ du tenseur asymptotique, des fonctions de $u^1$ et $u^2$ liées à celles, $\varphi_{ik}$, de $V_3$, par les relations

$$\varphi_{ik}^\star = (A\, e^{\rho x^3} + B\, e^{-\rho x^3})\, \varphi_{ik}.$$

D'autre part, on a

$$\omega_1^{\star 2} = \omega_1{}^2,$$

d'où l'on déduit la relation

$$d\omega_1^{\star 2} = \omega_1{}^3 \wedge \omega_3{}^2 + \omega_1{}^4 \wedge \omega_4{}^2 + \rho^2 \omega^1 \wedge \omega^2,$$

équivalente à

$$\varphi_{11}^\star \varphi_{22}^\star - \varphi_{12}^\star \varphi_{21}^\star = R_{12,12}^\star - 2\rho^2 AB,$$

de sorte que nous avons ramené le problème envisagé à l'étude des variétés $V_2^\star$ plongées dans un espace de Riemann $V_3^\star$ à courbure constante $\rho^2 AB$. L'application du théorème de Cauchy-Kowalewska montre la déformabilité de nos $V_3$ et nous pouvons énoncer :

*Dans tout espace $V_4$ à courbure constante $-\rho^2$, il existe des $V_3$ régulièrement* *déformables; la métrique induite sur* $V_3$ *par son plongement dans* $V_4$ *peut être écrite*

$$ds^2 = (A\, e^{\rho x^3} + B\, e^{-\rho x^3})^2 \delta_{ik} \omega^{\star i} \omega^{\star k} + (dx^3)^2;$$

*les* A, B *sont deux constantes quelconques et les* $\omega^{\star i}$ *deux formes de Pfaff indépendantes, quelconques, de deux variables* $u^i$.

2. Forme nécessaire de la métrique des $V_{n-1}$ a directions conjuguées persistantes. — L'étude que nous nous proposons de faire dans le reste de ce chapitre présente de très grandes ressemblances avec celle que nous avons développée au chapitre II, aussi nous bornerons-nous à esquisser les calculs, en mettant clairement en évidence le rôle de la structure de variété à courbure constante des $V_4$ dans lesquelles sont maintenant plongées les $V_3$ déformables.

Supposons donc connue une $V_3$ plongée dans un espace $V_4$ à courbure constante et localement déformable, avec persistance de deux directions conjuguées, pour la métrique induite par ce plongement. Nous avons vu, au paragraphe A ci-dessus, que ces deux directions sont nécessairement distinctes et que nous pouvons attacher au point $x \in V_3$ le repère adapté à la déformation de $V_3$. Par rapport à ce repère, l'équation de structure relative à $\omega^3$ se réduit à

$$d\omega^3 = g_{12}(\gamma_3{}^1{}_1 - \gamma_3{}^2{}_2)\, du^1 \wedge du^2, \tag{III.10}$$

et, au lieu de la première équation du système (II.7), on a

$$\omega^3 = dx^3 + \gamma^3{}_i\, du^i, \tag{III.11}$$

tandis que la seconde disparaît.

Par différentiation extérieure de cette équation (III.11) et identification du résultat obtenu avec (III.10), on obtient

$$\partial_3 \gamma^3{}_i = 0, \qquad \partial_1 \gamma^3{}_2 - \partial_2 \gamma^3{}_1 = g_{12}(\gamma_3{}^1{}_1 - \gamma_3{}^2{}_2).$$

Ainsi $\gamma^3{}_i\, du^i$ est une forme de Pfaff à coefficients ne dépendant que des $u^i$ Considérons les $2(n-3)$ formes

$$\omega_3{}^1 = \gamma_3{}^1{}_1 \omega^1, \qquad \omega_3{}^2 = \gamma_3{}^2{}_2 \omega^2.$$

Par différentiation extérieure, nous en déduisons des équations quadratiques équivalentes à

$$\left\{\begin{array}{ll} \partial_2 \gamma_3{}^1{}_1 = (\gamma_3{}^2{}_2 - \gamma_3{}^1{}_1)\, \gamma_1{}^1{}_2, & \partial_1 \gamma_3{}^2{}_2 = \gamma_3{}^1{}_1 - \gamma_3{}^2{}_2)\, \gamma_2{}^2{}_1, \\ \partial_3 \gamma_3{}^1{}_1 + (\gamma_3{}^1{}_1)^2 + K = 0, & \partial_3 \gamma_3{}^2{}_2 + (\gamma_3{}^2{}_2)^2 + K = 0. \end{array}\right. \tag{III.12}$$

Par une intégration analogue à celle que nous avons faite pour les $V_3$ régulièrement déformables de $V_4$, nous déduisons, des deux dernières équations du système (III.12), *qu'il doit nécessairement exister, au point x de* $V_3$, *deux fonctions*

$$F_i = A_i\, e^{\rho x^3} + B_i\, e^{-\rho x^3},$$

*dont les coefficients ne dépendent que des $u^i$ et qui permettent, dans le repère adapté à la déformation, de mettre les composantes du tenseur métrique de $V_3$ sous la forme*

$$g_{11} = (F_1)^2, \qquad g_{12} = F_1 F_2 \cos\Omega, \qquad g_{22} = (F_2)^2, \qquad g_{31} = \delta_{31}. \tag{III.13}$$

Remarquons que les opérateurs $\partial_{\mathrm{I}}$ et $\delta_{\mathrm{I}}$ que nous avons employés vérifient les relations

$$\delta_k = \partial_k - \gamma^3{}_k \partial_3, \qquad \delta_3 = \partial_3. \tag{III.14}$$

3. Conditions nécessaires et suffisantes de déformabilité a directions conjuguées persistantes. — L'équation de structure relative à la forme $\omega_1{}^2$ s'écrit

$$d\omega_1{}^2 = \omega_1{}^3 \wedge \omega_3{}^2 + \omega_1{}^4 \wedge \omega_4{}^2 - K\omega^1 \wedge \omega^2.$$

C'est une équation quadratique par rapport aux formes $\omega^{\mathrm{I}}$ et, en raison de l'indépendance de ces formes, elle est équivalente à certaines des équations de Gauss dont la première peut être écrite

$$R_1{}^2{}_{,12} + \gamma_1{}^3{}_1 \gamma_3{}^2{}_2 - g^{22}(\varphi_{11}\varphi_{22} + Kg) = 0, \tag{III.15}$$

où l'on a posé

$$g = \text{Dét}(g_{ik}), \qquad R_1{}^2{}_{,12} = \delta_2 \gamma_1{}^2{}_1 - \delta_1 \gamma_1{}^2{}_2 + (\gamma_1{}^1{}_1 - \gamma_2{}^2{}_1)\gamma_1{}^2{}_2 + (\gamma_2{}^2{}_2 - \gamma_1{}^1{}_2)\gamma_2{}^1{}_1;$$

elle remplace la première des équations (II.21) dont les autres subsistent sans modification. A partir de ces dernières équations, un raisonnement, identique à celui qui fut fait au n° 2, du paragraphe B du chapitre II, et qui ne sera pas répété, introduit deux fonctions $\Lambda$ et $\Theta$ des seules variables $u^k$, et montre que les $A_i$, $B_i$ sont soumis aux conditions

$$\left\{\begin{aligned} &\nabla_1 A_2 + \Lambda A_1 + \Theta A_2 \cos\Omega = 0, \qquad \nabla_1 B_2 + \Lambda B_1 + \Theta B_2 \cos\Omega = 0;\\ &\nabla_2 A_1 + \Theta A_2 + \Lambda A_1 \cos\Omega = 0, \qquad \nabla_2 B_1 + \Theta B_2 + \Lambda B_1 \cos\Omega = 0, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

dans lesquelles $\nabla_k$ est l'opérateur de dérivation pfaffienne covariante.

Parmi les équations du système (III.12), les deux premières n'ont pas encore été utilisées. Un calcul sans difficultés montre qu'elles sont identiquement satisfaites pourvu que les conditions (1) soient réalisées.

Les équations de Codazzi, analogues à celles qu'on obtient pour les variétés régulièrement déformables, conduisent à introduire deux fonctions $\overset{\star}{\varphi}_{11}$ et $\overset{\star}{\varphi}_{22}$ de $u^1$ et $u^2$ telles que

$$\overset{\star}{\varphi}_{11} = F_1 \varphi_{11}, \qquad \overset{\star}{\varphi}_{22} = F_2 \varphi_{22},$$

et, tous calculs faits, l'équation de Gauss (III.15) prend la forme

$$\frac{K^\star}{\sin\Omega} = \partial_1(\Lambda \sin\Omega) + \partial_2(\Theta \sin\Omega) - \partial_1\partial_2\Omega + 2\rho^2(A_1B_2 + A_2B_1)\sin\Omega,$$

où l'on a posé

$$\overset{\star}{\varphi}_{11}\overset{\star}{\varphi}_{22} = K^\star.$$

La condition obtenue, au n° 2 précédent, entre les $\partial_i \gamma^3{}_k$ s'écrit maintenant

$$(1) \qquad \partial_1 \gamma^3{}_2 - \partial_2 \gamma^3{}_1 = 2\rho\,(A_1 B_2 - A_2 B_1)\cos\Omega.$$

La condition de compatibilité des équations de Codazzi s'obtient de la même manière qu'au n° 4, paragraphe B du chapitre II et se présente sous la forme déjà obtenue : elle se compose des trois premières équations du système (II).

Au total, nous avons obtenu neuf relations liant les dix fonctions de $u^1$ et $u^2$ suivantes : $\gamma^3{}_i$, $A_i$, $B_i$, $K^\star$, $\Lambda$, $\Theta$ et $\Omega$, ce qui montre que la métrique de la plus générale des $V_3$ cherchées dépend d'une fonction de deux variables et nous avons ainsi démontré que : *Dans tout espace $V_4$ à quatre dimensions et à courbure constante $K = -\rho^2$ non nulle, il existe des $V_3$ non minima, déformables avec persistance de deux directions conjuguées distinctes. La métrique de cette $V_3$ peut être écrite $ds^2 = g_{IK}\,\omega^I \omega^K$, avec d'une part,*

$$\omega^i = du^i, \qquad \omega^3 = dx^3 + \gamma^3{}_i\, du^i,$$

*et, d'autre part,*

$$g_{11} = (A_1 e^{\rho x^3} + B_1 e^{-\rho x^3})^2, \qquad g_{12} = (A_1 e^{\rho x^3} + B_1 e^{-\rho x^3})^2 (A_2 e^{\rho x^3} + B_2 e^{-\rho x^3})\cos\Omega,$$
$$g_{22} = (A_2 e^{\rho x^3} + B_2 e^{-\rho x^3}), \qquad g_{3I} = \delta_{3I}.$$

*Les $A_i$, $B_i$, $\gamma^3{}_i$ et $\Omega$ sont des fonctions de $u^1$ et de $u^2$ soumises aux conditions suivantes :*

$$(1) \qquad \partial_1 \gamma^3{}_2 - \partial_2 \gamma^3{}_1 = 2\rho\,(A_1 B_2 - A_2 B_1)\cos\Omega,$$

$$(1) \qquad \begin{cases} \nabla_1 A_2 + \Lambda A_1 + \Theta A_2 \cos\Omega = 0, & \nabla_1 B_2 + \Lambda B_1 + \Theta B_2 \cos\Omega = 0\,; \\ \nabla_2 A_1 + \Theta A_2 + \Lambda A_1 \cos\Omega = 0, & \nabla_2 B_1 + \Theta B_2 + \Lambda B_1 \cos\Omega = 0\,; \end{cases}$$

$$(3) \qquad \begin{cases} \partial_1 \log \dfrac{\partial_1 \log \operatorname{tg}\dfrac{\Omega}{2} - \Theta}{K^\star} + 2\,\Theta\cos\Omega = 0, \\[2ex] \partial_2 \log \dfrac{\partial_2 \log \operatorname{tg}\dfrac{\Omega}{2} - \Lambda}{K^\star} + 2\,\Lambda\cos\Omega = 0, \\[2ex] \partial_1 \partial_2 \log K^\star - \partial_1(\Lambda\cos\Omega) - \partial_2(\Theta\cos\Omega) - 4\left(\dfrac{\partial_1\Omega}{\sin\Omega} - \Theta\right)\left(\dfrac{\partial^2\Omega}{\sin\Omega} - \Lambda\right) = 0, \\[2ex] \dfrac{K^\star}{\sin\Omega} = \partial_1(\Lambda\sin\Omega) + \partial_2(\Theta\sin\Omega) - \partial_1\partial_2\Omega + 2\rho^2(A_1 B_2 + A_2 B_1)\sin\Omega. \end{cases}$$

4. Remarques. — *a*. En supposant $g_{11}$ et $g_{22}$ non identiquement nuls, nous avons exclu les variétés minima. Un calcul, analogue à celui qui a été fait à la fin du paragraphe B du chapitre II, montre que : *Dans tout espace $V_4$ à quatre dimensions et à courbure constante $K = -\rho^2$ non nulle, il existe des $V_3$ minima déformables localement. La métrique d'une telle $V_3$ peut être écrite $ds^2 = g_{IK}\,\omega^I\omega^K$, avec d'une part*

$$\omega^i = du^i, \qquad \omega^3 = dx^3 + \gamma^3{}_i\, du^i,$$

*et, d'autre part,*

$$g_{11}=0, \qquad g_{12}=(A_1 e^{\rho x^3}+B_1 e^{-\rho x^3})(A_2 e^{\rho x^3}+B_2 e^{-\rho x^3}), \qquad g_{22}=0, \qquad g_{3I}=\delta_{3I},$$

*les* $A_i$, $B_i$, $\gamma^3{}_i$ *sont liés par les conditions*

$$\partial_1\gamma^3{}_2-\partial_2\gamma^3{}_1=2\rho(A_1B_2-A_2B_1),$$
$$\nabla_2 A_1+\Lambda A_1=0, \qquad \nabla_2 B_1+\Lambda B_1=0;$$
$$\nabla_1 A_2=0, \qquad \nabla_1 B_2=0;$$
$$\partial_1\partial_2 \log K^\star-\partial_1\Lambda=0, \qquad K^\star=\partial_1\Lambda+2\rho^2(A_1B_2+A_2B_1).$$

*b*. Dans la Note sur la rigidité des $V_{n-1}$ d'un espace riemannien $V_n$ à courbure constante, nous avons donné des expressions des métriques des $V_3$ localement déformables différentes des précédentes, bien qu'équivalentes. Ces autres expressions ont l'avantage de mettre en évidence une correspondance locale conforme entre les $V_3$ régulièrement déformables d'un espace $V_4$ à courbure constante et les variétés de la première famille régulièrement déformables de $V_3$ plongées dans un espace localement euclidien à quatre dimensions. Mais ces expressions ne nous seraient d'aucune utilité dans les considérations globales que nous allons aborder au prochain chapitre : c'est pourquoi nous ne les reproduirons pas dans ce travail.

## CHAPITRE IV.

### QUELQUES PROPRIÉTÉS GLOBALES DES VARIÉTÉS $V_{n-1}$ PLONGÉES DANS UN ESPACE DE RIEMANN $V_n$.

Dans les trois chapitres précédents, nous ne nous sommes occupés que de considérations locales sur les variétés $V_{n-1}$ à $n-1$ dimensions, localement déformables pour leur plongement dans un espace de Riemann $V_n$ à $n$ dimensions. Les études faites, cependant, entraînent des résultats sur la structure globale des $V_{n-1}$ envisagées. Dans les paragraphes A et B de ce quatrième chapitre, nous nous proposons d'exposer quelques résultats qui découlent d'une manière particulièrement simple de l'étude précédente. Ceci nous amènera à étudier, au paragraphe C, la réductibilité des variétés riemanniennes $V_{n-1}$ plongées dans l'espace euclidien $R_n$.

Peu de travaux de nature globale ont été publiés sur le plongement isométrique d'une variété dans une autre [11]. Je signalerai seulement ceux de C. Tompkins, S. S. Chern et N. H. Kuiper, J. Nash, S. B. Myers, A. Lichnerowicz. Parmi les auteurs cités, les premiers, du reste, se placent à un point de vue entièrement différent du nôtre : ils recherchent le nombre minimum de dimensions de l'espace euclidien dans lequel peut être plongée isométriquement une variété riemannienne compacte donnée [12], [37] ou une manière de réaliser ce plongement par des approximations successives [18], [28]. Seuls, S. B. Myers et A. Lichnerowicz considèrent des $V_{n-1}$ plongées dans l'espace euclidien ou dans un espace à courbure constante à $n$ dimensions; les méthodes employées par S. B. Myers [27] basées sur certaines propriétés des géodésiques des espaces complets, présentent de grandes analogies avec celles que nous utiliserons au paragraphe A.

Nous laisserons de côté les questions de rigidité globale des $V_{n-1}$ plongées dans $V_n$.

## A. — Structure des variétés localement déformables plongées dans un espace complet.

1. Une propriété des $V_{n-1}$ plongées dans $V_n$. — Dans toute cette section A, nous considérons une variété $V_{n-1}$ à $n-1$ dimensions, sous-variété d'un espace de Riemann complet, $V_n$, à $n$ dimensions, $V_{n-1}$ étant elle-même complète pour la métrique induite par son plongement dans $V_n$. Nous supposons, en outre, que $V_{n-1}$, $V_n$ et les fonctions réalisant l'immersion de $V_{n-1}$ dans $V_n$ sont de classe de différentiation $C^5$ au moins, puisque $C^5$ est la classe minima nécessaire à l'étude d'une $V_{n-1}$ quelconque, mais localement déformable dans $V_n$.

A chaque point $x \in V_{n-1}$, associons le repère de $V_n$ défini, au paragraphe B des Préliminaires, pour les variétés plongées; $T_n(x)$ désignera l'espace vectoriel tangent en $x$ à $V_n$, Étudions la connexion de variété riemannienne induite sur $V_{n-1}$ par son plongement dans $V_n$. Si $n$ est supérieur à 3 et si $V_{n-1}$ est localement déformable, nous avons mis en évidence, au paragraphe C des Préliminaires, en chaque point $x \in V_{n-1}$, une variété $V_{n-3}(x)$ à $n-3$ dimensions

$$V_{n-3}(x) \subset V_{n-1}.$$

De plus, toutes les courbures eulériennes de $V_{n-3}(x)$ sont identiquement nulles pour le plongement dans $V_n$. Cette $V_{n-3}(x)$ est géodésique, au point $x$, à la fois dans $V_{n-1}$ et dans $V_n$ et cette propriété est valable en tout point de $V_{n-3}(x)$ : autrement dit $V_{n-3}(x)$ est totalement géodésique à la fois dans $V_{n-1}$ et dans $V_n$.

Or une propriété caractéristique des variétés totalement géodésiques dans un espace de Riemann $V_n$ est de contenir toute géodésique de $V_n$ qui lui est tangente ou qui passe par deux de ses points suffisamment voisins [10]. Par suite, tout vecteur tangent à $V_{n-3}(x)$ est vecteur initial d'une géodésique de $V_n$ et donc de $V_{n-3}(x)$. Il en résulte que $V_{n-3}(x)$ est une variété riemannienne complète pour la métrique induite par sont plongement dans $V_n$ sous des conditions de régularité de la métrique qui sont toujours réalisées, ainsi qu'il résulte du caractère complet de $V_{n-1}$, et du fait que $V_{n-3}(x)$ est la variété intégrale, contenant $x$, du système complètement intégrable $\omega^i = 0$.

Reprenons l'ensemble de partage $\Delta(u)$ que nous avons associé à tout point

$u \in V_n$ (Préliminaires, § A, n° 4). Étant une variété complète et totalement géodésique, $V_{n-3}(x)$ possède une intersection non vide avec l'ensemble de partage correspondant, dans $V_n$, à chacun de ses points,

$$V_{n-3}(x) \cap \Delta(y) \neq \emptyset \qquad [y \in V_{n-3}(x)],$$

et, en particulier,

$$V_{n-3}(x) \cap \Delta(x) \neq \emptyset.$$

Mais toute $V_{n-3}(x)\,(x \in V_{n-1})$ est contenue dans $V_{n-1}$ de sorte que nous obtenons le théorème :

*Dans un espace de Riemann $V_n$ complet, à n dimensions $(n > 3)$, à métrique définie positive, toute variété $V_{n-1}$ localement déformable et complète pour la métrique induite par son plongement, possède une intersection non vide avec l'ensemble de partage $\Delta(x)$ relatif, dans $V_n$, à chacun de ses points.*

2. Application aux $V_{n-1}$ d'un espace $V_n$ a courbure constante. — Une des conclusions du paragraphe C des Préliminaires a été que les espaces $V_n$ contenant des $V_{n-1}$ localement déformables sont exceptionnels. Parmi ceux qui peuvent en contenir se trouvent certains espaces à courbure constante que nous allons considérer maintenant pour leur appliquer le théorème précédent. Rappelons d'abord que l'existence de $V_{n-1}$ localement déformables dans un espace $V_n$ à courbure constante K n'est possible que si l'on a :

— soit $K = 0$, $n$ quelconque;
— soit $K \neq 0$, $n \leqq 4$.

Ceci a été établi dans les chapitres I, II et III. Nous écarterons le cas $n < 4$ pour deux raisons :

*a.* Nos méthodes ne peuvent lui être appliquées;

*b.* Toute $V_{n-1}$ plongée dans $V_n (n < 4)$ est localement déformable, sauf si elle est totalement géodésique et si $K \neq 0$.

Pour obtenir des résultats présentant le maximum de clarté, restreignons-nous au cas où $V_4$ *est simplement connexe*. Le problème envisagé se divise en deux parties :

1° Si K est positif, $V_n$ est homéomorphe à la sphère à quatre dimensions [10] et l'ensemble $\Delta(x)$ relatif à tout point $x \in V_4$ se réduit à un seul point, l'antipode de $x$, d'où l'énoncé :

*Dans la sphère à quatre dimensions, toute $V_3$, localement déformable et complète pour la métrique induite par son plongement, contient nécessairement l'antipode de chacun de ses points.*

2° Si K est négatif ou nul, $V_n$ est homéomorphe à l'espace numérique réel $R_n$

et ne contient pas de géodésique fermée [10]; la longueur de tout arc de géodésique est égale à la distance de ses extrémités mesurée dans $V_n$. Il en résulte que $\Delta(x)$ est indépendant du point $x \in V_n$ envisagé et réduit aux seuls points à l'infini de $V_n$, d'où l'énoncé :

*Dans un espace $V_n$ complet, simplement connexe et soit euclidien ($n > 3$), soit hyperbolique ($n = 4$), toute variété $V_{n-1}$, localement déformable et complète pour la métrique induite par son plongement, possède nécessairement un domaine à l'infini.*

3. Remarques. — *a*. Revenons aux espaces à courbure constante positive. Du théorème obtenu dans ce cas, nous déduisons immédiatement le corollaire :

*Il n'existe pas, dans la sphère $S_4$, de variété $V_3$ contenue tout entière dans un hémisphère ouvert (ou fermé) de $S_4$, qui soit localement déformable et complète pour la métrique induite par son plongement.*

*b*. Les résultats précédents présentent une analogie certaine avec ceux qui ont été obtenus, dans un travail récent, par S. B. Myers [27] à propos des variétés minima d'un espace complet.

*c*. Enfin, l'étude qui vient d'être faite suppose l'existence de variétés $V_{n-1}$ qui soient à la fois localement déformables et complètes pour la métrique induite par plongement dans un espace de Riemann complet $V_n$, à $n$ dimensions. Existe-t-il effectivement des variétés jouissant de ces deux propriétés : caractère complet et déformabilité locale ?

C'est à l'étude de cette question que nous allons consacrer le prochain paragraphe.

### B. — Existence de $V_{n-1}$ localement déformables et complètes pour leur plongement dans $V_n$.

1. Courbure gaussienne d'une $V_{n-1}$ plongée dans $V_n$. — Soient $V_{n-1}$ et $V_n$ deux variétés différentiables de classe $C^r (r \geqq 3)$, de dimensions respectives $n-1$ et $n$, munies chacune d'un recouvrement ouvert $\{U^p_{n-1}\}$, $\{U^q_n\}$, constituant un atlas.

Supposons

$$V_{n-1} \subset V_n$$

et bornons-nous, sur $V_{n-1}$, à l'étude d'un voisinage ouvert U, de dimension $n-1$, contenu dans l'intersection de deux des ouverts $\{U^p_{n-1}\}$, $\{U^q_n\}$. A tout point $x \in U$, se trouvent ainsi associés deux systèmes de coordonnées locales que nous désignerons respectivement par $(u^1, \ldots, u^{n-1})$ et $(v^1, \ldots, v^n)$. Supposons que le plongement de U dans $V_n$ soit régulier, c'est-à-dire, d'après le paragraphe B des Préliminaires, qu'il se traduise par une application différentiable de classe $C^r$,

$$\mu : x(u^1, \ldots, u^{n-1}) \to x(v^1, \ldots, v^n)$$

partout de rang $n-1$.

Restreignons-nous au cas où $V_n$ est doué d'une structure d'espace de Riemann de classe $C^r$ par la donnée d'un champ de tenseurs symétriques, définis positifs, du second ordre, partout de rang $n$ et de classe $C^{r-1}$. Le plongement de $V_{n-1}$ dans $V_n$ induit, sur $V_{n-1}$, une structure de variété riemannienne à tenseur métrique de rang $n-1$ en tout point $x \in U$. Dans ces conditions, on peut associer à tout point $x \in U$ un repère orthonormé dont les $n-1$ premiers vecteurs $\vec{e}_I(x)$, pour $I \in \{1, \ldots, n-1\}$ sont situés dans l'espace vectoriel $T_{n-1}(x)$ tangent en $x$ à $V_{n-1}$. Par rapport à ce repère, la matrice associée à la métrique de $V_{n-1}$ est la matrice-unité $(\delta_{IK})$ dont les éléments sont les symboles de Kronecker.

Ayant ainsi rappelé, en les précisant, quelques-unes des notions exposées aux paragraphes A et B des Préliminaires, considérons, comme nous l'avons fait alors, le tenseur de Gauss dont la classe est $C^{r-3}$, puisque ce tenseur est défini comme étant la différence des tenseurs de Riemann-Christoffel de $V_{n-1}$ et $V_n$.

Considérons aussi la seconde forme quadratique fondamentale de $V_{n-1}$ pour son plongement dans $V_n$. A cette forme est associé, sur U, un champ de tenseurs symétriques du second ordre, dont les composantes covariantes, $\varphi_{IJ}$, sont liées à celles, $K_{IJ,HL}$, du tenseur de Gauss, par les équations de Gauss,

$$K_{IJ,HL} = \varphi_{IH}\varphi_{JL} - \varphi_{IL}\varphi_{JH}.$$

Par deux contractions successives, cette équation devient

$$K^{IJ}{}_{,IJ,} = \varphi^I{}_I\varphi^J{}_J - \varphi^I{}_J\varphi^J{}_I,$$

dont le premier membre est l'invariant $K(x)$, ou courbure gaussienne scalaire de $V_{n-1}$ en $x$; c'est une fonction de classe $C^{r-3}$ du point $x$, définie en tout point $x \in U$.

L'expression de $K(x)$ se simplifie en mettant en évidence sa signification géométrique. Pour cela, considérons le polynôme caractéristique [19] de la matrice $(\varphi_{IJ})$. Ce polynôme est de degré $n-1$; la courbure gaussienne scalaires $K(x)$ est le coefficient du terme de degré $n-3$. Si l'on désigne par $\frac{1}{\rho_I(x)}$ les valeurs caractéristiques de $\varphi_{IJ}$, c'est-à-dire les courbures normales principales de $V_{n-1}$ en $x$, on a donc

$$K(x) = 2\sum_{I<J} \frac{1}{\varphi_I(x)\varphi_J(x)}. \tag{IV.1}$$

Sous les hypothèses de différentiabilité envisagées, nous avons ainsi démontré *que la courbure gaussienne scalaire* $K(x)$ *est indépendante du choix des coordonnées locales dans tout voisinage* $U \subset V_{n-1}$ *régulièrement plongé dans* $V_n$ *et est une fonction continue du point* $x \in U$.

2. Une propriété de la courbure gaussienne scalaire. — Restreignons-nous, maintenant, à un voisinage U *compact*, et montrons que $K(x)$ est à valeurs bornées dans U. Supposons, au contraire, qu'il existe un point $x_0 \in U$ tel que la valeur absolue de $K(x)$ puisse être rendue arbitrairement grande pourvu que $x$ soit assez proche de $x_0$. La fonction $K(x)$ étant, d'après (IV.1), la somme d'un nombre fini de termes, l'un au moins de ces termes n'est pas borné quand $x$ tend vers $x_0$, ce qui revient à dire que l'un au moins des $\rho_I(x)$, soit $\rho_1(x)$, tend vers zéro quand $x$ tend vers $x_0$.

Sous les hypothèses de différentiabilité envisagées, les $\rho_I(x)$ sont des fonctions continues du point $x$ dans le voisinage U considéré. Donc

$$\rho_1(x_0) = 0.$$

Mais $\rho_1(x)$ est l'une des valeurs propres de la matrice $(\varphi_{IJ})$, valeurs propres qui sont les racines de l'équation

$$\text{dét}(\rho\varphi_{IJ} - \delta_{IJ}) = 0,$$

et cette équation ne peut admettre de racine nulle, puisque U est régulièrement plongé dans $V_n$. Il y a contradiction et, par suite, nous avons démontré que *la courbure gaussienne scalaire* $K(x)$ *est une fonction continue, à valeur bornée indépendante du choix des coordonnées locales en tout point* $x$ *d'un domaine compact de* $V_{n-1}$ *régulièrement plongé dans* $V_n$.

3. Courbure gaussienne scalaire des $V_{n-1}$ complètes dans $V_n$. — Supposons que $V_n$ est un espace de Riemann complet et que $V_{n-1}$ est elle-même douée d'une structure de variété riemannienne complète pour la métrique induite par son plongement dans $V_n$. Alors $V_{n-1}$ est localement compacte, c'est-à-dire que chacun de ses points à distance finie possède un voisinage compact régulièrement plongé dans $V_n$ et, à l'aide de tels voisinages, il est possible de former un recouvrement de la variété $V_{n-1}$ privée de ses points à l'infini, s'il en existe. Le résultat du numéro précédent, établi pour chacun de ces voisinages pris en particulier, s'étend immédiatement à leur réunion, d'après les axiomes des atlas : la courbure gaussienne scalaire de $V_{n-1}$ est *nécessairement* une fonction continue, bornée, indépendante du choix des coordonnées locales en tout point n'appartenant pas au domaine à l'infini de $V_{n-1}$, s'il existe. Ceci implique la propriété suivante :

*Si* $V_{n-1}$ *est une variété plongée dans un espace de Riemann complet* $V_n$, *si* $V_{n-1}$, $V_n$ *et l'application par inclusion*

$$\mu : V_{n-1} \to V_n$$

*sont de classe* $C^r (r \geqq 3)$ *et s'il existe, sur* $V_{n-1}$, *un point à distance finie au voisinage duquel la courbure gaussienne scalaire cesse d'être bornée, cette variété* $V_{n-1}$ *n'est pas une variété complète pour la métrique induite par son plongement dans* $V_n$.

4. LES $V_{n-1}$ LOCALEMENT DÉFORMABLES ET COMPLÈTES POUR LEUR PLONGEMENT DANS UN ESPACE $V_n$ A COURBURE CONSTANTE. — $V_n$ étant toujours un espace complet à $n$ dimensions, supposons que $V_{n-1}$ soit une variété non prolongeable pour son plongement dans $V_n$, c'est-à-dire une variété ne possédant pas de bord constitué par des points réguliers à distance finie pour la métrique induite par ce plongement. Supposons, de plus, que $V_{n-1}$ soit une variété localement déformable dans $V_n$. Ainsi que nous l'avons démontré au début du chapitre actuel (§ A, n° 1), il existe en tout point $x \in V_{n-1}$ une variété $V_{n-3}(x)$ qui est totalement géodésique non seulement dans $V_{n-1}$, mais encore dans $V_n$; donc $V_{n-3}(x)$ est une variété complète pour la métrique induite par son plongement dans $V_n$.

D'après les propriétés des géodésiques des espaces complets rappelées au paragraphe A des Préliminaires, $V_{n-3}(x)$ peut être décomposée en une cellule $C_{n-3}(x)$ de dimension $n-3$ et en son bord $\partial(x)$; ce bord $\partial(x)$ est l'ensemble de partage de $V_{n-3}(x)$ relativement au point $x$, il est de dimension maxima $n-4$.

Par suite de cette décomposition, $V_{n-3}(x)$ peut être couverte par un seul système de coordonnées qui seront, par exemple, des coordonnées normales de Riemann d'origine $x$, sauf, peut-être, aux points constituant le domaine $\partial(x)$, en raison de l'homéomorphisme qui existe entre une cellule quelconque et l'intérieur d'une boule euclidienne.

On pourra donc calculer la courbure gaussienne scalaire de $V_{n-1}$ en tout point de $C_{n-3}(x)$. S'il existe un point $y_0 \in C_{n-3}(x)$ tel que $K(y)$ soit arbitrairement grande pourvu que $y$ soit assez proche de $y_0$, la variété $V_{n-1}$ ne sera pas complète pour son plongement dans $V_n$. Cette propriété peut recevoir une application immédiate dans le cas où l'espace $V_n$ est un espace complet à courbure constante positive ou nulle. En effet, d'après les résultats des chapitres I, II et III, il existe sur toute variété localement déformable des systèmes de coordonnées $\{u^i, u^0\}$, les $u^0$ constituant un système de coordonnées normales de Riemann sur la $V_{n-3}(x)$ qui correspond à un point $x \in V_{n-1}$ et ces coordonnées locales sont telles que la courbure gaussienne scalaire de $V_{n-1}$ en $x$ prend la forme

$$K(x) = (F_1(x)\,F_2(x))^{-3}\,K^\star \sin^2\Omega; \qquad \text{(IV.2)}$$

sin $\Omega$ et $K^\star$ sont des fonctions des $u^i$ seuls, tandis que les $F_i$ dépendent des $u^0$.

Nous considérons alors les deux cas suivants :

1° $V_n$ est l'espace euclidien réel $R_n$ à $n$ dimensions; alors le domaine de la carte $\{u^0\}$ est l'espace euclidien réel $R_{n-3}$ ; il existe sur $V_{n-1}$ des points où l'une au moins des fonctions $F_i$ s'annule si $V_n$ appartient :

*a.* soit à la seconde famille de variétés régulièrement déformables;

*b*. soit à la famille des variétés localement déformables avec persistance en chaque point de deux directions conjuguées distinctes.

Mais, toutes les fois que l'une des $F_i$ s'annule, $K(x)$ devient infini, comme le montre la formule (IV.2); aucune des deux familles considérées ci-dessus ne peut donc contenir de variété complète pour la métrique induite par le plongement dans $R_n$.

2° L'espace de plongement est la sphère $S_4$; alors le domaine de la variable $u^3$ est l'intervalle $\left(0, \frac{2\pi}{|\rho|}\right)$ et il existe sur toute $V_3$ localement déformable des points où $K(x)$ devient infinie par suite de la nullité de l'une au moins des fonctions $F_i$. Une telle $V_3$ ne peut donc être complète pour son plongement dans la sphère $S_4$.

Ces résultats subsistent, *a fortiori*, si l'espace de plongement est un espace complet localement euclidien ou à courbure constante, car un tel espace $V_n$ peut toujours être considéré comme espace quotient de l'un des deux espaces $R_n$ ou $S_4$ précédents par une relation d'équivalence R[30]; pour que $V_{n-1}$ puisse être une variété complète pour son plongement dans $V_n$, il faudrait s'assurer que cette relation n'implique pas, sur la structure de $V_{n-1}$, de condition incompatible avec le caractère riemannien localement déformable induit par le plongement dans $V_n$. Mais, en groupant les résultats obtenus, ces considérations suffisent pour démontrer le théorème suivant :

1° *Dans un espace $V_n$ complet localement euclidien, les seules variétés $V_{n-1}$ qui peuvent être à la fois localement déformables et complètes pour la métrique induite par le plongement sont* :

*a. soit des variétés localement réductibles, admettant, localement, un champ de $(n-3)$-plans parallèles eux-mêmes localement euclidiens,*

*b. soit des variétés déformables avec persistance, en chaque point, d'une direction asymptotique.*

2° *Un espace complet, localement sphérique à quatre dimensions ne contient pas de variété à trois dimensions qui soit à la fois localement déformable et complète pour la métrique induite par son plongement,*

*Remarques*. — *a*. La seconde partie de ce théorème admet le corollaire : *les seuls espaces complets $V_n$, à courbure constante positive, susceptibles de contenir des variétés $V_{n-1}$ localement déformables et complètes pour la métrique induite par le plongement sont de dimension $n = 3$.*

*b*. La première partie de ce même théorème met en évidence une famille de variétés localement réductibles; ceci nous suggère d'étudier la réductibilité globale des $V_{n-1}$ plongées dans l'espace euclidien réel $R_n$, cas auquel nous nous limiterons pour des raisons de simplicité.

## C. — Réductibilité des variétés $V_{n-1}$ plongées dans l'espace euclidien $R_n$.

1. Groupe d'holonomie homogène et réductibilité des variétés riemanniennes. — L'objet de cette dernière section est une variété riemannienne $V_{n-1}$, connexe par arcs, de classe $C^3$, à $n-1$ dimensions, douée de la métrique que lui confère son plongement dans l'espace euclidien réel $R_n$ à $n$ dimensions.

La notion de groupe d'holonomie introduite par É. Cartan [8], reprise par A. Borel et A. Lichnerowicz [4] est bien connue : nous rappelons rapidement la définition du *groupe d'holonomie homogène* $\Psi_x$. Au point $x \in V_{n-1}$, $\Psi_x$ est le groupe de rotations qui représente le groupoïde des lacets sur $V_{n-1}$, fermés en $x$, par développement sur l'espace vectoriel euclidien $T_{n-1}(x)$ tangent en $x$ à $V_{n-1}$. Un arc joignant deux points $x$, $y \in V_{n-1}$ détermine, par développement, un isomorphisme de $\Psi_x$ sur $\Psi_y$; on peut ainsi parler, sans ambiguïté, du groupe d'holonomie homogène de $V_{n-1}$.

Par définition, $V_{n-1}$ *est réductible* si $\Psi_x$ laisse invariant un sous-espace vectoriel réel non trivial tangent en $x$ à $V_{n-1}$. Ces définitions ont été établies indépendamment de toute question de plongement. Nous les adopterons, sans modification dans le cas où $V_{n-1}$ est une variété plongée isométriquement dans l'espace euclidien réel $R_n$ à $n$ dimensions et nous étudierons successivement la réductibilité locale des $V_{n-1}$ plongées dans $R_n$ et la réductibilité globale des $V_{n-1}$ complètes pour la métrique induite par ce plongement. Enfin, nous ferons l'application des résultats obtenus aux variétés $V_{n-1}$ localement déformables dans $R_n$.

2. Réductibilité locale. — Le plongement de la variété réelle $V_{n-1}$ dans l'espace euclidien $R_n$ induit, sur $V_{n-1}$, une structure de variété riemannienne à métrique définie positive. A tout point $x \in V_{n-1}$, associons un repère orthonormé, constitué par $n$ vecteurs $\vec{e}_1(x), \ldots, \vec{e}_n(x)$ dont l'un, $\vec{e}_p(x)$, est normal en $x$ à $V_{n-1}$.

La réductibilité de $V_{n-1}$ s'exprime localement par la possibilité de grouper les formes de Pfaff associées au repère mobile dans le formalisme de É. Cartan en, au moins, deux systèmes dont chacun est complètement intégrable. Nous supposerons ces deux systèmes constitués l'un par $\omega^i (i \in I)$, l'autre par $\omega^\alpha (\alpha \in A)$, où, maintenant, I et A désignent respectivement les ensembles d'indices $\{1, \ldots, p-1\}$ et $\{p+1, \ldots, n\}$. Dans ces conditions, la connexion de variété riemannienne réductible, dans un voisinage de $x$ sur $V_{n-1}$, est telle que

$$\omega_i^\alpha = 0. \qquad \text{(IV.3)}$$

Par différentiation extérieure, cette relation implique, pour les formes de courbure, la condition [42]

$$\Omega_i^\alpha = 0, \tag{IV.4}$$

équivalente à la nullité de toutes les composantes du tenseur de Riemann-Christoffel ayant des indices à la fois dans I et dans A.

Considérons la seconde forme quadratique fondamentale $\varphi$ de $V_{n-1}$ et supposons que son rang soit au moins égal à 1 ; cette hypothèse écarte le seul cas des $V_{n-1}$ totalement géodésiques dans $R_n$ et de leurs variétés isométriques, c'est-à-dire le cas des $R_{n-1}$ et des variétés localement développables dont la réductibilité locale est triviale.

Soient $V_{p-1}(x)$ et $V_{n-p}(x)$ les sous-variétés intégrales maximales qui contiennent $x$ et qui sont, respectivement, variétés intégrales de $\omega^\alpha = 0$, $\omega^i = 0$. La forme induite par $\varphi$ sur l'une au moins de ces sous-variétés est de rang supérieur ou égal à 2. En effet, si chacune était de rang 0, il existerait un choix du repère orthonormé pour lequel tous les $\varphi_{ik}$ et tous les $\varphi_{\alpha\beta}$ seraient indentiquement nuls pour $i$, $k \in I$; $\alpha$, $\beta \in A$. Or les composantes de $\varphi$ sont liées au tenseur de Riemann-Christoffel par les équations de Gauss relatives aux variétés plongées dans un espace localement euclidien; l'une d'elles s'écrit

$$R_{i\alpha,i\alpha} = \varphi_{ii}\varphi_{\alpha\alpha} - \varphi_{i\alpha}\varphi_{i\alpha},$$

et se réduirait, d'après (IV.4), à

$$\varphi_{i\alpha} = 0,$$

ce qui impliquerait que $\varphi$ soit de rang 0, contrairement à notre hypothèse. Rappelons que, dans les formules précédentes, il n'y a pas lieu de sommer par rapport à un indice figurant deux fois en position covariante dans un monôme.

Donc une des formes induites par $\varphi$ sur $V_{p-1}(x)$, $V_{n-p}(x)$ est nécessairement de rang 1, au moins. Supposons $\varphi_{11} \neq 0$; un raisonnement identique au précédent écarte la possibilité des rangs 1 et 0 pour ces formes, car, l'équation $R_{i\alpha,i\alpha} = 0$ entraînant alors $\varphi_{i\alpha} = 0$, la forme $\varphi$ serait elle-même de rang 1.

Enfin, si les formes induites par $\varphi$ étaient toutes deux de rang 1, le repère orthonormé associé au point $x$ pourrait être choisi de manière que $\varphi_{11}$ et $\varphi_{nn}$ ne soient pas identiquement nuls; mais, alors, tous les $\varphi_{i\alpha}$ seraient nuls pour $i \neq 1$ ou $\alpha \neq n$, de sorte que la forme

$$\varphi = \varphi_{11}(x^1)^2 + 2\varphi_{1n}x^1x^n + \varphi_{nn}(x^n)^2$$

serait encore de rang 1, par suite de la nullité de $R_{1n,1n}$. Donc l'une des formes induites par $\varphi$ est de rang 2, au moins : si deux des $\varphi_{ik}$ ne sont pas nuls, les équations $R_{i\alpha,jk} = 0$ et $R_{i\alpha,k\beta} = 0$ entraînent

$$\varphi_{\alpha k} = 0, \tag{IV.5}$$

$$\varphi_{\alpha\beta} = 0. \tag{IV.6}$$

Ces dernières relations prouvent qu'une seule des formes induites par $\varphi$ sur $V_{p-1}(x)$, $V_{n-p}(x)$, peut être de rang supérieur ou égal à 2.

*Remarque.* — Dans tous ces calculs, nous avons implicitement supposé $p$ supérieur à 2, le cas $p=2$ ne présentant aucune difficulté.

La nullité de tous les $\varphi_{i\alpha}$, $\varphi_{\alpha'\beta}$ se traduit, dans le formalisme de É. Cartan, par

$$\omega_{\alpha}{}^{p}=0.$$

Considérons maintenant la variété $V_{n-p}(x)$ définie dans $V_{n-1}$ comme variété intégrale du système $\omega^{i}=0$ qui passe par $x$. D'après les formules (IV.4), (IV.5) et (IV.6), cette variété, considérée comme variété plongée dans $R_n$, a toutes ses courbures eulériennes nulles : elle admet $n-p$ champs indépendants de vecteurs parallèles et, donc, est localement euclidienne, puisque sa dimension est précisément $n-p$; ces champs sont réels, car $V_{n-1}$ est à métrique définie positive, contrairement à ce qui peut arriver pour des variétés douées de métriques d'un autre type [33].

Les principaux résultats de ce numéro se résument dans l'énoncé :

*Si une variété riemannienne $V_{n-1}$ plongée dans l'espace euclidien $R_n$ est réductible, sa métrique se décompose en la somme d'une seule métrique irréductible et d'une métrique localement euclidienne.*

Cet énoncé, purement local, subsiste sans modification si l'on remplace $R_n$ par un espace $V_n$ localement euclidien.

3. Réductibilité des $V_{n-1}$ complètes. — Supposons que $V_{n-1}$ est une variété complète pour son plongement dans $R_n$. Des travaux récents sur la réductibilité des variétés complètes simplement connexes [31], [38] ont mis en évidence un *multifeuilletage* de ces variétés et des *isométries* entre les feuilles d'un même système. Dans le cas des $V_{n-1}$ plongées dans $R_n$, nous sommes en mesure de prouver l'existence d'un double feuilletage et de préciser la nature des feuilles et des isométries, en supprimant la restriction de simple connexité de $V_{n-1}$.

Nous étudierons successivement les deux systèmes de feuilles.

*a. Premier système de feuilles.* — Reprenons la variété $V_{n-p}(x)$ définie en coordonnées locales par $\omega^{i}=0$. C'est une variété totalement géodésique dans $V_{n-1}$, donc complète. Considérée comme variété plongée dans $R_n$, cette variété $V_{n-p}(x)$ a toutes ses courbures eulériennes nulles d'après les formules (IV.4), (IV.5) et (IV.6); c'est donc une variété totalement géodésique dans $R_n$, c'est-à-dire un espace euclidien $R_{n-p}(x)$ à $n-p$ dimensions qui peut être considéré comme la somme directe de $n-p$ droites.

Pour tout $x \in V_{n-1}$,

$$R_{n-p}(x) \subset V_{n-1}.$$

L'ensemble des $R_{n-p}(x)$ constitue pour $V_{n-1}$ un système de feuilles dont chacune se déduit évidemment de l'une d'elles par un déplacement dans $R_n$. Précisons la nature de ce déplacement : considérons deux points $x$, $y \in V_{n-1}$, ainsi que les deux feuilles $R_{n-p}(x)$ et $R_{n-p}(y)$ et traçons sur $V_{n-1}$ un chemin $L(x, y)$ joignant $y$ à $x$, ce qui est toujours possible puisque $V_{n-1}$ est connexe par arcs.

On a, d'après (IV.4), (IV.5) et (IV.6),

$$d\vec{e}_\alpha = 0.$$

Intégrons cette équation le long de $L(x, y)$

$$\int L(x, y)\, d\vec{e}_\alpha = 0,$$

autrement dit

$$\vec{e}_\alpha(x) = \vec{e}_\alpha(y).$$

Ainsi, *dans l'espace euclidien* $R_n$, *toute variété* $V_{n-1}$, *connexe, réductible et complète pour la métrique induite par son plongement, admet un système de feuilles euclidiennes qui se déduisent les unes des autres par des translations dans l'espace ambiant* $R_n$.

*b. Second système de feuilles.* — Soit $R_p(x)$ l'espace euclidien orthogonal à $R_{n-p}(x)$ au point $x \in V_{n-1}$. Considérons $V_{n-1} \cap R_p(x)$. La composante connexe de $x$ de cette intersection est la variété $V_{p-1}(x)$ précédemment introduite : c'est en effet la variété normale en $x$ à $\vec{e}_p(x)$ et aux $\vec{e}_\alpha(x)$; elle est de dimension $p - 1$ et totalement géodésique dans $V_{n-1}$. C'est donc une variété complète.

Remarquons que, $V_{n-1}$ étant une variété connexe par arcs, $V_{p-1}(x)$ constitue toute l'intersection de $V_{n-1}$ et $R_p(x)$. En effet, soit $y$ un point quelconque de $V_{n-1} \cap R_p(x)$.

$V_{n-1}$ étant connexe par arcs, $y$ peut être joint à $x$ par un chemin

$$L(x, y) \subset V_{n-1}.$$

La projection de $L(x, y)$ sur $R_p(x)$ donne un chemin $L'(x, y)$ de même origine $x$ et même extrémité $y$. Tous les points qui, par cette projection, ont la même image $z'$ qu'un point $z \in L(x, y)$ sont contenus dans $R_{n-p}(z)$. Or

$$R_{n-p}(z) \subset V_{n-1},$$

donc

$$z' \in V_{n-1}$$

et, par suite,

$$z' \in V_{n-1} \cap R_p(x),$$

c'est-à-dire

$$L'(x, y) \subset V_{n-1} \cap R_p(x).$$

Nous avons ainsi construit un chemin joignant à $x$ un point quelconque $y$ de $V_{n-1} \cap R_p(x)$, sans sortir de $V_{n-1} \cap R_p(x)$; ceci exprime que $V_{n-1} \cap R_p(x)$ est une variété connexe par arcs, de sorte que

$$V_{p-1}(x) = V_{n-1} \cap R_p(x).$$

Nous avons donc déterminé sur $V_{n-1}$ un second système de feuilles dont chacune est une variété complète, connexe, à $p-1$ dimensions, plongée dans un espace euclidien à $p$ dimensions.

Il nous reste à préciser les relations liant deux feuilles particulières $V_{p-1}(x)$ et $V_{p-1}(y)$ correspondant à deux points $x$ et $y$ de $V_{n-1}$.

Les espaces $R_p(x)$ et $R_p(y)$ contenant chacun l'une de ces feuilles se déduisent l'un de l'autre par une translation dans $R_n$.

D'autre part, on sait que par chaque point d'une variété feuilletée passe une feuille et une seule de chaque système [31], [38], donc

$$V_{p-1}(x) \cap V_{p-1}(y) = 0.$$

Enfin $V_{p-1}(x)$ et $V_{p-1}(y)$ sont isométriques et ont, en tant que variétés à $p-1$ dimensions plongées dans l'espace euclidien $R_p$ à $p$ dimensions, la même seconde forme quadratique fondamentale aux points correspondants dans l'isométrie qui fait passer de l'une à l'autre. Elles se déduisent donc l'une de l'autre par un déplacement dans $R_n$. Ce déplacement est un transport parallèle le long d'un chemin joignant deux points d'une feuille du premier système, parce que chaque feuille de l'un des systèmes rencontre chaque feuille de l'autre système en un point et un seul [31] et que les intersections d'une feuille avec deux feuilles quelconques de l'autre système sont deux points se correspondant par l'isométrie qui applique ces deux feuilles l'une sur l'autre. Chacune des feuilles du premier système étant un espace euclidien à $n-p$ dimensions, ce déplacement est une translation dans $R_n$ et nous avons ainsi démontré que *dans l'espace euclidien à n dimensions, toute variété à n — 1 dimensions, connexe par arcs, de classe* $C^3$, *réductible et complète pour la métrique induite par son plongement est le produit topologique de la somme directe de n — p droites par une variété à p — 1 dimensions, connexe par arcs, plongée dans l'espace euclidien à p dimensions, irréductible et complète pour la métrique induite par ce plongement.*

4. Application aux variétés localement déformables. — Comme conclusion, comparons les résultats que nous venons d'obtenir à ceux du paragraphe précédent. L'une des deux familles de variétés $V_{n-1}$ localement déformables et complètes pour la métrique induite par plongement dans l'espace numérique $R_n$ est constituée par des variétés localement réductibles à feuilles de dimensions respectives 2 et $n-3$, ces dernières étant localement euclidiennes. Par suite, cette réductibilité est globale et chaque feuille de dimension $n-3$ est homéo-

morphe à l'espace numérique réel $R_{n-3}$, de sorte que nous avons obtenu le théorème :

*Dans l'espace euclidien* $R_n$ *à n dimensions, les seules variétés* $V_{n-1}$ *à* $n-1$ *dimensions qui peuvent être à la fois localement déformables et complètes pour la métrique induite par plongement sont ;*

— *soit des variétés réductibles, homéomorphes au produit topologique* $V_2 \times R_{n-3}$ ;

— *soit des variétés déformables avec persistance, en chaque point d'une direction asymptotique.*

Remarquons, pour terminer, que chaque feuille $V_2$ des $V_{n-1}$ de la famille de variétés réductibles est plongée globalement dans un espace euclidien à trois dimensions; ainsi l'étude de la déformabilité globale des variétés homéomorphes au produit $V_2 \times R_{n-3}$ se trouve ramenée à celle de la déformabilité des $V_2$ plongées dans l'espace euclidien ordinaire $R_3$.

A titre d'exemple, considérons les variétés $V_{n-1}$ *localement semi-convexes* [44] pour leur plongement dans l'espace euclidien $R_n$, c'est-à-dire les variétés dont la seconde forme quadratique fondamentale $\varphi(x)$ est semi-définie positive en tout point $x \in V_{n-1}$. D'après le théorème de Beez-Thomas, le rang de la forme $\varphi(x)$ est partout égal à 2, si $V_{n-1}$ est localement déformable. Si, de plus, $V_{n-1}$ est complète pour son plongement dans $R_n$, elle appartient nécessairement à la première famille de variétés régulièrement déformables ; ceci résulte du théorème énoncé ci-dessus et du fait que les variétés déformables avec persistance d'une direction asymptotique ont une seconde forme fondamentale semi-définie négative, d'après l'étude faite au paragraphe B du chapitre I. Donc $V_{n-1}$ est réductible et nous pouvons, comme précédemment, considérer la feuille locale $V_2(x)$. Cette variété est localement convexe [21] pour son plongement dans $R_n$, car toutes ses courbures eulériennes sont nulles, à l'exception de celles qui sont les coefficients de la forme induite par $\varphi(x)$ et cette dernière forme est définie positive; ainsi $V_2$ est localement convexe pour son plongement dans $R_3$ et il résulte du théorème de H. Weyl [39] qu'elle est globalement rigide. Nous avons ainsi démontré que *toute variété* $V_{n-1}$ *à* $n-1$ *dimensions, complète et localement semi-convexe pour son plongement dans l'espace euclidien* $R_n$ *à n dimensions, est globalement rigide pour ce plongement.*

## BIBLIOGRAPHIE.


[1] R. Beez, *Zur Theorie des Krümmungsmasses von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung* (*Z. Math. Phys.*, t. **21**, 1876, p. 373-401).

[2] L. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, 2e éd., t. **1**, Spœrni, Pisa, 1902.

[3] E. Bompiani, *La déformation des hypersurfaces dans l'espace euclidien réel à n* ($\geqq 3$) *dimensions* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **164**, 1917, p. 508-510).

[4] A. Borel et A. Lichnerowicz, *Groupes d'holonomie des variétés riemanniennes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **234**, 1952, p. 1835-1837).

[5] É. Cartan, *La déformation des hypersurfaces dans l'espace euclidien réel à n dimensions* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. **44**, 1916, p. 65-99).

[6] É. Cartan, *Sur les variétés à courbure constante d'un espace euclidien ou non euclidien* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. **48**, 1920, p. 132-208).

[7] É. Cartan, *La géométrie des espaces de Riemann* (*Mém. Sc. math.*, fasc. IX, 1925).

[8] É. Cartan, *Les groupes d'holonomie des espaces généralisés* (*Acta Math.*, t. **48**, 1926, p. 1-42).

[9] É. Cartan, *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques*, Hermann, Paris, 1945.

[10] É. Cartan, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, 2e éd., Gauthier-Villars, Paris, 1946.

[11] S. S. Chern, *Some new viewpoints in differential geometry in the large* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, t. **52**, 1946, p. 1-30).

[12] S. S. Chern and N. H. Kuiper, *Some theorems on the isometric imbedding of compact Riemann manifolds in Euclidean space* (*Ann. Math.*, t. **56**, 1952, p. 422-430).

[13] C. Chevalley, *Theory of Lie groups*, Princeton, 1946.

[14] C. Ehresmann, *Sur les espaces fibrés associés à une variété différentiable* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **216**, 1943, p. 628-629).

[15] L. P. Eisenhart, *Riemannian geometry*, Princeton, 1949.

[16] A. Fialkow, *Hypersurfaces of a space of constant curvature* (*Ann. Math.*, t. **39**. 1938, p. 771).

[17] H. Hopf und W. Rinow, *Uber den Begriff der Wollständigen differentialgeometrischen Fläche* (*Comm. Math. Helv.*, t. **3**, 1931, p. 209-225).

[18] N. H. Kuiper, *On* $C^1$ *isometric imbeddings* (*Proc. Kron. Nederl. Akad. Wetenschappen*, t. **58**, 1955, p. 683-689).

[19] A. Lichnerowicz, *Algèbre et analyse linéaires*, Masson, Paris, 1947.

[20] A. Lichnerowicz, *Éléments de calcul tensoriel*, Armand Colin, Paris, 1950.

[21] A. Lichnerowicz, *Courbure, nombres de Betti et espaces symétriques* (*Proc. Intern. Congress of Math.*, 1950, p. 216-223).

[22] A. Lichnerowicz, *Généralisations de la géométrie kählérienne globale* (*Colloque de Louvain*, 1951, p. 99-122).

[23] A. LICHNEROWICZ, *Geometria differenziale in grande*, Istituto matematico, Roma, 1954.

[24] A. LICHNEROWICZ, *Cours du Collège de France*, 1954-1955; *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie*, Edizioni Cremonese, Roma et Dunod, Paris, 1955.

[25] A. LICHNEROWICZ, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson, Paris, 1955.

[26] S. B. MYERS, *Connections between differential geometry and topology* (*Duke Math. J.*, t. **1**, 1935, p. 39-49 et t. **2**, 1936, p. 95-102).

[27] S. B. MYERS, *Curvature of closed hypersurfaces and non existence of closed minimal hypersurfaces* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **71**, 1951, p. 211-217).

[28] J. NASH, $C^1$ *isometric imbeddings* (*Ann. Math.*, 2^e^ série, t. **60**, 1954, p. 383-396).

[29] H. POINCARÉ, *Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **6**, 1905, p. 237-274).

[30] L. PONTRJAGIN, *Topological groups*, Princeton, 1946.

[31] G. DE RHAM, *Sur la réductibilité d'un espace de Riemann* (*Comm. Math. Helv.*, t. **26**, 1952, p. 328-344).

[32] G. DE RHAM, *Variétés différentiables*, Hermann, Paris, 1955.

[33] H. S. RUSE, *Parallel planes in a Riemannian* $V_n$ (*Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, t. **53**, 1949-1952, p. 78-92).

[34] U. SBRANA, *Sulle varieta ad* $n-1$ *dimensionali deformabili nello spazio euclideo ad n dimensioni* (*Rend. Palermo*, t. **32**, 1909, p. 1-45).

[35] J. A. SCHOUTEN und D. J. STRUIK, *Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie*, t. II, Groningen, 1938.

[36] T. Y. THOMAS, *Riemannian spaces of class one and their caracterisation* (*Acta Math.*, t. **67**, 1936, p. 169-211).

[37] C. TOMPKINS, *Isometric im bedding of flat manifolds in Euclidean space* (*Duke Math. J.*, t. **5**, 1939, p. 58-61).

[38] A. G. WALKER, *The fibring of riemannian manifolds* (*Proc. London Math. Soc.*, 3^e^ série, t. **3**, 1953, p. 1-19).

[39] H. WEYL, *Ueber die Starrheit der Eiflächen und konvexen Polyeder* (*Preuss. Acad. Wiss.*, Sitzungsberichte, 1917, p. 250-266).

[40] J. H. C. WHITEHEAD, *On the covering of a complete space by geodesics through a point* (*Ann. Math.*, t. **36**, 1935, p. 679-704).

[41] H. WHITNEY, *Topological properties of differentiable manifolds* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, t. **43**, 1937, p. 785-805).

[42] T. J. WILLMORE, *Les plans parallèles dans les espaces riemanniens globaux* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **232**, 1951, p. 298).

[43] K. YANO, *On n-dimensional riemannian spaces admitting a group of motions of order* $\frac{n(n-1)}{2}+1$ (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **74**, 1953, p. 260-279).

[44] K. YANO and S. BOCHNER, *Curvature and Betti numbers* (*Ann. Math. Studies*, Princeton, 1953.

## Répartition des références.

PRÉLIMINAIRES :

Paragraphe A. — [10], [13], [14], [17], [19], [22], [23], [24], [26], [29]. 31], [32], [40], [41].

Paragraphe B. — [1], [7], [9], [15], [36].

Paragraphe C. — [7], [9], [15].

CHAPITRE I :

Paragraphe A. — [3], [5], [6], [34], [35], [36].

Paragraphe B. — [5], [9], [11].

CHAPITRE II :

Paragraphe A. — [10].

Paragraphe B. — [15], [20].

CHAPITRE III :

Paragraphe A. — [2], [16], [25], [43].

CHAPITRE IV :

[11], [12], [27], [28], [37].

Paragraphe A. — [10], [27].

Paragraphe B. — [18], [30].

Paragraphe C. — [4], [8], [21], [31], [33], [38], [39], [42] [44].