

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JOSEPH HERSCH

Longueurs extrémales et géométrie globale

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 72, n° 4 (1955), p. 401-414

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1955_3_72_4_401_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LONGUEURS EXTRÉMALES

ET

GÉOMÉTRIE GLOBALE

PAR M. JOSEPH HERSCH.

1. INTRODUCTION. — 1.1. Les résultats qui vont suivre reposent de façon essentielle sur la *représentation conforme*; aussi considérons-nous des *variétés riemanniennes* à deux dimensions, admettant des *paramètres isothermes* locaux.

Nous appelons *triangle* la figure formée par un domaine de Jordan et trois points désignés sur sa frontière; ils la partagent en trois « côtés ». Un *quadrilatère* sera un domaine de Jordan avec quatre points-frontière désignés.

1.2. Dans son travail d'habilitation [7], O. Teichmüller attira l'attention sur une propriété extrême remarquable du carré : Soit Q un quadrilatère de côtés $\beta', \alpha', \beta'', \alpha''$ et d'aire A ; appelons Λ la borne inférieure des longueurs de tous les arcs rectifiables (dans Q) reliant soit β' à β'' , soit α' à α'' (c'est-à-dire deux côtés opposés); alors $\Lambda^2 \leq A$. Pour un carré du plan, on a évidemment l'égalité. Dans un article récent, P. M. Pu [5] a démontré le théorème suivant :

Soient A l'aire d'une variété riemannienne du type topologique du plan projectif (modèle) et Λ la borne inférieure des longueurs des cycles rectifiables non homotopes à zéro; alors $\Lambda^2 \leq \frac{\pi A}{2}$.

Dans le présent travail, mon intention est de montrer que ces deux propriétés, ainsi que d'autres, peuvent être obtenues d'une façon simple et unitaire, grâce à la notion de *longueur extrême d'une famille de courbes* (Ahlfors et Beurling [1]).

2. DÉFINITION DE LA LONGUEUR EXTRÉMALE. QUELQUES PROPRIÉTÉS. EXEMPLES. — 2.1. J'utilise une forme légèrement modifiée [4] de la définition initiale d'Ahlfors et Beurling. Soit $\{c\}$ une famille de courbes données sur une variété

riemannienne G (ou dans un domaine G d'une variété). Pour toute fonction réelle non négative ρ sur G (*répartition*), j'écris

$$G_\rho(c) = \int_c \rho \, ds \quad \text{et} \quad A_\rho = \iint_G \rho^2 \, d\tau,$$

où ds = élément linéaire, $d\tau$ = élément de surface, \int et \iint = intégrales inférieure et supérieure de Darboux.

Définition. — $L_{\{c\}}^{-1} = M\{c\} = \inf_\rho A_\rho$ sous la condition $G_\rho(c) \geq 1$ pour toute $c \in \{c\}$. $L_{\{c\}}$ est appelée la *longueur extrême* de la famille $\{c\}$.

Toute répartition ρ avec $G_\rho(c) \geq 1$ pour toute $c \in \{c\}$ est dite « admissible » pour la famille $\{c\}$.

2.2. On trouvera dans [4] diverses propriétés des longueurs extrémales et leurs démonstrations; voici quelques énoncés dont nous aurons besoin ici :

2.2.1. $L_{\{c\}}$ est invariante par toute transformation conforme (biunivoque) de G et de la famille $\{c\}$.

2.2.2. Si $\{c\} \subset \{\gamma\}$, alors $L_{\{c\}} \geq L_{\{\gamma\}}$.

2.2.3. Si la famille $\{c\}$ dans le plan (ou sur la sphère de Riemann) est *symétrique* par rapport à une droite, que nous prenons comme axe réel (c'est-à-dire $c \in \{c\}$ entraîne $\bar{c} \in \{c\}$), alors il suffit de considérer les *répartitions* $\tilde{\rho}$ également *symétriques* $\tilde{\rho}(z) = \tilde{\rho}(\bar{z})$:

$$M\{c\} = \inf_{\tilde{\rho}} A_{\tilde{\rho}} \quad \text{sous la condition} \quad G_{\tilde{\rho}}(c) \geq 1 \quad \text{pour toute } c \in \{c\}.$$

2.2.4. Appelons $\Lambda_{\{c\}}$ la borne inférieure des longueurs des courbes $c \in \{c\}$, ou plus précisément (des courbes c non rectifiables étant admises)

$$\Lambda_{\{c\}} = \inf_{c \in \{c\}} \int_c ds;$$

A étant l'aire de G , on a, en vertu de la définition,

$$M\{c\} \leq A_{\rho=1} = \frac{A}{\Lambda_{\{c\}}^2}, \quad \text{soit} \quad \Lambda_{\{c\}}^2 \leq L_{\{c\}} A.$$

Toute figure pour laquelle on a l'égalité sera dite *figure extrême* (pour la famille $\{c\}$).

2.3.1. Toute répartition ρ admissible pour une famille $\{c\}$ (dans une figure G) et telle que $A_\rho = M\{c\}$, est dite *répartition extrême* pour $\{c\}$. Deux répartitions extrémales ρ_1 et ρ_2 pour $\{c\}$ dans G ne peuvent différer que sur un ensemble de mesure superficielle nulle (H. Renggli [6]). En effet, on a $A_{\rho_1} = A_{\rho_2} = M\{c\}$, et $A_{\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}}$ ne peut pas être inférieure à $M\{c\}$. Les figures

extrémales pour une famille $\{c\}$ sont celles dans lesquelles une répartition constante est extrémale pour $\{c\}$.

2.3.2. Soient G et G' deux figures conformément équivalentes :

$$G' = w(G), \quad w(z) = \text{application analytique et biunivoque.}$$

Supposons que G soit extrémale pour une famille $\{c\}$ et que G' soit extrémale pour la famille $\{c'\} = \{w(c)\}$. On a alors deux répartitions constantes : $\rho(z) \equiv C$ extrémale pour $\{c\}$ dans G , et $\rho'(w) \equiv C'$ extrémale pour $\{c'\}$ dans G' ; en vertu de 2.2.1,

$$A_\rho = M\{c\} = M\{c'\} = A_{\rho'}.$$

Or, la répartition $\rho^*(z) = \rho'(w) \left| \frac{dw}{dz} \right| = C' \left| \frac{dw}{dz} \right|$ est aussi concurrente pour $\{c\}$, et $A_{\rho^*} = A_\rho = M\{c\}$, donc ρ et ρ^* sont toutes deux extrémales pour $\{c\}$; en vertu de 2.3.1, on a $\rho = \rho^*$, sauf sur un ensemble de mesure superficielle nulle, donc $\left| \frac{dw}{dz} \right| = \frac{C}{C'}$ partout (continuité) : à un facteur constant près, G et G' sont isométriques.

En ce sens, nous pouvons dire : Une famille $\{c\}$ étant définie dans une configuration conforme (ensemble de figures conformément équivalentes), il existe essentiellement au plus une figure extrémale pour $\{c\}$.

2.4. Le module μ d'un quadrilatère Q est l'un des rapports des côtés d'un rectangle (plan) qui lui est conformément équivalent. Soient $\beta', \alpha', \beta'', \alpha''$ les « côtés » de Q ; $\{c\}$ la famille des arcs de Jordan dans Q joignant β' à β'' ; et $\{\gamma\}$ la famille de ceux qui joignent α' à α'' . Alors $L_{\{c\}} = \mu$ et $L_{\{\gamma\}} = \mu^{-1}$ (ou inversement, selon le choix de μ). Par conséquent, $L_{\{c\}} L_{\{\gamma\}} = 1$; A étant la surface de Q , on a donc

$$A_{\{c\}} A_{\{\gamma\}} \leq A \quad (\text{Teichmüller}).$$

On a l'égalité pour les rectangles plans (figures extrémales).

2.5. Considérons dans 2.4 la famille $\{u\} = \{c\} \cup \{\gamma\}$; on voit aisément (représentation conforme sur un rectangle) que

$$L_{\{u\}} = \min(L_{\{c\}}, L_{\{\gamma\}}), \quad \text{d'où} \quad L_{\{u\}}^2 \leq 1$$

et

$$A_{\{u\}}^2 \leq A \quad (\text{Teichmüller}).$$

Figures extrémales : les carrés dans le plan.

2.6. Cas analogue à 2.4. Considérons un domaine doublement connexe de surface A ; soient $\{c\}$ la famille des arcs de Jordan reliant les deux contours, et $\{\gamma\}$ celle des courbes (fermées) de Jordan qui les séparent l'un de l'autre. Alors on a de nouveau

$$L_{\{c\}} L_{\{\gamma\}} = 1, \quad \text{d'où} \quad A_{\{c\}} A_{\{\gamma\}} \leq A.$$

Figures extrémales : cylindres.

2.7. Des inégalités analogues à 2.4 et 2.6 sont valables pour *trois dimensions* :

$$\text{Volume} \geq (\text{borne inférieure de surfaces}) \times (\text{borne inférieure de longueurs}).$$

C'est une conséquence immédiate de [3].

3. UNE PROPRIÉTÉ EXTRÉMALE DU TRIANGLE RECTANGLE ISOCÈLE. COROLLAIRES. —

3.1. Soient a, b, c les « côtés » d'un triangle (*cf.* 1.1); nous voulons déterminer la longueur extrême $L_{\{c_1\}}$ de la famille des arcs de Jordan c_1 dans le triangle, à extrémités sur a et c , et ayant un point sur b . Comme tous les triangles sont conformément équivalents, $L_{\{c_1\}}$ est un nombre universel.

3.1.1. Considérons d'abord le triangle défini dans le demi-plan complexe supérieur par les points-frontière $-\infty, X$ et ∞ ($X > 0$); ses côtés sont

$$a : -\infty \leq x \leq -X; \quad b : -X \leq x \leq X; \quad c : X \leq x \leq \infty.$$

La famille $\{c_1\}$ est bien définie.

Considérons maintenant le quadrilatère Q de module $\mu = 1$, obtenu en coupant le plan complexe le long des demi-droites réelles $-\infty \leq x \leq -X$ et $X \leq x \leq \infty$, les quatre côtés étant

$$\begin{aligned} \beta' : -\infty \leq x \leq -X, \quad y = +0; & \quad \alpha' : -\infty \leq x \leq -X, \quad y = -0; \\ \beta'' : X \leq x \leq \infty, \quad y = -0; & \quad \alpha'' : X \leq x \leq \infty, \quad y = +0. \end{aligned}$$

Appelons $\{u\}$ la famille des arcs de Jordan dans Q , reliant soit β' à β'' , soit α' à α'' ; nous savons (2.5) que $L_{\{u\}} = \min(\mu, \mu^{-1}) = 1$.

Soit φ_1 une répartition dans le demi-plan supérieur, admissible pour $\{c_1\}$; nous la prolongeons dans tout le plan par $\varphi(x + iy) = \varphi_1(x + i|y|)$; φ est admissible pour $\{u\}$ (dans Q) et $A_\varphi = 2A_{\varphi_1}$; d'où

$$M\{u\} \leq 2M\{c_1\}, \quad L_{\{c_1\}} \leq 2L_{\{u\}} = 2.$$

D'autre part, il est permis, en vertu de 2.2.3, de restreindre le problème variationnel définissant $L_{\{u\}}$ aux répartitions symétriques $\tilde{\varphi}(z) = \tilde{\varphi}(\bar{z})$; la restriction $\tilde{\varphi}^+$ d'une telle $\tilde{\varphi}$ au demi-plan supérieur est admissible pour $\{c_1\}$, et $A_{\tilde{\varphi}^+} = \frac{A_{\tilde{\varphi}}}{2}$; d'où

$$M\{c_1\} \leq \inf_{\tilde{\varphi}} \frac{A_{\tilde{\varphi}}}{2} = \frac{M\{u\}}{2}, \quad L_{\{c_1\}} \geq 2L_{\{u\}} = 2.$$

Nous avons donc

$$L_{\{c_1\}} = 2.$$

3.1.2. Considérons un triangle rectangle isocèle d'hypothénuse b , les

cathètes a et c ayant la longueur 1; la répartition constante $\varphi \equiv 1$ est admissible pour $\{c_1\}$ et $A_\varphi = \frac{1}{2} = M\{c_1\}$, φ est donc extrême.

3.1.3. En vertu de 2.2.4 et 2.3.2, nous avons donc le théorème :

Soit donné un triangle T de surface A; sur chacun de ses côtés, il existe une infinité de points dont la somme des distances (dans T) aux deux autres côtés est $\leq \sqrt{2A}$.

3.2.1. Considérons deux points fixes p, q dans le plan, et la famille $\{c_2\}$ de toutes les courbes « en forme de 8 autour de p et q », c'est-à-dire : chaque c_2 consiste en deux courbes de Jordan avec un point commun, l'une $(p|q, \infty)$ entourant p et non q , l'autre $(q|p, \infty)$ entourant q et non p . La longueur extrême est

$$L_{\{c_2\}} = 4.$$

Démonstration. — Nous prenons $p = -X$ et $q = X$, et comparons $\{c_2\}$ avec les familles $\{u\}$ et $\{c_1\}$ considérées en 3.1.1. Si φ est admissible pour $\{u\}$, $\frac{\rho}{2}$ est admissible pour $\{c_2\}$, d'où

$$M\{c_2\} \leq \frac{M\{u\}}{4}, \quad L_{\{c_2\}} \geq 4L_{\{u\}} = 4.$$

Si $\tilde{\varphi}$ est admissible pour $\{c_2\}$, $2\tilde{\varphi}^+$ est admissible pour $\{c_1\}$, d'où

$$M\{c_1\} \leq 2M\{c_2\}, \quad L_{\{c_1\}} \leq 2L_{\{c_2\}} = 4.$$

3.2.2. Il est évidemment inessentiel que le troisième point désigné sur la sphère soit ∞ ou tout autre (transformation bilinéaire!), la propriété $L_{\{c_2\}} = 4$ reste donc valable pour une sphère avec trois points désignés p, q, z .

Considérons maintenant une surface fermée de genre zéro, qui peut être représentée conformément sur une sphère; soient p, q, z trois points fixes de cette surface; soit $\{c_2\}$ la famille des courbes connexes consistant en deux courbes de Jordan $(p|q, z)$ et $(q|p, z)$. Alors $L_{\{c_2\}} = 4$.

3.2.3. En vertu de 2.2.4, nous avons le théorème :

Soient p, q, z trois points donnés sur une surface fermée F, d'aire A et de genre zéro; alors il existe un point x par lequel on peut mener deux lacets $(p|q, z)$ et $(q|p, z)$ sur F, de longueur totale $\leq 2\sqrt{A}$.

Il est clair que l'on admet tacitement la possibilité qu'un lacet passe par un des points donnés (cas limite).

3.2.4. Soit maintenant q le point à l'infini du plan complexe. Soient p et z deux points fixes du plan et $\{c_2\}$ la famille des courbes connexes consistant

chacune en deux courbes de Jordan entourant l'une p et z , l'autre p et non pas z . Alors $L_{\{\gamma_3\}} = 4$.

Les propriétés 3.2.1 et 3.2.4 restent naturellement valables sur toute surface de Riemann simplement connexe du type parabolique.

4. UNE AUTRE PROPRIÉTÉ EXTRÉMALE DU TRIANGLE RECTANGLE ISOCÈLE. COROLLAIRES. —

4.1. Soient de nouveau a, b, c les côtés d'un triangle; quelle est la longueur extrême $L_{\{\gamma_1\}}$ de la famille des chemins (arcs de Jordan)

$$\gamma_1 : a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a?$$

(Les extrémités, sur a , ne coïncident *pas* nécessairement !)

De la configuration conforme de tous les triangles, il nous suffit de choisir un représentant (figure) T : un triangle rectangle isocèle d'hypothénuse a , les cathètes b et c ayant la longueur 1. La répartition $\rho_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}$ dans T est admissible pour $\{\gamma_1\}$, d'où $L_{\{\gamma_1\}} \geq 4$. Appelons $\{\tilde{\gamma}_1\}$ la sous-famille de $\{\gamma_1\}$ formée par les courbes $\tilde{\gamma}_1$ symétriques relativement à la hauteur de T perpendiculaire à a . La comparaison avec le paragraphe 3.1 montre que $L_{\{\tilde{\gamma}_1\}} = 2L_{\{\gamma_1\}} = 4$, d'où (par 2.2.2) $L_{\{\gamma_1\}} \leq 4$. Nous avons donc

$$L_{\{\gamma_1\}} = 4.$$

4.1.1. Grâce à 2.2.4, nous avons le théorème :

Soit donné un triangle T de surface A ; pour chaque choix du côté a , il existe deux points $B \in b$ et $E \in c$ sur les deux autres côtés, tels que la somme des distances $BE + Ba + Ea$ (dans T) soit $\leq 2\sqrt{A}$.

2.3.2 montre que la paire de points (B, E) peut être choisie d'une infinité de manières.

4.2. Soient $\beta', \alpha', \beta'', \alpha''$ (dans cet ordre) les côtés d'un quadrilatère de module 1 (cf. 2.4); quelle est la longueur extrême $L_{\{\gamma_2\}}$ de la famille des courbes (fermées) de Jordan

$$\gamma_2 : \beta' \rightarrow \alpha' \rightarrow \beta'' \rightarrow \alpha'' \rightarrow \beta' \quad (\text{quadrilatères inscrits})?$$

Il suffit de considérer, dans le plan complexe, le carré Q de sommets $1, i, -1, -i$. La répartition $\rho_2 \equiv \frac{1}{4}$ dans Q est admissible pour $\{\gamma_2\}$, d'où $L_{\{\gamma_2\}} \geq 8$. La sous-famille $\{\tilde{\gamma}_2\} \subset \{\gamma_2\}$ des courbes $\tilde{\gamma}_2$ symétriques par rapport à l'axe réel a (cf. 2.2.3) la longueur extrême

$$L_{\{\tilde{\gamma}_2\}} = 2L_{\{\gamma_2\}} = 8, \quad \text{d'où} \quad L_{\{\gamma_2\}} \leq 8.$$

Donc

$$L_{\{\gamma_2\}} = 8.$$

4.3.1. Soient p, q deux points fixes du plan complexe. Soit $\{\gamma_3\}$ la famille des courbes γ_3 consistant en trois courbes de Jordan : $(\infty | p, q)$ entourant p et q , $(q | p, \infty)$ entourant q et non p , $(p | q, \infty)$ entourant p et non q , la seconde ayant un point commun avec chacune des deux autres. Alors

$$L_{\{\gamma_3\}} = 8.$$

Démonstration. — Prenons $p = -X$, $q = X$ (X réel > 0) dans le plan complexe. Soit $\{\tilde{\gamma}_3\} \subset \{\gamma_3\}$ la sous-famille des courbes $\tilde{\gamma}_3$ symétriques par rapport à l'axe réel; à l'aide de 2.2.3, la comparaison avec 4.1 montre immédiatement que

$$L_{\{\tilde{\gamma}_3\}} = 2L_{\{\gamma_1\}} = 8, \quad \text{d'où} \quad L_{\{\gamma_3\}} \leq 8.$$

Appliquons 4.1 au triangle défini par le demi-plan supérieur et les côtés

$$a: -\infty \leq x \leq -X; \quad b: -X \leq x \leq X; \quad c: X \leq x \leq +\infty.$$

Soit ρ_1 admissible pour $\{\gamma_1\}$; je définis une répartition ρ_3 dans le plan ouvert par $\rho_3(x + iy) = \frac{\rho_1(x + i|y|)}{2}$. Je dis que ρ_3 est admissible pour $\{\gamma_3\}$. Soit f l'application $f(x + iy) = x + i|y|$ du plan ouvert sur le demi-plan $y \geq 0$; $C_{\rho_3}(\gamma_3) = \frac{C_{\rho_1}(f(\gamma_3))}{2}$; on vérifie facilement que la courbe $f(\gamma_3)$ consiste en deux courbes $\in \{\gamma_1\}$, donc

$$C_{\rho_1}(f(\gamma_3)) \geq 2, \quad C_{\rho_3}(\gamma_3) \geq 1,$$

ρ_3 est bien admissible pour $\{\gamma_3\}$;

$$M\{\gamma_3\} \leq A_{\rho_3} = \frac{A_{\rho_1}}{2}, \quad \text{d'où} \quad M\{\gamma_3\} \leq \frac{M\{\gamma_1\}}{2} \quad \text{et} \quad L_{\{\gamma_3\}} \geq 2L_{\{\gamma_1\}} = 8.$$

Donc

$$L_{\{\gamma_3\}} = 8.$$

4.3.2. Au lieu du point à l'infini (pôle Nord), nous pouvons désigner (outre p et q) un point quelconque z de la sphère. Il reste $L_{\{\gamma_3\}} = 8$, et cette propriété se généralise (par représentation conforme) aux surfaces de genre zéro avec trois points désignés p, q, z .

En vertu de 2.2.4, nous avons donc le théorème :

Soient p, q, z trois points donnés sur une surface fermée F , d'aire A et de genre zéro; alors il existe sur F deux points x et y et trois lacets $(z | p, q)$ par x , $(q | p, z)$ par x et y , $(p | q, z)$ par y , de longueur totale (somme des trois longueurs) $\leq \sqrt{8A}$.

4.3.3. Soit maintenant q le point à l'infini du plan complexe : Soient p et z deux points fixes du plan; soit $\{\gamma_3\}$ la famille des courbes connexes consistant chacune en trois courbes de Jordan entourant l'une p et z , la seconde p et non z , la troisième z et non p , la première ayant un point commun avec chacune des deux autres. Alors $L_{\{\gamma_3\}} = 8$.

De nouveau, les propriétés 4.3.1 et 4.3.3 restent valables sur toute surface de Riemann simplement connexe du type parabolique.

5. PROPRIÉTÉS EXTRÉMALES DU TRIANGLE ÉQUILATÉRAL PLAN. COROLLAIRES. —

5.1. Soit T un triangle et $\{\zeta_1\}$ la famille des courbes dont chacune ζ_1 consiste en trois arcs de Jordan, reliant un point (*variable*) de T aux trois côtés. Nous allons montrer que

$$L_{\{\zeta_1\}} = \sqrt{3}.$$

5.1.1. Je choisis comme domaine normal un triangle équilatéral de côté 2. Appelons a, b, c ses côtés. La répartition $\rho \equiv \frac{1}{\sqrt{3}}$ est admissible pour $\{\zeta_1\}$; en effet, soit $\zeta_1 \in \{\zeta_1\}$ et $p \in \zeta_1$ son « point de bifurcation »; traçons les segments rectilignes reliant p aux trois sommets du triangle; il est ainsi décomposé en trois triangles de surfaces respectivement égales aux distances pa, pb, pc , d'où

$$pa + pb + pc = S = \sqrt{3}, \quad C_\rho(\zeta_1) \geq 1 \quad \text{donc} \quad L_{\{\zeta_1\}} \geq \frac{1}{A_\rho} = \sqrt{3}.$$

5.2. Dans notre triangle T , soit $\{\zeta_2\} \subset \{\zeta_1\}$ la famille réunion des trois familles $\{c_i\}$ du paragraphe 3.1, relatives à chacun des trois côtés :

$$\{\zeta_2\} = \{c_{1a}\} \cup \{c_{1b}\} \cup \{c_{1c}\},$$

avec $\{c_{1a}\}$ = famille des arcs de Jordan dans T , à extrémités sur b et c , et ayant un point sur a . Nous reprenons comme domaine normal le triangle équilatéral de 5.1.1. En vertu de 2.2.3, on a le droit de restreindre le problème de variation définissant $L_{\{\zeta_2\}}$ aux répartitions $\tilde{\rho}$ symétriques relativement aux trois hauteurs du triangle. Soit $\tilde{\rho}$ une telle répartition, admissible pour $\{\zeta_2\}$. Construisons le rectangle de base b (longueur 2) et de hauteur $= \sqrt{3}$, dans lequel est inscrit notre triangle équilatéral, et prolongeons la répartition $\tilde{\rho}$ dans tout le rectangle par réflexion relativement aux côtés a et c du triangle, soit $\tilde{\rho} \square$ la répartition $\tilde{\rho}$ prolongée. Soit $\{\lambda\}$ la famille des segments verticaux reliant les côtés horizontaux du rectangle. On voit facilement que $\tilde{\rho} \square$ est admissible pour $\{\lambda\}$, donc

$$A_{\tilde{\rho} \square} \geq M\{\lambda\} = \frac{2}{\sqrt{3}};$$

d'autre part (vu les propriétés de symétrie de $\tilde{\rho}$), $A_{\tilde{\rho} \square} = 2A_{\tilde{\rho}}$; donc $A_{\tilde{\rho}} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$, d'où

$$M\{\zeta_2\} = \inf_{\tilde{\rho}} A_{\tilde{\rho}} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad L_{\{\zeta_2\}} \leq \sqrt{3}.$$

Nous avons ainsi, en tenant compte de 5.1.1,

$$\sqrt{3} \leq L_{\{\zeta_1\}} \leq L_{\{\zeta_2\}} \leq \sqrt{3},$$

d'où finalement

$$L_{\{\zeta_1\}} = L_{\{\zeta_2\}} = \sqrt{3}.$$

Figures extrémales pour les deux familles : les triangles équilatéraux plans.

5.2.1 En vertu de 2.2.4 et 2.3.2, nous avons le théorème :

Sur le contour d'un triangle T de surface A, il existe une infinité de points dont la somme des distances (dans T) aux deux côtés autres que le leur, est $\leq \sqrt{\sqrt{3} A}$.

Ce résultat est à rapprocher de 3.1.3.

5.3.1. Soient p, q deux points fixes du plan complexe; $\{\zeta_3\}$ la famille des courbes connexes dont chacune est composée de deux courbes de Jordan appartenant à deux des trois catégories $(p|q, \infty)$, $(q|p, \infty)$, $(\infty|p, q)$. En d'autres termes, $\{\zeta_3\}$ est, sur la sphère de Riemann, la famille des « courbes en 8 » autour de deux des trois points p, q, ∞ . Alors

$$L_{\{\zeta_3\}} = 2\sqrt{3}.$$

Démonstration. — Prenons $p = X$, $q = -X$ (X réel > 0); nous comparons notre problème avec celui du paragraphe 5.2 pour le triangle défini par le demi-plan supérieur et les points-frontière $-X, X$ et ∞ . En vertu de 2.2.3, on trouve facilement que $L_{\{\zeta_3\}} \leq 2L_{\{\zeta_2\}} = 2\sqrt{3}$. Pour démontrer l'inégalité contraire, je pose de nouveau (cf. 4.3.1) $f(x+iy) = x+i|y|$; soit ρ_2 (définie pour $y \geq 0$) admissible pour $\{\zeta_2\}$; je définis $\rho_3(x+iy) = \frac{\rho_2(x+i|y|)}{2}$; $A_{\rho_3} = \frac{A_{\rho_2}}{2}$; il faut montrer que ρ_3 est admissible pour $\{\zeta_3\}$; $C_{\rho_3}(\zeta_3) = \frac{C_{\rho_2}(f(\zeta_3))}{2}$; or on vérifie (et c'est un point essentiel) que $f(\zeta_3)$ consiste en deux arcs $\in \{\zeta_2\}$, donc $C_{\rho_2}(f(\zeta_3)) \geq 2$, ρ_3 est bien admissible pour $\{\zeta_3\}$; donc

$$M_{\{\zeta_3\}} \leq \frac{M_{\{\zeta_2\}}}{2}, \quad L_{\{\zeta_3\}} \geq 2L_{\{\zeta_2\}} = 2\sqrt{3}.$$

Donc

$$L_{\{\zeta_3\}} = 2\sqrt{3}.$$

5.3.2. De nouveau (cf. 3.2.2 et 4.3.2), on peut remplacer le pôle Nord par tout autre point sur la sphère de Riemann, et généraliser le résultat, par représentation conforme, à une surface fermée de genre zéro. En vertu de 2.2.4, nous avons donc :

Soient p, q, z trois points donnés sur une surface fermée F, d'aire A et de genre zéro; alors il existe sur F un point x par lequel on peut mener deux lacets, de deux des trois types $(p|q, z)$, $(q|z, p)$, $(z|p, q)$, et de longueur totale $\leq \sqrt{2\sqrt{3} A}$.

6. PLAN PROJECTIF ET PROPRIÉTÉS EXTRÊMALES DE DOMAINES SPHÉRIQUES. —
 6.1. Soit $\{\gamma_1\}$ la famille des grands cercles sur une sphère de rayon R . Considérons deux points quelconques p, q sur la sphère; la famille étant symétrique relativement au grand cercle médiateur de p et q , il suffit (en vertu de 2.2.3) de considérer les répartitions ρ telles que $\rho(p) = \rho(q)$; donc on peut se restreindre aux répartitions constantes admissibles; la plus petite est

$$\rho_1 \equiv \frac{1}{2\pi R}, \quad \text{d'où} \quad M\{\gamma_1\} = A_{\rho_1} = \frac{1}{\pi};$$

$$L_{\{\gamma_1\}} = \pi.$$

6.2. Coupons la sphère par son équateur; et soit $\{\gamma_2\}$ la famille des demi-grands cercles dans l'hémisphère Nord. La répartition constante $\rho_2 \equiv \frac{1}{\pi R}$ est admissible pour $\{\gamma_2\}$, donc $M\{\gamma_2\} \leq \frac{2}{\pi}$. Soit ρ admissible, alors le prolongement par symétrie (par rapport au plan de l'équateur) de la répartition $\frac{\rho}{2}$ est une répartition $\tilde{\rho}$ admissible pour $\{\gamma_1\}$, et $A_{\tilde{\rho}} = \frac{A_{\rho}}{2}$, d'où

$$\frac{1}{\pi} = M\{\gamma_1\} \leq \frac{M\{\gamma_2\}}{2}, \quad \text{donc} \quad M\{\gamma_2\} \geq \frac{2}{\pi},$$

$$L_{\{\gamma_2\}} = \frac{\pi}{2}.$$

6.3. Sur notre hémisphère, soit $\{\gamma_3\} \supset \{\gamma_2\}$ la famille des arcs de Jordan joignant deux points diamétralement opposés quelconques (de l'équateur). $L_{\{\gamma_3\}} \leq L_{\{\gamma_2\}} = \frac{\pi}{2}$; mais $\rho \equiv \frac{1}{\pi R}$ est admissible pour $\{\gamma_3\}$, donc $L_{\{\gamma_3\}} \geq \frac{\pi}{2}$; donc

$$L_{\{\gamma_3\}} = \frac{\pi}{2}.$$

6.4. Par projection stéréographique, on voit que $\frac{\pi}{2}$ est aussi la longueur extrême de la famille des arcs de Jordan dans $|\mathcal{Z}| \leq 1$ joignant deux points diamétralement opposés (variables) de la circonférence $|\mathcal{Z}| = 1$. La représentation conforme permet de passer à un domaine de Jordan quelconque.

Interprétation. — Soit P un modèle du plan projectif; la famille $\{\gamma_4\}$ des cycles non homotopes à zéro a une longueur extrême égale à $\frac{\pi}{2}$. (Conditions imposées au modèle, cf. 4.1.)

En effet : le revêtement universel \hat{P} de P est une variété riemannienne à deux feuillets, homéomorphe à la sphère; appliquons-le conformément sur une sphère en sorte que deux points « superposés » de \hat{P} (c'est-à-dire ayant même projection sur P) aient pour images deux points antipodes de la sphère.

En vertu de 6.3, $L_{\{\gamma_4\}} = \frac{\pi}{2}$.

6.4.1 En vertu de 2.2.4, nous retrouvons ici un théorème de Pu [5] : Si A est l'aire d'un modèle (cf. 1.1) du plan projectif et Λ la borne inférieure des longueurs de ses cycles non homotopes à zéro, alors

$$\Lambda^2 \leq \frac{\pi A}{2}.$$

Grâce à 2.3.2, nous avons même : il existe une infinité de cycles de longueur $\leq \sqrt{\frac{\pi A}{2}}$.

La figure extrême est celle du paragraphe 6.3, les points diamétralement opposés de l'équateur étant identifiés.

6.4.2 *Application aux surfaces de révolution.* — Je considère une surface de révolution (domaine de Jordan) d'aire A , ayant pour frontière un parallèle Γ , et coupant l'axe de rotation en un point. Soient q et t deux points diamétralement opposés sur Γ ; leur distance sur la surface est $\Lambda_{qt} \leq \sqrt{\frac{\pi A}{2}}$. Domaine extrême : hémisphère.

Exemple : Cône de révolution, r = rayon de la base, R = longueur des génératrices. Le raisonnement est applicable (approximation par des surfaces régulières).

$$A = \pi r R, \quad \text{d'où} \quad \Lambda \leq \pi \sqrt{\frac{rR}{2}}.$$

Le calcul exact (développement du cône) donne $\Lambda = 2R \sin \frac{\pi r}{2R}$; posons $\frac{\pi r}{2R} = x$, notre inégalité donne $\frac{\sin^2 x}{x} \leq \frac{\pi}{4}$; si $x = \frac{\pi}{3}$, cela donne $\pi \geq 3$. La précision est satisfaisante.

6.4.3. L'inégalité de 6.4.1 se laisse appliquer au problème des surfaces (d'aire A) dont les points conjugués ont une distance géodésique fixe D (cf. Blaschke [2], p. 224). On sait que chaque point p a alors un seul conjugué p' , et que l'identification des paires (p, p') fournit un modèle du plan projectif, d'aire $\frac{A}{2}$. En vertu de 6.4.1, on en déduit que $D^2 \leq \frac{\pi A}{4}$, soit $A \geq \frac{4D^2}{\pi}$. La surface considérée a une aire au moins égale à celle de la sphère de diamètre géodésique D (c'est-à-dire de rayon $\frac{D}{\pi}$).

6.5. Reprenons le cercle-unité $|z| < 1$; on a vu (6.4) que la famille $\{\eta_4\}$ des arcs de Jordan reliant deux points diamétralement opposés (variables) de $|z| = 1$, a la longueur extrême $L_{\{\eta_4\}} = \frac{\pi}{2}$. La transformation $w = z^2$ applique le cercle-unité sur un revêtement G' à deux feuilletés au-dessus de lui, et $\{\eta_4\}$ sur la famille $\{\eta'_4\}$ des arcs de Jordan à extrémités (sur $|w| = 1$) superposées,

dont la projection entoure le point de ramification $\omega = 0$. Comme $\omega(z)$ est conforme partout sauf à l'origine, on a encore $L_{\{\eta'_4\}} = L_{\{\eta_3\}} = \frac{\pi}{2}$.

Considérons maintenant le cercle-unité $|\omega| \leq 1$ et la famille $\{\eta_3\}$ des courbes (fermées) de Jordan ayant un point sur $|\omega| = 1$ et entourant l'origine $\omega = 0$. Soit ρ admissible pour $\{\eta_3\}$, alors je construis, en calquant ρ sur les deux feuillets de G' , une répartition ρ' admissible pour $\{\eta'_4\}$; car $C_{\rho'}(\eta'_4) = C_{\rho}(\eta_3) \geq 1$; et $A_{\rho'} = 2A_{\rho}$; d'où $M\{\eta'_4\} \leq 2M\{\eta_3\}$. D'autre part, désignons par ω_1 et ω_2 les deux points de G' de projection ω ; soit ρ' sur G' , admissible pour $\{\eta'_4\}$; alors $\rho(\omega) = \frac{\rho'(\omega_1) + \rho'(\omega_2)}{2}$ est admissible pour $\{\eta_3\}$, car $C_{\rho}(\eta_3) = \frac{C_{\rho'}(\eta'_{4,1}) + C_{\rho'}(\eta'_{4,2})}{2} \geq 1$; et $A_{\rho} \leq \frac{A_{\rho'}}{2}$ (principe de symétrie analogue à 2.2.3, cf. [4]), d'où $M\{\eta_3\} \leq \frac{M\{\eta'_4\}}{2}$.

Donc

$$L_{\{\eta_3\}} = 2L_{\{\eta'_4\}} = \pi.$$

La représentation conforme donne :

Soient G un domaine de Jordan, Γ sa frontière, et p un point fixe dans G . La famille $\{\eta_3\}$ des courbes de Jordan dans $G \cup \Gamma$, entourant p et ayant un point sur Γ , a la longueur extrémale

$$L_{\{\eta_3\}} = \pi.$$

6.5.1. En vertu de 2.2.4, nous avons le corollaire :

Dans un domaine de Jordan d'aire A , chaque point possède un lacet partant du bord, l'entourant (ou le contenant), de longueur $\leq \sqrt{\pi A}$.

Ces lacets et leur intérieur recouvrent donc tout le domaine.

6.5.2. *Application aux surfaces de révolution.* — Je considère de nouveau (cf. 6.4.2) une surface de révolution (domaine de Jordan) d'aire A , ayant pour frontière un parallèle Γ et coupant l'axe de rotation en un point p . Prenons un point $q \in \Gamma$; il existe par q un lacet sur la surface, contournant ou coupant l'axe et de longueur $\leq \sqrt{\pi A}$.

Exemple : Cône de révolution, r = rayon de la base, R = longueur des génératrices. $A = \pi r R$; soit Λ la longueur du plus petit lacet. Si $R \leq 2r$, $\Lambda = 2R$ et notre inégalité donne $2R \leq \pi \sqrt{rR}$, soit $R \leq \frac{\pi^2 r}{4}$, $\pi^2 \geq 8$; si $R > 2r$, $\Lambda = 2R \sin \frac{\pi r}{R}$, notre inégalité donne $2R \sin \frac{\pi r}{R} \leq \pi \sqrt{rR}$; posons $x = \frac{\pi r}{R}$, nous avons de nouveau $\sin^2 x \leq \frac{\pi x}{4}$ (cf. 6.4.2) : précision satisfaisante.

6.5.3. *Domaine extrémal.* — En tant que surface de Riemann, c'est une moitié de l'hémisphère supérieur, les points-frontière d'égale cote étant deux

à deux identifiés; p = pôle Nord. On a, en effet, $A = \pi R^2$ et $\Lambda = \pi R$. On peut aussi le construire en superposant deux exemplaires identiques d'un triangle sphérique trirectangle, et en identifiant point par point deux des trois paires de côtés superposés; p est alors le point de rencontre de ces deux « coutures ». C'est dans l'espace (isométrie!) une surface de révolution donnée par l'intégrale elliptique

$$z(r) = \int_0^r \frac{\sqrt{3R^2 + 4t^2}}{\sqrt{R^2 - 4t^2}} dt,$$

avec $r^2 = x^2 + y^2$, $0 \leq r \leq \frac{R}{2}$; $p = 0$ point singulier.

6.6. La famille $\{\gamma_6\}$ des triangles inscrits dans un triangle donné T a la longueur extrême 2π .

Démonstration. — Il suffit de considérer le cas où T est le demi-cercle-unité supérieur, avec les points-frontière désignés — 1, 0, 1. Soit de nouveau $\{\gamma_5\}$ la famille des courbes de Jordan dans $|z| \leq 1$, entourant l'origine et avec un point (au moins) sur $|z| = 1$. Posons $f(x + iy) = x + i|y|$; soit ρ (définie dans le demi-cercle supérieur fermé) admissible pour $\{\gamma_6\}$; je prolonge ρ par $\tilde{\rho} = f^*(\rho)$:

$$\tilde{\rho}(x + iy) = \rho(x + i|y|), \quad C_{\tilde{\rho}}(\gamma_5) = C_{f^*(\rho)}(\gamma_5) = C_\rho(f(\gamma_5));$$

or $f(\gamma_5) \in \{\gamma_6\}$, donc $\tilde{\rho}$ est admissible pour $\{\gamma_5\}$; comme $A_{\tilde{\rho}} = 2A_\rho$, on a

$$\pi^{-1} = M\{\gamma_5\} \leq 2M\{\gamma_6\}.$$

D'autre part, en vertu de 2.2.3, on peut se restreindre, pour déterminer $L_{\{\gamma_5\}}$, aux répartitions $\tilde{\rho}(z) = \tilde{\rho}(\bar{z})$; soit $\tilde{\rho}$ admissible pour $\{\gamma_5\}$, et $\tilde{\rho}^+$ sa restriction au demi-cercle supérieur; alors $C_{\tilde{\rho}^+}(\gamma_6) = \frac{C_{\tilde{\rho}}(\gamma_6 + \bar{\gamma}_6)}{2}$; $\gamma_6 + \bar{\gamma}_6$ est composée de deux courbes $\in \{\gamma_5\}$, donc $C_{\tilde{\rho}^+}(\gamma_6) \geq 1$, $\tilde{\rho}^+$ est admissible pour $\{\gamma_6\}$, et

$$A_{\tilde{\rho}^+} = \frac{A_{\tilde{\rho}}}{2}, \quad \text{d'où} \quad M\{\gamma_6\} \leq \frac{M\{\gamma_5\}}{2} = \frac{1}{2\pi}.$$

Donc

$$L_{\{\gamma_6\}} = 2\pi.$$

6.6.1. En vertu de 2.2.4, on a le corollaire :

Dans tout triangle T d'aire A , il existe un triangle inscrit de périmètre $\leq \sqrt{2\pi A}$.

Il y en a même une infinité (cf. 2.3.2 et 6.6.2).

6.6.2. Domaine extrême : c'est un triangle sphérique trirectangle T .

Démonstration. — Soit R le rayon de la sphère; l'aire de T est $\frac{\pi R^2}{2}$, le

corollaire donne donc $\Lambda \leq \pi R$. Nous pouvons supposer que le côté e de T soit sur l'équateur, les côtés a et b se coupant au pôle Nord. Soit E un point de e ; construisons ses images E_a et E_b relativement aux côtés (grands cercles) a et b ; E_a et E_b (tous deux sur l'équateur) sont antipodes. Tous les triangles inscrits dans T passent par un point E de e , ils ont donc un périmètre égal à la longueur d'un arc reliant E_a à E_b sur la sphère, donc $\geq \pi R$. Par chaque paire de points $E \in e$, $A \in a$, il existe un triangle inscrit EAB de périmètre $\Lambda = \pi R$, facile à construire : B est l'intersection du grand cercle $E_a A E_b$ avec b .

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] L. AHLFORS et A. BEURLING, *Conformal invariants and function theoretic null-sets* (*Acta Math.*, t. 83, 1950, p. 101-129).
- [2] W. BLASCHKE, *Vorlesungen über Differentialgeometrie I*, 3. Auflage, Springer, 1929; Dover, 1945.
- [3] J. HERSCH, « Longueurs extrémales » dans l'espace, résistance électrique et capacité (*C. R. Acad. Sc.*, t. 238, 1954, p. 1639).
- [4] J. HERSCH, *Longueurs extrémales et théorie des fonctions* (*Comm. Math. Helv.*, t. 29, 1955, fasc. 4).
- [5] P. M. PU, *Some inequalities in certain non orientable Riemannian manifolds* (*Pacific J. Math.*, t. 2, 1952, p. 55-71).
- [6] H. RENGGLI, *Un théorème de représentation conforme* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 235, 1952, p. 1593).
- [7] O. TEICHMÜLLER, *Untersuchungen über konforme und quasikonforme Abbildung* (*Deutsche Math.*, t. 3, 1938, p. 621-678).

Remarque. — Pendant la correction des épreuves, j'apprends par un cours photocopié de l'Oklahoma College (sur la représentation conforme) que L. Ahlfors avait déjà calculé $L_{\{c_1\}}$ et $L_{\{c_2\}}$ en 1951 (cf. 3.1 et 5.2).

