

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MICHEL LAZARD

Lois de groupes et analyseurs

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 72, n° 4 (1955), p. 299-400

[<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1955_3_72_4_299_0>](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1955_3_72_4_299_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LOIS DE GROUPES ET ANALYSEURS

PAR M. MICHEL LAZARD

INTRODUCTION.

Ce travail a pour objet d'aborder une étude générale de la notion de *loi de groupe*.

Une loi de groupe est une « formule » ou un algorithme permettant de définir une structure de groupe sur un ensemble où l'on sait effectuer certains calculs, c'est-à-dire dont on sait composer les éléments suivant certaines opérations.

Une telle formulation, d'une généralité excessive, ne peut mener à aucune théorie valable. Il convient donc d'introduire des restrictions assez sévères pour obtenir une théorie « substantielle », mais assez larges pour recouvrir les plus intéressants des cas particuliers déjà connus, et conduire à des résultats et problèmes nouveaux.

Parmi ces cas particuliers, citons la « formule exponentielle symbolique de la théorie des groupes » [4], que nous appellerons loi de Hausdorff, et le « calcul des vecteurs de Witt » [10] ⁽¹⁾. Ces exemples justifient le choix des axiomes auquel nous nous sommes arrêtés.

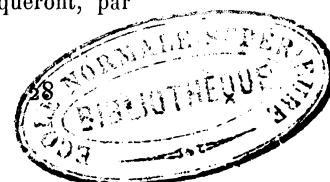
La loi de Hausdorff suggère tout d'abord de ne pas se borner aux calculs finis, mais d'introduire des séries formelles convenablement généralisées. C'est ce que nous avons fait; les scrupules que pouvaient provoquer jadis les calculs « formels » ou « symboliques » sont aujourd'hui apaisés par le recours à des topologies ultramétriques définies par des familles de sous-groupes.

Par rapport aux vecteurs de Witt, la loi de Hausdorff présente l'avantage de ne faire intervenir que deux arguments x et y , sans introduire de « composantes ». Un artifice convenable ⁽²⁾ permet de se ramener toujours à ce cas plus simple (lois de groupes « à un paramètre »). Finalement, nos axiomes servent

⁽¹⁾ Il s'agit dans ce dernier cas d'une loi d'anneau. Nos considérations s'appliqueront, par exemple, au groupe additif des vecteurs de Witt.

⁽²⁾ Cf. n° 18.

Ann. Éc. Norm., (3), LXXII. — Fasc. 4.



à définir une loi de groupe $f(x, y)$ comme une somme infinie de « composantes homogènes », vérifiant les identités fondamentales

$$\begin{aligned} f(f(x, y), z) &= f(x, f(y, z)) && (\text{associativité}), \\ f(x, 0) &= f(0, x) = x && (\text{existence de l'élément neutre } 0). \end{aligned}$$

Quant aux ensembles M que $f(x, y)$ permettra de transformer en groupes, ce seront des *modules* où seront définies des opérations ou fonctions généralisant les fonctions polynômes dans une algèbre associative et commutative [1]. Essentiellement, nous supposerons qu'on puisse *composer* ces fonctions, et qu'une notion de *degré* y soit définie.

Il apparaît alors que l'ensemble M ne joue aucun rôle par lui-même. Seules importent les propriétés des fonctions qui s'y trouvent définies, ou, en d'autres termes, les *règles générales de calcul* dans cet ensemble.

Nous sommes donc conduit à pousser plus loin l'abstraction, et à étudier directement la structure algébrique dont est muni l'ensemble de fonctions sur M sans faire intervenir ce module. Nous parvenons ainsi à la notion d'*analyseur*.

Ce point de vue présente des avantages considérables. Il nous permet de séparer plus nettement deux problèmes distincts : la recherche des lois de groupes, et l'étude des structures qu'on peut transformer en un groupe au moyen d'une loi de groupe donnée. Une loi de groupe cesse d'être un algorithme pour devenir un élément d'une structure algébrique, ce qui simplifie considérablement le langage.

Conformément aux principes de la méthode axiomatique, nous donnons *a priori* la définition des analyseurs (n° 5). Mais, aussitôt après, nous introduisons des notations qui font apparaître les éléments d'un analyseur comme des fonctions dans un ensemble. Ces notations sont en vérité des « abus de langage », car les éléments d'un analyseur ne sont pas des fonctions; mais elles sont indispensables, car elles font pressentir les théorèmes et leurs démonstrations, tandis que les notations « correctes » compliquent inutilement les énoncés les plus simples.

Au n° 21, le lecteur trouvera une discussion plus approfondie de l'axiomatique des analyseurs, qui apparaissent comme un cas particulier de la notion plus générale de « compositeur ».

Le chapitre I, le plus ingrat, donne les définitions et propriétés élémentaires des analyseurs. Il s'agit simplement de généraliser les propriétés des séries formelles sans terme constant [1] en les considérant du point de vue de leur composition, et non de leur multiplication. Même dans ce cas classique, la notion d'analyseur ne correspond pas aux définitions usuelles.

Le chapitre II s'ouvre par la définition des lois de groupes. Les paragraphes suivants constituent une étude directe des lois de groupes dans les analyseurs *rationnels* : les méthodes, aussi bien que les résultats, dérivent directement de la théorie des groupes de Lie. J'ai suivi, parfois de très près, un Mémoire de

Dynkin [3], qui est d'ailleurs à l'origine de ces recherches ⁽³⁾. Cette méthode directe me paraît illustrer la puissance du formalisme introduit au chapitre I; on verra qu'il suffit d'y traduire quelques propriétés élémentaires de la formule du binôme et de la fonction exponentielle pour obtenir une démonstration directe des théorèmes fondamentaux de Lie où les passages à la limite sont remplacés par des spécialisations, et où la part de l'analyse (c'est-à-dire des démonstrations de convergence) est réduite au minimum ⁽⁴⁾. Les principaux résultats de ce chapitre seront retrouvés au chapitre IV par une méthode différente.

Le chapitre III traite de la cohomologie des analyseurs. Il a un caractère auxiliaire, et le lecteur sera peut-être bien avisé de n'en lire d'abord que le premier paragraphe, puis de passer au début du chapitre suivant où il trouvera aussitôt la justification des définitions introduites. Pour mener à bien cette étude, j'ai pu exploiter l'analogie de la cohomologie des analyseurs avec celle des groupes ou monoïdes, et renvoyer au traité de Cartan-Eilenberg [2], ce qui évite de refaire certains calculs assez compliqués.

Le chapitre IV expose une méthode générale d'étude des lois de groupes et de leurs équivalences. C'est la vieille méthode du « calcul des limites » de Cauchy, du « lemme de Hensel », etc. Elle consiste à construire successivement les composantes homogènes d'une fonction. Mais ici les constructions ne sont pas toujours possibles ni déterminées. On rencontre des *obstructions* qui s'interprètent comme des éléments de groupes de cohomologie. Dans le cas des analyseurs rationnels, les obstructions sont nulles et l'on rend compte ainsi très simplement des résultats principaux du chapitre II (moyennant, il est vrai, la connaissance de ceux du chapitre III). A côté de la loi de Hausdorff, on trouve une autre loi de groupe remarquable, la loi *unilinéaire*. Elle conduit à une nouvelle espèce d'algèbre et intervient, par exemple, dans le calcul de la formule de Taylor pour les polynômes.

J'ai montré antérieurement [7] sur un cas très particulier comment il était possible de faire une étude globale du système des obstructions. Le problème fondamental est le suivant : comment les choix effectués lors du « passage » d'une obstruction nulle peuvent-ils déterminer la nullité des obstructions suivantes? Je donne ici la démonstration du théorème général sur les lois abéliennes universelles de groupes de Lie formels annoncé dans [7]. Mais l'étude globale du problème des obstructions paraît difficile et ne pourra vraisemblablement être abordée que dans des cas particuliers.

Au terme de cette étude, il semble qu'on ait seulement établi la partie générale et, en un certain sens, élémentaire d'une théorie qui devra se spécia-

⁽³⁾ Les résultats de ce chapitre sont résumés dans [5].

⁽⁴⁾ Il s'agit des théorèmes locaux pour les groupes de Lie donnés à l'avance comme variétés analytiques.

liser dans diverses directions. Deux d'entre elles me paraissent les plus importantes. D'abord la construction de p -groupes à l'aide de lois de groupes convenables. Les résultats obtenus avec la loi de Hausdorff [6] laissent espérer qu'on pourra progresser si l'on connaît mieux les lois de groupes. C'est aussi la conclusion où conduisent des travaux récents [8], [9] sur le problème de Burnside. L'autre direction de recherches est celle des lois de groupes de Lie formels, en liaison avec l'étude des groupes algébriques.

Je souhaite que des développements ultérieurs viennent justifier la tentative que j'expose aujourd'hui.

CHAPITRE I.

GÉNÉRALITÉS SUR LES ANALYSEURS.

1. Fonctions homogènes et modules multigradés.

1. FONCTIONS DANS UN MODULE. — Nous conserverons, autant que possible, la terminologie de N. Bourbaki. En particulier, \mathbb{Z} , \mathbb{N} , \mathbb{N}^* , \mathbb{Q} désigneront respectivement l'anneau des entiers rationnels, l'ensemble des entiers ≥ 0 , l'ensemble des entiers > 0 , et le corps des nombres rationnels.

La lettre Ω désignera toujours un anneau commutatif possédant une unité. Nous entendrons par « module » un Ω -module unitaire.

Si E est un ensemble quelconque, M un module, l'ensemble des applications de E dans M est muni de sa structure naturelle de module. En particulier, nous aurons à considérer des applications dans M du produit cartésien M^n ($n \in \mathbb{N}^*$). Une telle application sera dite *fonction de n arguments dans M* , et notée f . La valeur de f pour la famille d'arguments $(x_1, \dots, x_n) \in M^n$ sera notée $f(x_1, \dots, x_n)$. Le module des fonctions de n arguments dans M sera noté $\mathcal{F}_n(M)$.

Nous dirons que l'argument x_i est *neutre* dans la fonction $f \in \mathcal{F}_n(M)$ si $f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n)$ dès qu'on a $x_j = y_j$ pour $1 \leq j \leq n$ ($j \neq i$).

2. LES RELATIONS D'HOMOGENÉITÉ.

DÉFINITION (1.1). — Soient M un Ω -module, $f \in \mathcal{F}_n(M)$, et $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ une famille d'entiers ≥ 0 . La fonction f sera dite *vérifier la relation d'homogénéité de degré α* si l'on a

$$f(\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n) = \lambda_1^{\alpha_1} \dots \lambda_n^{\alpha_n} f(x_1, \dots, x_n)$$

pour tous $x_1, \dots, x_n \in M$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Omega$. De plus, si l'un des (α_i) , soit α_j , est nul, l'argument x_j doit être neutre ⁽⁵⁾.

(5) Cette dernière convention revient à poser $0^0 = 1$ dans la relation d'homogénéité.

Remarquons qu'une même fonction peut vérifier plusieurs relations d'homogénéité différentes : c'est ainsi que l'application identique du corps premier F_p de caractéristique $p \neq 0$ peut se voir attribuer l'un quelconque des degrés p^h ($h \in \mathbb{N}$).

3. MODULES MULTIGRADUÉS.

DÉFINITION (1.2). — Un Ω -module H sera dit n -gradué s'il est donné comme la somme directe d'une famille de sous-modules $(H_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$.

Nous désignerons par P_α le projecteur de H sur son facteur direct H_α . Si $f \in H$, $P_\alpha f$ sera dit la composante homogène de degré α de f ; f n'a qu'un nombre fini de composantes homogènes non nulles, et est égal à leur somme

$$f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} P_\alpha f, \quad \text{avec } P_\alpha f \in H_\alpha.$$

Nous appellerons *degré total* du multidegré $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et noterons $|\alpha|$ l'entier $(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)$, et nous poserons, pour tout $r \in \mathbb{N}$,

$$H_r = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| = r} H_\alpha.$$

Nous définissons ainsi sur H , par « sommation partielle des composantes », une structure de module simplement gradué. C'est en ce sens que nous parlerons des composantes homogènes pour le degré total des éléments de H .

Un sous-module n -gradué K de H sera un sous-module homogène, c'est-à-dire vérifiant

$$K = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} (K \cap H_\alpha).$$

Un homomorphisme φ d'un module n -gradué H dans un module n -gradué H' sera une application Ω -linéaire vérifiant $\varphi H_\alpha \subset H'_\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

4. CRITÈRES CONCERNANT LA DÉFINITION DES FONCTIONS HOMOGÈNES. — Les principaux modules multigradés que nous rencontrerons seront des modules H de fonctions dans un module (n° 1), où les éléments de H_α vérifieront la relation d'homogénéité de degré α [déf. (1.1)]. La remarque finale du n° 1 montre qu'il faudra, en général, définir axiomatiquement les modules de fonctions homogènes. Cependant, dans certains cas particuliers, les relations d'homogénéité suffisent pour caractériser les H_α : il faut pour cela que toute somme finie de fonctions vérifiant respectivement des relations d'homogénéité pour des multidegrés distincts ne puisse être nulle que si tous ses termes sont nuls.

PROPOSITION (1.1). — Soit M un espace vectoriel sur le corps infini Ω . Une

somme finie $\sum_{\alpha \in N^n} f_\alpha$, où chaque $f_\alpha \in \mathcal{F}_n(\mathbf{M})$ vérifie la relation d'homogénéité de degré α , ne peut être nulle que si chaque terme f_α est nul.

Démonstration. — Nous pouvons écrire, pour tous $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{M}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Omega$,

$$(1) \quad \sum_{\alpha \in N^n} \lambda_1^{\alpha_1} \dots \lambda_n^{\alpha_n} f_\alpha(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

La proposition s'en déduit aisément : par exemple, par récurrence sur n et application des déterminants de Vandermonde.

PROPOSITION (1.2). — Soit \mathbf{M} un Ω -module. Considérons la somme finie $\sum_{\alpha \in N^n} f_\alpha$, où les $f_\alpha (\in \mathcal{F}_n(\mathbf{M}))$ vérifient respectivement les relations d'homogénéité de degré α . Supposons que, pour $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $f_\alpha \neq 0$ implique $\alpha_1! \dots \alpha_n! f_\alpha \neq 0$. Alors la somme considérée ne peut être nulle que si chacun de ses termes est nul.

Démonstration. — Écrivons à nouveau la relation (1) dont nous désignerons le premier membre par $P(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Introduisons les opérateurs différences Δ_i :

$$(\Delta_i P)(\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_n) = P(\lambda_1, \dots, \lambda_i + 1, \dots, \lambda_n) - P(\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_n).$$

Si la somme considérée est nulle sans que tous ses termes le soient, définissons $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ comme le plus grand des multidegrés $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, ordonnés lexicographiquement, tels que $f_\beta \neq 0$. Alors

$$0 = (\Delta_n^{\beta_n} \dots \Delta_1^{\beta_1} P)(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \beta_1! \dots \beta_n! f_\beta,$$

contrairement à l'hypothèse.

Remarque. — On se trouvera dans les conditions de la proposition (1.2) dans les cas particuliers suivants :

1° \mathbf{M} est un module sans torsion sur l'anneau d'intégrité Ω de caractéristique 0;

2° L'ordre additif de chaque fonction f_α non nulle n'est pas un diviseur de $|a|!$.

2. — Analyseurs incomplets.

5. AXIOMES DES ANALYSEURS INCOMPLETS.

DÉFINITION (2.1). — Un analyseur incomplet \mathcal{A} sur l'anneau Ω est constitué par la donnée :

a. d'une suite $(\mathcal{A}^n)^{n \in N^*}$ de Ω -modules multigradués, tels que chaque \mathcal{A}^n

soit n -gradué

$$\mathfrak{A}^n = \sum_{\alpha \in N^n} \mathfrak{A}_{\alpha}^n;$$

b. d'une famille d'applications $(T_{m,n})$ ($m, n \in N^*$), telle que $T_{m,n}$ applique \mathfrak{A}^m dans $\mathfrak{F}_m(\mathfrak{A}^n)$;

c. d'une famille d'éléments distingués $(e_{m,i})$ ($m, i \in N^*, i \leq m$), tels que $e_{m,i} \in \mathfrak{A}_{\delta_{m,i}}^m$, où $\delta_{m,i}$ est le multidegré $(\delta_i^1, \dots, \delta_i^m)$, et δ_i^j désigne le symbole de Kronecker ⁽⁶⁾, satisfaisant aux axiomes suivants :

(A1) Pour tous $m, n \in N^*$, l'application $T_{m,n}$ est un homomorphisme Ω -linéaire de \mathfrak{A}^m dans le module $\mathfrak{F}_m(\mathfrak{A}^n)$. De plus, pour tout $m \in N^*$, $T_{m,m}$ est injectif.

(A2) Si $m, n \in N^*, \alpha \in N^m, f \in \mathfrak{A}_{\alpha}^m$, alors $T_{m,n}f$ vérifie la relation d'homogénéité de degré α .

(A3) Soient $m, n, p \in N^*, f \in \mathfrak{A}^m, g_i \in \mathfrak{A}^n$ (pour $1 \leq i \leq m$), $h_j \in \mathfrak{A}^p$ (pour $1 \leq j \leq n$). Posons

$$(T_{m,n}f)(g_1, \dots, g_m) = k \in \mathfrak{A}^n$$

et

$$(T_{n,p}g_i)(h_1, \dots, h_n) = l_i \in \mathfrak{A}^p \quad (\text{pour } 1 \leq i \leq m).$$

Alors

$$(T_{n,p}k)(h_1, \dots, h_n) = (T_{m,p}f)(l_1, \dots, l_m).$$

(A4) Pour tous $m, n, i \in N^*, i \leq m, f_j \in \mathfrak{A}^n$ (pour $1 \leq j \leq m$),

$$(T_{m,n}e_{m,i})(f_1, \dots, f_m) = f_i.$$

(A5) Soient $m, n \in N^*$,

$$\begin{aligned} \alpha &= (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in N^m, & f &\in \mathfrak{A}_{\alpha}^m; \\ \beta_i &= (\beta_{i,1}, \dots, \beta_{i,n}) \in N^n, & g_i &\in \mathfrak{A}_{\beta_i}^n \quad (\text{pour } 1 \leq i \leq m). \end{aligned}$$

Alors $(T_{m,n}f)(g_1, \dots, g_m) \in \mathfrak{A}_{\gamma}^n$, avec

$$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n), \quad \gamma_i = \sum_{1 \leq j \leq m} \alpha_j \beta_{j,i} \quad (1 \leq i \leq n).$$

(A6) Soient $m \in N^*, \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in N^m, f \in \mathfrak{A}_{\alpha}^m$. Posons

$$g = (T_{m,m+1}f)(e_{m+1,1} + e_{m+1,2}, e_{m+1,3}, \dots, e_{m+1,m+1}),$$

et $g_{\beta} = P_{\beta}g$ pour $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{m+1}) \in N^{m+1}$. Alors :

a. $g_{\beta} = 0$ si l'on n'a pas simultanément

$$\beta_1 + \beta_2 = \alpha_1, \quad \beta_i = \alpha_{i-1} \quad (3 \leq i \leq m+1);$$

⁽⁶⁾ $\delta_i^j = 1$ si $i = j$, $\delta_i^j = 0$ si $i \neq j$.

b. Si $\beta_1 + \beta_2 = \alpha_1$, $\beta_i = \alpha_{i-1}$ ($3 \leq i \leq m+1$), alors

$$(T_{m+1,m} g_\beta)(\mathbf{e}_{m,1}, \mathbf{e}_{m,1}, \mathbf{e}_{m,2}, \dots, \mathbf{e}_{m,m}) = \binom{\alpha_1}{\beta_1} f \quad (7).$$

(A7) Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, le module \mathfrak{A}_0^m (des éléments de degré total 0) est nul.

Ce dernier axiome n'interviendra qu'au paragraphe 3.

Exemple : l'analyseur classique. — Nous appelons analyseur classique l'analyseur défini comme suit : $\mathfrak{A}^n \subset \Omega[\mathbf{e}_{n,1}, \dots, \mathbf{e}_{n,n}]$ ($n \in \mathbb{N}^*$) est l'anneau des polynômes *sans terme constant*, à coefficients dans Ω , en les indéterminées $(\mathbf{e}_{n,i})_{1 \leq i \leq n}$ [1]. Nous prenons sur \mathfrak{A}^n la graduation usuelle. Si $f = P(\mathbf{e}_{m,1}, \dots, \mathbf{e}_{m,m}) \in \mathfrak{A}^m$, $g_i \in \mathfrak{A}^n$ ($1 \leq i \leq m$), nous posons

$$(T_{m,n} f)(g_1, \dots, g_m) = P(g_1, \dots, g_m).$$

On vérifiera sans peine que les axiomes (A1) à (A7) sont satisfaits.

Nous laissons au lecteur le soin de formuler, conformément à la théorie générale des structures algébriques où les lois de composition sont partout définies, les notions d'*homomorphisme d'analyseurs* et de *sous-analyseur*. Si l'on a un homomorphisme d'un analyseur \mathfrak{A} dans un analyseur \mathfrak{A}' , l'image de \mathfrak{A} est un *sous-analyseur* de \mathfrak{A}' ; si l'image coïncide avec \mathfrak{A}' , nous dirons que ce dernier est un *analyseur quotient* de \mathfrak{A} . Remarquons que le noyau d'un homomorphisme d'analyseurs n'est pas un sous-analyseur [car il ne contient pas les éléments $(\mathbf{e}_{n,i})$].

6. UN LEMME DE THÉORIE DES ENSEMBLES. — Nous allons effectuer sur les analyseurs incomplets une construction par « dédoublement », analogue à la représentation régulière des groupes ou des algèbres associatives. Cette construction est basée sur le lemme général suivant :

LEMME (2.1). — Soient $(E^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'ensembles, $\varepsilon_n : E^n \rightarrow E^{n+1}$ une suite d'applications, et $(T_{m,n})$ une famille de lois de composition $(m+1)$ -aires ($m, n \in \mathbb{N}$), telles que, pour $f \in E^m$, $g_i \in E^n$ ($1 \leq i \leq m$), on ait $(T_{m,n} f)(g_1, \dots, g_m) \in E^n$. Supposons que pour tous m, n, f, g_i définis comme précédemment, on ait

$$(1) \quad \varepsilon_n((T_{m,n} f)(g_1, \dots, g_m)) = (T_{m,n+1} f)(\varepsilon_n g_1, \dots, \varepsilon_n g_m).$$

Désignons par $E = \lim_{\rightarrow} E^n$ la limite inductive de la suite (E^n) pour les appli-

(7) Plus précisément : $g = (T_{m,m+1} f)(h_1, \dots, h_m)$, où

$$h_1 = \mathbf{e}_{m+1,1} + \mathbf{e}_{m+1,2}, \quad h_i = \mathbf{e}_{m+1,i+1} \quad (\text{pour } 2 \leq i \leq m).$$

Nous appliquons le projecteur d'homogénéité P_β conformément aux notations du n° 3. Dans b, il faut entendre $(T_{m+1,m} g_\beta)(k_1, \dots, k_{m+1})$, avec

$$k_1 = k_2 = \mathbf{e}_{m,1}, \quad k_i = \mathbf{e}_{m,i-1} \quad (\text{pour } 3 \leq i \leq m+1).$$

Enfin $\binom{\alpha_1}{\beta_1}$ désigne le coefficient binomial $\frac{\alpha_1!}{\beta_1! \beta_2!}$.

cations (ε_n) , et par π_n l'application canonique de E^n dans $E(n \in N^*)$. Alors il existe des applications T_m , respectivement de E^m dans l'ensemble des fonctions de m arguments dans E , univoquement déterminées par les conditions

$$(T_m f)(\pi_n g_1, \dots, \pi_n g_m) = \pi_n((T_{m,n} f)(g_1, \dots, g_m)),$$

pour tous $m, n \in N^*, f \in E^m, g_i \in E^n (1 \leq i \leq m)$.

Démonstration. — Elle résulte immédiatement de la définition de la limite inductive. Définissons, pour $p \leq q$, les applications $\pi_p^q : E^p \rightarrow E^q$, par les relations de récurrence $\pi_p^{q+1} = \varepsilon_q \pi_p^q$ (π_p^p est l'application identique de E^p). L'ensemble E et les applications π_n sont caractérisés par les propriétés suivantes :

- a. pour tous $p \leq q, \pi_p = \pi_q \pi_p^q$;
- b. $E = \bigcup_{n \in N^*} (\pi_n E^n)$;
- c. si $f \in E^p, g \in E^q, \pi_p f = \pi_q g$, alors il existe $r \geq p, q$ tel que $\pi_r^p f = \pi_r^q g$.

Par récurrence sur $q - p \geq 0$, on démontre que, pour tous $f \in E^m, g_1, \dots, g^m \in E^p$,

$$\pi_p^q((T_{m,p} f)(g_1, \dots, g_m)) = (T_{m,q} f)(\pi_p^q g_1, \dots, \pi_p^q g_m).$$

L'existence et l'unicité des applications T_m s'en déduisent sans difficulté.

7. REPRÉSENTATION RÉGULIÈRE DES ANALYSEURS INCOMPLETS. — Soit \mathfrak{A} un analyseur incomplet [déf. (2.1)].

PROPOSITION (2.1). — Pour tout $n \in N^*$ et $f \in \mathfrak{A}^n$,

$$(T_{n,n} f)(e_{n,1}, \dots, e_{n,n}) = f.$$

Démonstration. — Posons $f' = (T_{n,n} f)(e_{n,1}, \dots, e_{n,n})$. Alors (A3) et (A4) montrent que $T_{n,m} f = T_{n,m} f'$, pour tout $m \in N^*$. Comme $T_{n,n}$ est injectif (A1), $f = f'$.

LEMME (2.2). — Définissons les applications $\varepsilon_n : \mathfrak{A}^n \rightarrow \mathfrak{A}^{n+1} (n \in N^*)$ par

$$\varepsilon_n f = (T_{n,n+1} f)(e_{n+1,1}, \dots, e_{n+1,n}) \quad \text{pour } f \in \mathfrak{A}^n.$$

Alors :

- a. les (ε_n) et $(T_{m,n})$ vérifient la condition (1) du lemme (2.1);
- b. pour tout $n \in N, \varepsilon_n$ est injectif; plus précisément, la restriction de ε_n à \mathfrak{A}_2^n est un isomorphisme de ce module sur $\mathfrak{A}_{(\alpha, 0)}^{n+1}$ avec

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in N^n, \quad (\alpha, 0) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, 0) \in N^{n+1}.$$

Démonstration. — a est une conséquence immédiate de (A3) et de la définition des applications ε_n . Pour $g \in \mathfrak{A}^{n+1}$, posons

$$\eta_{n+1} g = (T_{n+1,n} g)(e_{n,1}, \dots, e_{n,n}, 0).$$

Alors, si $f \in \mathfrak{A}^n$,

$$\eta_{n+1} \varepsilon_n f = f,$$

d'après (A3), (A4) et la proposition (2.1). De même, si $g \in \mathfrak{A}^{n+1}$,

$$\varepsilon_n \eta_{n+1} g = (T_{n+1, n+1} g) (\mathbf{e}_{n+1, 1}, \dots, \mathbf{e}_{n+1, n}, 0).$$

Or, si $g \in \mathfrak{A}_{(\alpha, 0)}^{n+1}$, le $(n+1)$ -ième argument de $T_{n+1, m} g$ est neutre pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, d'après (A2) et la définition (4.1); nous avons donc dans ce cas

$$T_{n+1, n+1} \varepsilon_n \eta_{n+1} g = T_{n+1, n+1} g,$$

ce qui prouve que $g = \varepsilon_n \eta_{n+1} g$ (A1). Enfin (A5) achève la démonstration de *b*.

Nous sommes donc en mesure d'appliquer le lemme (2.1) et de poser la

DÉFINITION (2.2). — Avec les notations des lemmes (2.1) et (2.2), nous appellerons *module de la représentation régulière de \mathfrak{A}* le module $\mathfrak{M} = \varinjlim \mathfrak{A}^n$. La *représentation régulière de \mathfrak{A}* est la correspondance qui, à tout $f \in \mathfrak{A}^n$ associe la fonction $T_n f$ de n arguments dans \mathfrak{M} .

PROPOSITION (2.2). — *a. Les applications $T_n : \mathfrak{A}^n \rightarrow \mathfrak{F}_n(\mathfrak{M})$ sont des monomorphismes de modules.*

b. Si $f \in \mathfrak{A}_\alpha^n$, $T_n f$ vérifie la relation d'homogénéité de degré α .

c. Si $f \in \mathfrak{A}^m$, $g_i \in \mathfrak{A}^n$ (pour $1 \leq i \leq m$), alors

$$T_n((T_{m, n} f)(g_1, \dots, g_m)) = (T_m f)(T_n g_1, \dots, T_n g_m).$$

Démonstration. — Les applications ε_n sont des monomorphismes [lemme (2.2, b)]. Il en est donc de même des applications $\pi_n : \mathfrak{A}^n \rightarrow \mathfrak{M}$. Comme $\varepsilon_n \mathbf{e}_{n, i} = \mathbf{e}_{n+1, i}$ (pour $1 \leq i \leq n$), $\pi_n \mathbf{e}_{n, i}$ est indépendant de n ; nous poserons, pour $n \geq i$, $\pi_n \mathbf{e}_{n, i} = \mathbf{e}_i \in \mathfrak{M}$. Soit alors $f \in \mathfrak{A}^n$; d'après la définition de T_n et la proposition (2.1), $(T_n f)(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = \pi_n f$. Cette relation établit simultanément que tout élément x de \mathfrak{M} peut s'écrire sous la forme $(T_n f)(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$, où $f \in \mathfrak{A}^n$, et que $(T_n f)(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \neq 0$ si $f \neq 0$, donc que les (T_n) sont des monomorphismes. La démonstration de *b* résulte immédiatement de (A2); quant à *c*, c'est la traduction de (A3).

La notion de représentation régulière nous permet d'identifier un analyseur à une famille de fonctions dans un module. Les éléments distingués $(\mathbf{e}_{n, i})$ s'identifient alors respectivement aux x_i , considérés comme fonctions des n arguments (x_1, \dots, x_n) . Quant aux lois de composition $(T_{m, n})$, elles traduisent la composition des fonctions; l'axiome (A3) est vérifié *a priori* dans les familles de fonctions comme l'axiome analogue d'associativité dans les groupes de permutations.

L'identification permise par la représentation régulière va justifier les « abus de langage » nombreux et indispensables que nous commettrons sans remords. Nous renoncerons à la lourde notation des $(T_{m, n})$, nous écrirons $f(g_1, \dots, g_m)$

au lieu de $(T_{m,n}f)(g_1, \dots, g_m)$. Un élément $f \in \mathfrak{A}^n$ sera dit, à l'occasion, « fonction de n arguments »; il sera souvent commode d'utiliser la notation fonctionnelle « incorrecte » $f(x_1, \dots, x_n)$, et d'employer d'autres signes que les (x_i) pour désigner les arguments; par exemple, nous écrirons des formules telles que

$$f(x, y) \in \mathfrak{A}^2, \quad f(f(x, y), z) - f(x, f(y, z)) = 0 \quad (^8).$$

Si $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{A}_\alpha^n$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, nous dirons que f est homogène de degré α_i par rapport à l'argument x_i ($1 \leq i \leq n$); cela nous permettra de parler de fonctions homogènes par rapport à l'un de leurs arguments.

8. \mathfrak{A} -MODULES ET FAMILLES DE FONCTIONS POLYNOMIALES.

DÉFINITION (2.3). — Soient \mathfrak{A} un analyseur incomplet, M un module. Une structure de \mathfrak{A} -module sur M est définie par la donnée d'une famille d'homomorphismes $\tau_n : \mathfrak{A}^n \rightarrow \mathfrak{F}_n(M)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, tels que :

- a. si $f \in \mathfrak{A}_\alpha^n$, $\tau_n f$ vérifie la relation d'homogénéité de degré α ;
- b. si $f \in \mathfrak{A}^m$, $g_i \in \mathfrak{A}^n$ ($1 \leq i \leq m$),

$$\tau_n(f(g_1, \dots, g_m)) = (\tau_m f)(\tau_n g_1, \dots, \tau_n g_m);$$

- c. $\tau_1(\mathbf{e}_{1,1})$ est l'application identique de M .

Exemple. — Le module \mathfrak{M} de la représentation régulière est un \mathfrak{A} -module ($\tau_n = T_n$).

Si \mathfrak{A} est un analyseur incomplet, la catégorie des \mathfrak{A} -modules correspond à une espèce de structure algébrique. Si, par exemple, \mathfrak{A} est l'analyseur classique (n° 5), les \mathfrak{A} -modules coïncident avec les Ω -algèbres associatives et commutatives. Toute propriété d'un analyseur incomplet peut donc être considérée comme une « règle de calcul » valable dans les structures algébriques d'une certaine espèce.

Réciproquement, un analyseur incomplet peut être défini par les fonctions correspondantes dans un \mathfrak{A} -module M , pourvu que le module M ne vérifie pas d'autre identité générique que celles communes à tous les \mathfrak{A} -modules.

Si, avec les notations de la définition (2.3), les homomorphismes (τ_n) sont injectifs, nous pouvons identifier les modules \mathfrak{A}^n aux modules de fonctions $\mathfrak{P}^n = \tau_n \mathfrak{A}^n$. Nous dirons alors que la famille de fonctions $\mathfrak{P} = (\mathfrak{P}^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une famille de fonctions polynomiales associée à l'analyseur \mathfrak{A} dans le module M .

Partant de la notion de famille de fonctions polynomiales, on pourrait définir ensuite celle d'analyseur incomplet en « faisant abstraction » du module M . Ce procédé aurait l'avantage d'éviter l'axiome (A3) mais, en fin de compte, il compliquerait l'axiomatique.

(⁸) Avec les notations antérieures, il aurait fallu écrire : $(T_{2,3}f)((T_{2,3}f)(\mathbf{e}_{3,1}, \mathbf{e}_{3,2}), \mathbf{e}_{3,3})$ au lieu de $f(f(x, y), z)$; la simplification se passe de commentaires.

Remarquons que si M est un \mathcal{A} -module défini par les homomorphismes $\tau_n : \mathcal{A}^n \rightarrow \mathcal{F}_n(M)$, comme dans la définition (2.3), la famille $(\mathfrak{p}_n) = (\tau_n \mathcal{A}^n)$ n'est pas nécessairement une famille de fonctions polynomiales associée à un analyseur dans M ; exemple : \mathcal{A} est l'analyseur classique sur Z , et M est un corps fini. Pour que $(\tau_n \mathcal{A}^n)$ soit une famille de fonctions polynomiales (associée, en général, à un *analyseur quotient* de \mathcal{A}), il faut et il suffit que tous les homomorphismes τ_n aient des *noyaux homogènes* (n° 3).

Il est facile de caractériser en tant que \mathcal{A} -module le module \mathfrak{M} de la représentation régulière : on définit d'une manière naturelle la notion de \mathcal{A} -générateurs \mathcal{A} -libres [cf. la démonstration de la proposition (2.2, a)], et \mathfrak{M} est défini, à un isomorphisme près, comme le \mathcal{A} -module admettant une *famille dénombrable de \mathcal{A} -générateurs \mathcal{A} -libres*.

9. OPÉRATIONS SUR \mathcal{A}^n DU GROUPE SYMÉTRIQUE \mathfrak{S}_n . — Nous noterons \mathfrak{S}_n le groupe symétrique des permutations des n premiers entiers naturels, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Soit \mathcal{A} un analyseur incomplet. Pour $f \in \mathcal{A}^n$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, nous poserons

$$\sigma f = f(e_{n, \sigma(1)}, \dots, e_{n, \sigma(n)})$$

ou, avec nos nouvelles notations simplifiées,

$$(1) \quad (\sigma f)(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

Avec cette définition, \mathcal{A}^n devient un module lié au groupe symétrique \mathfrak{S}_n ⁽⁹⁾. Si $f \in \mathcal{A}^n$, $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$,

$$(2) \quad (\sigma\tau)f = \sigma(\tau f).$$

De plus, d'après (A5), si $f \in \mathcal{A}^n_\alpha$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$,

$$(3) \quad \sigma f \in \mathcal{A}^n_{\sigma\alpha}, \quad \text{où } \sigma\alpha = (\alpha_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, \alpha_{\sigma^{-1}(n)}) \in \mathbb{N}^n.$$

Chaque opérateur σ est donc un automorphisme de \mathcal{A}^n considéré seulement comme module (et non comme module n -gradué).

Nous dirons que $f \in \mathcal{A}^n$ est *symétrique* (resp. *antisymétrique*) si $\sigma f = f$ (resp. $\sigma f = \varepsilon_\sigma f$, ε_σ désignant la signature de σ) pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

10. LES AXIOMES (A5) ET (A6). — Nous n'avons pas fait intervenir jusqu'à présent les axiomes (A5) ni (A6)⁽¹⁰⁾. Dans certains cas particuliers, correspondant aux propositions (1.1) et (1.2) du n° 4, ces deux axiomes sont des conséquences des précédents. Il en est ainsi quand Ω est un *corps infini*; nous n'examinerons ici que ce cas.

Avec les notations de (A5), simplifiées conformément aux conventions du

(9) BOURBAKI, *Algèbre*, chap. III, § 5, n° 1, déf. 1.

(10) Exception faite de la fin du lemme (2.2, b), et de (3) (n° 9), qui utilisent (A5). Mais nous n'avons encore tiré aucune conséquence de ces résultats.

n° 8, nous avons, en posant

$$\begin{aligned} f(g_1, \dots, g_m) &= h(x_1, \dots, x_n), \\ h(\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n) &= \lambda_1^{\alpha_1} \dots \lambda_n^{\alpha_n} h(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Omega$, ce qui établit, d'après la proposition (1.1), que $h(x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{A}_\Gamma^n$.

De même, avec les notations de (A6), nous avons

$$f(x_1 + x_2, x_3, \dots, x_{m+1}) = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^{m+1}} g_\beta(x_1, \dots, x_{m+1}).$$

D'où, pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \Omega$,

$$\begin{aligned} f(\lambda_1(x_1 + x_2), \dots, \lambda_m x_{m+1}) &= \sum_{\beta \in \mathbb{N}^{m+1}} \lambda_1^{\beta_1 + \beta_2} \dots \lambda_m^{\beta_{m+1}} g_\beta(x_1, \dots, x_{m+1}) \\ &= \sum_{\beta \in \mathbb{N}^{m+1}} \lambda_1^{\alpha_1} \lambda_2^{\alpha_2} \dots \lambda_m^{\alpha_m} g_\beta(x_1, \dots, x_{m+1}), \end{aligned}$$

ce qui établit (A6, a). Enfin,

$$\begin{aligned} &\sum_{\beta \in \mathbb{N}^{m+1}} \lambda_1^{\beta_1} \lambda_2^{\beta_2} \dots \lambda_{m+1}^{\beta_{m+1}} g_\beta(x_1, x_1, \dots, x_m) \\ &= \sum_{\beta \in \mathbb{N}^{m+1}} g_\beta(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_1, \dots, \lambda_{m+1} x_m) \\ &= f((\lambda_1 + \lambda_2)x_1, \lambda_3 x_2, \dots, \lambda_{m+1} x_m) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2)^{\alpha_1} \lambda_3^{\alpha_2} \dots \lambda_{m+1}^{\alpha_m} f(x_1, \dots, x_m), \end{aligned}$$

ce qui établit (A6, b), en égalant les coefficients des mêmes monomes en $(\lambda_1, \dots, \lambda_{m+1})$.

On démontrerait de la même manière la dépendance des axiomes (A5), (A6) dans les cas qui permettent d'appliquer la proposition (1.2).

Nous aurons à utiliser l'axiome (A6) sous une forme plus générale.

PROPOSITION (2.3). — [généralisation de (A.6)]. — Soient $f(x_1, \dots, x_m) \in \mathfrak{A}_x^m$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $n \geq m$, et $(I_j)_{1 \leq j \leq m}$ une partition de l'intervalle d'entiers $[1, n]$ en sous-ensembles non vides ⁽¹¹⁾. Posons

$$g(x_1, \dots, x_n) = f\left(\sum_{i \in I_1} x_i, \dots, \sum_{i \in I_m} x_i\right) \quad \text{et} \quad g_\beta = \mathbf{P}_\beta g$$

pour $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$. Alors :

$$a. \quad g_\beta = 0 \text{ si l'on n'a pas } \alpha_j = \sum_{i \in I_j} \beta_i \text{ pour } 1 \leq j \leq m;$$

⁽¹¹⁾ C'est-à-dire que les ensembles non vides (I_j) sont disjoints, et que leur réunion est l'intervalle $[1, n]$.

b. Si $\alpha_j = \sum_{i \in I_j} \beta_i$ pour $1 \leq j \leq m$, et si l'on pose $y_i = x_j$ pour $i \in I_j$,

$$g\beta(y_1, \dots, y_n) = \left(\frac{\prod_{1 \leq j \leq m} \alpha_j!}{\prod_{1 \leq i \leq n} \beta_i!} \right) f(x_1, \dots, x_m).$$

Démonstration. — Par récurrence sur $(n - m)$. Pour $n = m + 1$, la proposition coïncide avec (A6), à une transformation près par un élément de \mathfrak{S}_n [cf. n° 9, notamment (3)]. Le passage de n à $n + 1$ s'effectue en appliquant (A6), les opérateurs de $\mathfrak{S}_{(n+1)}$ et (A3) (rendu « évident » par la notation fonctionnelle).

11. CALCULS DANS LES ANALYSEURS : OPÉRATEURS DE SANOV ET FORMULES DE TAYLOR. — Nous aurons souvent à calculer les composantes homogènes d'une fonction composée $f(g_1, \dots, g_m)$. D'après (A3) et (A5), il nous suffira d'étudier le cas où les g_i sont des sommes de $e_{n,j}$. Nous poserons donc la définition suivante (où nous utilisons la notation fonctionnelle) :

DÉFINITION (2.4). — Soient \mathfrak{A} un analyseur incomplet, $f(x_1, \dots, x_m) \in \mathfrak{A}^m$, $(I_i)_{1 \leq i \leq m}$ une partition de l'intervalle d'entiers $[1, n]$. Considérons la fonction

$$g(x_1, \dots, x_n) = f\left(\sum_{i \in I_1} x_i, \dots, \sum_{i \in I_m} x_i\right) \in \mathfrak{A}^n.$$

Pour $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, la composante homogène $P_\alpha g(x_1, \dots, x_n)$, de degré α_j par rapport à x_j ($1 \leq j \leq n$) sera notée

$$P_\alpha g(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\substack{x_i \geq \sum_{j \in I_i} 1 \alpha_j 1 x_j}} \mathfrak{D} f(x_1, \dots, x_m).$$

Les opérateurs \mathfrak{D} ainsi définis seront dits opérateurs de Sanov simples ⁽¹²⁾.

Lorsque les arguments des fonctions seront désignés par d'autres signes que les (x_i) , nous utiliserons des notations plus explicites. Par exemple, si $f(x, y) \in \mathfrak{A}^2$, $\sum_{\substack{x \geq 121x+131y \\ y \geq 111z+141t}} \mathfrak{D} f(x, y)$ désignera la composante homogène de

multidegré $(2, 3, 1, 4)$ par rapport à (x, y, z, t) de la fonction $f(x + y, z + t)$.

Avec les notations de la définition (2.4), l'opérateur de Sanov \mathfrak{D} est

$$\sum_{\substack{x_i \geq \sum_{j \in I_i} 1 \alpha_j 1 x_j}} \mathfrak{D}$$

un homomorphisme linéaire de \mathfrak{A}^n dans \mathfrak{A}^n . De plus, d'après la proposition

⁽¹²⁾ De tels opérateurs ont été considérés par Sanov [9] dans le cas des polynômes à variables non permutables. La définition de Sanov correspond plutôt à notre définition (2.5).

(2.3, a), cet opérateur annule toutes les composantes homogènes \mathfrak{A}_β^m de \mathfrak{A}^m , à l'exception de celle pour laquelle

$$\beta_j = \sum_{i \in I_j} \alpha_i \quad (1 \leq j \leq m).$$

Si nous combinons cette propriété avec l'axiome (A3), nous obtenons la

PROPOSITION (2.4). — Soient $m, n, p \in \mathbb{N}^*$, $(I_i)_{1 \leq i \leq m}$ une partition de l'intervalle d'entiers $[1, n]$, $(J_j)_{1 \leq j \leq p}$ une partition de l'intervalle $[1, p]$,

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n, \quad \beta = (\beta_1, \dots, \beta_p) \in \mathbb{N}^p.$$

Alors, si l'on pose $K_i = \bigcup_{j \in I_i} J_j$ (pour $1 \leq i \leq m$), le composé des opérateurs de Sanov

$$x_j \mapsto \sum_{k \in I_j} 1 \beta_k 1 x_k \quad x_i \mapsto \sum_{j \in I_i} 1 \alpha_j 1 x_j$$

est égal à l'opérateur de Sanov

$$x_i \mapsto \sum_{k \in K_i} 1 \beta_k 1 x_k \quad \text{si} \quad \alpha_j = \sum_{k \in J_j} \beta_k$$

pour $1 \leq j \leq n$, et est nul dans tous les autres cas.

Comme nous le verrons, la détermination des fonctions

$$f\left(\sum_{j \in I_1} x_j, \dots, \sum_{j \in I_m} x_j\right)$$

ne représente qu'une étape intermédiaire dans les calculs. Aussi, posons-nous la

DÉFINITION (2.5). — Soient $f \in \mathfrak{A}^m$, $(I_i)_{1 \leq i \leq m}$ une partition de $[1, n]$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ et $g_j \in \mathfrak{A}^p$ pour $1 \leq j \leq n$. Nous écrirons

$$x_i \mapsto \sum_{j \in I_i} 1 \alpha_j 1 g_j \quad f(x_1, \dots, x_n) = h(g_1, \dots, g_n) \in \mathfrak{A}^p,$$

où

$$h(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j \in I_1} 1 \alpha_j 1 x_j \quad f(x_1, \dots, x_m).$$

Un opérateur tel que $x_i \mapsto \sum_{j \in I_j} 1 \alpha_j 1 g$ sera dit opérateur de Sanov composé.

Remarque. — Nos définitions générales ont fait intervenir comme « familles d'arguments » des ensembles $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$, mais, dans les applications, nous utiliserons des notations adaptées à chaque cas particulier. Le lecteur se souvien-

dra que ces « arguments » sont seulement des symboles évitant l'introduction des éléments $e_{n,i}$.

Si, dans la définition (2.5), l'un des degrés, soit α_k , est *nul*, l'argument x_k est *neutre* dans la fonction $\prod_{x_i \succ \sum_{j \in I_i} \alpha_j |x_j|} f(x_1, \dots, x_m)$. Par conséquent, le choix

de g_k est sans influence sur la valeur de la fonction $\prod_{x_i \succ \sum_{j \in I_i} \alpha_j |g_j|} f(x_1, \dots, x_m)$.

Plus précisément, si nous appliquons la proposition (2.4), nous voyons que la suppression d'un symbole tel que $|o|g_k$ au bas d'un opérateur de Sanov composé [jointe à la modification correspondante des ensembles d'indices (I_i) , puisque l'un d'eux perd un élément, et qu'ils ne recouvrent plus, en général, un intervalle d'entiers], ne modifie pas cet opérateur ⁽¹³⁾.

Nous pourrions donc appliquer une convention commode, qui consiste à écrire des sommes finies comme des sommes infinies n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls. Nous obtiendrions ainsi des opérateurs de Sanov composés avec des ensembles d'indices (I_i) infinis, les degrés α_j étant tous nuls, à l'exception d'un nombre fini d'entre eux.

PROPOSITION (2.5) (*formule de Taylor dans les analyseurs*). — Soit \mathfrak{A} un analyseur incomplet $f \in \mathfrak{A}^m$, $g_i \in \mathfrak{A}^n$ ($1 \leq i \leq m$). Posons

$$h = f(g_1, \dots, g_m),$$

et, pour tout $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$,

$$h_\alpha = \mathbf{P}_\alpha h, \quad g_{i,\alpha} = \mathbf{P}_\alpha g_i \quad (1 \leq i \leq m).$$

Alors $h = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} h_\alpha$, et

$$h_\alpha = \sum_{(j_i, \beta)} \prod_{x_i \succ \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n} j_i, \beta |g_{i,\beta}|} f(x_1, \dots, x_m),$$

où la sommation s'étend à toutes les familles $(j_{i,\beta})$ d'entiers ≥ 0 , dont les indices sont caractérisés par $1 \leq i \leq m$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$, et qui vérifient

$$\sum_{1 \leq i \leq m, \beta \in \mathbb{N}^n} \beta_k j_{i,\beta} = \alpha_k \quad (\text{pour } 1 \leq k \leq n).$$

Démonstration. — Il suffit de remplacer d'abord les composantes homogènes non nulles des (g_i) par des arguments indépendants $(x_{i,\beta})$, puis d'appliquer les axiomes (**A**) et la définition des opérateurs de Sanov composés, que nous avons précisément introduits pour énoncer cette proposition.

⁽¹³⁾ Il n'en irait pas de même pour un opérateur de Sanov simple, à moins d'identifier des fonctions qui ne diffèrent que par des arguments neutres (mais qui appartiennent à des modules \mathfrak{A}^n différents). Les démonstrations rigoureuses des résultats énoncés ne présentent ni difficulté ni intérêt.

Dans certains cas particuliers, nous pouvons établir des résultats qui se rapprochent de la « formule de Taylor » classique.

DÉFINITION (2.6). — Soit $f(x, y_1, \dots, y_n) \in \mathfrak{A}^{n+1}$ une fonction de l'argument x et (éventuellement) d'autres arguments. L'opérateur $\left(y \frac{\partial}{\partial x}\right)$ est défini par

$$\left(y \frac{\partial}{\partial x}\right) f(x, y_1, \dots, y_n) = g(x, y, y_1, \dots, y_n),$$

où $g(x, z, y_1, \dots, y_n) \in \mathfrak{A}^{n+2}$ désigne la composante homogène de degré 1 par rapport à z de la fonction $f(x+z, y_1, \dots, y_n)$; z est un nouvel argument, distinct de x et des (y_i) ; y peut éventuellement coïncider avec l'un des arguments de f .

Remarque. — L'opérateur $\left(y \frac{\partial}{\partial x}\right)$ est la « dérivation de Hausdorff » [4]. Si $f(x) \in \mathfrak{A}^1$,

$$\left(y \frac{\partial}{\partial x}\right) f(x) = \sum_{1 \leq i < \infty} x \triangleright [i] y + [i] x \mathfrak{D} f(x).$$

PROPOSITION (2.6). — Soit $f(x) \in \mathfrak{A}^1$. Alors,

$$a. \left(y_1 \frac{\partial}{\partial x}\right) \cdots \left(y_n \frac{\partial}{\partial x}\right) f(x) = \sum_{0 \leq i < \infty} x \triangleright [i] x \mathfrak{D} \cdot \sum_{\substack{z \triangleright \sum_{1 \leq j \leq n} [i] y_j}} \mathfrak{D} f(x);$$

$$b. \left(y \frac{\partial}{\partial x}\right)^n f(x) = n! \sum_{0 \leq i < \infty} x \triangleright [i] x + [n] y \mathfrak{D} f(x).$$

Démonstration. — On établit d'abord, par récurrence sur n , que

$$\left(y_1 \frac{\partial}{\partial x}\right) \cdots \left(y_n \frac{\partial}{\partial x}\right) f(x) = \sum_{0 \leq i < \infty} x \triangleright [i] x + \sum_{1 \leq j \leq n} [i] y_j \mathfrak{D} f(x),$$

d'où a , d'après la proposition (2.4); b en résulte d'après la proposition (2.3).

COROLLAIRE. — Si Ω est un corps de caractéristique 0, on a, pour $f(x) \in \mathfrak{A}^1$,

$$f(x+y) = \sum_{0 \leq n < \infty} \frac{1}{n!} \left(y \frac{\partial}{\partial x}\right)^n f(x).$$

Lorsque Ω est un corps de caractéristique $p \neq 0$, on obtient des résultats entièrement analogues, que nous indiquerons brièvement. On notera $(v^{p^h} D_x)$ les opérateurs définis de la même manière que $\left(y \frac{\partial}{\partial x}\right)$, à ceci près que l'on calculera la composante homogène de degré p^h par rapport à z des fonctions composées $f(x+z, y_1, \dots, y_n)$, avant d'y substituer y à z (pour $h \in \mathbb{N}$); en particulier, $(y D_x) = \left(y \frac{\partial}{\partial x}\right)$. On démontrera comme précédemment que,

pour $f(x) \in \mathfrak{A}^1$,

$$(y_1^{p^{h_1}} D_x) \dots (y_n^{p^{h_n}} D_x) f(x) = \sum_{\substack{0 \leq i < \infty \\ x \succ |i| x \\ z \succ \sum_{1 \leq j \leq n} |p^{h_j}| y_j}} \mathfrak{D}_{x \succ |i| x + \left| \sum_{1 \leq j \leq n} p^{h_j} \right| z}} f(x).$$

On en déduira que la puissance $p^{\text{ième}}$ de chacun des opérateurs $(y^{p^{h_j}} D_x)$ est nulle, que ces opérateurs sont permutables entre eux, et que, si $n = \sum_{0 \leq i \leq r} \alpha_i p^i$, avec $0 \leq \alpha_i < p$,

$$(y D_x)^{\alpha_0} (y^p D_x)^{\alpha_1} \dots (y^{p^r} D_x)^{\alpha_r} f(x) = \alpha_0! \alpha_1! \dots \alpha_r! \sum_{1 \leq i < \infty} \mathfrak{D}_{x \succ |i| x + |n| y} f(x),$$

ce qui permet d'écrire une formule de Taylor semblable à celle qui vaut pour les polynômes usuels en caractéristique p .

Tous ces résultats s'étendent aux fonctions de plusieurs variables.

12. FONCTIONS LINÉAIRES ET MULTILINÉAIRES.

DÉFINITION (2.7). — Nous dirons qu'une fonction $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{A}^n$ est linéaire par rapport à l'argument x_i si elle est homogène de degré 1 en x_i . Nous dirons qu'elle est n -linéaire si elle est linéaire par rapport à chacun de ses arguments.

Comme conséquence immédiate de la proposition (2.5), nous obtenons la

PROPOSITION (2.7). — Soit $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \in \mathfrak{A}^n$, linéaire par rapport à x_i . Alors

$$f(x_1, \dots, y_1 + y_2, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, y_1, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, y_2, \dots, x_n) \quad (1^4).$$

Soit $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{A}^n$ une fonction n -linéaire. Posons

$$g(x) = f(x, \dots, x) \in \mathfrak{A}_n^1.$$

Il est facile de calculer les transformées de g par les opérateurs de Sanov. Par exemple, pour $0 \leq r \leq n$,

$$(1) \quad \mathfrak{D}_{x \succ |r| x + |n-r| y} g(x) = \sum_{(z_1, \dots, z_n)} \binom{n}{r} f(z_1, \dots, z_n),$$

où la sommation s'étend aux $\binom{n}{r}$ systèmes d'arguments (z_i) dont r sont égaux à x , et $(n-r)$ à y . Cette formule se simplifie lorsque f est n -linéaire et symétrique (n° 9); dans ce cas, les $\binom{n}{r}$ termes du second membre sont égaux entre eux.

(1⁴) Autrement dit, la définition des fonctions linéaires implique bien les propriétés usuelles.

DÉFINITION (2.8). — Soit $g(x) \in \mathfrak{A}_n^1$. Nous dirons que $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{A}^n$ est une *multilinéarisée* de g si f est n -linéaire et si

$$g(x) = f(x, \dots, x).$$

Une même fonction peut admettre plusieurs multilinéarisées.

Une fonction $g(x)$ n'admet pas toujours de multilinéarisée. Si nous posons

$$h(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\substack{x \in \mathfrak{A}^n \\ 1 \leq i \leq n}} g(x) \prod_{i=1}^n x_i,$$

$h(x)$ est n -linéaire symétrique, mais vérifie seulement $h(x, \dots, x) = n! g(x)$ [prop. (2.3)]. S'il est possible de diviser univoquement h par $n!$, $\frac{1}{n!} h$ est une fonction multilinéarisée symétrique de $g(x)$.

Ces considérations s'étendent au cas de fonctions de plusieurs arguments.

3. — Analyseurs complets.

13. MODULES MULTIGRADUÉS COMPLETS.

DÉFINITION (3.1). — Un Ω -module \hat{H} sera dit *n -gradué complet* s'il est donné comme produit direct (ou somme directe complète) d'une famille de sous-modules $(H_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$.

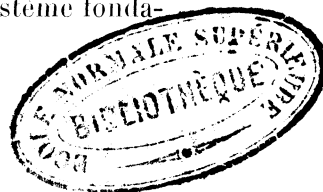
Nous noterons comme précédemment (n° 3) $(P_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ les projecteurs d'homogénéité dans \hat{H} . Un élément $f \in \hat{H}$ peut donc être identifié à la famille $(P_\alpha f)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ de ses composantes homogènes. A la différence des modules n -gradués incomplets [déf. (4.2)], f peut avoir une infinité de composantes homogènes non nulles.

Nous appellerons *topologie canonique* dans le module n -gradué complet \hat{H} la topologie *produit* des topologies discrètes sur les facteurs directs $(H_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$. Cette définition permet d'écrire tout élément f de \hat{H} comme la somme infinie de ses composantes homogènes

$$f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} P_\alpha f.$$

Connaissant les modules $(H_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$, on peut construire le module n -gradué H et le module n -gradué complet \hat{H} qui admettent $(H_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ comme composantes homogènes. Les modules H et \hat{H} seront dits *associés*; H s'identifie à un sous-module de \hat{H} ; \hat{H} est le *complété* de H pour sa topologie canonique (induite par celle de \hat{H}).

Nous pouvons caractériser la topologie canonique de H par le système fonda-



mental de voisinages de zéro, constitué par les modules $({}_rH)_{r \in \mathbb{N}^*}$ ainsi définis : $f \in {}_rH$ si et seulement si $\mathbf{P}_\alpha f = 0$ pour $|\alpha| < r$. Le module complété \hat{H} peut aussi s'interpréter comme la limite projective $\varprojlim H/{}_rH$ des modules quotients $H/{}_rH$, munis de leurs épimorphismes canoniques. Nous définirons de même les sous-modules ${}_r\hat{H}$ dans le module n -gradué complet \hat{H} associé à H . Pour écrire les congruences $(\text{mod } {}_rH)$ [resp. $(\text{mod } {}_r\hat{H})$], nous utiliserons les notations suivantes :

DÉFINITION (3.2). — Soit H un module n -gradué (resp. n -gradué complet). Pour $f, g \in H$, la relation

$$f \equiv g \pmod{\text{deg. } r} \quad (15)$$

équivalait à $\mathbf{P}_\alpha f = \mathbf{P}_\alpha g$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| < r$.

14. CONGRUENCES $(\text{mod. deg. } r)$ DANS LES ANALYSEURS. — Nous appliquons aux modules multigradés des analyseurs les définitions du n° 13. Les propositions suivantes font intervenir, pour la première fois, l'axiome (A7).

PROPOSITION (3.1). — Soient \mathcal{A} un analyseur incomplet $m, n, r, s \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{A}^m$, $g_i, h_i \in \mathcal{A}^n$ (pour $1 \leq i \leq m$), vérifiant

$$\begin{aligned} f &\equiv 0 \pmod{\text{deg. } r}, \\ g_i &\equiv h_i \pmod{\text{deg. } s}, \quad \text{pour } 1 \leq i \leq m. \end{aligned}$$

Alors

$$f(g_1, \dots, g_m) \equiv f(h_1, \dots, h_m) \pmod{\text{deg. } (r + s - 1)}.$$

Démonstration. — Soient, pour $1 \leq i \leq m$, $j \in \mathbb{N}^*$, $g_{i,j}$ (resp. $h_{i,j}$) la composante homogène de degré total j de g_i (resp. h_i) ⁽¹⁶⁾. Nous avons, d'après la « formule de Taylor » (n° 11),

$$(1) \quad f(g_1, \dots, g_m) - f(h_1, \dots, h_m) = \sum_{(\alpha_{i,j})} \left(\prod_{i \geq 1} \sum_{j \in \mathbb{N}^*} |\alpha_{i,j}| g_{i,j} - \prod_{i \geq 1} \sum_{j \in \mathbb{N}^*} |\alpha_{i,j}| h_{i,j} \right) f(x_1, \dots, x_m).$$

où la sommation est étendue aux familles $(\alpha_{i,j})$ d'entiers ≥ 0 , tous nuls sauf un nombre fini d'entre eux. Distinguons dans (1) deux sortes de termes :

1° Ceux pour lesquels $\alpha_{i,j} = 0$ pour $j \geq s$; ces termes sont *nuls*; 2° Ceux pour lesquels l'un des $\alpha_{i,j}$, soit $\alpha_{p,q}$, n'est pas nul, avec $q \geq s$. Si $\sum_{i,j} \alpha_{i,j} < r$, le terme considéré est *nul* [prop. (2.3)]. Si, par contre, $\sum_{i,j} \alpha_{i,j} \geq r$, le degré

(15) Abréviation pour : « modulo des termes de degré total $\geq r$ ».

(16) L'axiome (A7) exprime le fait que $g_i = \sum_{1 \leq j < \infty} g_{i,j}$.

total du terme considéré est

$$\sum_{i,j} j \alpha_{i,j} \geq \sum_{i,j} \alpha_{i,j} + (q-1) \alpha_{p,q} \geq r+s-1.$$

C. Q. F. D.

PROPOSITION (3.2). — Soient $f, f' \in \mathfrak{A}^m$, $g_i, g'_i \in \mathfrak{A}^n$ ($1 \leq i \leq m$), vérifiant

$$\begin{aligned} f &\equiv f' \pmod{\deg. r}, \\ g_i &\equiv g'_i \pmod{\deg. r}, \quad \text{pour } 1 \leq i \leq m. \end{aligned}$$

Alors

$$f(g_1, \dots, g_m) \equiv f'(g'_1, \dots, g'_m) \pmod{\deg. r}.$$

Démonstration. — En appliquant deux fois la proposition (3.1), on trouve successivement

$$(f' - f)(g_1, \dots, g_m) \equiv 0 \pmod{\deg. r}$$

et

$$f'(g'_1, \dots, g'_m) \equiv f'(g_1, \dots, g_m) \pmod{\deg. r}.$$

15. ANALYSEURS COMPLETS.

DÉFINITION (3.3). — Un analyseur complet $\hat{\mathfrak{A}}$ sur l'anneau Ω est constitué par la donnée :

- a. d'une suite $(\hat{\mathfrak{A}}^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de Ω -modules n -gradués complets;
- b. d'une famille d'applications $\hat{T}_{m,n} : \hat{\mathfrak{A}}^m \rightarrow \mathfrak{F}_m(\hat{\mathfrak{A}}^n)$, pour $m, n \in \mathbb{N}^*$;
- c. d'une famille d'éléments distingués $e_{m,i}$ ($m, i \in \mathbb{N}^*, i \leq m$) tels que $e_{m,i} \in \hat{\mathfrak{A}}_{\delta_{m,i}}^m$,

satisfaisant aux axiomes suivants :

(AC1) Si l'on note $(\mathfrak{A}^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ les modules n -gradués (incomplets) associés aux modules $(\hat{\mathfrak{A}}^n)$, $f \in \mathfrak{A}^m$, $g_i \in \mathfrak{A}^n$ (pour $1 \leq i \leq m$) impliquent $(\hat{T}_{m,n} f)(g_1, \dots, g_m) \in \mathfrak{A}^n$.

(AC2) La suite $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, les restrictions $(T_{m,n})$ des applications $(\hat{T}_{m,n})$ et les éléments $(e_{m,i})$ définissent un analyseur incomplet que nous dirons associé à $\hat{\mathfrak{A}}$.

(AC3) Pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$, $(\hat{T}_{m,n} f)(g_1, \dots, g_m)$ dépend continûment de $f \in \hat{\mathfrak{A}}^m$ et des $g_i \in \hat{\mathfrak{A}}^n$ ($1 \leq i \leq m$), ces modules étant munis de leurs topologies canoniques.

PROPOSITION (3.3). — Soit $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ un analyseur incomplet. Désignons par $\hat{\mathfrak{A}}^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le complété du module n -gradué \mathfrak{A}^n (n° 13). Alors les applications $T_{m,n}$ se prolongent univoquement en des applications $(\hat{T}_{m,n})$ qui font de $\hat{\mathfrak{A}} = (\hat{\mathfrak{A}}^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ un analyseur complet. \mathfrak{A} est l'analyseur incomplet associé à $\hat{\mathfrak{A}}$.

Démonstration. — L'existence et l'unicité du prolongement des $(T_{m,n})$ résultent de la proposition (3.2) qui montre que l'application $(f, g_1, \dots, g_m) \rightarrow f(g_1, \dots, g_m)$ est uniformément continue (pour les topologies canoniques).

Il résulte du « principe du prolongement des identités » ⁽¹⁷⁾ que tous les axiomes (**A**) des analyseurs incomplets sont encore valables pour les analyseurs complets. Nous pourrions donc définir la *représentation régulière* d'un analyseur complet sans rien changer aux énoncés du n° 7. L'identification des éléments $\hat{\mathbf{A}}$ à des fonctions, permise par la représentation régulière, justifiera encore l'usage des notations fonctionnelles. Nous écrirons désormais $f(g_1, \dots, g_m)$ au lieu de $(\hat{T}_{m,n}f)(g_1, \dots, g_m)$.

Nous conservons, pour les analyseurs complets, les définitions des opérateurs de Sanov (simples et composés). La proposition (2.5) est encore valable, et permet de calculer les composantes homogènes (généralement en nombre infini) d'une fonction composée. Les propositions (3.1) et (3.2) restent valables sans modification.

Par contre, les notions de **A**-modules et de familles de fonctions polynomiales (n° 8) ne s'étendent pas sans modification. Si $\hat{\mathbf{A}}$ est un analyseur complet, la définition d'un $\hat{\mathbf{A}}$ -module **M** répètera les conditions de la définition (2.3); mais nous supposerons de plus que **M** est un *module topologique* et que, si l'on munit les modules de fonctions $\mathcal{F}_n(\mathbf{M})$ de la topologie de la convergence simple, les homomorphismes $\tau_n : \hat{\mathbf{A}}^n \rightarrow \mathcal{F}_n(\mathbf{M})$ sont *continus*. L'introduction d'une topologie dans **M** est nécessaire si l'on veut pouvoir considérer les fonctions $\tau_n f (f \in \mathcal{A}^n)$ comme sommes infinies de leurs composantes homogènes. Si les homomorphismes τ_n sont *injectifs*, nous obtiendrons, par définition, une *famille de fonctions analytiques dans le module topologique M*.

Le module $\mathbf{M} = \lim_{\rightarrow} \hat{\mathbf{A}}^n$ de la représentation régulière est muni de sa topologie naturelle de limite inductive, et la représentation régulière permet ainsi d'identifier l'analyseur complet à une famille de fonctions analytiques ⁽¹⁸⁾.

Tout $\hat{\mathbf{A}}$ -module peut être considéré, par restriction des opérations, comme un **A**-module (**A** désignant l'analyseur incomplet associé). Mais *la réciproque est inexacte* : si **M** est un **A**-module, il n'est pas possible, en général, de définir une structure de $\hat{\mathbf{A}}$ -module sur une extension $\hat{\mathbf{M}}$ de **M** qui prolonge les opérations du **A**-module **M**.

Il est un cas où des analyseurs (complets et incomplets) associés coïncident : c'est celui des *analyseurs nilpotents*.

DÉFINITION (3.4). — *Un analyseur **A** sera dit nilpotent de classe r si r est le plus petit entier tel que :*

$$f \in \mathcal{A}^n \quad \text{et} \quad f \equiv 0 \quad [\text{mod. deg. } (r+1)] \quad \text{impliquent} \quad f = 0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Cette définition vaut pour les analyseurs complets ou incomplets. Elle permet

⁽¹⁷⁾ BOURBAKI, *Topologie générale*, chap. III, § 3, n° 4.

⁽¹⁸⁾ On notera que le module topologique \mathbf{M} n'est en général pas complet.

de formuler différemment la proposition (3.2), qui exprime l'existence d'une *suite canonique d'analyseurs nilpotents quotients de \mathfrak{A}* . L'analyseur $\hat{\mathfrak{A}}$ peut alors s'interpréter comme la *limite projective* de ces analyseurs nilpotents, munis de leurs épimorphismes canoniques (cf. n° 13).

Nous avons donné la première place dans notre exposé à la notion d'analyseur incomplet, car elle est purement algébrique et correspond exactement aux « calculs » dans des structures algébriques usuelles. Par contre, les notions de $\hat{\mathfrak{A}}$ -modules et de familles de fonctions analytiques sont très artificielles. Cependant l'étude des lois de groupes ne pourra s'effectuer que dans les analyseurs complets.

Quand nous ne ferons pas intervenir l'analyseur incomplet associé, nous omettrons les signes \wedge dans la notation des analyseurs complets.

16. LE THÉOREME DES FONCTIONS IMPLICITES. — L'introduction des analyseurs complets est rendue nécessaire si l'on veut construire des fonctions en calculant successivement leurs composantes homogènes : en général un tel procédé conduit à une suite infinie de composantes non nulles. En voici un exemple typique.

THÉOREME (3.1). — Soient \mathfrak{A} un analyseur complet, et $f(x; y_1, \dots, y_n) \in \mathfrak{A}^{n+1}$ vérifiant $f(x; 0, \dots, 0) \equiv x \pmod{\text{deg. } 2}$. Alors il existe une fonction $g(y_1, \dots, y_n) \in \mathfrak{A}^n$ et une seule telle que $f(g(y_1, \dots, y_n); y_1, \dots, y_n) = 0$.

Démonstration. — Posons

$$h(x; y_1, \dots, y_n) = x - f(x; y_1, \dots, y_n).$$

En s'appuyant sur la proposition (3.1), on démontre que les relations $g, g' \in \mathfrak{A}^n, g \equiv g' \pmod{\text{deg. } r}$ impliquent

$$h(g(y_1, \dots, y_n); y_1, \dots, y_n) \equiv h(g'(y_1, \dots, y_n); y_1, \dots, y_n) \pmod{\text{deg. } (r+1)}.$$

Posons alors

$$g_0 = 0 \quad \text{et} \quad g_i(y_1, \dots, y_n) = h(g_{i-1}(y_1, \dots, y_n); y_1, \dots, y_n) \quad \text{pour} \quad i \in \mathbb{N}^*.$$

Nous avons $g_i \equiv g_{i-1} \pmod{\text{deg. } i}$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$. La suite $(g_i)_{i \in \mathbb{N}}$ converge donc dans \mathfrak{A}^n vers une fonction f qui vérifie les conditions du théorème. Elle est unique, car les relations

$$f(g; y_1, \dots, y_n) = f(g'; y_1, \dots, y_n) = 0 \quad \text{et} \quad g \equiv g' \pmod{\text{deg. } r}$$

impliquent $g \equiv g' \pmod{\text{deg. } (r+1)}$, d'où $g = g'$.

Remarques. — On généraliserait facilement ce théorème avec l'hypothèse plus faible : $f(x; 0, \dots, 0) \equiv k(x) \pmod{\text{deg. } 2}$, où $k \in \mathfrak{A}_1^*$ est *inversible* [déf. (5.2)]. Quant au théorème concernant les systèmes de plusieurs fonctions, sa validité résulte de la construction des puissances cartésiennes d'analyseurs (n° 18).

4. — Constructions sur les analyseurs. Exemples.

Dans tout ce paragraphe, il ne sera question que d'analyseurs incomplets ⁽¹⁹⁾.

17. ADJONCTION DE CONSTANTES A UN ANALYSEUR. — Soit \mathcal{A} un analyseur. Dans une fonction $f(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathcal{A}^{n+1}$, nous pouvons convenir de considérer le dernier argument x_{n+1} comme une « constante » a ; f devient ainsi une fonction $f(x_1, \dots, x_n, a)$ de ses n premiers arguments. Si nous conservons la graduation par rapport aux n premiers arguments, et si nous nous restreignons aux fonctions dont la composante homogène de degré total 0 par rapport aux n premiers arguments est nulle, nous obtenons un module n -gradué \mathfrak{B}^n . On peut définir d'une manière naturelle une structure d'analyseur sur la suite $(\mathfrak{B}^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

DÉFINITION (4.1). — Soit $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^n)$ un analyseur, avec les éléments distingués $(e_{m,i})$ et les lois de composition $(T_{m,n})$. Nous définirons l'analyseur $\mathfrak{B}(\mathfrak{B}^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par ses éléments distingués $(e'_{m,i})$ et ses lois de composition $(T'_{m,n})$ en posant :

$$a. \mathfrak{B}^n = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| > 0} \mathfrak{B}^n_{\alpha},$$

$$\mathfrak{B}^n_{\alpha} = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{A}^{n+1}_{(\alpha, i)},$$

où

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad \text{et} \quad (\alpha, i) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, i);$$

$$b. e'_{m,i} = e_{m+1,i};$$

$$c. (T'_{m,n}f)(g_1, \dots, g_m) = (T_{m+1,n+1}f)(g_1, \dots, g_m, e_{n+1,n+1})$$

pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathfrak{B}^m$, $g_i \in \mathfrak{B}^n$ ($1 \leq i \leq m$).

L'analyseur \mathfrak{B} sera dit obtenu à partir de \mathcal{A} par adjonction d'une constante, et noté éventuellement $\mathcal{A}(a)$.

Le lecteur vérifiera sans peine que les axiomes (**A**) du n° 5 sont effectivement vérifiés par \mathfrak{B} .

Si l'on itère la construction précédente, on obtient les analyseurs $\mathcal{A}(a_1, \dots, a_q)$ définis à partir de \mathcal{A} par adjonction d'une famille finie de « constantes ». On pourrait définir d'une manière analogue l'adjonction d'une famille quelconque de « constantes » ⁽²⁰⁾.

⁽¹⁹⁾ Toutes les constructions que nous effectuerons s'étendent d'elles-mêmes aux analyseurs complets (par complétion des analyseurs incomplets obtenus). Par contre, les considérations des n°s 20 et 21 ne valent que pour les analyseurs incomplets.

⁽²⁰⁾ On remarquera que la définition de $\mathcal{A}(a)$ se simplifierait si l'on ne tenait pas compte de l'axiome (**A7**).

18. PUISSANCES CARTÉSIENNES D'ANALYSEURS. — Soient \mathcal{A} un analyseur, \mathcal{M} le module de sa représentation régulière (n° 7). Nous identifions chaque module \mathcal{A}^n à un module de fonctions de n arguments dans \mathcal{M} ,

Soit I un ensemble d'indices. Formons le produit direct \mathcal{M}^I . Un élément $X \in \mathcal{M}^I$ coïncide avec la famille $(x_i)_{i \in I}$ de ses composantes. Nous définissons le module $M(I)$ d'applications de \mathcal{M}^I dans \mathcal{M} en convenant que $f \in M(I)$ si et seulement si :

a. $f(X) = f((x_i)_{i \in I})$ ne dépend que d'un nombre fini de composantes de $X \in \mathcal{M}^I$, soient $(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$;

b. après suppression des arguments neutres, f , considéré comme fonction de $(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$ appartient à \mathcal{A}^n .

Si I est un ensemble ordonné de p éléments, $M(I)$ s'identifie donc à \mathcal{A}^p .

Le même procédé permet de définir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, des modules de fonctions de n arguments parcourant \mathcal{M}^I , à valeurs dans \mathcal{M} : nous nous ramènerons en effet au cas précédent en remplaçant I par l'ensemble produit $I \times [1, n]$ des couples (i, j) , où $i \in I$, $1 \leq j \leq n$. Nous conviendrons de noter $\mathcal{A}^{I,n}$ ce module de fonctions; en particulier, nous remplacerons la notation $M(I)$ par $\mathcal{A}^{I,1}$. Un élément de $\mathcal{A}^{I,n}$ sera noté soit f , soit $f(X_1, \dots, X_n)$, soit $f((x_{i,j})_{i \in I, 1 \leq j \leq n})$, Un argument X représenté par une lettre majuscule pourra toujours être remplacée par la famille $(x_i)_{i \in I}$ de ses composantes.

Si I est un ensemble ordonné de p éléments, soit, pour simplifier, l'intervalle d'entiers $[1, p]$, $\mathcal{A}^{I,n}$ s'identifie à \mathcal{A}^{pn} : un élément $f \in \mathcal{A}^{I,n}$ est identifié à $f(x_{1,1}, \dots, x_{p,1}; \dots; x_{1,n}, \dots, x_{p,n})$. Nous définirons alors une *structure de module n -gradué* sur $\mathcal{A}^{I,n}$ en posant, pour $f(x_{1,1}, \dots, x_{p,n}) \in \mathcal{A}^{I,n}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $f \in \mathcal{A}_\alpha^{I,n}$ si et seulement si f est de degré total α_i par rapport aux p arguments $(x_{j,i})_{1 \leq j \leq p}$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Il est clair que cette graduation ne dépend pas de l'ordre où sont donnés les éléments de I .

La définition précédente s'étend au cas d'un ensemble d'indices I quelconque : si $f(X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{A}^{I,n}$, on peut choisir, par définition, une partie finie $J \subset I$ telle que les arguments $(x_{i,i})$ soient neutres dans f pour tout $1 \leq i \leq n$ et $i \notin J$; f peut ainsi être identifié, par suppression d'arguments neutres, à un élément f' de $\mathcal{A}^{J,n}$, et nous poserons, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $f \in \mathcal{A}_\alpha^{I,n}$ si et seulement si $f' \in \mathcal{A}_\alpha^{J,n}$. Cette définition est indépendante du choix de la partie J , et introduit sur $\mathcal{A}^{I,n}$ une *structure de module n -gradué*.

DÉFINITION (4.2). — Soient \mathcal{A} un analyseur, \mathcal{M} le module de sa représentation régulière, I un ensemble d'indices. Nous définissons comme suit une famille de modules multigradés $\mathcal{B}^n \subset \mathcal{F}_n(\mathcal{M}^I)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $F(X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{B}^n$ si et seulement si chaque composante $f_i(X_1, \dots, X_n)$ de $F(X_1, \dots, X_n)$ appartient à $\mathcal{A}^{I,n}$ (pour $i \in I$). Les graduations sur les modules \mathcal{B}^n s'obtiennent en posant,

pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$: $F \in \mathfrak{B}_\alpha^n$ si et seulement si chaque composante $f_i \in \mathfrak{A}_\alpha^{1,n}$, pour tout $i \in I$.

PROPOSITION (4.1). — Avec les notations précédentes, la suite de modules $\mathfrak{B} = (\mathfrak{B}^n)$, les éléments distingués $\mathbf{E}_{n,i} \in \mathfrak{B}^n$ définis par $\mathbf{E}_{n,i}(X_1, \dots, X_n) = X_i$, et les lois de composition $(T_{m,n})$ définies par la composition des fonctions dans \mathfrak{M}^I , constituent un analyseur, que nous noterons $\mathfrak{B} = \Pi^I \mathfrak{A}$. Si I est un ensemble ordonné de p éléments, nous écrirons plus simplement $\mathfrak{B} = \Pi^p \mathfrak{A}$, et nous dirons que \mathfrak{B} est la puissance cartésienne $p^{\text{ième}}$ de \mathfrak{A} .

On vérifie sans peine que \mathfrak{B} satisfait aux axiomes (\mathbf{A}) du n° 5.

L'analyseur $\Pi^I \mathfrak{A}$ a été défini à partir d'une famille de fonctions polynomiales dans le module \mathfrak{M}^I . Plus généralement, si M est un \mathfrak{A} -module, on définit canoniquement sur M^I une structure de $\Pi^I \mathfrak{A}$ -module.

19. CHANGEMENTS D'ANNEAUX DE BASE ; PRODUITS TENSORIELS. — Jusqu'à maintenant, nous n'avons guère fait intervenir l'anneau de base Ω d'un analyseur, qui n'était parfois même pas mentionné dans nos énoncés. Dans ce numéro, nous décrivons des constructions qui permettent de changer d'anneau de base. Pour abréger, nous parlerons d'« Ω -analyseurs » au lieu d'« analyseurs sur l'anneau Ω ».

Un homomorphisme d'anneaux, $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega'$ sera toujours un *homomorphisme unitaire*, c'est-à-dire vérifiant $\varphi(1) = 1$, où nous désignons par le même symbole 1 les unités des différents anneaux. La donnée de l'homomorphisme $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega'$ équivaut à la définition sur Ω' d'une structure de Ω -algèbre (unitaire, associative et commutative).

Si $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est un Ω' -analyseur, l'homomorphisme $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega'$ permet de définir canoniquement sur chaque \mathfrak{A}^n une structure de Ω -module : si $\lambda \in \Omega$, $f \in \mathfrak{A}^n$, nous posons $\lambda f = \varphi(\lambda) f$. Si nous conservons les graduations de \mathfrak{A} , ses éléments distingués, et ses opérations $(T_{m,n})$, il est clair que nous obtenons un Ω -analyseur. Cette construction sera dite *restriction de l'anneau de base*. Nous l'appliquerons en particulier au cas où Ω est un sous-anneau de Ω' (φ étant l'injection canonique), ainsi qu'au cas où $\Omega = \mathbb{Z}$ (φ désignant l'homomorphisme unitaire canonique de \mathbb{Z} dans Ω').

La construction suivante (*extension de l'anneau de base*) est moins élémentaire.

PROPOSITION (4.2). — Soient Ω, Ω' deux anneaux, $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega'$ un homomorphisme, \mathfrak{A} un Ω -analyseur. Il existe un analyseur $\mathfrak{B} = \Omega' \otimes_\Omega \mathfrak{A}$ et un seul, dit « produit tensoriel sur Ω de Ω' et de \mathfrak{A} », défini par les conditions suivantes :

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le module n -gradué $\mathfrak{B}^n = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \mathfrak{B}_\alpha^n$ est donné par

$$\mathfrak{B}^n = \Omega' \otimes_\Omega \mathfrak{A}^n, \quad \mathfrak{B}_\alpha^n = \Omega' \otimes_\Omega \mathfrak{A}_\alpha^n \quad (\text{pour } \alpha \in \mathbb{N}^n),$$

en considérant Ω' comme un Ω -module, et en prenant sur \mathfrak{B}^n sa structure naturelle de Ω' -module.

b. Les éléments distingués $\mathbf{e}'_{m,i}$ de \mathfrak{B} sont donnés par

$$\mathbf{e}'_{m,i} = \mathbf{1} \otimes \mathbf{e}_{m,i}, \quad \text{pour } 1 \leq i \leq m < \infty.$$

c. Les lois de composition $\mathbf{T}'_{m,n}$ de \mathfrak{B} vérifient

$$(\mathbf{T}'_{m,n}(\mathbf{1} \otimes f))(\mathbf{1} \otimes g_1, \dots, \mathbf{1} \otimes g_m) = \mathbf{1} \otimes (\mathbf{T}_{m,n}f)(g_1, \dots, g_m),$$

pour $m, n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathfrak{A}^m$, $g_i \in \mathfrak{A}^n$ ($1 \leq i \leq m$).

Démonstration. — Montrons que les propriétés énoncées permettent de calculer $(\mathbf{T}'_{m,n}f')(g'_1, \dots, g'_m)$ pour tous $f' \in \mathfrak{B}^m$, $g'_i \in \mathfrak{B}^n$. Prenons d'abord $f' = \lambda \otimes f$, $g'_i = \lambda_i \otimes g_i$ avec

$$\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \Omega', \quad f \in \mathfrak{A}^m, \quad g_1, \dots, g_m \in \mathfrak{A}^n, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m).$$

Alors les conditions a et c montrent que

$$(1) \quad (\mathbf{T}'_{m,n}f')(g'_1, \dots, g'_m) = \lambda \lambda_1^{\alpha_1} \dots \lambda_m^{\alpha_m} \otimes (\mathbf{T}_{m,n}f)(g_1, \dots, g_m).$$

Nous pourrions ramener les cas général au précédent si nous savons calculer les opérateurs de Sanov dans \mathfrak{B} . Or, si $f \in \mathfrak{A}^m$, et si $(I_i)_{1 \leq i \leq m}$ est une partition de l'intervalle d'entiers $[1, n]$, nous avons d'après b et c

$$\begin{aligned} (\mathbf{T}'_{m,n}(\mathbf{1} \otimes f)) \left(\sum_{i \in I_1} \mathbf{e}'_{n,i}, \dots, \sum_{i \in I_m} \mathbf{e}'_{n,i} \right) &= (\mathbf{T}'_{m,n}(\mathbf{1} \otimes f)) \left(\mathbf{1} \otimes \sum_{i \in I_1} \mathbf{e}_{n,i}, \dots, \mathbf{1} \otimes \sum_{i \in I_m} \mathbf{e}_{n,i} \right) \\ &= \mathbf{1} \otimes (\mathbf{T}_{m,n}f) \left(\sum_{i \in I_1} \mathbf{e}_{n,i}, \dots, \sum_{i \in I_m} \mathbf{e}_{n,i} \right), \end{aligned}$$

ce qui se résume par la formule

$$(2) \quad \mathfrak{D}(\mathbf{1} \otimes f) = \mathbf{1} \otimes \mathfrak{D}f,$$

où \mathfrak{D} désigne un opérateur de Sanov simple.

Nous savons maintenant calculer $(\mathbf{T}'_{m,n}f')(g'_1, \dots, g'_m)$ pour tous $f' \in \mathfrak{B}^m$, $g'_i \in \mathfrak{B}^n$, en utilisant les relations (1) et (2), ainsi que des représentations de f' et des g'_i sous forme de sommes telles que $f' = \sum_j \lambda_j \otimes f_j$, où $\lambda_j \in \Omega'$, $f_j \in \mathfrak{A}^m, \dots$

Il reste à démontrer que les éléments de \mathfrak{B}^n ainsi obtenus ne dépendent que de f' et des g'_i , et non du choix de leurs représentations.

Nous construirons directement la *représentation régulière* de l'analyseur \mathfrak{B} . Soit \mathfrak{M} le module de la représentation régulière de \mathfrak{A} , que nous identifierons désormais à une famille de fonctions polynomiales dans \mathfrak{M} . Posons $\mathfrak{M}' = \Omega' \otimes_{\Omega} \mathfrak{M}$. Nous utiliserons la définition « constructive » suivante de \mathfrak{M}' : soit R l'ensemble des parties finies du produit $\Omega' \times \mathfrak{M}$; nous définissons sur R une structure de monoïde abélien par l'opération de réunion (des parties finies de $\Omega' \times \mathfrak{M}$). Le monoïde R sera noté additivement; ses éléments s'écriront donc sous la forme $\sum_j (\lambda_j, a_j)$, avec $\lambda_j \in \Omega'$, $a_j \in \mathfrak{M}$, j parcourant un ensemble fini. Nous avons

un épimorphisme canonique ρ de \mathbf{R} sur \mathfrak{M}' (considéré comme monoïde abélien additif), défini par

$$(3) \quad \rho \left(\sum_j (\lambda_j, a_j) \right) = \sum_j \lambda_j \otimes a_j.$$

Pour tout $f \in \mathfrak{A}^m$, nous définissons une application *univoque* ψf du produit cartésien \mathbf{R}^m dans \mathfrak{M}' en posant

$$(4) \quad \begin{aligned} & (\psi f) \left(\sum_{i \in I_1} (\lambda_i, \alpha_i), \dots, \sum_{i \in I_m} (\lambda_i, \alpha_i) \right) \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n} \left(\prod_{1 \leq i \leq n} \lambda_i^{\alpha_i} \right) \otimes \sum_{\substack{x_j \in \mathfrak{D} \\ \sum_{i \in I_j} \alpha_i | a_i}} f(x_1, \dots, x_m). \end{aligned}$$

Dans cette formule, $(I_j)_{1 \leq j \leq m}$ désigne une partition de l'intervalle d'entiers $[1, n]$; la sommation s'étend aux familles d'entiers $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$; dans les symboles des opérateurs de Sanov composés, nous avons introduit des éléments $a_i \in \mathfrak{M}$, par une convention évidente.

Nous noterons $\xi \equiv \xi'$ la relation d'équivalence entre deux éléments de \mathbf{R} qui signifie que la substitution de ξ' à ξ comme argument dans l'une quelconque des fonctions ψf ($f \in \mathfrak{A}$) ne modifie pas la valeur de cette fonction. Nous voulons démontrer que le second membre de (4) ne dépend que des éléments

$$\sum_{i \in I_j} \lambda_i \otimes a_i \in \mathfrak{M}' \quad (\text{pour } 1 \leq j \leq m),$$

c'est-à-dire que $\rho(\xi) = \rho(\xi')$ implique $\xi \equiv \xi'$. Il suffit pour cela, d'après la définition du produit tensoriel, c'est-à-dire de l'application ρ , d'établir les quatres relations :

$$\begin{aligned} (5a) \quad & \xi \equiv \xi' \text{ implique } \xi + \eta \equiv \xi' + \eta \quad \text{pour } \xi, \xi', \eta \in \mathbf{R}, \\ (5b) \quad & (\lambda + \lambda', a) \equiv (\lambda, a) + (\lambda', a) \quad \text{pour } \lambda, \lambda' \in \Omega', \quad a \in \mathfrak{M}. \\ (5c) \quad & (\lambda, a + a') \equiv (\lambda, a) + (\lambda, a') \quad \text{pour } \lambda \in \Omega', \quad a, a' \in \mathfrak{M}. \\ (5d) \quad & (\varphi(\mu)\lambda, a) \equiv (\lambda, \mu a) \quad \text{pour } \lambda \in \Omega', \quad \mu \in \Omega, \quad a \in \mathfrak{M}. \end{aligned}$$

On démontre (5a) à partir de la proposition (2.4) et (5b) à partir de la proposition (2.3); (5c) et (5d) résultent de la définition des opérateurs de Sanov.

Puisque $(\psi f)(\xi_1, \dots, \xi_m)$ ne dépend que de $\rho(\xi_1), \dots, \rho(\xi_m)$ pour tout $f \in \mathfrak{A}^m$, nous définissons $\chi f \in \mathfrak{F}_m(\mathfrak{M}')$ en posant

$$(6) \quad (\chi f)(\rho(\xi_1), \dots, \rho(\xi_m)) = (\psi f)(\xi_1, \dots, \xi_m)$$

pour $f \in \mathfrak{A}^m$, $\xi_1, \dots, \xi_m \in \mathbf{R}$.

Soit $f' = \sum_j \lambda_j \otimes f_j \in \mathfrak{B}^n$, où $\lambda_j \in \Omega'$, $f_j \in \mathfrak{A}^m$. Nous définissons $(T'_m f') \in \mathfrak{F}_m(\mathfrak{M}')$

en posant

$$(7) \quad T'_m f' = \sum_j \lambda_j (\chi_j f_j).$$

Il est aisé de voir que cette définition est cohérente. Nous laissons au lecteur le soin d'achever la démonstration d'existence de l'analyseur \mathfrak{B} , dont nous venons de construire la représentation régulière : $f' \rightarrow T'_m f'$ dans le Ω' -module \mathfrak{M}' .

Remarque. — Soit M un \mathfrak{A} -module défini par les homomorphismes τ_n [déf. (2.3)]. Notre démonstration nous permet de définir canoniquement sur $M' = \Omega' \otimes_{\Omega} M$ une structure de \mathfrak{B} -module (avec les homomorphismes τ'_n). Mais, si les $\mathfrak{P}_n = (\tau_n \mathfrak{A}^n)$ constituent une famille de fonctions polynomiales associée à \mathfrak{A} dans M , il se peut que les $\mathfrak{P}'_n = (\tau'_n \mathfrak{B}^n)$ ne constituent pas une famille de fonctions polynomiales dans M' , ou encore constituent une famille de fonctions polynomiales associées à un analyseur différent de \mathfrak{B} .

20. COMPOSITEURS ET ANALYSEURS. — Pour mieux étudier les analyseurs, et pour en construire des exemples, il nous sera utile d'introduire la notion plus générale de « compositeur », obtenue en conservant seulement les axiomes (A3) et (A4) des analyseurs incomplets. Plus précisément, nous poserons la

DÉFINITION (4.3). — Un compositeur E est constitué par la donnée :

- a. d'une suite d'ensembles $E^n (n \in \mathbb{N}^*)$;
- q. d'une famille de lois de composition $(T_{m,n})$, telles qu'à tous $f \in E^m$, $g_i \in E^n (1 \leq i \leq m)$, $T_{m,n}$ associe l'élément $(T_{m,n} f) (g_1, \dots, g_m) \in E^n$ (pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$);
- c. d'une famille d'éléments distingués $(e_{m,i})$ tels que $e_{m,i} \in E^m$ pour $1 \leq i \leq m < \infty$, satisfaisant aux axiomes suivants :

(C1) Soient $m, n, p \in \mathbb{N}^*$, $f \in E^m$, $g_i \in E^n$ (pour $1 \leq i \leq m$), $h_j \in E^p$ (pour $1 \leq j \leq n$). Posons

$$(T_{m,n} f) (g_1, \dots, g_m) = k \in E^n$$

et

$$(T_{n,p} g_i) (h_1, \dots, h_n) = l_i \in E^p \quad (\text{pour } 1 \leq i \leq m).$$

Alors

$$(T_{n,p} k) (h_1, \dots, h_n) = (T_{m,p} f) (l_1, \dots, l_m).$$

(C2) Pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$, $i \leq m$, $f_1, \dots, f_m \in E^n$, on a

$$(T_{m,n} e_{m,i}) (f_1, \dots, f_m) = f_i.$$

Pour tous $m \in \mathbb{N}^*$, $f \in E^n$, on a

$$(T_{m,m} f) (e_{m,1}, \dots, e_{m,m}) = f.$$

Exemples. — a. Le compositeur unité $I = (I^n)$, où chaque ensemble I^n se réduit aux éléments $(e_{n,i})_{1 \leq i \leq n}$.

b. Soit Ω un anneau unitaire. Nous noterons $[\Omega]$ le compositeur canoniquement associé à Ω , obtenu en prenant pour ensemble $[\Omega]^n$ le Ω -module libre de base $(e_{n,i})_{1 \leq i \leq n}$. Les lois de composition $T_{m,n}$ sont définies en posant, pour

$$f = \sum_{1 \leq i \leq m} \lambda_i e_{m,i} \quad \text{et} \quad g_i = \sum_{1 \leq j \leq n} \mu_{i,j} e_{n,j}$$

(avec $\lambda_i, \mu_{i,j} \in \Omega$)

$$(T_{m,n}f)(g_1, \dots, g_m) = \sum_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{1 \leq j \leq m} \lambda_j \mu_{j,i} \right) e_{n,i}.$$

c. Tout analyseur incomplet [déf. (2.1)] ou complet [déf. (3.3)] est un compositeur.

On définit la représentation régulière d'un compositeur comme celle d'un analyseur incomplet. Les opérations $(T_{m,n})$ peuvent ainsi être identifiées à la composition des fonctions dans un ensemble.

On définit d'une manière naturelle les notions de sous-compositeur et de famille de générateurs d'un compositeur, ainsi que celle d'homomorphisme de compositeurs.

Soient Ω et Ω' deux anneaux unitaires; à tout homomorphisme unitaire $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$ on peut faire correspondre de façon évidente un homomorphisme des compositeurs associés $[\Omega]$ et $[\Omega']$, que nous désignerons encore par φ .

DÉFINITION (4.4). — Soit Ω un anneau commutatif unitaire. Un compositeur sur Ω (ou Ω -compositeur) est constitué par la donnée d'un compositeur E et d'un homomorphisme $\omega: [\Omega] \rightarrow E$.

Dans un Ω -compositeur, chaque E^n possède une structure de Ω -module définie canoniquement : pour $f_1, f_2 \in E^n$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \Omega$, on pose

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = (T_{2,n} \omega(\lambda_1 e_{2,1} + \lambda_2 e_{2,2}))(f_1, f_2).$$

On remarquera que l'axiome analogue à (A1) est satisfait [en conséquence de (C1)].

Tout Ω -analyseur est un Ω -compositeur. Cependant la notion de Ω -compositeur est plus générale, car elle ne fait pas intervenir de graduation. Nous avons vu au numéro précédent que la construction des produits tensoriels d'analyseurs utilisait essentiellement les graduations. Cette constatation est le point de départ d'une nouvelle axiomatique des analyseurs qui les fait apparaître comme des Ω -compositeurs dont on sait construire, canoniquement, les produits tensoriels ⁽²¹⁾; nous allons définir la notion de Ω -compositeur analytique, qui

⁽²¹⁾ Je dois à P. Cartier l'idée de remplacer entièrement les axiomes des graduations par ceux des produits tensoriels.

correspond à celle de Ω -analyseur incomplet, à ceci près que l'axiome (A7) ne sera pas vérifié en général ⁽²²⁾. Pour abréger cette définition nous formulons préalablement un lemme élémentaire.

LEMME (4.1). — Soient Ω, Ω' deux anneaux commutatifs unitaires, φ un homomorphisme unitaire de Ω dans Ω' , E et E' deux compositeurs respectivement sur Ω et Ω' , $\psi: E \rightarrow E'$ un homomorphisme tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} [\Omega] & \xrightarrow{\omega} & E \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \psi \\ [\Omega'] & \xrightarrow{\omega'} & E' \end{array}$$

soit commutatif. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit canoniquement, à partir de ce diagramme, un homomorphisme $\tau_n: \Omega' \otimes_{\varphi} E^n \rightarrow E'^n$ en posant

$$\tau_n(\lambda \otimes f) = \lambda \psi(f) \quad \text{pour } \lambda \in \Omega', \quad f \in E^n.$$

Dans cet énoncé nous avons noté $\Omega' \otimes_{\varphi} E^n$ le produit tensoriel sur Ω de Ω' considéré comme Ω -module grâce à la donnée de φ et du Ω -module E^n .

DÉFINITION (4.5). — Un compositeur analytique \mathcal{A} sur l'anneau commutatif unitaire Ω est constitué par la donnée :

- a. d'un Ω -compositeur \mathcal{A} ;
- b. d'une construction canonique (ou foncteur) qui, à tout couple (Ω', φ) formé d'un anneau commutatif unitaire Ω' et d'un homomorphisme unitaire $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$ associe un Ω' -compositeur $\mathcal{A}' = \Omega' \otimes_{\varphi} \mathcal{A}$, et un diagramme commutatif d'homomorphismes

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} [\Omega] & \xrightarrow{\omega} & \mathcal{A} \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \psi \\ [\Omega'] & \xrightarrow{\omega'} & \mathcal{A}' = \Omega' \otimes_{\varphi} \mathcal{A} \end{array}$$

satisfaisant aux axiomes suivants :

(A'1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'homomorphisme $\tau_n: \Omega' \otimes_{\varphi} \mathcal{A}^n \rightarrow \mathcal{A}'^n$ défini à partir du diagramme (1) conformément au lemme (4.1) est un isomorphisme.

(A'2) Si $\Omega' = \Omega$ et si φ est l'identité sur Ω , alors $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$, et l'homomorphisme ψ du diagramme (1) est l'identité sur \mathcal{A} .

(A'3) Si $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$ et $\varphi': \Omega' \rightarrow \Omega''$ sont deux homomorphismes unitaires

⁽²²⁾ Rappelons que cet axiome n'est destiné qu'à faciliter le passage aux analyseurs complets associés. Si (A7) n'est pas vérifié dans un Ω -compositeur analytique donné, l'ensemble des éléments dont la composante homogène de degré total 0 est nulle est un sous-compositeur analytique, où (A7) se trouve satisfait.

d'anneaux commutatifs, posons

$$\varphi'' = \varphi' \varphi, \quad \mathcal{A}' = \Omega' \otimes_{\varphi} \mathcal{A}, \quad \mathcal{A}'' = \Omega'' \otimes_{\varphi''} \mathcal{A}.$$

Alors, dans le diagramme commutatif d'homomorphismes construits en juxtaposant deux diagrammes du type (1) :

$$(2) \quad \begin{array}{ccccc} [\Omega] & & \xrightarrow{\omega} & & \mathcal{A} \\ \varphi'' \downarrow & \searrow \varphi & & \swarrow \psi & \downarrow \psi'' \\ & [\Omega'] & \xrightarrow{\omega'} & \mathcal{A}' & \\ & \swarrow \varphi' & & \searrow \omega'' & \\ [\Omega''] & & \xrightarrow{\omega''} & & \mathcal{A}'' \end{array}$$

il est possible d'introduire un homomorphisme $\psi: \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A}''$ qui respecte la commutativité.

D'après (A'1), les sous-compositeurs $\psi \mathcal{A}$ et $\omega'[\Omega']$ de \mathcal{A}' engendrent \mathcal{A}' . Par conséquent, l'homomorphisme ψ de (A'3) est nécessairement unique.

D'après la propriété d'associativité du produit tensoriel, $\Omega'' \otimes_{\varphi''} \mathcal{A}''$ s'identifie à

$$\Omega'' \otimes_{\varphi'} (\Omega' \otimes_{\varphi} \mathcal{A}''^n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^+.$$

Il en résulte que le Ω' -compositeur $\mathcal{A}' = \Omega' \otimes_{\varphi} \mathcal{A}$ peut être défini canoniquement comme un compositeur analytique sur Ω' : on prendra, par définition,

$$\Omega'' \otimes_{\varphi'} \mathcal{A}' = \Omega'' \otimes_{\varphi''} \mathcal{A},$$

et le diagramme du type (1)

$$\begin{array}{ccc} [\Omega'] & \xrightarrow{\omega'} & \mathcal{A}' \\ \downarrow \varphi' & & \downarrow \psi' \\ [\Omega''] & \xrightarrow{\omega''} & \mathcal{A}'' = \Omega'' \otimes_{\varphi'} \mathcal{A}' \end{array}$$

sera extrait du diagramme (2) complété par l'homomorphisme ψ' .

L'équivalence axiomatique entre graduations et produits tensoriels s'exprime par la proposition suivante :

PROPOSITION (4.3). — Si \mathcal{A} est un compositeur sur l'anneau Ω vérifiant les axiomes (A1), ..., (A6) du n° 5, \mathcal{A} peut être défini canoniquement comme un compositeur analytique sur Ω . Réciproquement, si \mathcal{A} est un compositeur analytique sur Ω , on peut définir canoniquement sur chaque \mathcal{A}^n une structure de Ω -module n -gradué, de telle sorte que les axiomes (A1), ..., (A6) soient vérifiés.

Cette proposition justifie la nouvelle définition suivante des analyseurs : un Ω -analyseur incomplet \mathcal{A} est un Ω -compositeur analytique tel que

$$(T_{n,n}f)(0, \dots, 0) = 0 \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{A}^n.$$

La première partie de la proposition résulte de la proposition (4.2) que nous avons démontrée sans faire intervenir l'axiome (A7). Quant à la seconde partie, nous nous contenterons de définir les graduations canoniques dans un compositeur analytique, en laissant au lecteur le soin d'achever les démonstrations.

Soit donc \mathfrak{A} un Ω -compositeur analytique. Prenons pour Ω' l'anneau de polynomes $\Omega[X_1, \dots, X_n]$, et pour φ l'injection canonique de Ω dans Ω' . Nous avons le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} [\Omega] & \xrightarrow{\omega} & \mathfrak{A} \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \psi \\ [\Omega'] & \xrightarrow{\omega'} & \mathfrak{A}' = \Omega' \underset{\varphi}{\otimes} \mathfrak{A} \end{array}$$

Soit $f \in \mathfrak{A}^n$; alors

$$f' = (T_{n,n}(\psi f))(X_1 e'_{n,1}, \dots, X_n e'_{n,n}) \in \mathfrak{A}'^n.$$

L'axiome (A'1) signifie que f' s'écrit *univoquement* comme une somme finie

$$f' = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} X_1^{z_1} \dots X_n^{z_n} \psi f_\alpha,$$

où les $f_\alpha \in \mathfrak{A}^n$ seront, *par définition*, les *composantes homogènes* de f .

Remarque. — Si Ω est un *corps infini* et si \mathfrak{A} est un Ω -compositeur, on ne peut définir \mathfrak{A} comme Ω -compositeur analytique que d'une seule manière au plus [cf. prop. (4.1)]. L'expression « le Ω -compositeur \mathfrak{A} est analytique » a donc un sens. Il n'en est pas de même dans tous les cas. Si, par exemple, Ω est un corps fini, et \mathfrak{A} un Ω -compositeur, il peut arriver que l'on puisse définir sur \mathfrak{A} une infinité de graduations distinctes, dont chacune fait de \mathfrak{A} un Ω -compositeur analytique conformément à la proposition (4.3); la donnée de la graduation, ou, ce qui revient au même, du foncteur $\underset{\varphi}{\otimes} \mathfrak{A}$, est donc indispensable ⁽²³⁾.

24. GÉNÉRATION DES ANALYSEURS. EXEMPLES. — Le procédé de définition le plus usuel des compositeurs et analyseurs consiste à donner une famille de *générateurs* et de *relations* entre ces générateurs (le procédé analogue est bien connu en théorie des groupes).

Si $A = (A^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'ensembles, nous définirons, à un isomorphisme canonique près, le *compositeur libre* $E = (E^n)$ engendré par A par les propriétés suivantes : il existe une famille i d'injections $i_n: A^n \rightarrow E^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) telle que E soit engendré par $(i_n A^n)$, et que toute famille φ d'applications $\varphi_n: A^n \rightarrow F^n$ de A

⁽²³⁾ Cf. la fin du n° 21. Remarquons qu'il n'est pas nécessaire, pour définir le foncteur $\underset{\varphi}{\otimes} \mathfrak{A}$, d'introduire la catégorie des Ω -algèbres Ω' : il suffira de faire parcourir à Ω' l'ensemble des algèbres quotients d'une algèbre de polynomes $\Omega[(X_i)_{i \in \mathbb{N}}]$.

dans un compositeur $F = (F^n)$ puisse être factorisée sous la forme $\varphi = \psi i$, où ψ est un homomorphisme de E dans F . L'existence de E peut s'établir par une construction explicite.

Un système R de relations dans le compositeur libre E est constitué par une famille de relations du type $b_i \equiv b'_i$, où i parcourt un ensemble d'indices, et où, pour chaque i , b_i et b'_i appartiennent au même ensemble E^n .

Si l'on forme la relation d'équivalence \mathcal{R} la plus fine dans E qui implique les relations R et qui soit compatible avec les lois de composition $(T_{m,n})$, on peut passer au quotient et obtenir ainsi, par définition, le compositeur E/\mathcal{R} engendré par les générateurs A liés par les relations R .

Si Ω est un anneau, on définira de même le Ω -compositeur F engendré par la suite d'ensembles A , et le système de relations R . Ce cas se ramène d'ailleurs au précédent, si l'on adjoint aux générateurs A les éléments $\omega(\lambda e_{1,1})$, pour $\lambda \in \Omega$, et au système R les relations exprimant que l'application $\omega = [\Omega] \rightarrow F$ est un homomorphisme de compositeurs ⁽²⁴⁾.

Il est un cas particulier important où des Ω -compositeurs qui sont définis par générateurs et relations peuvent être munis naturellement d'une structure de Ω -compositeurs analytiques, et fournissent ainsi des analyseurs [prop. (4.3)] : c'est celui où tous les générateurs sont *multilinéaires*, ainsi que toutes les relations ⁽²⁵⁾. Dans ce cas, la notion de produit tensoriel d'applications linéaires ou multilinéaires (cf. BOURBAKI, *Algèbre*, chap. III) permet en effet de définir canoniquement les produits tensoriels.

Exemples ⁽²⁶⁾. — *a. Analyseur de Kurosch* ⁽²⁷⁾, engendré par une fonction bilinéaire $f(x_1, x_2)$ sans autres relations que celle exprimant la bilinéarité.

b. Analyseur annulaire, engendré par une fonction bilinéaire, notée $x_1 x_2$, avec la relation

$$(x_1 x_2) x_3 - x_1 (x_2 x_3) = 0.$$

c. Analyseur classique, engendré par une fonction bilinéaire, notée $x_1 x_2$, avec les deux relations

$$(x_1 x_2) x_3 - x_1 (x_2 x_3) = 0 \quad \text{et} \quad x_1 x_2 - x_2 x_1 = 0.$$

⁽²⁴⁾ Plus généralement, toute loi de composition externe se ramène à une famille de lois de composition internes (BOURBAKI *Algèbre*, chap. I).

⁽²⁵⁾ Le lecteur reconstituera sans peine la définition précise des générateurs (resp. relations) multilinéaires dans un Ω -compositeur : les exemples ci-dessous éclaireissent cette notion. On remarquera qu'un analyseur est engendré par ses éléments multilinéaires si et seulement si toute fonction γ admet une multilinéarisée (déf. 2.5).

⁽²⁶⁾ Les compositeurs analytiques qui suivent, définis conformément aux considérations précédentes, vérifient (A7) et sont donc présentés comme des analyseurs. Nous utilisons des notations fonctionnelles simplifiées au lieu des $(T_{m,n})$.

⁽²⁷⁾ Cf. *Mat. Sbor.*, t. 20, (52), 1947, p. 239-262.

d. Analyseur de Lie, engendré par une fonction bilinéaire, notée $[x_1, x_2]$, avec les deux relations

$$[x_1, x_1] = 0$$

et

$$[x_1, [x_2, x_3]] + [x_2, [x_3, x_1]] + [x_3, [x_1, x_2]] = 0,$$

e. Analyseur de Ritt, engendré par les deux fonctions $x_1 x_2$ et x'_1 , respectivement bilinéaire et linéaire avec les trois relations :

$$(x_1 x_2) x_3 - x_1 (x_2 x_3) = 0, \quad x_1 x_2 - x_2 x_1 = 0$$

et

$$x'_1 x_2 + x_1 x'_2 - (x_1 x_2)' = 0.$$

Ces analyseurs sont tous définis sur un anneau de base Ω donné. Ils s'obtiennent d'ailleurs à partir des analyseurs correspondants construits sur l'anneau \mathbb{Z} des entiers en formant les produits tensoriels par Ω (considéré comme \mathbb{Z} -algèbre). Les exemples *b* à *e* répondent respectivement aux espèces suivantes de Ω -algèbres : algèbres associatives, associatives et commutatives, de Lie, associatives et commutatives à dérivation. L'analyseur classique peut être identifié à un quotient de l'analyseur annulaire, qui lui même s'identifie à un quotient de l'analyseur de Kurosch. D'autre part, le théorème de Poincaré-Witt valable notamment pour les algèbres de Lie libres, permet d'identifier l'analyseur de Lie à un *sous-analyseur* de l'analyseur annulaire, en posant

$$[x_1, x_2] = x_1 x_2 - x_2 x_1.$$

Il existe des analyseurs qui ne peuvent pas être engendrés par des éléments multilinéaires; c'est le cas notamment pour l'*analyseur de Jacobson* \mathfrak{J} , défini sur un anneau de caractéristique p première (soit, par exemple, sur le corps premier F_p) comme le sous-analyseur de l'analyseur annulaire \mathfrak{A} engendré par l'analyseur de Lie \mathfrak{L} et l'élément $x'_1 \in \mathfrak{A}_p^1$. L'élément x'_1 n'a pas de multilinéarisation dans \mathfrak{J} , qui correspond à l'espèce des algèbres de Lie p -restreintes⁽²⁸⁾.

Nous signalerons enfin une construction due à J. Tits, qui fournit des exemples de Ω -compositeurs possédant plusieurs structures distinctes de compositeurs analytiques.

Soit E un compositeur, S un monoïde unitaire. Nous appellerons *extension de E par S* le compositeur $F = (E, S)$ ainsi défini : F est engendré par des éléments

$$\phi f \in F^n \quad (f \in E^n) \quad \text{et} \quad \psi s \in F^1 \quad (s \in S)$$

en correspondance avec ceux de E et de S . Les relations entre ces générateurs sont :

1° celles qui expriment que $\phi: E \rightarrow F$ est un homomorphisme;

(28) Cf. *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 50, 1941, p. 15-25.

2° $\psi e = e_{1,1}$, e désignant l'unité dans S , et

$$(T_{1,1}(\psi s))(\psi t) = \psi(st) \quad \text{pour tous } s, t \in S;$$

3° $(T_{1,n}(\psi s))(\varphi f) = (T_{n,n}(\varphi f))(\psi s(e_{n,1}), \dots, \psi s(e_{n,n}))$ pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in E^n$, $s \in S$.

On démontre que φ et ψ sont *injectifs*. Supposons maintenant que E soit donné comme un Ω -compositeur analytique sur le *corps fini* Ω à q éléments, et prenons pour S le monoïde libre unitaire à un générateur t . Le compositeur $F = (E, S)$ est alors un Ω -compositeur, sur lequel nous pouvons introduire une infinité de graduations prolongeant celle de φE et transformant F en un Ω -compositeur analytique : une telle graduation sera complètement déterminée si nous donnons à ψt l'un des degrés q^h ($h \in \mathbb{N}$).

CHAPITRE II.

ÉTUDE DES LOIS DE GROUPES DANS LES ANALYSEURS RATIONNELS.

Dans tout ce chapitre, il ne sera question que d'analyseurs complets.

5. — Les lois de groupes et leurs équivalences.

22. LOIS DE GROUPES.

DÉFINITION (5.1). — Nous appellerons *loi de groupe dans un analyseur* \mathfrak{A} une fonction $f(x, y) \in \mathfrak{A}^2$ vérifiant :

- a. $f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z)) = 0$;
- b. $f(x, y) \equiv x + y \pmod{\text{deg. } 2}$.

Une loi de groupe $f(x, y)$ sera dite *abélienne* si $f(x, y) = f(y, x)$.

Exemples. — $x + y$ est une loi de groupe dans tout analyseur; $x + y + xy$ est une loi de groupe dans l'analyseur annulaire (n° 21, ex. b).

PROPOSITION (5.1). — Si $f(x, y)$ est une loi de groupe dans l'analyseur \mathfrak{A} , $f(x, 0) = f(0, x) = x$, et il existe une fonction $g(x) \in \mathfrak{A}^1$ et une seule vérifiant $f(x, g(x)) = f(g(x), x) = 0$.

Démonstration. — Posons $h(x) = f(x, 0)$. Alors

$$h(x) \equiv x \pmod{\text{deg. } 2}$$

et d'après le théorème (3.1), il existe $h'(x) \in \mathfrak{A}^1$ tel que $h(h'(x)) = x$. Si nous faisons $y = z = 0$ dans a [déf. (5.1)], il vient $h(h(x)) = h(x)$; il

suffit d'y substituer $h'(x)$ à x pour obtenir $f(x, o) = h(x) = x$. On démontre de même que $f(o, x) = x$.

D'après b et le théorème (3.1), il existe $g(x), g'(x) \in \mathfrak{A}^4$ telles que

$$f(g(x), x) = f(x, g'(x)) = o.$$

Si nous appliquons a , il vient

$$\begin{aligned} g(x) &= f(g(x), o) = f(g(x), f(x, g'(x))) \\ &= f(f(g(x), x), g'(x)) = f(o, g'(x)) = g'(x). \end{aligned}$$

La donnée d'une loi de groupe dans un analyseur \mathfrak{A} permet de définir une structure de groupe sur chaque \mathfrak{A} -module \mathbf{M} (cf. n° 15).

La démonstration de la proposition (5.1) n'est en partie qu'une traduction de démonstrations élémentaires connues de la théorie des groupes. Plus généralement toutes les *identités génériques* de la théorie des groupes se traduisent par des identités dans un analyseur, dès que l'on s'y est donné une loi de groupe. Pour simplifier les notations, il nous arrivera d'écrire xy une loi de groupe, par analogie avec la notation multiplicative des groupes. Les fonctions $g_n(x)$ correspondant aux puissances seront appelées *itérées* de la loi de groupe $f(x, y) = xy$; nous les écrirons x^n si aucune confusion n'est à craindre (ce qui entraîne la notation fâcheuse $x^o = o$). On a

- (1) $g_0(x) = o, \quad g_n(x) = f(g_{n-1}(x), x) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{Z},$
- (2) $f(g_n(x), g_{n'}(x)) = g_{n+n'}(x) \quad \text{pour tous } n, n' \in \mathbb{Z},$
- (3) $g_n(g_{n'}(x)) = g_{nn'}(x) \quad \text{pour tous } n, n' \in \mathbb{Z}.$

Si la loi est *abélienne*,

- (4) $g_n(f(x, y)) = f(g_n(x), g_n(y)) \quad \text{pour tous } n, n' \in \mathbb{Z}.$

Soit $xy \equiv x + y + A(x, y) \pmod{\text{deg. } 3}$ une loi de groupe dans l'analyseur \mathfrak{A} , avec $A(x, y) \in \mathfrak{A}_2^2$. Nous noterons $(x, y) = xyx^{-1}y^{-1}$ le « *commutateur* » de x et y , et $x^y = yxy^{-1}$ le « *transformé de x par l'automorphisme intérieur associé à y* ».

PROPOSITION (5.2). — *La composante homogène de degré total 2 du commutateur (x, y) d'une loi de groupe xy est un crochet de Lie.*

Démonstration. — Soit $[x, y]$ la composante de degré total 2 de (x, y) . Les relations $(x, o) = (o, x) = (x, x) = o$ montrent que $[x, y]$ est bilinéaire et vérifie $[x, x] = o$. D'ailleurs, avec les notations précédentes, on vérifie que $[x, y] = A(x, y) - A(y, x)$. Quant à l'identité de Jacobi (cf. n° 21, ex. d), elle résulte de l'identité de P. Hall

$$(5) \quad ((x, y), z^y)((y, z), x^z)((z, x), y^x) = o.$$

En effet, un calcul simple montre que le premier membre de (5) est congru (mod. deg. 4) à $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y]$, qui est donc nul.

23. LE GROUPE ADJOINT D'UN ANALYSEUR. — Soit \mathfrak{A} un analyseur. Nous munissons \mathfrak{A}^1 de sa structure de monoïde définie par la composition : si $\varphi(x)$, $\psi(x) \in \mathfrak{A}^1$, nous poserons $(\varphi \circ \psi)(x) = \varphi(\psi(x))$; la fonction identique x est élément neutre pour cette opération.

DÉFINITION (5.2). — L'ensemble des fonctions $\varphi(x) \in \mathfrak{A}^1$ inversibles, c'est-à-dire telles qu'existe $\varphi^{-1}(x)$ vérifiant

$$(\varphi \circ \varphi^{-1})(x) = (\varphi^{-1} \circ \varphi)(x) = x,$$

constitue un groupe dit groupe adjoint de \mathfrak{A} et noté $G(\mathfrak{A})$. L'ensemble des fonctions $f(x) \in \mathfrak{A}^1$ linéaires et inversibles constitue un sous-groupe de $G(\mathfrak{A})$, dit groupe linéaire de \mathfrak{A} et noté $GL(\mathfrak{A})$. L'ensemble des fonctions $\varphi(x) \in \mathfrak{A}^1$ vérifiant $\varphi(x) \equiv x \pmod{\deg. (i+1)}$ sera noté $G_i(\mathfrak{A})$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$.

PROPOSITION (5.3). — Chaque $G_i(\mathfrak{A})$, $i \in \mathbb{N}^*$, est un sous-groupe invariant de $G(\mathfrak{A})$. Pour que $\varphi(x) \in G(\mathfrak{A})$, il faut et il suffit que $\varphi(x) \in \mathfrak{A}^1$ et que $\varphi(x) \equiv t(x) \pmod{\deg. 2}$, où $t(x) \in GL(\mathfrak{A})$; avec ces notations, l'application $\varphi(x) \rightarrow t(x)$ est un épimorphisme de $G(\mathfrak{A})$ sur $GL(\mathfrak{A})$ dont le noyau est $G_1(\mathfrak{A})$.

Démonstration. — D'après la proposition (3.2), $G_i(\mathfrak{A})$ est un sous-monoïde de \mathfrak{A}^1 pour tout $i \in \mathbb{N}^*$. Si $\varphi(x) \in G_i(\mathfrak{A})$, il existe, d'après le théorème (3.1), $\varphi'(x) \in \mathfrak{A}^1$ tel que

$$(\varphi \circ \varphi')(x) = x \quad \text{et} \quad x = (\varphi \circ \varphi')(x) \equiv \varphi'(x) \pmod{\deg. (i+1)},$$

d'après la proposition (3.2), d'où $\varphi'(x) \in G_i(\mathfrak{A})$. Il existe de même $\varphi''(x) \in G_i(\mathfrak{A})$ tel que $(\varphi' \circ \varphi'')(x) = x$. Il en résulte, d'après un raisonnement classique [cf. prop. (5.1)], que $\varphi = \varphi''$; donc $G_i(\mathfrak{A})$ est un sous-groupe de $G(\mathfrak{A})$. Si

$$\varphi(x) \in G_i(\mathfrak{A}), \quad \psi(x) \in G(\mathfrak{A}),$$

on a

$$(\psi \circ \varphi \circ \psi^{-1})(x) \equiv (\psi \circ \psi^{-1})(x) = x \pmod{\deg. (i+1)},$$

donc $G_i(\mathfrak{A})$ est invariant dans $G(\mathfrak{A})$.

Soient $\varphi(x)$, $\varphi'(x) \in G(\mathfrak{A})$, $\varphi(x) \equiv t(x)$, $\varphi'(x) \equiv t'(x) \pmod{\deg. 2}$, $t(x)$, $t'(x) \in GL(\mathfrak{A})$. Alors

$$(\varphi \circ \varphi')(x) \equiv (t \circ t')(x) \pmod{\deg. 2};$$

donc, l'application $\varphi \rightarrow t$ est un homomorphisme de $G(\mathfrak{A})$ dans $GL(\mathfrak{A})$ dont le noyau est $G_1(\mathfrak{A})$. Si $\varphi(x) \in \mathfrak{A}^1$, $\varphi(x) \equiv t(x) \pmod{\deg. 2}$ et $t(x) \in GL(\mathfrak{A})$, alors

$$(t^{-1} \circ \varphi)(x) \in G_1(\mathfrak{A}) \subset G(\mathfrak{A}), \quad \text{donc} \quad \varphi \in G(\mathfrak{A}).$$

PROPOSITION (5.4). — Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, le groupe quotient $G_i(\mathfrak{A})/G_{i+1}(\mathfrak{A})$ s'identifie au groupe additif \mathfrak{A}_{i+1}^1 , en associant à la classe de $\varphi(x) \in G_i(\mathfrak{A})$ la

fonction $a_{i+1}(x)$ définie par

$$\varphi(x) \equiv x + a_{i+1}(x) \quad [\text{mod. deg. } (i+2)].$$

Si

$$\varphi(x) \equiv x + a_{i+1}(x) \quad [\text{mod. deg. } (i+2)]$$

et

$$\psi(x) \equiv x + b_{j+1}(x) \quad [\text{mod. deg. } (j+2)].$$

avec $i, j \in \mathbb{N}^*$, $a_{i+1} \in \mathfrak{A}_{i+1}^1$, $b_{j+1} \in \mathfrak{A}_{j+1}^1$, le commutateur

$$(\varphi, \psi) = \varphi \circ \psi \circ \varphi^{-1} \circ \psi^{-1}$$

vérifie

$$(\varphi, \psi)(x) \equiv x + c_{i+j+1}(x) \quad [\text{mod. deg. } (i+j+2)],$$

où

$$(1) \quad c_{i+j+1}(x) = \sum_{x \succ [i]x + [1]b_{j+1}(x)} a_{i+1}(x) - \sum_{x \succ [j]x + [1]a_{i+1}(x)} b_{j+1}(x).$$

Démonstration. — Posons

$$\varphi(x) = x + \sum_{n \geq i+1} a_n(x) \quad \text{et} \quad \psi(x) = x + \sum_{n \geq j+1} b_n(x),$$

avec $a_n, b_n \in \mathfrak{A}_n^1$. Alors

$$(\varphi \circ \psi)(x) = \psi(x) + \sum_{n \geq i+1} a_n(\psi(x)).$$

La proposition (3.1) donne, pour $n \geq i+2$,

$$a_n(\psi(x)) \equiv a_n(x) \quad [\text{mod. deg. } (i+j+2)].$$

D'autre part, la formule de Taylor (n° 11) conduit à

$$a_{i+1}(\psi(x)) \equiv a_{i+1}(x) + \sum_{x \succ [1]x + [1]b_{j+1}(x)} a_{i+1}(x) \quad [\text{mod. deg. } (i+j+2)].$$

Nous obtenons donc

$$(2) \quad (\varphi \circ \psi)(x) \equiv \varphi(x) + \psi(x) - x + \sum_{x \succ [1]x + [1]b_{j+1}(x)} a_{i+1}(x) \quad [\text{mod. deg. } (i+j+2)];$$

et, de même,

$$(3) \quad (\psi \circ \varphi)(x) \equiv \varphi(x) + \psi(x) - x + \sum_{x \succ [1]x + [1]a_{i+1}(x)} b_{j+1}(x) \quad [\text{mod. deg. } (i+j+2)].$$

Si nous posons $\chi(x) = x + c_{i+j+1}(x)$, avec les notations de (1), nous obtenons d'après (2) et (3)

$$(4) \quad (\chi \circ \psi \circ \varphi)(x) \equiv (\varphi \circ \psi)(x) \quad [\text{mod. deg. } (i+j+2)],$$

d'où

$$(\varphi, \psi)(x) \equiv \chi(x) \quad [\text{mod. deg. } (i+j+2)].$$

Remarques. — La proposition (5.4) signifie que $G_i(\mathfrak{A})$ est une N-suite dans $G_1(\mathfrak{A})$ (cf. [6], chap. I.). L'anneau de Lie gradué associé à $G_i(\mathfrak{A})$ s'identifie

à $\sum_{i \in \mathbb{N}^*} \mathfrak{A}_{i+1}^1$, avec le crochet de Lie donné par (1) pour les éléments homogènes.

D'autre part, la topologie définie dans $G(\mathfrak{A})$ par la suite $(G_i(\mathfrak{A}))$ coïncide avec la topologie induite par la topologie canonique de \mathfrak{A}^1 (n° 13); $G(\mathfrak{A})$ est ainsi un groupe séparé et complet. La proposition (5.3) montre que $G(\mathfrak{A})$ est le produit semi-direct du N-groupe $G_1(\mathfrak{A})$ et du sous-groupe $GL(\mathfrak{A})$, ce dernier n'étant pas invariant, en général.

24. ÉQUIVALENCE DES LOIS DE GROUPES.

DÉFINITION (5.3). — Soient \mathfrak{A} un analyseur, $\varphi(x) \in G(\mathfrak{A})$, $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{A}^n$. Nous appellerons *transmutée de f par φ* , la fonction $\varphi(f(\varphi^{-1}(x_1), \dots, \varphi^{-1}(x_n)))$, que nous noterons $f^\varphi(x_1, \dots, x_n)$.

Cette définition est compatible avec la notation φ^ψ des automorphismes intérieurs dans $G(\mathfrak{A})$.

PROPOSITION (5.5). — a. La transmutation des fonctions de \mathfrak{A} par une fonction donnée $\varphi(x) \in G(\mathfrak{A})$ est un automorphisme de \mathfrak{A} considéré comme compositeur (cf. n° 20): si $f \in \mathfrak{A}^m$, $g_1, \dots, g_m \in \mathfrak{A}^n$, et $h = f(g_1, \dots, g_m)$, alors $h^\varphi = f^\varphi(g_1^\varphi, \dots, g_m^\varphi)$.

b. Le groupe $G(\mathfrak{A})$ opère à gauche sur \mathfrak{A} : $((f)^\varphi)^\psi = f^{\psi \circ \varphi}$ pour $\varphi, \psi \in G(\mathfrak{A})$, $f \in \mathfrak{A}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

c. Si $f(x, y) \in \mathfrak{A}^2$ est une loi de groupe, et $\varphi \in G(\mathfrak{A})$, $f^\varphi(x, y)$ est une loi de groupe.

La démonstration est immédiate.

DÉFINITION (5.4). — Nous dirons que deux lois de groupes $f, g \in \mathfrak{A}^2$ sont *équivalentes* (resp. *équivalentes au sens restreint*) s'il existe $\varphi(x) \in G(\mathfrak{A})$ [resp. $\varphi(x) \in G_1(\mathfrak{A})$] tel que $f^\varphi = g$. Le groupe des $\varphi(x) \in G(\mathfrak{A})$ [resp. $\varphi(x) \in G_1(\mathfrak{A})$] tels que $f^\varphi = f$ sera dit le *stabilisateur* (resp. le *stabilisateur restreint*) de la loi de groupe f .

Les classes de lois équivalentes sont donc les *classes de transitivité* de $G(\mathfrak{A})$ opérant sur l'ensemble des lois de groupes. Deux lois de groupes équivalentes dans l'analyseur \mathfrak{A} définissent des structures de groupes *isomorphes* sur tout \mathfrak{A} -module. Une transmutation peut s'interpréter comme un « *changement de coordonnées* », et les éléments du stabilisateur comme des « *automorphismes analytiques* ».

6. — La formule du binôme; lois canoniques dans les analyseurs rationnels.

25. FORMULE DU BINÔME. — Si l'on considère dans l'analyseur classique (n° 21, ex. c) la loi de groupe $f(x, y) = x + y + xy$, son $n^{\text{ième}}$ itéré $g_n(x)$

(n° 22) s'écrit

$$g_n(x) = \sum_{1 \leq i < \infty} \binom{n}{i} x^i \quad (n \in \mathbb{Z});$$

c'est la « formule du binôme » bien connue, que nous allons généraliser.

PROPOSITION (6.1). — Soient \mathfrak{A} un analyseur, et $f(x, y) \in \mathfrak{A}^2$ vérifiant $f(x, 0) = f(0, x) = x$. Définissons par récurrence les fonctions $g_n(x)$ ($n \in \mathbb{N}$) en posant

$$g_0(x) = 0, \quad g_{n+1}(x) = f(x, g_n(x)).$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$g_n(x) = \sum_{1 \leq j \leq i < \infty} \binom{n}{i} c_{i,j}(x),$$

où $c_{i,j}(x) \in \mathfrak{A}_i^1$ quels que soient i et j ($1 \leq j \leq i < \infty$).

Démonstration. — Désignons par $b_{i,n}(x)$ la composante homogène de degré i de $g_n(x)$. Ainsi

$$(1) \quad g_n(x) = \sum_{1 \leq i < \infty} b_{i,n}(x).$$

Les relations $f(x, 0) = f(0, x) = x$ impliquent

$$f(x, y) \equiv x + y \pmod{\text{deg. } 2}$$

et, par une récurrence évidente, $b_{1,n}(x) = nx$. Nous poserons donc $c_{1,1}(x) = x$. Supposons déjà construites les fonctions $c_{i,j}(x)$, avec $1 \leq j \leq i < q$, telles que $c_{i,j}(x) \in \mathfrak{A}_i^1$ et que

$$(2) \quad g_n(x) = \sum_{1 \leq j \leq i < q} \binom{n}{j} c_{i,j}(x) + \sum_{q \leq i < \infty} b_{i,n}(x).$$

Nous pouvons supposer $q \geq 2$. Calculons $b_{q,n+1}(x)$. C'est [prop. (3.2)] la composante homogène de degré q de

$$f\left(x, b_{q,n}(x) + \sum_{1 \leq j \leq i < q} \binom{n}{j} c_{i,j}(x)\right).$$

D'après la formule de Taylor (n° 11),

$$(3) \quad b_{q,n+1}(x) = \sum_{\substack{\alpha, \beta, (\beta_{i,j}) \\ \alpha \geq 1, \beta \geq 1, (\beta_{i,j}) \geq 1}} \frac{x^\alpha \prod_{i,j} \beta_{i,j}!}{\alpha! \beta! \prod_{i,j} \beta_{i,j}!} f(x, y),$$

où la sommation s'étend à toutes les familles d'entiers ≥ 0 ($\alpha, \beta, (\beta_{i,j})$) vérifiant

$$\alpha + q\beta + \sum_{1 \leq j \leq i < q} i\beta_{i,j} = q.$$

Considérons les termes où $\alpha = 0$. D'après la relation $f(0, x) = x$, il suffit de considérer les termes pour lesquels

$$\beta + \sum_{1 \leq j \leq i < q} \beta_{i,j} = 1.$$

La seule famille d'entiers possible est

$$\beta = 1, \quad \beta_{i,j} = 0 \quad (1 \leq j \leq i < q)$$

qui conduit au terme $b_{q,n}(x)$. Dans tous les autres termes, $\alpha > 0$ implique $\beta = 0$. Nous obtenons donc, compte tenu des relations d'homogénéité,

$$(4) \quad b_{q,n+1}(x) - b_{q,n}(x) = \sum_{\alpha, (\beta_{i,j})} \prod_{1 \leq j \leq i < q} \binom{n}{j}^{\beta_{i,j}} \sum_{\substack{x > 1, \alpha \mid x \\ y > 1 \\ 1 \leq j \leq i < q}} \prod \beta_{i,j}! c_{i,j}(x) f(x, y),$$

où la sommation s'étend aux systèmes d'entiers ≥ 0 ($\alpha, (\beta_{i,j})$) vérifiant

$$\alpha + \sum_{1 \leq j \leq i < q} i \beta_{i,j} = q \quad \text{et} \quad \alpha > 0.$$

Pour un tel système,

$$\sum_{1 \leq j \leq i < q} j \beta_{i,j} \leq \sum_{1 \leq j \leq i < q} i \beta_{i,j} = q - \alpha < q;$$

on peut négliger la famille $\alpha = q, \beta_{i,j} = 0$ puisque $q \geq 2$ et $f(x, 0) = x$. Chaque produit $\prod_{1 \leq j \leq i < q} \binom{n}{j}^{\beta_{i,j}}$ est ainsi un polynôme en n , à valeurs entières pour n entier, nul pour $n = 0$, et de degré strictement inférieur à q . Il peut donc s'écrire comme une combinaison linéaire à coefficients entiers des polynômes $\binom{n}{j}$ ($1 \leq j < q$), et même comme une combinaison linéaire à coefficients entiers positifs, d'après la relation

$$(5) \quad \binom{n}{i} \binom{n}{j} = \sum_{\sup(i,j) \leq k \leq i+j} \frac{k!}{(k-i)! (k-j)! (i+j-k)!} \binom{n}{k} \quad (i, j \in \mathbb{N}).$$

Écrivons chaque terme du second membre de (4) comme une combinaison linéaire des $\binom{n}{j}$ multipliés par des fonctions de x de degré q ; nous obtenons, après regroupement,

$$(6) \quad b_{q,n+1}(x) - b_{q,n}(x) = \sum_{1 \leq j < q} \binom{n}{j} c_{q,j+1}(x),$$

où les fonctions $c_{q,j+1}(x) \in \mathfrak{A}_q^1$ pourraient être explicitées à partir de (4) et (5).

La relation

$$\binom{n+1}{j+1} - \binom{n}{j+1} = \binom{n}{j},$$

jointe à (6), montre que la fonction

$$b_{q,n}(x) = \sum_{2 \leq j \leq q} \binom{n}{j} c_{q,j}(x)$$

est indépendante de n . Comme elle est nulle pour $n = 0$, elle est nulle pour toute valeur de n , et la construction de $c_{i,j}(x)$ à été effectuée pour le degré $i = q$ ($c_{i,1}(x) = 0$ pour $i > 1$, car $g_1(x) = x$), ce qui achève la démonstration par récurrence.

Remarques. — *a.* Le calcul des $c_{i,j}(x)$ a été exposé sans faire intervenir aucune propriété particulière de l'analyseur \mathfrak{A} . On pourrait donc (théoriquement !) donner pour le calcul de chaque $c_{i,j}(x)$ à partir de $f(x, y)$ une *formule générique* qui ne ferait intervenir que l'addition des fonctions (et non leur soustraction) la composition des fonctions homogènes et les opérateurs de Sanov.

b. La relation de récurrence utilisée pour définir les $g_n(x)$ ($n \in \mathbb{N}$) permet aussi bien de les définir pour $n \in \mathbb{Z}$; il suffit d'utiliser le théorème (3.1). La proposition et sa démonstration restent valables sans modification pour $n \in \mathbb{Z}$.

COROLLAIRE. — *Avec les hypothèses de la proposition précédente, si \mathfrak{A} est un analyseur sur un anneau Ω de caractéristique p (premier), on a*

$$g_p(x) \equiv 0 \pmod{\deg. p}.$$

Démonstration. — Il suffit de remarquer que $\binom{p}{j} \equiv 0 \pmod{p}$ pour $1 \leq j < p$.

PROPOSITION (6.2). — *Soient $f(x, y)$ une loi de groupe dans un analyseur \mathfrak{A} sur un anneau Ω de caractéristique p (premier), et $g_n(x)$ son $n^{\text{ième}}$ itéré ($n \in \mathbb{Z}$). Alors, $g_{p^h}(x) \equiv 0 \pmod{\deg. p^h}$ pour tout $h \in \mathbb{N}$, et l'homomorphisme $n \rightarrow g_n(x)$ du monoïde multiplicatif \mathbb{Z} muni de sa topologie p -adique dans le monoïde \mathfrak{A}^1 muni de sa topologie canonique est une application continue. Cela permet de définir, par continuité, les itérés p -adiques $g_v(x)$ ($v =$ entier p -adique) de la loi $f(x, y)$.*

Démonstration. — On applique le corollaire de la proposition (6.1) et les identités (2) et (3) du n° 22; cf. [7].

26. ANALYSEURS RATIONNELS.

DÉFINITION (6.1). — *Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, nous noterons Q_r l'anneau des nombres rationnels qui, écrits comme fractions irréductibles, n'admettent au dénominateur que des facteurs premiers $\leq r$.*

Ainsi, $Q_1 = \mathbb{Z}$, Q_2 est l'anneau des rationnels de la forme $m/2^n$ ($m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$), Si $(n+1)$ n'est pas un nombre premier, $Q_n = Q_{n+1}$.

Un Q_r -module A possède, en tant que groupe abélien, la propriété suivante :

pour tout $x \in A$, il existe un élément $y \in A$ et un seul tel que $r!y = x$. Réciproquement, tout groupe abélien possédant cette propriété peut être muni d'une structure de Q_r -module et d'une seule.

DÉFINITION (6.2). — *Un analyseur \mathcal{A} sur un anneau Ω est dit rationnel si, pour tous $n, r \in \mathbb{N}^*$ le groupe additif \mathcal{A}_r^n (module des fonctions de n arguments de degré total r) est un Q_r -module.*

Exemples. — *a.* Si Ω est un corps de caractéristique 0, tout analyseur sur Ω est rationnel.

b. Si Ω est un corps de caractéristique $p \neq 0$, un analyseur \mathcal{A} sur Ω est rationnel si et seulement s'il est nilpotent de classe $< p$ [déf. (3.4)], c'est-à-dire si $\mathcal{A}_r^n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \geq p$.

c. A chacun des types d'analyseurs définis au n° 21 (ex. *a* à *e*) correspond un analyseur rationnel, avec \mathbb{Z} comme anneau de base. Prenons, par exemple, l'analyseur annulaire \mathcal{A} sur l'anneau \mathbb{Z} . L'analyseur annulaire rationnel \mathcal{B} sera défini en prenant $\mathcal{B}_r^n = Q_r \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{A}_r^n$ pour tous $n, r \in \mathbb{N}^*$. Autrement dit, on multiplie par les scalaires de Q_r les fonctions de degré total r . Comme, d'autre part, les groupes \mathcal{A}^n sont sans torsion (ce sont même des groupes abéliens libres), on peut identifier \mathcal{B} à un sous-analyseur (sur \mathbb{Z}) de l'analyseur $Q \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{A}$ sur le corps des rationnels, ce qui simplifie la vérification des axiomes. On définira ainsi l'analyseur de Lie rationnel, etc. Le théorème de Poincaré-Witt montre encore que l'analyseur de Lie rationnel s'identifie à un sous-analyseur de l'analyseur annulaire rationnel.

Sauf mention expresse du contraire, un analyseur rationnel sera toujours considéré sur l'anneau de base \mathbb{Z} .

27. LOIS CANONIQUES.

LEMES (6.1). — *Supposons donnée, dans un analyseur rationnel \mathcal{A} une famille de fonctions $d_{i,j}(x) \in \mathcal{A}_i^1$, pour $i, j \in \mathbb{N}^*$, $j \leq i$.*

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$g_n(x) = \sum_{1 \leq i \leq i < \infty} n^i d_{i,j}(x),$$

$$\varphi(x) = \sum_{1 \leq i < \infty} d_{i,1}(x), \quad \psi(x) = \sum_{1 \leq i < \infty} d_{i,i}(x).$$

Alors, si

$$(1) \quad g_n(g_m(x)) = g_{mn}(x) \quad \text{pour tous } m, n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad g_1(x) = x,$$

on a

$$\varphi(\psi(x)) = \psi(\varphi(x)) = x, \quad \varphi(g_n(x)) = n\varphi(x);$$

$$g_n(\psi(x)) = \psi(nx) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Démonstration. — Posons, pour $\rho, \sigma, \tau \in \mathbb{N}$,

$$(2) \quad e_{\rho, \sigma, \tau}(x) = \sum_{i, (\alpha_{k,l}^i)} x \succ \sum_{k,l} \mathfrak{D} \left[\alpha_{k,l}^i \right] d_{k,l}(x),$$

où la sommation s'étend à toutes les valeurs entières de i et, pour i donné, à toutes les familles $(\alpha_{k,l}^i)$ d'entiers ≥ 0 vérifiant

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq \rho \leq i, \quad 1 \leq l \leq k < \infty, \quad \sum_{k,l} \alpha_{k,l}^i = i, \\ \sum_{k,l} l \alpha_{k,l}^i = \sigma, \quad \sum_{k,l} k \alpha_{k,l}^i = \tau, \end{array} \right.$$

On a $e_{\rho, \sigma, \tau}(x) \in \mathfrak{A}_\tau^1$. Si $e_{\rho, \sigma, \tau} \neq 0$, $1 \leq \rho \leq \sigma \leq \tau$.

Si nous calculons

$$g_n(g_m(x)) = \sum_{1 \leq j \leq i < \infty} n^j d_{i,j} \left(\sum_{1 \leq l \leq k < \infty} m^l d_{k,l}(x) \right)$$

d'après la formule de Taylor (n° 11), et en utilisant les relations d'homogénéité, nous obtenons

$$(4) \quad g_n(g_m(x)) = \sum_{1 \leq \rho \leq \sigma \leq \tau < \infty} n^\rho m^\sigma e_{\rho, \sigma, \tau}(x).$$

Le calcul de $e_{\rho, \sigma, \tau}$ se simplifie si $\rho = \sigma$. Dans (3), la relation $\rho \leq i \leq \sigma$ montre qu'il faut alors prendre $i = \rho$; de plus, $i = \sigma$ implique $\alpha_{k,l}^i = 0$ pour $l \geq 2$. Nous obtenons donc

$$(5) \quad e_{\rho, \rho, \tau}(x) = \sum_{(\alpha_k)} x \succ \sum_k \mathfrak{D} \left[\alpha_k \right] d_{k,1}(x),$$

où la sommation s'étend à toutes les suites (α_k) d'entiers ≥ 0 vérifiant

$$(6) \quad \sum_{1 \leq k < \infty} \alpha_k = \rho, \quad \sum_{1 \leq k < \infty} k \alpha_k = \tau.$$

La formule de Taylor appliquée à

$$\psi(nm \varphi(x)) = \sum_{1 \leq i < \infty} d_{i,i} \left(nm \sum_{1 \leq j < \infty} d_{j,1}(x) \right)$$

conduit donc à

$$(7) \quad \psi(nm \varphi(x)) = \sum_{1 \leq \rho \leq \tau < \infty} n^\rho m^\tau e_{\rho, \rho, \tau}(x) \quad \text{pour } m, n \in \mathbb{N}.$$

Utilisons, pour la première fois, l'hypothèse (1). Nous obtenons, d'après (4),

$$\sum_{1 \leq \rho \leq \sigma \leq \tau < \infty} n^\rho m^\sigma e_{\rho, \sigma, \tau}(x) = \sum_{1 \leq j \leq i < \infty} n^j m^i d_{i,j}(x),$$

pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, ou, en égalant les composantes de même degré τ en x ,

$$(8) \quad \sum_{1 \leq \rho \leq \sigma \leq \tau} n^\rho m^\sigma e_{\rho, \sigma, \tau}(x) = \sum_{1 \leq i \leq j} n^i m^j d_{\tau, j}(x)$$

pour tous $\tau \in \mathbb{N}^*$, $m, n \in \mathbb{N}$. Puisque \mathfrak{A} est un *analyseur rationnel*, (8) équivaut [cf. la démonstration de la proposition (4.2)] à

$$(9) \quad e_{\rho, \sigma, \tau}(x) = 0, \quad \text{pour } \rho \neq \sigma \quad e_{\rho, \rho, \tau}(x) = d_{\tau, \rho}(x) \quad \text{pour } 1 \leq \rho \leq \tau < \infty.$$

D'après (9), la relation (7) s'écrit, en y faisant $m = 1$,

$$(10) \quad \psi(n\varphi(x)) = g_n(x).$$

Pour $n = 1$, nous avons

$$\psi(\varphi(x)) = g_1(x) = x.$$

Comme $\varphi(x) \equiv \psi(x) \equiv d_{1,1}(x) = x \pmod{\text{deg. } 2}$,

$$\varphi, \psi \in G_1(\mathfrak{A}) \quad \text{et} \quad \varphi \circ \psi(x) = \psi \circ \varphi(x) = x.$$

Substituant les deux membres de (10) dans $\varphi(x)$, il vient $n\varphi(x) = \varphi(g_n(x))$; substituant $\psi(x)$ à x dans les deux membres de (10), il vient $\psi(nx) = g_n(\psi(x))$.

Remarques. — *a.* Le lemme (6.1) généralise la construction des fonctions exponentielle et logarithme classiques à partir des relations

$$\exp x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \quad \log(1+x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} ((1+x)^n - 1).$$

Les formules définissant $\psi(x)$ et $\varphi(x)$ doivent être considérées comme des « spécialisations » remplaçant les passages à la limite.

b. Il résulte de notre démonstration que toutes les formules rencontrées où apparaissent des entiers $m, n \in \mathbb{N}$ restent valables si l'on remplace m, n par des entiers de signes quelconques, ou encore par des éléments de l'anneau de base Ω de l'analyseur rationnel \mathfrak{A} .

c. Nous aurions pu démontrer tout comme (4) et (7) [c'est-à-dire sans utiliser l'hypothèse (1) ni le fait que \mathfrak{A} est rationnel] les relations suivantes :

$$\begin{aligned} g_m(\psi(x)) &= \sum_{1 \leq \rho \leq \sigma < \infty} m^\rho e_{\rho, \sigma, \sigma}(x), \\ \varphi(g_m(x)) &= \sum_{1 \leq \sigma \leq \tau < \infty} m^\sigma e_{1, \sigma, \tau}(x), \\ \varphi(\psi(x)) &= \sum_{1 \leq \sigma < \infty} e_{1, \sigma, \sigma}(x). \end{aligned}$$

Si nous utilisons maintenant (9), les relations précédentes démontrent l'énoncé complet du lemme, sans faire intervenir aucune propriété de $G(\mathfrak{A})$ [de $\varphi, \psi \in G_1(\mathfrak{A})$, $\psi \circ \varphi(x) = x$, nous avons conclu $\varphi \circ \psi(x) = x$].

d. Posons, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$,

$$f_j(x) = \sum_{j \leq i < \infty} d_{i,j}(x);$$

en particulier, $f_1 = \varphi$. On peut démontrer, comme précédemment, que

$$\begin{aligned} f_j(g_m(x)) &= \sum_{j \leq \sigma \leq \tau < \infty} m^\sigma e_{j,\sigma,\tau}(x), \\ f_j(\psi(x)) &= \sum_{1 \leq \sigma < \infty} e_{j,\sigma,\sigma}(x). \end{aligned}$$

D'après (9), ces relations conduisent à

$$\begin{aligned} f_j(g_m(x)) &= m^j f_j(x), \\ f_j(x) &= d_{j,j}(\varphi(x)). \end{aligned}$$

DÉFINITION (6.3). — Une loi de groupe $f(x, y)$ dans un analyseur rationnel \mathfrak{A} est dite canonique si ses itérés $g_n(x)$ sont donnés par $g_n(x) = nx$ ($n \in \mathbb{N}$).

Remarque. — Il est indifférent de remplacer l'hypothèse « $n \in \mathbb{N}$ » par « $n \in \mathbb{Z}$ » dans cette définition.

THÉORÈME (6.1). — Dans un analyseur rationnel \mathfrak{A} toute loi de groupe $f(x, y)$ est équivalente, au sens restreint, à une loi canonique et une seule.

Démonstration. — Soit $g_n(x)$ le $n^{\text{ième}}$ itéré de $f(x, y)$. Nous pouvons appliquer la proposition (6.1), et écrire

$$g_n(x) = \sum_{1 \leq j \leq i < \infty} \binom{n}{j} c_{i,j}(x) \quad [n \in \mathbb{N}; c_{i,j}(x) \in \mathfrak{A}_i^1].$$

Le coefficient $\binom{n}{j}$ est un polynôme en n dont les coefficients appartiennent à \mathbb{Q}_j , donc à \mathbb{Q}_i si $j \leq i$. Ordonnons le polynôme $\binom{n}{j}$ suivant les puissances de n , puis regroupons les termes dans le développement de $g_n(x)$, nous obtenons

$$g_n(x) = \sum_{1 \leq j \leq i < \infty} n^j d_{i,j}(x) \quad [n \in \mathbb{N}; d_{i,j}(x) \in \mathfrak{A}_i^1].$$

Toutes les hypothèses du lemme (6.1), dont nous conservons les notations, sont vérifiées. Posons $f'(x, y) = f^\varphi(x, y)$. Il résulte de la proposition (5.5) que le $n^{\text{ième}}$ itéré $g'_n(x)$ de $f'(x, y)$ est $g_n^\varphi(x)$, et le lemme (6.1) montre que $g_n^\varphi(x) = nx$. La loi f' , équivalente au sens restreint à f [puisque $\varphi(x) \in G_1(\mathfrak{A})$] est donc canonique.

Soit $\varphi'(x) \in G_1(\mathfrak{A})$ tel que $f'' = f^\varphi$ soit également une loi canonique. Posons

$$\chi(x) = \varphi' \circ \varphi^{-1}(x).$$

Alors $f'' = f'^2$; appliquons cette relation aux itérés, il vient $\chi(n\chi^{-1}(x)) = nx$ pour $n \in \mathbb{N}$, ou $\chi(nx) = n\chi(x)$. Cela implique, du fait que \mathfrak{A} est rationnel [cf. démonstration de la proposition (1.2)], que $\chi(x) \in \mathfrak{A}_1$. Comme $\chi(x) \in G_1(\mathfrak{A})$, $\chi(x) = x$ et $f'' = f'$.

Remarques. — *a.* Nous avons formalisé le « passage aux coordonnées canoniques de première espèce » dans un groupe de Lie. La proposition (6.1) remplace l'étude des sous-groupes à un paramètre; le lemme (6.1) remplace les passages à la limite.

b. Le théorème (6.1) montre bien la différence entre l'équivalence et l'équivalence restreinte des lois de groupes [déf. (5.4)]. Dans un analyseur rationnel \mathfrak{A} , le groupe $GL(\mathfrak{A})$ opère sur l'ensemble des lois canoniques. L'exemple des groupes de Lie montre qu'il n'y a lieu d'étudier que l'équivalence restreinte dans les analyseurs rationnels généraux.

7. — La loi de Hausdorff.

28. AUTOMORPHISMES INTÉRIEURS DÉFINIS PAR UNE LOI CANONIQUE. — Soit, dans un analyseur rationnel \mathfrak{A} , une loi de groupe canonique $f(x, y)$. Nous écrirons $f(x, y) = xy$, et nous utiliserons les notations multiplicatives indiquées au n° 22 : les itérés de xy seront notés x^n et l'hypothèse que la loi est canonique se traduit par $x^n = nx$. Le « transformé de y par l'automorphisme intérieur associé à x » est la fonction $xyx^{-1} = h(x, y)$. L'identité $xy^n x^{-1} = (xyx^{-1})^n$ se traduit par $h(x, ny) = nh(x, y)$, pour $n \in \mathbb{Z}$, ce qui implique, puisque \mathfrak{A} est rationnel, que $h(x, y)$, soit *linéaire par rapport à y* .

PROPOSITION (7.1). — *Soit, dans l'analyseur rationnel \mathfrak{A} , une loi de groupe canonique xy . Posons*

$$xy \equiv x + y + \frac{1}{2}[x, y] \pmod{\deg. 3},$$

avec $[x, y] \in \mathfrak{A}_2$. Alors $[x, y]$ est un crochet de Lie, et

$$h(x, y) = xyx^{-1} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!} (adx)^n y,$$

où

$$(adx)^0 y = y, \quad (adx)^{n+1} y = [x, (adx)^n y] \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}.$$

Démonstration. — Si l'on calcule la composante homogène de degré total 2 du commutateur $(x, y) = xyx^{-1}y^{-1}$ défini par la loi canonique xy , on obtient $[x, y]$, ce qui prouve [prop. (5.2)] que cette fonction est un crochet de Lie. La dernière partie de la proposition va résulter des identités

$$x(x^n y x^{-n}) x^{-1} = x^{n+1} y x^{-(n+1)}$$

qui se traduisent par

$$(1) \quad h(x, h(nx, y)) = h((n+1)x, y) \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Désignons par L le module des fonctions $f(x, y) \in \mathfrak{A}^2$ qui sont linéaires par rapport à y , par $L' \subset L$ le sous-module des $f(x, y)$ vérifiant $f(o, y) = o$, et par $L'' \subset L$ l'ensemble des $f(x, y)$ vérifiant $f(o, y) = y$. Nous définissons sur L une structure d'anneau associatif en posant, pour $k, k' \in L$,

$$(k \star k')(x, y) = k(x, k'(x, y)).$$

La puissance $n^{\text{ième}}$ de $k(x, y) \in L$ par rapport à la « multiplication \star » sera notée $k(x, y)^{\star n}$; en particulier, $k(x, y)^{\star 0} = y$ est l'unité de l'anneau L .

Nous poserons

$$(2) \quad \begin{cases} \text{pour } k(x, y) \in L', & \exp k(x, y) = \sum_{0 \leq n < \infty} \frac{1}{n!} k(x, y)^{\star n}; \\ \text{pour } k(x, y) \in L'', & \log k(x, y) = \sum_{1 \leq n < \infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (k(x, y) - y)^{\star n}. \end{cases}$$

Ces formules ont un sens, car \mathfrak{A} est un analyseur rationnel. Les deux applications $\exp : L' \rightarrow L''$ et $\log : L'' \rightarrow L'$ sont inverses l'une de l'autre. De plus,

$$(3) \quad \text{pour } k(x, y) \in L'' \text{ et } n \in \mathbb{N}, \quad \log(k(x, y)^{\star n}) = n \log k(x, y).$$

Si $h(x, y)$ désigne comme précédemment xyx^{-1} , $h(x, y) \in L''$ et la relation (1) se traduit par

$$(4) \quad h(x, y)^{\star n} = h(nx, y) \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}.$$

Nous en déduisons que, en posant $k(x, y) = \log h(x, y)$, $h(x, y) = \exp k(x, y)$ et

$$(5) \quad n k(x, y) = k(nx, y).$$

Comme \mathfrak{A} est rationnel, (5) signifie que $k(x, y) \in L'$ est bilinéaire; $k(x, y)$ est donc la composante de degré total 2 de $h(x, y)$, qu'un calcul facile montre égale à $[x, y]$. Il suffit de revenir aux notations usuelles des algèbres de Lie pour obtenir la proposition (7.1).

29. LA LOI CANONIQUE UNIVERSELLE.

PROPOSITION (7.2). — Soient \mathfrak{A} un analyseur rationnel,

$$xy \equiv x + y + \frac{1}{2} [x, y] \pmod{\text{deg. } 3}$$

une loi de groupe canonique dans \mathfrak{A} avec $[x, y] \in \mathfrak{A}_2^+$. Désignons par \mathfrak{B} le sous-analyseur rationnel de \mathfrak{A} engendré par le crochet de Lie $[x, y]$. Alors :

a. $xy \in \mathfrak{B}$;

b. si $f(x, y)$ est une loi de groupe canonique dans \mathfrak{A} vérifiant

$$f(x, y) \equiv xy \pmod{\text{deg. } 3}, \quad f(x, y) = xy.$$

Démonstration. — La proposition (7.1) montre que $xyx^{-1} \in \mathfrak{B}$. Pour $f \in \mathfrak{A}^n$ et $q \in \mathbb{N}^*$, nous écrirons $f \in \mathfrak{B} \pmod{\text{deg. } q}$ pour indiquer qu'il existe $f' \in \mathfrak{B}$ avec $f \equiv f' \pmod{\text{deg. } q}$.

Soit $x + y + \sum_{2 \leq i < \infty} a_i(x, y)$ la décomposition de xy en composantes homogènes (pour le degré total). Supposons déjà démontré que $xy \in \mathfrak{B} \pmod{\text{deg. } q}$, $q \geq 2$. Nous allons en déduire que $xy \in \mathfrak{B} \pmod{\text{deg. } (q+1)}$, autrement dit que $a_q(x, y) \in \mathfrak{B}$.

Il résulte de la proposition (7.1) que, si $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{B} \pmod{\text{deg. } (q+1)}$; on a $yfy^{-1} \in \mathfrak{B} \pmod{\text{deg. } (q+1)}$. D'autre part, si $f, g \in \mathfrak{B} \pmod{\text{deg. } (q+1)}$, l'hypothèse de récurrence conduit à $fg - a_q(f, g) \in \mathfrak{B} \pmod{\text{deg. } (q+1)}$, et les relations

$$a_q(x, 0) = a_q(0, x) = a_q(x, -x) = 0,$$

jointes à la proposition (3.1), montrent que $fg \in \mathfrak{B} \pmod{\text{deg. } (q+1)}$ si l'une des trois conditions suivantes est vérifiée :

$$f \equiv 0, \quad g \equiv 0, \quad f + g \equiv 0, \quad (\text{mod. deg. } 2)$$

(le produit fg est calculé au sens de la loi de groupe xy).

Si nous appliquons ces remarques, nous obtenons successivement :

- (1) $y^k xy^{-k} \in \mathfrak{B} \quad (k \in \mathbb{N}),$
- (2) $y^k xy^{-k} x^{-1} \in \mathfrak{B} \pmod{\text{deg. } (q+1)}, \quad \text{car } y^k xy^{-k} + x^{-1} \equiv 0 \pmod{\text{deg. } 2},$
- (3) $u_k(x, y) = x^k (y^k xy^{-k} x^{-1}) x^{-k} \in \mathfrak{B} \pmod{\text{deg. } (q+1)}.$

Comme $u_k(x, y) \equiv 0 \pmod{\text{deg. } 2}$, nous obtenons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$,

$$(4) \quad v_n(x, y) = u_1(x, y) u_2(x, y) \dots u_{n-1}(x, y) \in \mathfrak{B} \pmod{\text{deg. } (q+1)}.$$

D'autre part,

$$x^n y^n = (nx) (xy) = n(x+y) + \sum_{2 \leq i < \infty} n^i a_i(x, y),$$

donc

$$(5) \quad x^n y^n - n^q a_q(x, y) \in \mathfrak{B} \pmod{\text{deg. } (q+1)}.$$

Comme $v_n(x, y) \equiv 0 \pmod{\text{deg. } 2}$,

$$(6) \quad v_n(x, y) (x^n y^n - n^q a_q(x, y)) \in \mathfrak{B} \pmod{\text{deg. } (q+1)}.$$

D'après la proposition (3.1), appliquée à $xy - (x+y)$,

$$(7) \quad v_n(x, y) (x^n y^n - n^q a_q(x, y)) \equiv v_n(x, y) x^n y^n - n^q a_q(x, y) \pmod{\text{deg. } (q+1)}.$$

Or, d'après une identité générique de la théorie des groupes, facile à vérifier,

$e_n(x, y) x^n y^n = (xy)^n$. D'autre part,

$$(8) \quad (xy)^n - na_q(x, y) \in \mathfrak{B} \quad [\text{mod. deg. } (q+1)].$$

Les relations (6), (7) et (8) nous donnent

$$(9) \quad (n^q - n) a_q(x, y) \in \mathfrak{B} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

ce qui implique $a_q(x, y) \in \mathfrak{B}$ puisque \mathfrak{A} et \mathfrak{B} sont des analyseurs rationnels. Remarquons que la démonstration nous a donné un *procédé de calcul explicite*, par récurrence, des fonctions $a_q(x, y)$ à partir du crochet de Lie $[x, y]$. Ce procédé est sans intérêt pratique, mais il établit la dernière partie de la proposition (7.2).

Désignons maintenant par \mathfrak{A} l'analyseur annulaire rationnel (n° 26, ex. c), et par $f(x, y)$ la loi de groupe $x + y + xy$ dans \mathfrak{A} . Désormais, xy désigne le « produit » qui engendre \mathfrak{A} (et qui n'est pas une loi de groupe); nous sommes obligés de renoncer à la notation multiplicative des lois de groupe précédemment utilisée. La loi $f(x, y)$ est équivalente au sens restreint à une loi canonique $f'(x, y)$ et une seule, d'après le théorème (6.1). Si nous retournons aux démonstrations du paragraphe 6, nous voyons que $f'(x, y)$ est donné par

$$(10) \quad \exp f'(x, y) = (\exp x) (\exp y),$$

où la fonction $\exp x$ est définie par la série classique :

$$(11) \quad \exp x = \sum_{0 \leq n < \infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

Le crochet de Lie attaché à $f'(x, y)$ par la proposition (7.1) n'est autre que $[x, y] = xy - yx$. Or nous savons (n° 26) que le sous-analyseur rationnel de \mathfrak{A} engendré par $xy - yx$ coïncide avec l'analyseur de Lie rationnel. Cela nous permet de poser la définition suivante (cf. [4], [6]) :

DÉFINITION (7.1). — Dans l'analyseur de Lie rationnel \mathfrak{L} , on appelle loi de Hausdorff la loi de groupe $\Phi(x, y)$ vérifiant

$$\Phi(x, y) \equiv x + y + \frac{1}{2} [x, y] \quad (\text{mod. deg. } 3).$$

Nous venons d'établir l'existence d'une telle loi. Son unicité résulte de la proposition (7.2), b, si nous montrons qu'une loi de groupe dans \mathfrak{L} est nécessairement canonique. Or toute loi de groupe est équivalente au sens restreint à une loi canonique, et $G_1(\mathfrak{L})$ se réduit à l'élément neutre x (conséquence de $[x, x] = 0$).

Les relations (10) et (11) conduisent au calcul explicite de $\Phi(x, y)$. On trouve

$$(12) \quad \begin{aligned} \Phi(x, y) \equiv & x + y + \frac{1}{2} [x, y] + \frac{1}{12} [[x, y], y] \\ & + \frac{1}{12} [[y, x], x] + \frac{1}{24} [[[[y, x], x], y]] \quad (\text{mod. deg. } 5). \end{aligned}$$

Si l'on a, dans un analyseur rationnel quelconque \mathfrak{A} , un crochet de Lie $a(x, y)$, il existe un homomorphisme et un seul φ de l'analyseur de Lie rationnel \mathfrak{L} dans \mathfrak{A} qui fait correspondre $a(x, y) \in \mathfrak{A}$ à $[x, y] \in \mathfrak{L}$. Nous pouvons donc donner un nouvel énoncé de la proposition (7.2) :

THÉOREME (7.1). — *Dans un analyseur rationnel \mathfrak{A} , une loi de groupe canonique $f(x, y)$ est entièrement déterminée par la donnée de sa composante homogène de degré total 2, $a(x, y)$. La fonction $a(x, y)$ est associée à une loi canonique si et seulement si c'est un crochet de Lie. La loi canonique $f(x, y)$ est obtenue comme l'image $\varphi\Phi(x, y)$ de la loi de Hausdorff $\Phi(x, y)$ par l'homomorphisme φ de l'analyseur de Lie rationnel \mathfrak{L} dans \mathfrak{A} défini par $\varphi[x, y] = a(x, y)$.*

Les théorèmes (6.1) et (7.1) montrent que, dans les analyseurs rationnels, l'étude des lois de groupes se ramène à celle des crochets de Lie. La classification des lois de groupes équivaut à celle des crochets de Lie par rapport aux opérations du groupe $GL(\mathfrak{A})$.

30. APPLICATION AUX GROUPES DE LIE.

DÉFINITION (7.2). — *Soient \mathfrak{A} l'analyseur classique sur l'anneau de base \mathbb{Z} , et Ω un anneau. Une loi de groupe de Lie formel à q paramètres ($q \in \mathbb{N}^*$) et à coefficients dans Ω est une loi de groupe dans l'analyseur $\Pi^q(\Omega \otimes_{\mathbb{Z}} \mathfrak{A})$, puissance cartésienne $q^{\text{ième}}$ de l'analyseur classique sur l'anneau Ω .*

Tout système de coordonnées analytiques au voisinage de l'élément neutre d'un groupe de Lie (réel ou complexe) définit une loi de groupe de Lie formel (à coefficients dans le corps \mathbb{R} des nombres réels ou le corps \mathbb{C} des nombres complexes), si l'élément neutre est pris comme origine.

Une loi de groupe de Lie formel à coefficients réels ou complexes est dite *convergente* si les séries de puissances correspondantes convergent au voisinage de l'origine.

La *majoration de la loi de Hausdorff*, due à Dynkin [3], montre que toute loi canonique dans $\Pi^q(\mathbb{R} \otimes \mathfrak{A})$ ou $\Pi^q(\mathbb{C} \otimes \mathfrak{A})$ est convergente, donc définit un germe de groupe de Lie.

Pour retrouver entièrement les « théorèmes fondamentaux de Lie », il faut encore montrer que, si l'on part d'une loi convergente, la transmutation (« changement de variables ») ramenant aux coordonnées canoniques [th. (6.1)] est donnée par des séries convergentes. Or, si l'on note xy la loi de groupe, la fonction $\psi(x)$ du lemme (6.1) s'obtient sous la forme : $\lim_{n \rightarrow \infty} (x/n)^n$, et la démonstration de la convergence est élémentaire.

CHAPITRE III.

LA COHOMOLOGIE DES ANALYSEURS.

8. — Les modules de cohomologie d'un analyseur.

31. LES ANALYSEURS CONSIDÉRÉS COMME COMPLEXES. — Nous avons considéré jusqu'à présent des analyseurs complets ou incomplets. Autrement dit, nous avons étudié la notion d'analyseur de deux points de vue différents. Dans ce chapitre, nous adopterons un troisième point de vue, et nous considérerons les analyseurs comme des complexes.

DÉFINITION (8.1). — Soit $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ un analyseur incomplet [déf. (2.1)]. Le complexe $(^{20}) \mathfrak{A}^*$ associé à cet analyseur est défini, en tant que module gradué, comme la somme directe $\mathfrak{A}^* = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathfrak{A}^n$. La différentielle δ de \mathfrak{A}^* est définie en posant, pour $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{A}^n \subset \mathfrak{A}^*$,

$$(1) \quad (\delta f)(x_1, \dots, x_{n+1}) = f(x_2, \dots, x_{n+1}) + \sum_{1 \leq i \leq n} (-1)^i f(x_1, \dots, x_i + x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) \\ + (-1)^{n+1} f(x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{A}^{n+1} \subset \mathfrak{A}^*.$$

L'introduction de la somme directe des modules \mathfrak{A}^n montre qu'il est essentiel de ne pas identifier des fonctions qui diffèrent seulement par des arguments neutres (par exemple $e_{n,i}$ et $e_{n+1,i}$, tous deux remplacés par le symbole x_i dans nos notations « fonctionnelles »).

Pour montrer que la définition (8.1) est correcte, il faut vérifier la relation $\delta^2 = 0$, ce qui peut se faire par un calcul direct (cf. aussi le n° 32).

Dans tout ce chapitre, nous entendrons par « analyseur » le complexe associé à un analyseur incomplet, suivant la définition (8.1). Nous supprimerons donc le signe $*$ qui distingue \mathfrak{A} de son complexe associé \mathfrak{A}^* . Les éléments de \mathfrak{A}^n seront appelés éventuellement n -cochaînes; l'entier n sera dit le « degré-arguments » (ou « nombre d'arguments ») de $f \in \mathfrak{A}^n$.

Par ailleurs, chaque \mathfrak{A}^n est un module n -gradué. Si nous introduisons dans \mathfrak{A}^n la graduation simple par rapport au degré total, \mathfrak{A} apparaît comme un module bigradué

$$(2) \quad \mathfrak{A} = \sum_{n, r \in \mathbb{N}^*} \mathfrak{A}_r^n.$$

L'inspection de la formule (1) définissant δ montre aussitôt que δ est homogène de degré 0 par rapport au degré total, c'est-à-dire que, pour tous $n, r \in \mathbb{N}^*$,

$$(3) \quad \delta \mathfrak{A}_r^n \subset \mathfrak{A}_r^{n+1}.$$

Remarque. — Grâce à la complétion (resp. restriction), nous pouvions passer d'un analyseur incomplet (resp. complet) à l'analyseur complet (resp. incomplet) associé. Il n'en est plus de même si nous considérons les analyseurs comme des complexes : nous ne pouvons pas reconstruire les opérations $(T_{m,n})$ de l'analyseur à partir du complexe associé. En fait, nous n'utiliserons dans ce chapitre qu'une partie des propriétés des analyseurs : il nous suffira de savoir calculer les fonctions composées de la forme $(T_{m,n}f)(g_1, \dots, g_m)$, où $f \in \mathcal{A}^m$ et où les g_i sont des sommes d'éléments distingués $e_{n,j}$. Il est facile de modifier le système des axiomes (**A**) de la définition (2.1) pour ne plus conserver que les opérations $(T_{m,n})$ ainsi restreintes ; tous les résultats établis dans ce chapitre restent valables avec cette axiomatique plus faible. Mais comme les applications de la cohomologie (chap. IV) font à nouveau intervenir toutes les propriétés des analyseurs, nous n'avons pas jugé utile de développer indépendamment l'axiomatique des « complexes multigradés ».

32. PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES DES MODULES DE COHOMOLOGIE ; LE PRINCIPE DE COMPARAISON. — Puisque nous avons sur l'analyseur \mathcal{A} un endomorphisme δ de carré nul, nous pouvons appliquer les définitions usuelles de l'algèbre homologique.

Nous appellerons *cocycles* (resp. *cobords*) les éléments (cochaînes) du *noyau* (resp. de l'*image*) de δ . Le module de cohomologie $H(\mathcal{A})$ de l'analyseur \mathcal{A} est le module quotient du module des cocycles par celui des cobords. Comme \mathcal{A} est bigradué, et δ homogène, $H(\mathcal{A})$ est bigradué. Plus précisément :

DÉFINITION (8.2). — Soit \mathcal{A} un analyseur. Nous noterons $H_r^n(\mathcal{A})$ le module de cohomologie $(\text{Noy } \delta : \mathcal{A}_r^n \rightarrow \mathcal{A}_r^{n+1}) / (\text{Im } \delta : \mathcal{A}_r^{n-1} \rightarrow \mathcal{A}_r^n)$.

Du seul fait que nous écrivons les éléments de l'analyseur \mathcal{A} comme des « fonctions », une analogie s'impose entre la cohomologie des analyseurs et la cohomologie des groupes ou monoïdes, calculée à partir de leurs complexes non homogènes. En effet, la formule (1) de la définition (8.1) coïncide « formellement » avec la formule du cobord, pour un groupe abélien noté additivement qui opère trivialement sur un module ⁽³⁰⁾. Cette analogie constitue ce que nous appellerons le « principe de comparaison ». Quantité de démonstrations, parfois compliquées, concernant la cohomologie des analyseurs, seront facilitées par le recours à ce principe, auquel il faudra donner une expression précise dans chaque cas particulier.

Par exemple, si l'on trouve plus simple de vérifier la relation $\delta^2 = 0$ pour le complexe homogène, on pourra transposer exactement aux analyseurs la démonstration d'Eilenberg-Mac Lane ⁽³¹⁾ qui ramène le cas du complexe non homogène à celui du complexe homogène.

⁽²⁹⁾ Cf. [2], chap. IV.

⁽³⁰⁾ Cf. EILENBERG-MAC LANE, *Ann. Math.*, t. 48, 1947, p. 51-78.

⁽³¹⁾ *Loc. cit.*

Soit M un \mathfrak{A} -module [(cf. déf. (2.3), dont nous reprenons les notations)]. Nous pouvons calculer les groupes de cohomologie $H^n(M, M)$ du groupe additif de M opérant trivialement sur lui-même. Nous avons des homomorphismes canoniques : $H^n(\mathfrak{A}) \rightarrow H^n(M, M)$, ainsi définis : si ξ est un élément de $H^n(\mathfrak{A})$ défini par le n -cocycle f , nous lui associons l'élément $H^n(M, M)$ défini par le n -cocycle $(\tau_n f)$.

La proposition suivante provient de ce que le « principe de comparaison » fait toujours intervenir des groupes abéliens qui opèrent trivialement sur des modules.

PROPOSITION (8.1). — Soit \mathfrak{A} un analyseur. Définissons un automorphisme involutif de \mathfrak{A} en posant, pour $n \in N^*$ et $f \in \mathfrak{A}^n$,

$$f(x_1, \dots, x_n) = (-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)} f(x_n, \dots, x_1).$$

Alors $\delta f = \overline{\delta f}$, et l'application considérée définit, par restriction et passage au quotient, un automorphisme involutif de $H(\mathfrak{A})$.

Pour certains calculs, il sera commode d'utiliser une autre expression de la différentielle ∂ , facile à vérifier :

PROPOSITION (8.2). — Soit \mathfrak{A} un analyseur. Pour $f \in \mathfrak{A}^n$, on a

$$(1) \quad (\partial f)(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{1 \leq i \leq n} (-1)^i (\partial_i f)(x_1, \dots, x_{n+1}),$$

où

$$(2) \quad (\partial_i f)(x_1, \dots, x_{n+1}) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{n+1}) \\ - f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+2}, \dots, x_{n+1}) \\ - f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}).$$

DÉFINITION (8.3). — Nous dirons qu'une fonction $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{A}^n$ est pseudo-linéaire par rapport à x_i si $(\partial_i f)(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0$. Nous dirons que f est pseudo- n -linéaire si elle est pseudo-linéaire par rapport à chacun de ses arguments.

En particulier, les fonctions linéaires sont pseudo-linéaires [prop. (2.7)]. D'après la proposition (8.2), toute fonction pseudo- n -linéaire est un n -cocycle. Comme il n'y a pas 1-cobords non nuls, nous avons la :

PROPOSITION (8.3). — Soit \mathfrak{A} un analyseur. Le module $H_r^1(\mathfrak{A})$ coïncide avec le module des fonctions pseudo-linéaires d'un argument, de degré r .

Si l'on a un homomorphisme φ d'un analyseur \mathfrak{A} dans un analyseur \mathfrak{A}' , on en déduit, par le procédé bien connu, un homomorphisme de $H(\mathfrak{A})$ dans $H(\mathfrak{A}')$.

Si \mathfrak{A} est un analyseur sur l'anneau Ω , et φ un homomorphisme de Ω dans l'anneau Ω' , la définition du produit tensoriel d'un analyseur incomplet par un anneau (n° 19) montre que la différentielle δ sur le complexe $\Omega' \otimes_{\Omega} \mathfrak{A}$ est

donnée par la définition usuelle. On pourra donc appliquer les relations de Künneth [2].

9. — Le complexe normalisé. Les modules H_r^n pour $r \leq n$.

33. LE COMPLEXE NORMALISÉ. — On sait que, pour calculer le cohomologie d'un groupe opérant sur un module, on peut remplacer le complexe non homogène des cochaînes par le *sous-complexe normalisé*, constitué par les cochaînes qui s'annulent si l'un quelconque de leurs arguments devient égal à l'élément neutre ⁽³²⁾.

La définition des cochaînes normalisées s'étend immédiatement au cas d'un analyseur $\mathfrak{A} : f(x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{A}^n$ sera dite normalisée si

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) = 0 \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n.$$

Les cochaînes normalisées constituent évidemment un sous-module de \mathfrak{A} ; une vérification simple montre qu'elles constituent un *sous-complexe*, que nous noterons $\tilde{\mathfrak{A}}$ (avec $\tilde{\mathfrak{A}}^n = \mathfrak{A}^n \cap \tilde{\mathfrak{A}}$, $\tilde{\mathfrak{A}}^n = \mathfrak{A}^n \cap \tilde{\mathfrak{A}}$).

Nous pouvons donc définir les modules de cohomologie $H_r^n(\tilde{\mathfrak{A}})$, et nous avons les homomorphismes canoniques : $H_r^n(\tilde{\mathfrak{A}}) \rightarrow H_r^n(\mathfrak{A})$, pour tous $n, r \in \mathbb{N}^*$.

PROPOSITION (9.1). — *Tous les homomorphismes canoniques $H_r^n(\tilde{\mathfrak{A}}) \rightarrow H_r^n(\mathfrak{A})$ sont des isomorphismes.*

Démonstration. — On peut appliquer le « principe de comparaison » et transposer la démonstration d'Eilenberg-Mac Lane ⁽³³⁾. De cette manière on définit un endomorphisme Ω -linéaire k de \mathfrak{A} , homogène de degré (-1) par rapport au degré-arguments, de degré 0 par rapport au degré total, tel que $(1 + k\partial + \partial k)\mathfrak{A} \subset \tilde{\mathfrak{A}}$, $k\tilde{\mathfrak{A}} = 0$. La proposition (9.1) résulte ainsi de la construction explicite d'une homotopie.

Voici une autre démonstration, qui abrège certaines récurrences ⁽³⁴⁾. Définissons l'endomorphisme Ω -linéaire k de \mathfrak{A} , homogène de degré (-1) par rapport au degré-arguments, en posant

$$(1) \quad \begin{cases} k\mathfrak{A}^1 = 0, \\ (kf)(x_1, \dots, x_{n-1}) = (-1)^{n-1} f\left(x_1, \dots, x_{n-1}, - \sum_{1 \leq i \leq n-1} x_i\right) \end{cases} \quad \text{pour } f \in \mathfrak{A}^n, n \geq 2.$$

⁽³²⁾ EILENBERG-MAC LANE, *loc. cit.*

⁽³³⁾ *Loc. cit.*

⁽³⁴⁾ Elle s'étend au cas général du complexe non homogène d'un groupe.

Posons, pour $f \in \mathfrak{A}$, $hf = f + k\delta f + \delta kf$. Un calcul simple montre que

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} (hf)(x_1, \dots, x_n) = (-1)^n \left(f\left(x_2, \dots, x_n, - \sum_{1 \leq i \leq n} x_i\right) \right. \\ \quad \left. - f\left(x_2, \dots, x_n, - \sum_{2 \leq i \leq n} x_i\right) \right) \quad \text{pour } n \geq 2, \\ (hf)(x_1) = f(0) - f(x_1) \quad \text{pour } n = 1. \end{array} \right.$$

Nous déduisons de ces formules que pour tout $f \in \mathfrak{A}^n$, $(hf)(0, x_2, \dots, x_n) = 0$, et que, si f s'annule quand on y remplace l'un quelconque de ses j premiers arguments par 0, hf vérifie la même condition, où j est remplacé par $(j+1)$ (pour $1 \leq j < n$). Ainsi, pour tout $f \in \mathfrak{A}^n$, $h^n f \in \tilde{\mathfrak{A}}^n$. D'autre part, h^n est de la forme $1 + k_n \delta + \delta k_n$, où k_n se calcule par récurrence

$$k_1 = k, \quad k_n = k + k_{n-1} + k_{n-1} \delta k + \delta k_{n-1} k.$$

Comme $\delta \tilde{\mathfrak{A}} \subset \tilde{\mathfrak{A}}$ et $k \tilde{\mathfrak{A}} \subset \tilde{\mathfrak{A}}$, nous avons $k_n \tilde{\mathfrak{A}} \subset \tilde{\mathfrak{A}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Il en résulte que $H(\mathfrak{A}/\tilde{\mathfrak{A}}) = 0$, d'où la proposition (9.1) ⁽³⁵⁾.

THÉOREME (9.1). — Pour tout analyseur \mathfrak{A} , $H_r(\mathfrak{A}) = 0$ si $r < n$.

C'est une conséquence immédiate de la proposition (9.1). En effet, $f \in \tilde{\mathfrak{A}}_r^n$ si et seulement si chaque composante homogène non nulle de f est de degré au moins égal à 1 par rapport à chacun de ses n arguments. Donc, si $r < n$, $f = 0$. Dans ce cas,

$$\tilde{\mathfrak{A}}_r^n = 0, \quad \text{et} \quad H_r^n(\mathfrak{A}) = H_r^n(\tilde{\mathfrak{A}}) = 0.$$

34. LES MODULES H_n^n . — Étudions maintenant les modules $H_n^n(\mathfrak{A}) = H_n^n(\tilde{\mathfrak{A}})$. Le module $\tilde{\mathfrak{A}}_n^n$ est constitué par les fonctions n -linéaires [déf. (2.7)]; comme $\delta \tilde{\mathfrak{A}}_n^n \subset \tilde{\mathfrak{A}}_n^{n+1} = 0$, tout élément de $\tilde{\mathfrak{A}}_n^n$ est un cocycle. Il nous reste à étudier les cobords.

Soit $g(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \tilde{\mathfrak{A}}_n^{n-1}$. Chaque composante homogène non nulle de g est de degré ≥ 1 par rapport à chacun des $(n-1)$ arguments, et de degré total n . Nous pouvons donc écrire

$$(1) \quad g(x_1, \dots, x_{n-1}) = \sum_{1 \leq i \leq n-1} g_i(x_1, \dots, x_{n-1}),$$

où chaque g_i est linéaire en x_j pour $j \neq i$, et de degré 2 en x_i .

D'après la proposition (8.2),

$$(2) \quad (\partial g)(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i \leq n-1} (-1)^i (\partial_i g_i)(x_1, \dots, x_n).$$

⁽³⁵⁾ L'inconvénient de cette méthode (itération d'une même homotopie) par rapport à celle d'Eilenberg-Mac Lane (composition d'homotopies différentes) est que les cochaines de $\tilde{\mathfrak{A}}$ ne restent pas invariantes.

Conformément aux définitions du n° 9, nous ferons opérer sur \mathfrak{A}_r^n et sur $\tilde{\mathfrak{A}}_r^n$ le groupe symétrique \mathfrak{S}_n . Nous désignerons par $Z(\mathfrak{S}_n)$ l'algèbre de groupe à coefficients entiers de \mathfrak{S}_n ; les modules \mathfrak{A}_r^n et $\tilde{\mathfrak{A}}_r^n$ deviennent ainsi des $Z(\mathfrak{S}_n)$ -modules. Nous noterons $\tau_i \in \mathfrak{S}_n$ la transposition $(i, (i+1))$, pour $1 \leq i \leq n-1$, et $\mathbf{a} \in Z(\mathfrak{S}_n)$ l'opérateur d'antisymétrisation

$$(3) \quad \mathbf{a} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon_\sigma \sigma.$$

L'idéal à gauche de $Z(\mathfrak{S}_n)$ engendré par $(1 - \tau_i)$ contient \mathbf{a} ; il existe donc des éléments $\mathbf{b}_i \in Z(\mathfrak{S}_n)$ tels que $\mathbf{a} = \mathbf{b}_i(1 - \tau_i)$, pour $1 \leq i \leq n-1$. Il est clair que, pour tout $g \in \mathfrak{A}^{n-1}$, $(1 - \tau_i)(\partial_i g) = 0$. Par conséquent, (2) implique $\mathbf{a} \partial g = 0$: dans $\tilde{\mathfrak{A}}_n^n$, l'antisymétrisé de tout cobord est nul.

Si $f(x_1, \dots, x_n) \in \tilde{\mathfrak{A}}_n^n$, $(1 + \tau_i)f$ est un cobord, pour $1 \leq i \leq n-1$. Plus précisément, $(1 + \tau_i)f = \partial g$, où

$$g(x_1, \dots, x_{n-1}) = (-1)^i f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}).$$

L'élément $(n! - \mathbf{a}) \in Z(\mathfrak{S}_n)$ appartient à l'idéal à droite de $Z(\mathfrak{S}_n)$ engendré par les $(1 + \tau_i)$; autrement dit, il existe des éléments $\mathbf{c}_i \in Z(\mathfrak{S}_n)$ tels que

$$(4) \quad (n! - \mathbf{a}) = \sum_{1 \leq i \leq n-1} (1 + \tau_i) \mathbf{c}_i.$$

Par conséquent, pour tout $f \in \tilde{\mathfrak{A}}_n^n$, $(n! - \mathbf{a})f$ est un cobord.

THÉOREME (9.2). — Soit \mathfrak{A} un analyseur. Dans $\tilde{\mathfrak{A}}_n^n$, l'antisymétrisé de tout cobord est nul : $\mathbf{a} \partial \tilde{\mathfrak{A}}_n^{n-1} = 0$. Pour tout n -cocycle $f \in \tilde{\mathfrak{A}}_n^n$, $(n! - \mathbf{a})f$ est un cobord. Si φ_n désigne l'homomorphisme canonique dans $H_n^n(\mathfrak{A})$ du module des fonctions n -linéaires antisymétriques, le noyau et le conoyau de φ_n sont des groupes de torsion où l'ordre de chaque élément divise $n!$.

Démonstration. — L'homomorphisme φ_n est celui qui fait correspondre à la fonction n -linéaire antisymétrique f sa classe de cohomologie f^* . Si $f^* = 0$, $\mathbf{a}f^* = 0$ d'après la première partie du théorème, déjà établie; or $\mathbf{a}f = n!f$, ce qui démontre la propriété énoncée du noyau de φ_n . Soit $g \in \tilde{\mathfrak{A}}_n^n$: comme $(n! - \mathbf{a})g$ est un cobord, la classe de cohomologie définie par $n!g$ est représentée par le cocycle antisymétrique $\mathbf{a}g$, ce qui démontre la propriété énoncée du conoyau de φ_n .

COROLLAIRE. — Si $\tilde{\mathfrak{A}}_n^n$ est un \mathbb{Q}_n -module [déf. (6.1)], $H_n^n(\mathfrak{A})$ s'identifie au sous-module de $\tilde{\mathfrak{A}}_n^n$ constitué par les fonctions n -linéaires antisymétriques.

10. — Les modules H_r^n pour $r > n$.

35. LES MODULES H_r^n POUR $n = 1, 2$.

PROPOSITION (10.1). — Pour tout analyseur \mathfrak{A} , le module $H_r^1(\mathfrak{A})$ est nul si r n'est pas une puissance entière d'un nombre premier. Si p est un nombre premier et $h \in \mathbb{N}^*$, $H_{p^h}^1(\mathfrak{A})$ est un groupe où tout élément non nul est d'ordre p .

Démonstration. — Nous appliquerons la proposition (8.3). La fonction $f \in \mathfrak{A}_r^1$ est pseudo-linéaire si et seulement si

$$(1) \quad \sum_{x \in \{s|x+\{r-s\}\}} f(x) = 0 \quad \text{pour } 0 < s < r.$$

Si nous faisons $y = x$ dans les relations (1), il vient, d'après (A6),

$$(2) \quad \binom{r}{s} f(x) = 0, \quad \text{pour } 0 < s < r.$$

Or on sait que le plus grand commun diviseur des coefficients binomiaux $\binom{r}{s}$ pour $0 < s < r$ est égal à 1 si r n'est pas puissance d'un nombre premier et à p si $r = p^h$, p premier. Les relations (2) équivalent donc respectivement à $f = 0$ et à $pf = 0$.

C. Q. F. D.

Remarque. — Le même procédé s'étend à l'étude des fonctions pseudo- n -linéaires homogènes. Si $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{A}_x^n$ est pseudo- n -linéaire, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, f est n -linéaire, ou bien tous les α_i sont des puissances entières d'un même nombre premier p . Dans ce dernier cas, $pf = 0$.

Une étude directe analogue à celle faite pour $H_r^1(\mathfrak{A})$ montrerait que $H_r^2(\mathfrak{A})$ est toujours un groupe de torsion si $r > 2$. Dans le cas où \mathfrak{A} est sans torsion, on peut démontrer le résultat plus précis suivant : $H_r^2(\mathfrak{A}) = 0$ si $r > 2$ n'est pas puissance d'un nombre premier ; si $r = p^h > 2$, p premier, $h \in \mathbb{N}^*$, $H_r^2(\mathfrak{A})$ est un groupe de torsion dont tous les éléments non nuls sont d'ordre p .

L'étude « directe » des modules H_r^n (pour $r > n$ et n « grands ») se heurte à des difficultés de calcul considérables. Nous démontrerons par une méthode plus puissante un théorème général.

36. LE THÉORÈME DE TORSION ; FILTRATION DU COMPLEXE $\tilde{\mathfrak{A}}_r$.

THÉORÈME (10.1). — Soit \mathfrak{A} un analyseur. Le groupe additif $H_r^n(\mathfrak{A})$ est un groupe de torsion si $r > n$, et ses p -composantes sont nulles pour tout nombre p premier strictement supérieur à r .

Démonstration. — Remarquons d'abord que l'énoncé du théorème ne fait pas intervenir l'anneau de base Ω . Par restriction de cet anneau de base (n° 19), nous pouvons donc admettre que \mathfrak{A} est un analyseur sur l'anneau \mathbb{Z} des entiers rationnels.

Pour tout groupe abélien A , les propositions : « A est un groupe de torsion

dont les p -composantes sont nulles pour $p > r$ » et « $A \otimes_{\mathbb{Z}} Q_r = 0$ » sont équivalentes ⁽³⁶⁾.

Pour tout groupe abélien à différentielle A , $H(A) \otimes_{\mathbb{Z}} Q_r$ s'identifie à $H(A \otimes_{\mathbb{Z}} Q_r)$.

Ces deux propositions se démontrent très simplement si l'on admet que la formation du produit tensoriel et le passage à l'homologie commutent avec le passage à la limite inductive ⁽³⁷⁾. Il suffit, en effet, de considérer Q_r comme la limite inductive de la suite des groupes abéliens, $Z_{(i)} (i \in \mathbb{N}^*)$, tous identifiés à \mathbb{Z} , l'homomorphisme $f_{j,i} : Z_{(i)} \rightarrow Z_{(j)}$ (pour $i \leq j$), s'identifiant à la multiplication par $(r!)^{j-i}$.

Ces remarques nous conduisent à donner du théorème (10.1) la nouvelle formulation suivante :

THÉOREME (10.1 bis). *Si \mathfrak{A} est un analyseur sur l'anneau de base Q_r , $H_r^n(\mathfrak{A}) = 0$ pour tout $n \neq r$.*

Le théorème (10.1), joint au théorème (9.1), implique (10.1 bis). Réciproquement, (10.1 bis) implique (10.1), car si \mathfrak{A} est un analyseur quelconque,

$$Q_r \otimes_{\mathbb{Z}} H_r^n(\mathfrak{A}) = H_r^n(Q_r \otimes_{\mathbb{Z}} \mathfrak{A}) = 0 \quad \text{si } n < r.$$

Nous allons démontrer (10.1 bis) par récurrence sur r . Pour $r = 1$, il n'y a rien à démontrer; pour $r = 2$, le résultat cherché est contenu dans la proposition (10.1).

Soient \mathfrak{A} un analyseur sur Q_r , et $\tilde{\mathfrak{A}}$ le complexe normalisé associé (§ 9). Pour simplifier les notations, nous noterons ici $A = \sum_{1 \leq n < \infty} A^n$ le sous-complexe $\tilde{\mathfrak{A}}_r = \sum_{1 \leq n < \infty} \tilde{\mathfrak{A}}_r^n$. Nous cherchons à démontrer que $H^n(A) = 0$ pour $n \neq r$, n désignant le degré-arguments dans A .

Définissons sur A une *filtration* au moyen des sous-modules A_i , en posant

$$(1) \quad \begin{cases} f \in A_i^n \text{ si et seulement si : } f(x_1, \dots, x_n) \in A^n \text{ et le degré par rapport à } x_n \text{ de chaque} \\ \text{composante homogène non nulle de } f \text{ est } \leq i; \\ A_i = \sum_{1 \leq n < \infty} A_i^n. \end{cases}$$

C'est ce que nous appellerons la *filtration par rapport au degré maximum du dernier argument*. Cette filtration est, par définition, compatible avec le degré-arguments. La définition (8.1) de ∂ montre que $\partial A_i \subset A_i$, c'est-à-dire que la filtration est compatible avec la différentielle. De plus,

$$(2) \quad A = A_r \subset A_{r-1} \subset \dots \subset A_1 \subset A_0 = 0.$$

⁽³⁶⁾ Cf. déf. (6.1) de l'anneau Q_r .

⁽³⁷⁾ Cf. [2], chap. V, § 9.

La relation $A_0 = 0$ provient de ce que nous avons pris $A = \tilde{\mathfrak{A}}_r$ (complexe *normalisé*). Nous avons donc une filtration *régulière*, et nous pouvons appliquer les propriétés de la suite spectrale ⁽³⁸⁾.

37. UNE SUITE SPECTRALE. — *Le complexe E_0 .* — C'est le module gradué associé au module filtré A , c'est-à-dire, $\sum_{1 \leq i \leq r} A_i/A_{i-1}$. Nous désignerons par $E_0^{i,n}$ le terme de degré filtrant i et de degré-arguments n , c'est-à-dire A_i^n/A_{i-1}^n . Comme la filtration est définie à partir d'une graduation, nous pouvons identifier $E_0^{i,n}$ au module des *n-cochaînes normalisées qui sont homogènes de degré i par rapport au dernier argument*.

La différentielle d_0 . — Elle est homogène de degré 0 par rapport au degré filtrant, de degré 1 par rapport au degré-arguments. On l'obtient à partir de δ par passage aux quotients. Soit donc $f \in A^n$, homogène de degré $i \geq 1$ par rapport au dernier argument x_n ; $d_0 f$ s'identifie à la somme des composantes homogènes de f qui sont de degré i par rapport au dernier argument x_{n+1} . Or tous les termes du développement de $(\delta f)(x_1, \dots, x_{n+1})$ sont de degré i en x_{n+1} , à l'exception des deux derniers. Le dernier terme $(-1)^{n+1} f(x_1, \dots, x_n)$ est de degré 0 en x_{n+1} , et doit donc être négligé puisque $i \geq 1$. Quant à l'avant-dernier terme :

$$(-1)^n f(x_1, \dots, x_n + x_{n+1}),$$

sa composante de degré i en x_{n+1} est

$$(-1)^n f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_{n+1}).$$

Ainsi, pour calculer $d_0 f$ ($f \in A^n$, $n \geq 2$), on remplace le dernier argument x_n par x_{n+1} , puis on calcule le cobord de f , considérée seulement comme fonction de ses $(n-1)$ premiers arguments. Si $f \in A^1$, $d_0 f = 0$.

Nous formulerons plus commodément ces résultats en introduisant l'analyseur $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}(a)$, obtenu par adjonction d'une « constante » a à l'analyseur \mathfrak{A} (n° 17). Le complexe \mathfrak{B} est muni d'une troisième graduation, celle relative au degré par rapport à la « constante ». Nous parlerons ainsi du « degré-constante » dans \mathfrak{B} , et nous noterons \mathfrak{B}_j^n le module des *n-cochaînes normalisées dans \mathfrak{B} , homogènes de degré total j par rapport à leurs n arguments, et de degré i par rapport à la « constante »*. La différentielle δ dans \mathfrak{B} est homogène de degré 0 par rapport au degré-constante, si bien que $H(\mathfrak{B})$ est *trigradué*

$$H(\mathfrak{B}) = \sum_{i,j,n} {}_i H_j^n(\mathfrak{B}).$$

⁽³⁸⁾ [2], chap. XV. Nous avons apporté quelques modifications aux notations concernant les indices (remplacement du « degré complémentaire » par le « degré total »).

Pour $n > 1$, nous pouvons identifier $E_0^{i,n}$ au module $\tilde{\mathfrak{B}}_{r-i}^{n-1}$ en associant à $f(x_1, \dots, x_n)$ la cochaîne $f(x_1, \dots, x_{n-1}, a)$ du complexe \mathfrak{B} ; la différentielle d_0 s'identifie alors à la différentielle ∂ de \mathfrak{B} .

Le complexe E_1 . — Il s'obtient en calculant la cohomologie de E_0 par rapport à d_0 . L'identification précédente montre que, pour $n > 1$, $E_1^{i,n}$ est isomorphe à $H_{r-i}^{n-1}(\mathfrak{B})$. Mais \mathfrak{B} peut être considéré, par restriction sur l'anneau de base, comme un analyseur sur Q , pour $s \leq r$, et $r-i < r$ puisque $i \geq 1$. Nous pouvons donc utiliser l'hypothèse de récurrence et appliquer (10.1 bis); nous obtenons ainsi $E_1^{i,n} = 0$ pour $n > 1$ et $n-1 \neq r-i$. D'autre part, $E_1^{i,1}$ s'identifie à $E_0^{i,1}$, c'est-à-dire à 0, pour $i \neq r$, et à \mathfrak{A}_r^1 pour $i = r$. Nous avons donc toujours

$$(1) \quad E_1^{i,n} = 0 \quad \text{pour } n+i \neq r+1,$$

et, par conséquent,

$$(2) \quad E_s^{i,n} = 0 \quad \text{pour } n+i \neq r+1 \text{ et } s \geq 1.$$

Il en résulte que les différentielles d_s sont nulles pour $s \geq 2$. En effet, d_s applique $E_s^{i,n}$ dans $E_s^{i-s,n+1}$, et ces deux modules ne peuvent être simultanément non nuls, d'après (2). Par conséquent,

$$(3) \quad E_2^{i,n} = E_{\infty}^{i,n},$$

et, compte tenu de (2),

$$(4) \quad H_r^n(\mathfrak{A}) \simeq E_2^{r+1-n,n}.$$

Tout revient donc à démontrer que $E_2^{r+1-n,n} = 0$ pour $n < r$.

Le théorème (9.2) et son corollaire nous permettent de donner une nouvelle interprétation des modules $E_1^{r+1-n,n}$. En effet, pour $n > 1$, $E_1^{r+1-n,n}$ est isomorphe à ${}_{(r+1-n)}H_{n-1}^{n-1}(\mathfrak{B})$, qui s'identifie au module des fonctions $f(x_1, \dots, x_{n-1}, a) \in \mathfrak{B}$, antisymétriques par rapport à leurs $(n-1)$ arguments, et homogènes de degré $(r+1-n)$ par rapport à la « constante » a . Revenant au complexe A , nous voyons que tout élément $\xi \in E_1^{r+1-n,n}$ a un représentant canonique $\varphi(\xi)$ dans A_{r+1-n} : $\varphi(\xi) = f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$, où $f \in A_{r+1-n}$ est antisymétrique par rapport à ses $(n-1)$ premiers arguments, et homogène de degré $(r+1-n)$ en x_n . Pour $n=1$, nous prendrons $\varphi(\xi) = f(x_1)$, unique représentant de $\xi \in E_1^{r+1,n}$ dans A_r .

LEMME (10.1). — Désignons par $K^{m,n}$ le module des fonctions $(m+n)$ -linéaires de \mathfrak{A}^{m+n} qui sont antisymétriques par rapport à leurs m premiers arguments, et symétriques par rapport à leurs n derniers arguments ($m, n \in \mathbb{N}$, $m+n > 0$). Définissons K comme la somme directe $\sum_{m,n} K^{m,n}$. Les éléments de $K^{m,n}$ seront notés $f(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$. Soient Δ et h les deux endomorphismes de K

définis en posant, pour $f(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) \in K^{m,n}$,

$$\begin{aligned} (\Delta f)(x_1, \dots, x_{m+1}, y_1, \dots, y_{n-1}) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq m+1} (-1)^i f(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{m+1}, x_i, y_1, \dots, y_{n-1}) \in K^{m+1, n-1}, \\ (hf)(x_1, \dots, x_{m-1}, y_1, \dots, y_{n+1}) \\ &= (-1)^m \sum_{1 \leq i \leq n+1} f(x_1, \dots, x_{m-1}, y_i, y_1, \dots, \hat{y}_i, \dots, y_{n+1}) \in K^{m-1, n+1}. \end{aligned}$$

Alors, pour $f \in K^{m,n}$, $(\Delta h + h\Delta)f = (m+n)f$ ⁽³⁹⁾.

Ce lemme s'établit par un calcul direct. Si $f \in K^{m,n}$, on trouve successivement :

$$\begin{aligned} (h\Delta f)(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq m} \sum_{1 \leq j \leq n} (-1)^{m+i+1} f(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_m, y_j, x_i, y_1, \dots, \hat{y}_j, \dots, y_n) \\ &\quad + \sum_{1 \leq j \leq n} f(x_1, \dots, x_m, y_j, y_1, \dots, \hat{y}_j, \dots, y_n), \\ (\Delta hf)(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq m} \sum_{1 \leq j \leq n} (-1)^{m+i} f(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_m, y_j, x_i, y_1, \dots, \hat{y}_j, \dots, y_n) \\ &\quad + \sum_{1 \leq i \leq m} (-1)^{m+i} f(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_m, x_i, y_1, \dots, y_n), \end{aligned}$$

d'où la relation annoncée, compte tenu des symétries et antisymétries de f .

Définissons maintenant un *monomorphisme* ψ du complexe $E_1 = \sum_n E_1^{r+1-n, n}$ dans K , tel que ψ induise un isomorphisme de $E_1^{r+1-n, n}$ sur $K^{n-1, r+1-n}$ pour tout n ($1 \leq n \leq r$). Soit $\xi \in E_1^{r+1-n, n}$; nous prenons $\varphi(x) = f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$, et nous calculons la *multilinéarisée symétrique de f par rapport à son dernier argument x_n* (cf. n° 12), que nous écrivons

$$\psi(\xi) = g(x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_{r-n+1}) \in K^{n-1, r-n+1}.$$

En d'autres termes, $g = \psi(\xi)$ est déterminé par les deux conditions

$$(5) \quad \begin{cases} g(x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_{r-n+1}) & \text{est symétrique par rapport aux } y, \\ g(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n, \dots, x_n) & = f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = \varphi(\xi). \end{cases}$$

L'existence et l'unicité de $g = \psi(\xi)$ proviennent de ce que A est un Q_r -module et, *a fortiori*, un $Q_{(r-n+1)}$ -module.

Nous avons alors

$$(6) \quad \psi(d_1 \xi) = \frac{r+1-n}{n} \Delta \psi(\xi) \quad \text{pour } \xi \in E_1^{r+1-n, n} \text{ et } 1 \leq n \leq r-1,$$

tandis que $d_1 E_1^{1, r} = 0$.

⁽³⁹⁾ Le signe \wedge signifie que le symbole qui figure en dessous doit être omis.

Soit, en effet, $\xi \in E_1^{r+1-n, n}$, $1 \leq n \leq r-1$. Alors $\varphi(\xi) = f(x_1, \dots, x_n)$ est un représentant de ξ dans A_{r+1-n} ; donc $\delta\varphi(\xi)$ est un représentant de $d_1\xi$ dans A_{r-n} ; mais [cf. (1), n° 12] nous pouvons remplacer, mod A_{r-n-1} , $\delta\varphi(\xi)$ par $(-1)^n(r+1-n)g(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+1})$, où

$$g(x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_{r+1-n}) = \psi(\xi).$$

Pour obtenir $\varphi(d_1\xi)$, il suffit donc d'antisymétriser

$$(-1)^n(r+1-n)g(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+1})$$

par rapport à ses n premiers arguments ⁽⁴⁰⁾. La définition de l'opérateur Δ [lemme (10.1)] conduit immédiatement à (6).

Soit $\xi \in E_1^{r+1-n, n}$, avec $d_1\xi = 0$ et $1 \leq n \leq r-1$. Si $n=1$, $\xi = 0$ [cf. prop. (10.1)]. Si $n > 1$, il résulte de (6) et du lemme (10.1) que $\xi = d_1\tau$, où τ est défini par

$$(7) \quad \psi(\tau) = \frac{(n-1)}{r(r+2-n)} h\psi(\xi).$$

Ainsi $E_2^{r+1-n, n} = 0$ si $n < r$.

C. Q. F. D.

11. — Cohomologie des puissances cartésiennes d'analyseurs; produits en cohomologie.

38. COMPLEXES RÉDUITS DES PUISSANCES CARTÉSIENNES D'ANALYSEURS. — Soient \mathfrak{A} un analyseur, I un ensemble d'indice. Nous nous proposons d'étudier des propriétés de la cohomologie de l'analyseur $\Pi^1\mathfrak{A}$ (cf. n° 18, dont nous reprenons les notations).

Si $F(X_1, \dots, X_n) = (f_i(X_1, \dots, X_n))_{i \in I}$ est une n -cochaîne de $\Pi^1\mathfrak{A}$ donnée par ses composantes $f_i \in \mathfrak{A}^{1, n}$, la définition (8.1) du cobord montre que

$$(1) \quad (\partial F)(X_1, \dots, X_{n+1}) = ((\partial f_i)(X_1, \dots, X_{n+1}))_{i \in I},$$

où, pour tout $i \in I$,

$$(2) \quad (\partial f_i)(X_1, \dots, X_{n+1}) = f_i(X_2, \dots, X_{n+1}) + \sum_{i \leq n} (-1)^i f_i(X_1, \dots, X_i + X_{i+1}, \dots, X_{n+1}) + (-1)^{n+1} f_i(X_1, \dots, X_n).$$

Autrement dit, le cobord de F se calcule « composante par composante ». La formule (2) définit une différentielle sur le module $\mathfrak{A}^1 = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathfrak{A}^{1, n}$.

DÉFINITION (11.1). — Soient \mathfrak{A} un analyseur, I un ensemble d'indices. Nous

⁽⁴⁰⁾ Il faut ici appliquer le *projecteur* d'antisymétrisation (qui laisse invariantes les fonctions antisymétriques) et non, comme au n° 34, l'*opérateur* d'antisymétrisation (qui les multiplie par $n!$).

appellerons *complexe réduit de la puissance cartésienne* $\Pi^1 \mathcal{A}$ le complexe $\mathcal{A}^1 = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{A}^{1,n}$, où la différentielle δ est donnée par la formule (2) ci-dessus.

La relation (1) montre que la détermination de $H(\Pi^1 \mathcal{A})$ se ramène à celle de $H(\mathcal{A}^1)$; en effet, $\Pi(\Pi^1 \mathcal{A})$ s'identifie au produit direct d'une famille de modules $(H_i)_{i \in I}$, dont chacun est isomorphe à $H(\mathcal{A}^1)$.

Si I est un ensemble d'indices, nous noterons $N^{(I)}$ l'ensemble des familles $\rho = (\rho_i)_{i \in I}$ d'entiers ≥ 0 , tous nuls sauf un nombre fini d'entre eux, et nous poserons $|\rho| = \sum_{i \in I} \rho_i$.

La notion de module I -gradué s'obtient par une généralisation naturelle de la définition (4.2) : le module A est I -gradué s'il est donné comme une somme directe $\sum_{\rho \in N^{(I)}} A_\rho$.

Le module $\mathcal{A}^{1,n}$ a une structure de module n -gradué (cf. n° 18) et une structure de module I -gradué définie comme suit.

DEFINITION (11.2). — Soient \mathcal{A} un analyseur, I un ensemble d'indices. Nous définissons une structure de module I -gradué sur $\mathcal{A}^{1,n}$ en posant, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $\rho = (\rho_i)_{i \in I} \in N^{(I)}$,

$$f((x_{i,1})_{i \in I}, \dots, (x_{i,n})_{i \in I}) \in \mathcal{A}_\rho^{1,n}$$

si et seulement si f est homogène de degré total ρ_i par rapport à ses arguments $x_{i,1}, \dots, x_{i,n}$ (pour tout $i \in I$). Nous appellerons ρ le « multidegré-composantes » dans \mathcal{A}^1 ⁽⁴¹⁾.

La formule (2) montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\rho \in N^{(I)}$,

$$(3) \quad \delta \mathcal{A}_\rho^{1,n} \subset \mathcal{A}_\rho^{1,n+1};$$

autrement dit la différentielle δ est homogène de degré 0 par rapport au multidegré-composantes. Le module de cohomologie $H(\mathcal{A}^1)$ se décompose donc en une somme directe

$$(4) \quad H(\mathcal{A}^1) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*, \rho \in N^{(I)}} H_\rho^n(\mathcal{A}^1).$$

D'après la proposition (9.1), le calcul de $H(\mathcal{A}^1)$ peut être remplacé par le

⁽⁴¹⁾ Les structures de modules n -gradué et I -gradué de $\mathcal{A}^{1,n}$ sont compatibles, c'est-à-dire qu'en posant $\mathcal{A}_{\alpha, \rho}^{1,n} = \mathcal{A}_\alpha^{1,n} \cap \mathcal{A}_\rho^{1,n}$ pour $\alpha \in N^n$, $\rho \in N^{(I)}$, on a

$$\mathcal{A}_\alpha^{1,n} = \sum_{\rho \in N^{(I)}} \mathcal{A}_{\alpha, \rho}^{1,n} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_\rho^{1,n} = \sum_{\alpha \in N^n} \mathcal{A}_{\alpha, \rho}^{1,n}.$$

De plus, si $\mathcal{A}_{\alpha, \rho}^{1,n} \neq 0$, $|\alpha| = |\rho|$.

calcul du module de cohomologie $H(\tilde{\mathfrak{A}}^1)$ du sous-complexe normalisé $\tilde{\mathfrak{A}}^1$. Rappelons que $f(X_1, \dots, X_n) \in \tilde{\mathfrak{A}}^{1,n}$ si

$$f(X_1, \dots, X_{i-1}, 0, X_{i+1}, \dots, X_n) = 0 \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n.$$

Nous montrerons qu'il est possible de remplacer le complexe réduit normalisé $\tilde{\mathfrak{A}}^1$ par un sous-complexe plus simple. Pour éviter des notations trop compliquées, nous traiterons d'abord le cas où I se réduit à un ensemble de deux éléments.

39. SOUS-COMPLEXE NORMAL D'UN CARRÉ CARTÉSIEN D'ANALYSEUR. — Dans les nos 39 et 40, \mathfrak{A} désignera un analyseur et \mathfrak{B} le complexe réduit normalisé de l'analyseur $\Pi^2 \mathfrak{A}$. Un élément $f(X_1, \dots, X_n)$ de \mathfrak{B}^n sera identifié à une fonction $f(x_1, y_1; \dots; x_n, y_n) \in \mathfrak{A}^{2n}$, qui s'annule lorsqu'on y remplace l'un quelconque des couples d'arguments (x_i, y_i) par $(0, 0)$.

Il se peut que certains des arguments x_i ou y_i soient neutres dans $f \in \mathfrak{B}$. Nous profiterons de cette circonstance pour « normaliser » à nouveau le complexe \mathfrak{B} .

PROPOSITION (11.1). — Pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, $p + q > 0$, définissons le sous-module $\mathfrak{C}^{p,q}$ de \mathfrak{B}^{p+q} en convenant que $f(x_1, y_1; \dots; x_{p+q}, y_{p+q}) \in \mathfrak{C}^{p,q}$ si et seulement si les arguments x_i et y_j sont neutres dans la fonction f pour $p+1 \leq i \leq p+q$ et $1 \leq j \leq p$. Alors le sous-module $\mathfrak{C} = \sum_{p,q \in \mathbb{N}} \mathfrak{C}^{p,q}$ de \mathfrak{B} est un sous-complexe. De plus, \mathfrak{C} est un complexe double ⁽⁴²⁾, c'est-à-dire que ∂ y est la somme de deux différentielles ∂_1 et ∂_2 vérifiant

$$\begin{aligned} \partial_1 \mathfrak{C}^{p,q} &\subset \mathfrak{C}^{p+1,q}, & \partial_2 \mathfrak{C}^{p,q} &\subset \mathfrak{C}^{p,q+1} \quad \text{pour tous } p, q \in \mathbb{N}; \\ \partial &= \partial_1 + \partial_2; & \partial_1 \partial_1 &= \partial_2 \partial_2 = \partial_1 \partial_2 + \partial_2 \partial_1 = 0. \end{aligned}$$

Le sous-complexe \mathfrak{C} de \mathfrak{B} sera dit un sous-complexe normal du carré cartésien $\Pi^2 \mathfrak{A}$.

Démonstration. — Une fonction $f(X_1, \dots, X_{p+q}) \in \mathfrak{C}^{p,q}$ pourra s'écrire, après suppression des arguments neutres, $f(x_1, \dots, x_p, y_{p+1}, \dots, y_{p+q})$. Ainsi f apparaît comme un élément de \mathfrak{A}^n ou, plus précisément, du complexe normalisé $\tilde{\mathfrak{A}}^n$ (puisque \mathfrak{B} a été pris normalisé).

La définition (2) (n° 38) de la différentielle ∂ dans \mathfrak{B} nous permet d'appliquer la proposition (8.2), et nous poserons, pour $f(X_1, \dots, X_{p+q}) \in \mathfrak{C}^{p,q}$,

$$(1) \quad \begin{cases} (\partial_1 f)(X_1, \dots, X_{p+q+1}) = \sum_{1 \leq i \leq p} (-1)^i (\partial_i f)(X_1, \dots, X_{p+q+1}), \\ (\partial_2 f)(X_1, \dots, X_{p+q+1}) = \sum_{p+1 \leq i \leq p+q} (-1)^i (\partial_i f)(X_1, \dots, X_{p+q+1}). \end{cases}$$

⁽⁴²⁾ Au sens de [2], chap. V, § 4.

La relation $\delta = \delta_1 + \delta_2$ est dès lors évidente. Une vérification immédiate montre que $\delta_1 f$ se calcule comme le cobord de $f(x_1, \dots, x_p; y_{p+1}, \dots, y_{p+q})$ considéré seulement comme fonction des p premiers arguments $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$, à ceci près que les indices des q arguments (y_j) doivent être « décalés » (en substituant y_{j+1} à y_j pour $p+1 \leq j \leq p+q$) ⁽⁴³⁾. Ce résultat établit que $\delta_1 \mathbb{C}^{p,q} \subset \mathbb{C}^{p+1,q}$ et que $\delta_1^2 = 0$. Les propriétés de δ_2 se vérifient de la même manière.

D'après le n° 38, \mathbb{B} est gradué par le bidegré-composantes

$$\mathbb{B} = \sum_{r,s \in \mathbb{N}} \mathbb{B}_{r,s},$$

où r désigne le « degré par rapport aux arguments x » et s le « degré par rapport aux arguments y ». Il est clair que \mathbb{C} est un sous-complexe homogène par rapport au bidegré composantes; \mathbb{C} est donc un module quadrigradué

$$\mathbb{C} = \sum_{p,q,r,s \in \mathbb{N}} \mathbb{C}_{r,s}^{p,q}.$$

Remarque. — Du seul fait que nous écrivons les éléments de \mathbb{B}^n sous la forme $f(x_1, y_1; \dots; x_n, y_n)$, nous ordonnons les « composantes » du carré cartésien de \mathbf{A} . Le complexe réduit normalisé \mathbb{B} contient deux sous-complexes normaux : le sous-complexe \mathbb{C} défini plus haut et le sous-complexe \mathbb{C}' défini en posant $f \in \mathbb{C}'^{p,q}$ si et seulement si $f(\in \mathbb{B}^{p+q})$ peut s'écrire, après suppression des arguments neutres, $f(y_1, \dots, y_p; x_{p+1}, \dots, x_{p+q})$.

PROPOSITION (11.2). — *L'homomorphisme canonique $H(\mathbb{C}) \rightarrow H(\mathbb{B})$ est un isomorphisme. Plus précisément, il existe un endomorphisme linéaire k de \mathbb{B} , nul sur \mathbb{C} , homogène de degré $(0, 0)$ par rapport au bidegré-composantes, et tel qu'en posant $h = (1 + \delta k + k\delta)$, on ait $h\mathbb{B} \subset \mathbb{C}$.*

Démonstration. — Le « principe de comparaison » (n° 32) nous permettra de nous ramener à l'étude de la cohomologie du produit direct de deux groupes ou monoïdes. Il nous faut d'abord rappeler, et compléter sur un point, certains résultats de [2] ⁽⁴⁴⁾.

Soit G un monoïde unitaire, noté multiplicativement, $\mathcal{G} = Z(G)$ son algèbre à coefficients entiers. Le « complexe standard » $S(G)$ de G est un \mathcal{G} -complexe (négatif), dont la composante homogène de degré $n > 0$ possède une base sur \mathcal{G}

⁽⁴³⁾ Cf. n° 17.

⁽⁴⁴⁾ Nous pourrions donner une démonstration « directe » de la proposition (11.2), en appliquant toujours le principe de comparaison. Il suffirait de « formaliser » les lemmes de normalisation de Lyndon (*Duke Mat. J.*, t. 13, 1948, p. 271-292) et de Hochschild-Serre (*Trans. Amer. Mat. Soc.*, t. 74, 1953, p. 110-134). Les calculs de ces auteurs peuvent être simplifiés (y compris dans le cas général d'une extension de groupes) par l'emploi d'homotopies convenables. Néanmoins la méthode directe nécessiterait des calculs étendus et ne conduirait pas à des formules explicites pour h et k .

constituée par les symboles $[\xi_1, \dots, \xi_n]$, où $\xi_1, \dots, \xi_n \in G$; pour le degré 0, la base est constituée par le seul symbole $[\]$. La différentielle d (de degré -1) est définie par $d[\] = 0$ et

$$(2) \quad d[\xi_1, \dots, \xi_n] = \xi_1[\xi_2, \dots, \xi_n] + \sum_{1 \leq i \leq n-1} (-1)^i [\xi_1, \dots, \xi_i \xi_{i+1}, \dots, \xi_n] + (-1)^n [\xi_1, \dots, \xi_{n-1}].$$

Le « *complexe normalisé* » $N(G)$ est défini à partir de $S(G)$ en passant au quotient, de façon à annuler tous les éléments $[\xi_1, \dots, \xi_n]$ où l'un des ξ_i est égal à l'élément neutre 1 du monoïde G .

Soient maintenant G et G' deux monoïdes unitaires, G'' leur produit direct. Un élément (ξ, ξ') de G'' sera noté $\xi \otimes \xi'$ (avec $\xi \in G, \xi' \in G'$). L'algèbre $\mathcal{G}'' = Z(G'')$ s'identifie au produit tensoriel $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}'$ des algèbres de G et de G' .

Les complexes $N(G'')$ et $N(G) \otimes N(G')$ constituent deux résolutions \mathcal{G}'' -projectives de Z sur lequel G'' opère trivialement; il existe donc des *applications de \mathcal{G}'' -complexes*:

$$\begin{aligned} \mu &: N(G) \otimes N(G') \rightarrow N(G''), \\ \nu &: N(G'') \rightarrow N(G) \otimes N(G'), \end{aligned}$$

telles que $\mu\nu$ et $\nu\mu$ soient homotopes à l'identité. Nous allons expliciter de telles applications ⁽⁴⁵⁾.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $\xi_i \in G, \xi'_i \in G' (1 \leq i \leq n)$, nous poserons

$$(3) \quad \nu[\xi_1 \otimes \xi'_1, \dots, \xi_n \otimes \xi'_n] = \sum_{0 \leq p \leq n} [\xi_1, \dots, \xi_p] \otimes \xi'_1 \dots \xi'_p [\xi'_{p+1}, \dots, \xi'_n].$$

La définition de μ est plus compliquée, et nous ferons les conventions suivantes concernant les notations. Pour tout couple d'entiers m, n , avec $m \leq n$, nous noterons $[m, n]$ l'ensemble des entiers i tels que $m \leq i \leq n$. Si J est une partie de $[m, n]$, il existe une permutation σ_J et une seule de $[m, n]$ qui « remet en ordre » J et son complémentaire; autrement dit, $i < i'$ et $i, i' \in J$ (ou $i, i' \notin J$) impliquent $\sigma_J(i) < \sigma_J(i')$, tandis que $j \in J, j' \notin J (j' \in [m, n])$ impliquent $\sigma_J(j) < \sigma_J(j')$. Nous noterons $\varepsilon(J)$ la signature de la permutation σ_J , et $|J|$ le nombre d'éléments de $J \subset [m, n]$; pour abréger, nous écrirons $J(i)$ au lieu de $\sigma_J(i)$ pour $i \in [m, n]$. Enfin nous conviendrons que, dans les formules (4), (5), (7) ci-dessous, un symbole tel que $\Xi_{J,i}$ doit être remplacé par $\xi_{J(i)} \otimes 1$ (resp. par $1 \otimes \xi'_{J(i)}$) si $i \in J$ (resp. si $i \notin J$).

Dans ces conditions, nous avons, pour $\xi_1, \dots, \xi_p \in G$ et $\xi'_{p+1}, \dots, \xi'_{p+q} \in G'$,

$$(4) \quad \mu([\xi_1, \dots, \xi_p] \otimes [\xi'_{p+1}, \dots, \xi'_{p+q}]) = \sum_{J \subset [1, p+q], |J|=p} \varepsilon(J) [\Xi_{J,1}, \dots, \Xi_{J,p+q}],$$

où la sommation est étendue à toutes les parties $J \subset [1, p+q]$ ayant p éléments.

⁽⁴⁵⁾ Cf. [2], chap. XI, § 6, form. (1) et (3). Les applications μ et ν y sont appelées respectivement f et g .

Comme nous avons pris des complexes *normalisés*, $\nu\mu$ est l'identité sur $N(G) \otimes N(G')$ et, par conséquent, $\mu\nu$ est idempotent. Nous avons, pour $\xi_1, \dots, \xi_n \in G$ et $\xi'_1, \dots, \xi'_n \in G'$,

$$(5) \quad \mu\nu[\xi_1 \otimes \xi'_1, \dots, \xi_n \otimes \xi'_n] = \sum_{J \subset [1, n]} \varepsilon(J) (1 \otimes \xi'_1 \dots \xi'_{|J|}) [\Xi_{J,1}, \dots, \Xi_{J,n}],$$

où J parcourt toutes les parties de $[1, n]$.

D'après les résultats généraux rappelés plus haut, il existe un endomorphisme \mathcal{G}'' -linéaire π de $N(G')$ tel que

$$(6) \quad \mu\nu - 1 = \pi d + d\pi$$

[1 désignant ici l'application identique de $N(G'')$].

Pour calculer explicitement π , on peut utiliser un procédé de récurrence analogue à celui de [2] (chap. XI, § 5). On trouve ainsi, pour $\xi_1, \dots, \xi_n \in G$ et $\xi'_1, \dots, \xi'_n \in G'$,

$$(7) \quad \begin{aligned} & \pi[\xi_1 \otimes \xi'_1, \dots, \xi_n \otimes \xi'_n] \\ &= \sum_{0 \leq j \leq n-1} \sum_{J \subset [j+1, n]} (-1)^j \varepsilon(J) [\xi_1 \otimes \xi'_1, \dots, \xi_j \otimes \xi'_j, 1 \otimes \xi'_{j+1} \dots \xi'_{j+|J|}, \Xi_{J,j+1}, \dots, \Xi_{J,n}], \end{aligned}$$

où la sommation est étendue, pour j donné, à toutes les parties $J \subset [j+1, n]$; comme le complexe est normalisé, on peut supposer $|J| > 0$.

Reprenons maintenant l'analyseur \mathcal{A} ; soit \mathcal{M} le module de sa représentation régulière, $(e_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ la famille des \mathcal{A} -générateurs \mathcal{A} -libres de \mathcal{M} définie au n° 7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous identifions $f \in \mathcal{B}^n$ à $f(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \in \mathcal{A}^{2n}$, que nous identifions à son tour à une fonction de $2n$ arguments dans \mathcal{M} .

Nous supposons désormais que G et G' coïncident avec le monoïde abélien libre engendré par la famille de générateurs $(g_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$. Nous définissons un homomorphisme unitaire γ du monoïde $G = G'$ dans \mathcal{M} considéré comme monoïde abélien unitaire, en posant $\gamma(g_i) = e_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, et nous faisons opérer trivialement $G'' = G \times G'$ sur \mathcal{M} . Considérons le complexe $\text{Hom}_{\mathcal{G}''}(N(G''), \mathcal{M})$ que nous noterons C ; rappelons qu'une n -cochaîne f^* de C est déterminée par les valeurs $f^*([\xi_1 \otimes \xi'_1, \dots, \xi_n \otimes \xi'_n])$ qu'elle prend sur les éléments de la \mathcal{G}'' -base de $N(G'')$. Nous désignerons respectivement par d' , h' , k' les transposés dans C de la différentielle d de $N(G'')$ et de ses endomorphismes $\mu\nu$ et π . Nous avons, par transposition de (6),

$$(8) \quad h' - 1 = d'k' + k'd',$$

et d' n'est autre que la différentielle du complexe C .

Définissons l'application $\varphi : \mathcal{B} \rightarrow C$ en posant, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(9) \quad \begin{aligned} & f(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \in \mathcal{B}^n \quad \text{et} \quad \xi_1, \dots, \xi_n, \xi'_1, \dots, \xi'_n \in G, \\ & (\varphi f)([\xi_1 \otimes \xi'_1, \dots, \xi_n \otimes \xi'_n]) = f(\gamma(\xi_1), \gamma(\xi'_1); \dots; \gamma(\xi_n), \gamma(\xi'_n)). \end{aligned}$$

L'application φ est évidemment linéaire; elle est *injective* (il suffit, pour le voir, de remplacer dans (9) ξ_i par g_i et ξ'_i par g_{n+i} pour $1 \leq i \leq n$); enfin c'est une *application de complexes*, c'est-à-dire que

$$(10) \quad \varphi \delta = d' \varphi.$$

Cette dernière relation, conséquence immédiate des définitions de δ , d' et φ , donne un sens précis à notre « principe de comparaison ».

L'image par φ du complexe \mathfrak{B} est un *sous-complexe* $\varphi \mathfrak{B}$ de C qui est *stable* pour l'endomorphisme k' et, par conséquent, aussi pour h' ⁽⁴⁶⁾; cette propriété résulte de la formule explicite (7). Nous définissons les endomorphismes k et h de \mathfrak{B} par les relations : $\varphi k f = k' \varphi f$ et $\varphi h f = h' \varphi f$ pour tout $f \in \mathfrak{B}$ (ce qui est licite puisque φ est injectif). Plus précisément, nous obtenons pour $f(X_1, \dots, X_n) = f(x_1, y_1; \dots; x_n, y_n) \in \mathfrak{B}^n$

$$(11) \quad (hf)(x_1, y_1; \dots; x_n, y_n) = \sum_{J \subset [1, n]} \varepsilon(J) f(Z_{J,1}; \dots; Z_{J,n}),$$

$$(12) \quad (kf)(x_1, y_1; \dots; x_{n-1}, y_{n-1}) = \sum_{0 \leq j \leq n-2} \sum_{J \subset [j+1, n-1]} (-1)^j \varepsilon(J) f \\ \times \left(x_1, y_1; \dots; x_j, y_j; 0, \sum_{j+1 \leq i \leq j+|J|} y_i; Z_{J,j+1}; \dots; Z_{J,n-1} \right),$$

où nous convenons de remplacer chaque symbole $Z_{J,i}$ par le couple d'« arguments » $(x_{j(i)}, 0)$ [resp. $(0, y_{j(i)})$] si $i \in J$ (resp. $i \notin J$). Dans (11) la sommation est étendue à toutes les parties J de $[1, n]$; dans (12) la sommation est étendue pour j donné, à toutes les parties de J de $[j+1, n-1]$ vérifiant $|J| > 0$.

Il résulte de (11) et (12) que $hf \in \mathfrak{C}$ pour tout $f \in \mathfrak{B}$, que $kg = 0$ pour tout $g \in \mathfrak{C}$, et que k et h sont homogènes de degré $(0, 0)$ par rapport au bidegré-composantes. Quant à la relation $h = (1 + \delta k + k \delta)$, elle résulte de (8) par restriction au sous-complexe $\varphi \mathfrak{B}$ de C ⁽⁴⁷⁾.

40. SUITE SPECTRALE DU SOUS-COMPLEXE NORMAL D'UN CARRÉ CARTÉSIEN. — La proposition (11.2) ramène le calcul du module de cohomologie $H(\mathfrak{B})$ à celui du module $H(\mathfrak{C})$, où \mathfrak{C} est un complexe double. Nous pouvons appliquer à ce dernier le procédé de Cartan-Eilenberg ([2], chap. XV, § 6), c'est-à-dire la *suite spectrale déduite de l'une ou l'autre* ⁽⁴⁸⁾ *des deux filtrations canoniques du complexe double* \mathfrak{C} .

⁽⁴⁶⁾ C'est là le point essentiel de la démonstration : les propriétés utilisées des complexes de monoïdes se transposent aux analyseurs parce que toutes les applications et les homotopies rencontrées sont génériques, c'est-à-dire ne font aucunement intervenir les structures particulières des monoïdes en question.

⁽⁴⁷⁾ La vérification directe de cette dernière relation à partir de (11) et (12) est extrêmement pénible. Sans quoi il nous aurait suffi d'écrire ces deux formules pour démontrer la proposition !

⁽⁴⁸⁾ Le choix est indifférent, ainsi qu'il résulte de l'isomorphisme des deux sous-complexes normaux exposé plus bas (n° 41).

De plus, les deux différentielles δ_1 et δ_2 de \mathfrak{C} sont homogènes de degré $(0, 0)$ par rapport au bidegré-composantes : le complexe double \mathfrak{C} est décomposé en somme directe des complexes doubles $\mathfrak{C}_{r,s}$ et $f(x_1, y_1; \dots, x_n, y_n) \in \mathfrak{C}$ appartient à $\mathfrak{C}_{r,s}$ si et seulement si f est homogène de degré total r (resp. s) par rapport aux arguments x (resp. y). Puisque \mathfrak{C} est normalisé, $\mathfrak{C}_{0,s}^{p,q}$ (resp. $\mathfrak{C}_{r,0}^{p,q}$) est nul si $p \neq 0$ (resp. $q \neq 0$); de même, $\mathfrak{C}_{r,s}^{0,q}$ (resp. $\mathfrak{C}_{r,s}^{p,0}$) est nul si $r \neq 0$ (resp. $s \neq 0$). Nous en déduisons que les complexes $\mathfrak{C}_{0,r}$ et $\mathfrak{C}_{r,0}$ s'identifient tous deux à $\tilde{\mathfrak{A}}_r$, ce qui fait apparaître dans $H(\mathfrak{B})$ deux facteurs directs isomorphes à $H(\mathfrak{A})$: ils proviennent des cochaînes qui « ne dépendent que d'une seule composante ». Les « homomorphismes de lisière » (edge homomorphisms de [2]) de la suite spectrale expriment seulement une partie de ce résultat.

Considérons maintenant le complexe double $\mathfrak{C}_{r,s}$ où $r, s > 0$ et choisissons, par exemple, la « première filtration ». Nous noterons $E_i^{p,q}$ les termes de la suite spectrale correspondante (p = degré filtrant, q = degré complémentaire, i = rang dans la suite spectrale). Nous avons $\mathfrak{C}_{r,s}^{p,q} = 0$ pour $p \leq 0$ ou $q \leq 0$. Les résultats concernant les « termes de bas degré » prennent donc ici la forme suivante :

$$(1) \quad H^0(\mathfrak{C}_{r,s}) = H^1(\mathfrak{C}_{r,s}) = 0,$$

$$(2) \quad H^2(\mathfrak{C}_{r,s}) \simeq E_2^{1,1},$$

et l'on a la suite exacte

$$(3) \quad 0 \rightarrow E_2^{2,1} \rightarrow H^3(\mathfrak{C}_{r,s}) \rightarrow E_2^{1,2} \rightarrow E_2^{3,1} \rightarrow H^4(\mathfrak{C}_{r,s}).$$

Le calcul des termes E_0, E_1, E_2 s'effectue de la manière suivante. Pour tous p, q , $E_0^{p,q}$ s'identifie à $\mathfrak{C}_{r,s}^{p,q}$, et la différentielle d_0 de E_0 à la différentielle δ_2 de \mathfrak{C} . Nous avons donc

$$(4) \quad E_1^{p,q} = {}_r H_s^q(\mathfrak{A}(x_1, \dots, x_p)),$$

où $\mathfrak{A}(x_1, \dots, x_p)$ désigne l'analyseur obtenu en adjoignant à \mathfrak{A} les « constantes » x_1, \dots, x_p , et où l'indice r dans ${}_r H_s^q$ signifie qu'on n'a considéré que les cochaînes de degré total r par rapport aux « constantes ».

La différentielle d_1 s'obtient en appliquant la différentielle δ au second membre de (4), considéré comme « fonction » de x_1, \dots, x_p . Le lecteur formulera sans peine un énoncé plus précis en transcrivant les calculs de [2]. Contentons-nous de remarquer que le terme $E_2^{1,1}$ s'identifie au module des fonctions pseudo-bilinéaires $f(x_1, y_2)$.

41. SOUS-COMPLEXES NORMAUX DES PUISSANCES CARTÉSIENNES D'ANALYSEURS; CAS GÉNÉRAL, APPLICATIONS.

DÉFINITION (41.3). — Soient \mathfrak{A} un analyseur, I un ensemble d'indices, $\mathfrak{B} = \tilde{\mathfrak{A}}^I$ le complexe réduit normalisé de la puissance cartésienne $I^I \mathfrak{A}$. Supposons, de plus, donnée sur l'ensemble I une relation d'ordre total \mathcal{R} . Nous définissons un sous-

module \mathfrak{C} de \mathfrak{B} en posant $f(X_1, \dots, X_n) \in \mathfrak{C}$ si et seulement si $f(\in \mathfrak{B}^n)$ est une somme finie de fonctions dont chacune peut s'écrire, après suppression des arguments neutres, sous la forme

$$f(x_{i_1,1}, \dots, x_{i_n,n}), \quad \text{avec } i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_n \in I.$$

Par exemple, si I est un ensemble ordonné de trois éléments, nous noterons les arguments $(x_i)_{i \in I}$ comme des triples (x, y, z) et les éléments de \mathfrak{C} s'écriront comme des sommes finies de fonctions de la forme

$$f(x_1, \dots, x_p, y_{p+1}, \dots, y_{p+q}, z_{p+q+1}, \dots, z_{p+q+r}).$$

On voit ainsi que, dans le cas général, \mathfrak{C} est muni de deux structures de module I -gradué : la première est induite par la structure de module I -gradué de \mathfrak{B} [déf. (11.2)], c'est-à-dire par le multidegré-composantes; la seconde est définie par le « multidegré-arguments » [dans l'exemple ci-dessus, f est une fonction de tri-degré-arguments $\pi = (p, q, r)$]. Le module \mathfrak{C} se décompose donc en une somme directe :

$$(1) \quad \mathfrak{C} = \sum_{\pi, p \in N^{(1)}} \mathfrak{C}_p^\pi.$$

PROPOSITION (11.3). — Avec les notations de la définition (11.3), \mathfrak{C} est un sous-complexe de \mathfrak{B} , que nous appellerons sous-complexe normal associé à la relation d'ordre \mathcal{R} . L'homomorphisme canonique $H(\mathfrak{C}) \rightarrow H(\mathfrak{B})$ est un isomorphisme. Si I est un ensemble ordonné de p éléments, \mathfrak{C} est un complexe p -uple au sens de [2].

Démonstration. — On vérifie, comme pour la proposition (11.1), que \mathfrak{C} est un sous-complexe de \mathfrak{B} . Pour démontrer que l'homomorphisme $H(\mathfrak{C}) \rightarrow H(\mathfrak{B})$ est un isomorphisme, on se ramène d'abord au cas où l'ensemble d'indices I est fini (en considérant les divers multidegrés-composantes). On peut ensuite construire explicitement une homotopie, comme dans la démonstration de la proposition (11.2), ce qui conduit à des notations et formules compliquées. Aussi est-il préférable de raisonner par récurrence sur le nombre p d'éléments de I . Pour cela, on remplace chaque « argument vectoriel » $X_i = (x_{j,i})_{1 \leq j \leq p}$ dans les fonctions $f(X_1, \dots, X_n) \in \mathfrak{B}^n$ par un couple (x_i, Y_i) , où x_i désigne l'argument $x_{1,i}$ et Y_i l'« argument vectoriel » $(x_{j,i})_{2 \leq j \leq p}$. On définit le sous-complexe double \mathfrak{B}' de \mathfrak{B} constitué par les sommes finies de fonctions qui s'écrivent (après suppression d'arguments neutres) sous la forme $f(x_1, \dots, x_q, Y_{q+1}, \dots, Y_n)$. Il suffit de modifier légèrement la démonstration de la proposition (11.2) pour démontrer que l'homomorphisme canonique $H(\mathfrak{B}') \rightarrow H(\mathfrak{B})$ est un isomorphisme en construisant explicitement une homotopie ⁽⁴⁹⁾. On a $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{B}'$; pour démontrer que l'homomorphisme $H(\mathfrak{C}) \rightarrow H(\mathfrak{B})$ est un isomorphisme, on

⁽⁴⁹⁾ Les modifications consistent en ceci : au lieu de prendre pour G et G' deux mêmes monoïdes abéliens libres engendrés par des générateurs $(g_i)_{i \in N^*}$, on prendra deux monoïdes abéliens libres G et G' engendrés respectivement par les générateurs $(g_i)_{i \in N^*}$ et $(g_{j,i})_{i \in N^*, 2 \leq j \leq p}$, et l'on modifiera en conséquence le monomorphisme φ de \mathfrak{B}' .

applique au complexe double \mathfrak{B}' et à son sous-complexe \mathfrak{C} les suites spectrales déduites de la première filtration de \mathfrak{B}' . La formule analogue à (4) (n° 40) montre alors que l'homomorphisme des termes E_1 de \mathfrak{C} et de \mathfrak{B}' est un isomorphisme, compte tenu de l'hypothèse de récurrence sur le nombre d'éléments de I . La proposition (11.3) en résulte.

Pour formuler commodément les résultats obtenus, nous poserons la

DÉFINITION (11.4). — Soient \mathfrak{A} un analyseur, $n, p \in \mathbb{N}^*$, I l'intervalle d'entiers $[1, p]$. Nous noterons $H^n(\mathfrak{A}; p)$ le sous-module du module p -gradué ⁽⁵⁰⁾

$$H^n(\mathfrak{A}^1) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^p} H_{\alpha}^n(\mathfrak{A}^1)$$

égal à la somme directe des $H_{\alpha}^n(\mathfrak{A}^1)$ pour lesquels $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ vérifie $\alpha_1 > 0, \dots, \alpha_p > 0$.

Autrement dit, $H^n(\mathfrak{A}; p)$ est le module des classes de cohomologie des n -cochaînes de \mathfrak{A}^1 qui « dépendent effectivement » de leurs p « composantes ».

THÉORÈME (11.1). — Soient \mathfrak{A} un analyseur, I un ensemble d'indices muni d'une structure d'ordre total. Alors :

a. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H^n(\mathfrak{A}^1)$ s'identifie canoniquement à la somme directe d'une famille de sous-modules ainsi définie : à tout entier p vérifiant $1 \leq p \leq n$, et à tout système $i_1 < \dots < i_p$ de p éléments de I strictement croissants correspond un facteur direct isomorphe à $H^n(\mathfrak{A}; p)$;

b. $H^n(\mathfrak{A}; p) = 0$ pour $p > n$;

c. $H^n(\mathfrak{A}; n)$ s'identifie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, au module des fonctions pseudo-n-linéaires de \mathfrak{A} ;

d. $H^3(\mathfrak{A}; 2)$ est égal à la somme directe, pour $r, s > 0$, des modules $H^3(\mathfrak{C}_{r,s})$ vérifiant la suite exacte (3) du n° 40.

Ce théorème est une conséquence immédiate de la proposition (11.3) et des résultats du n° 40. Nous n'avons pas jugé nécessaire de préciser la décomposition plus fine de $H(\mathfrak{A}^1)$ qui correspond à sa structure de module I -gradué (par rapport au I -degré-composantes).

Le théorème (11.1) détermine complètement les modules de cohomologie H^1 et H^2 d'une puissance cartésienne d'un analyseur; pour le module H^3 , nous n'obtenons dans le cas général que des résultats partiels.

Rappelons que l'identification *canonique* du théorème (11.1, a) n'est possible que si I est *donné* comme ensemble totalement ordonné. A toute structure d'ordre total sur I correspond un sous-complexe normal de \mathfrak{A}^1 , et il existe des isomorphismes canoniques entre ces différents sous-complexes normaux. Il

⁽⁵⁰⁾ Cf. n° 38, form. (4).

nous suffira d'examiner le cas où I a deux éléments [cf. la démonstration de la proposition (11.3)].

PROPOSITION (11.4). — Soient \mathcal{A} un analyseur, \mathcal{B} le complexe réduit normalisé du carré cartésien de \mathcal{A} , \mathcal{C} et \mathcal{C}' les deux sous-complexes normaux de \mathcal{B} , de telle sorte que, pour $f(x_1, y_1; \dots; x_{p+q}, y_{p+q}) \in \mathcal{B}^{p+q}$, on ait $f \in \mathcal{C}^{p,q}$ (resp. $f \in \mathcal{C}'^{p,q}$) si et seulement si les arguments x_i et y_j sont neutres dans f pour $p+1 \leq i \leq p+q$ et $1 \leq j \leq p$ (resp. pour $1 \leq i \leq q$ et $q+1 \leq j \leq p+q$). Alors l'isomorphisme (canonique) $\varepsilon : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ applique $\mathcal{C}'^{p,q}$ sur $\mathcal{C}^{q,p}$ et, si $f(y_1, \dots, y_p, x_{p+1}, \dots, x_{p+q}) \in \mathcal{C}'^{p,q}$,

$$(2) \quad \varepsilon f = (-1)^{pq} f(y_{q+1}, \dots, y_{q+p}, x_1, \dots, x_q).$$

En effet, ε est donné par la restriction à \mathcal{C}' du projecteur h de la proposition (11.2), et la formule explicite (11) (n° 39) se simplifie et conduit à (2).

42. PRODUITS EN COHOMOLOGIE. — Dans tout ce numéro, nous désignerons par \mathcal{A} un analyseur, et par \mathcal{B} le complexe réduit normalisé de son carré cartésien.

LEMME (11.1). — L'application $\pi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ qui à tout $f(x_1, y_1; \dots; x_n, y_n) \in \mathcal{B}$ associe $\pi f = f(x_1, x_1; \dots; x_n, x_n) \in \mathcal{A}$ est un homomorphisme de complexes et définit ainsi, par restriction et passage au quotient, un homomorphisme $\pi^* : H(\mathcal{B}) \rightarrow H(\mathcal{A})$.

DÉFINITION (11.5). — Soit $T(x_1, x_2) \in \mathcal{A}^2$ une fonction pseudo-bilinéaire. Pour $f(x_1, \dots, x_p) \in \mathcal{A}^p$ et $g(x_1, \dots, x_q) \in \mathcal{A}^q$, nous poserons

$$\tilde{T}(f, g) = T(f(x_1, \dots, x_p), g(y_{p+1}, \dots, y_{p+q})) \in \mathcal{B}^{p+q}.$$

LEMME (11.2). — Pour $f \in \mathcal{A}^p$ et $g \in \mathcal{A}^q$, on a

$$(1) \quad \delta \tilde{T}(f, g) = \tilde{T}(\delta f, g) + (-1)^p \tilde{T}(f, \delta g).$$

L'application \tilde{T} définit donc, par restriction et passage aux quotients, une application pseudo-bilinéaire $\tilde{T}^* : H(\mathcal{A}) \times H(\mathcal{A}) \rightarrow H(\mathcal{B})$, telle que $H^p(\mathcal{A}) \times H^q(\mathcal{A})$ soit appliqué dans $H^{p+q}(\mathcal{B})$.

DÉFINITION (11.6). — Soit $T(x_1, x_2) \in \mathcal{A}^2$ une fonction pseudo-bilinéaire. Nous définissons les applications pseudo-bilinéaires $T : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ et $T^* : H(\mathcal{A}) \times H(\mathcal{A}) \rightarrow H(\mathcal{A})$ en posant, pour $f \in \mathcal{A}^p$, $g \in \mathcal{A}^q$ et $f^* \in H^p(\mathcal{A})$, $g^* \in H^q(\mathcal{A})$

$$\begin{aligned} T(f, g) &= \pi \tilde{T}(f, g), \\ T^*(f^*, g^*) &= \pi^* \tilde{T}^*(f^*, g^*), \end{aligned}$$

où π, π^* désignent les homomorphismes du lemme (11.1).

Les démonstrations des lemmes (11.1) et (11.2) sont immédiates. Nous avons transcrit les définitions usuelles des produits en cohomologie ([2]), chap. XI).

Si $T(x_1, x_2)$ est *associatif*, c'est-à-dire vérifie la relation

$$(2) \quad T(T(x_1, x_2), x_3) = T(x_1, T(x_2, x_3)),$$

il est clair que T^* est également associatif.

La proposition suivante exprime la relation d'anticommutativité suggérée par le « principe de comparaison ».

PROPOSITION (11.5). — Soit $T(x_1, x_2)$ une fonction pseudo-bilinéaire dans l'analyseur \mathfrak{A} . Posons $T'(x_1, x_2) = T(x_2, x_1)$. Alors, pour $f^* \in H^p(\mathfrak{A})$, $g^* \in H^q(\mathfrak{A})$, on a

$$(3) \quad T^*(g^*, f^*) = (-1)^{pq} T^*(f^*, g^*).$$

Démonstration. — Soient f et g deux cocycles représentant respectivement f^* et g^* . Alors $\tilde{T}(g, f)$ et $\tilde{T}'(f, g)$ sont des représentants de $\tilde{T}^*(g^*, f^*)$ et de $\tilde{T}^*(f^*, g^*)$. Or, d'après la proposition (11.4), $\tilde{T}'(f, g) = T(g(y_{p+1}, \dots, y_{p+q}), f(x_1, \dots, x_p))$ est cohomologue à $(-1)^{pq} T(g(y_1, \dots, y_q), f(x_{q+1}, \dots, x_{q+p}))$, et l'on a évidemment

$$\pi T(g(y_1, \dots, y_q), f(x_{q+1}, \dots, x_{q+p})) = \pi T(g(x_1, \dots, x_q), f(y_{q+1}, \dots, y_{q+p})),$$

d'où la proposition.

COROLLAIRE. — Si $T(x_1, x_2) = T(x_2, x_1)$, $T^*(f^*, g^*) = (-1)^{pq} T^*(g^*, f^*)$ pour tous $f^* \in H^p \mathfrak{A}$ et $g^* \in H^q(\mathfrak{A})$.

Remarque. — Définissons l'application $\mu : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$, en posant, pour $f = f(x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{A}^n$,

$$\mu f = f(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \in \mathfrak{B}^n.$$

Alors μ est un homomorphisme de complexes et définit, par le procédé usuel, l'homomorphisme $\mu^* : H(\mathfrak{A}) \rightarrow H(\mathfrak{B})$. Nous dirons qu'une classe de cohomologie $f^* \in H(\mathfrak{A})$ représentée par le cocycle $f(x_1, \dots, x_n)$ est *primitive* si $\mu^* f^*$ est égal à la somme des classes de cohomologie de $f(x_1, \dots, x_n)$ et de $f(y_1, \dots, y_n)$, considérés tous deux comme des cocycles de \mathfrak{B} . Dans le cas de l'analyseur classique sur un corps Ω (cf. § 12), $H(\mathfrak{B})$ s'identifie à $H(\mathfrak{A}) \otimes_{\Omega} H(\mathfrak{A})$, et l'homomorphisme μ^* définit la structure d'algèbre de Hopf de $H(\mathfrak{A})$.

43. COHOMOLOGIE DE L'ANALYSEUR ANNULAIRE ET DE L'ANALYSEUR DE KUROSCHE. — Conformément aux considérations du numéro précédent, nous définissons l'algèbre de cohomologie de l'analyseur de Kurosch ou de l'analyseur annulaire sur un anneau Ω (cf. n° 21, ex. a et b), à partir de la fonction bilinéaire $x_1 x_2$ qui engendre ces analyseurs.

THÉORÈME (11.2). — L'algèbre de cohomologie de l'analyseur annulaire (resp. de l'analyseur de Kurosch) sur un anneau Ω est une Ω -algèbre associative (resp. de Kurosch) libre, non unitaire, engendrée par la classe de cohomologie du 1-cocycle x_1 .

Démonstration. — Le cas de l'analyseur de Kuroschi se ramène à celui de l'analyseur annulaire, en considérant les différentes « dispositions des parenthèses » pour les monômes d'un même degré.

Pour démontrer le théorème concernant l'analyseur annulaire \mathfrak{A} , les théorèmes (9.1), (9.2) et (10.1) montrent qu'il suffit d'établir que $H_r(\mathfrak{A}) = 0$ pour $n \neq r$. On peut raisonner par récurrence sur r ; si l'on a démontré que $H_s(\mathfrak{A}) = 0$ pour $n \neq s$ et $s < r$, le même résultat vaut pour les analyseurs construits à partir de \mathfrak{A} par adjonctions de constantes. On utilise alors la suite spectrale des nos 36 et 37. Il n'est pas nécessaire de faire d'hypothèse restrictive sur l'anneau de base Ω , pour la raison suivante : si $\tilde{\mathfrak{A}}_n^n$ est le module des fonctions n -linéaires de l'analyseur annulaire \mathfrak{A} , la représentation de l'algèbre $\Omega[\mathfrak{S}_n]$ du groupe symétrique \mathfrak{S}_n dans $\tilde{\mathfrak{A}}_n^n$ est isomorphe à la *représentation régulière* de cette algèbre. Il n'en est évidemment plus de même pour les analyseurs classiques, ce qui entraîne des résultats considérablement plus compliqués.

12. — Cohomologie des analyseurs classiques.

Dans ce paragraphe, il nous sera plus commode d'abandonner l'axiome (A7), c'est-à-dire d'admettre que les polynômes aient des *termes constants non nuls*. Nous désignerons par \mathfrak{A} l'analyseur classique à coefficients entiers rationnels

$$\mathfrak{A} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{A}^n, \quad \text{où } \mathfrak{A}^n = \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n],$$

et en particulier $\mathfrak{A}^0 = \mathbb{Z}$. Pour tout anneau commutatif unitaire Ω , $\Omega \otimes \mathfrak{A}$ désignera l'analyseur classique sur Ω (cf. n° 21). La différentielle δ annule les 0-cochaînes : $H^0(\Omega \otimes \mathfrak{A}) = \Omega$.

44. COHOMOLOGIE DE L'ANALYSEUR CLASSIQUE A COEFFICIENTS ENTIERS MODULO p . — D'après les théorèmes (9.1), (9.2) et (10.1), $H^n(\Omega \otimes \mathfrak{A})$ est toujours un *groupe de torsion* pour $n \geq 2$, quel que soit l'anneau Ω . Nous définissons la multiplication des cochaînes de $\Omega \otimes \mathfrak{A}$ et des classes de cohomologie de $H(\Omega \otimes \mathfrak{A})$ à partir de la fonction bilinéaire $x_1 x_2$ (associative et commutative) qui engendre $\Omega \otimes \mathfrak{A}$ (n° 12). Nous obtenons ainsi sur $H(\Omega \otimes \mathfrak{A})$ une structure d'*algèbre unitaire* ⁽⁵¹⁾ *graduée, associative et anticommutative*.

Soit p un nombre premier. Nous noterons F_{p^h} le corps fini à p^h éléments. Nous noterons (f_i) les 1-cochaînes de \mathfrak{A} définies par

$$(1) \quad f_i = x_i^{p^i} \quad (\text{pour } i \in \mathbb{N})$$

⁽⁵¹⁾ Parce que nous avons introduit les constantes dans $\Omega \otimes \mathfrak{A}$ (0-cochaînes).

et (g_j) les 2-cochaînes de \mathfrak{A} définies par

$$(2) \quad g_j = \frac{1}{p} ((x_1 + x_2)^{pj} - x_1^{pj} - x_2^{pj}) \quad (\text{pour } j \in \mathbb{N}^*).$$

Nous avons donc

$$(3) \quad \partial f_j = -pg_j \quad \text{pour } j \in \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \partial f_0 = 0;$$

$$(4) \quad \partial g_j = 0 \quad \text{pour } j \in \mathbb{N}^*.$$

THÉORÈME (12.1). — *L'algèbre de cohomologie $H(F_p \otimes \mathfrak{A})$ est engendrée par les générateurs définis ci-dessous, qui ne sont liés par aucune autre relation que celles résultant de l'associativité et de l'anticommutativité :*

a. Si p est impair, les générateurs libres sont les classes $(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et $(\eta_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ des images canoniques dans $F_p \otimes \mathfrak{A}$ des cochaînes (f_i) et (g_j) ;

b. Si $p = 2$, les générateurs libres sont les classes $(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ des images canoniques dans $F_2 \otimes \mathfrak{A}$ des cochaînes (f_i) .

Autrement dit, pour n impair $H(F \otimes \mathfrak{A})$ est le produit tensoriel de l'algèbre extérieure construite sur les (ξ_i) par l'algèbre symétrique construite sur les (η_j) ; pour $p = 2$, $H(F_2 \otimes \mathfrak{A})$ est l'algèbre symétrique construite sur les (ξ_i) . Toutes ces algèbres sont supposées unitaires.

Démonstration. — Pour tout $h \in \mathbb{N}^*$, nous noterons $H(F_{p^h}, F_{p^h})$ l'algèbre de cohomologie de F_{p^h} , considéré comme groupe additif, opérant trivialement sur F_{p^h} (considéré comme anneau). Nous admettrons les résultats suivants :

a. Si p est impair, $H(F_{p^h}, F_{p^h})$ s'identifie au produit tensoriel d'une algèbre extérieure construite sur des générateurs $(a_i)_{1 \leq i \leq h}$ par une algèbre symétrique construite sur des générateurs $(b_j)_{1 \leq j \leq h}$; les (a_i) sont de degré 1 et les (b_j) de degré 2;

b. Si $p = 2$, $H(F_{2^h}, F_{2^h})$ s'identifie à une algèbre symétrique construite sur des générateurs $(a_i)_{1 \leq i \leq h}$, de degré 1.

Ces résultats s'obtiennent facilement en utilisant des complexes particuliers aux groupes cycliques et à leurs produits directs (cf. [2], chap. XII, § 7). On pourrait les retrouver à l'aide des « complexes non homogènes », ce qui va nous permettre d'appliquer notre principe de comparaison.

Définissons comme suit une application

$$\varphi : H(F_p \otimes \mathfrak{A}) \rightarrow H(F_{p^h}, F_{p^h});$$

si $\zeta \in H^n(F_p \otimes \mathfrak{A})$ est représenté par la n -cochaîne

$$f(x_1, \dots, x_n) \in (F_p \otimes \mathfrak{A})^n = F_p[x_1, \dots, x_n],$$

nous considérons f comme une fonction polynôme dans $F_{p^h}[1]$, c'est-à-dire comme une n -cochaîne dans le complexe non homogène $C(F_{p^h}, F_{p^h})$, et nous

prenons sa classe de cohomologie $\varphi(\zeta) \in H(F_{p^h}, F_{p^h})$. D'après les définitions des produits, φ est un *homomorphisme d'algèbres*, à condition de restreindre à F_p le corps de base de $H(F_{p^h}, F_{p^h})$.

On sait qu'un polynôme non nul à coefficients dans F_{p^h} peut correspondre à une fonction polynôme nulle dans ce corps. On peut obvier à cet inconvénient en considérant des polynômes *h-réduits*, c'est-à-dire de degré strictement inférieur à p^h par rapport à chacune de leurs indéterminées. Un polynôme $f(x_1, \dots, x_n) \in F_{p^h}[x_1, \dots, x_n]$ est congru à un polynôme *h-réduit* et un seul modulo l'idéal $(x_1^{p^h} - x_1, \dots, x_n^{p^h} - x_n)$. Si f est *h-réduit*, ∂f l'est aussi.

Supposons p impair, et soit, pour un certain $h \in \mathbb{N}^*$,

$$\varphi : H(F_p \otimes \mathfrak{A}) \rightarrow H(F_{p^h}, F_{p^h})$$

l'homomorphisme défini plus haut. Les remarques précédentes permettent d'établir facilement que les $\frac{1}{2}h(h+3)$ éléments

$$\varphi(\xi_i)_{0 \leq i \leq h-1}, \quad \varphi(\eta_j)_{1 \leq j \leq h}, \quad \varphi(\xi_i \xi_{i'})_{0 \leq i < i' < h}$$

sont *linéairement indépendants* sur F_{p^h} [les éléments (ξ_i) et (η_j) sont ceux de l'énoncé du théorème]. Nous en déduisons qu'en posant

$$\varphi(\xi_i) = a_i \quad (0 \leq i \leq h-1) \quad \text{et} \quad \varphi(\eta_j) = b_j \quad (1 \leq j \leq h),$$

les (a_i) et les (b_j) constituent un système de *générateurs libres* de la F_{p^h} -algèbre $H(F_{p^h}, F_{p^h})$. Par conséquent, puisque h est quelconque, la famille d'éléments $(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et $(\eta_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ est *libre* dans $(F_p \otimes \mathfrak{A})$. Il reste à montrer que les (ξ_i) et les (η_j) engendrent cette algèbre. Or, soit $\zeta \in H(F_p \otimes \mathfrak{A})$ représenté par une n -cochaîne $f(x_1, \dots, x_n) \in F_p[x_1, \dots, x_n]$. Choisissons h assez grand pour que f soit *h-réduit*. Comme toute cochaîne du complexe $C(F_{p^h}, F_{p^h})$ peut être représentée par une fonction polynôme, l'algèbre $H(F_{p^h}, F_{p^h})$ s'identifie au produit tensoriel $F_{p^h} \otimes_{F_p} \varphi(H(F_p \otimes \mathfrak{A}))$. Par conséquent, $\varphi(\zeta)$ est contenu dans la *sous- F_p -algèbre* de $H(F_{p^h}, F_{p^h})$ engendrée par les $\varphi(\xi_i)_{0 \leq i \leq h-1}$ et les $\varphi(\eta_j)_{1 \leq j \leq h}$. Autrement dit, $\varphi(\zeta) = \varphi(\zeta')$, où ζ' est une somme de monomes en les (ξ_i) et les (η_j) . Nous pouvons choisir comme représentant de ζ' la cochaîne $f'(x_1, \dots, x_n)$, image canonique dans $F_p \otimes \mathfrak{A}$ de la somme des monomes correspondants en les (f_i) , (g_j) ; f' est ainsi *h-réduit*. La relation $\varphi(\zeta') = \varphi(\zeta)$ signifie qu'il existe une $(n-1)$ -cochaîne $g(x_1, \dots, x_{n-1})$, telle que l'on ait

$$f - f' \equiv \partial g \quad (\text{mod } (x_1^{p^h} - x_1, \dots, x_n^{p^h} - x_n)).$$

Or, puisque f et f' sont *h-réduits*, il suffit de prendre g *h-réduit* pour avoir $f - f' = \partial g$, ce qui prouve que ζ est dans la sous-algèbre de $H(F_p \otimes \mathfrak{A})$ engendrée par les $(\xi_i)_{0 \leq i \leq h-1}$ et les $(\eta_j)_{1 \leq j \leq h}$.

Pour $p = 2$, le théorème se démontre de la même manière.

Remarques. — *a.* Si l'on avait conservé la définition des (γ_j) pour $p=2$, il aurait fallu introduire les relations $\gamma_j = \xi_{j-1}^2$, pour $j \in \mathbb{N}^*$.

b. Les (ξ_i) et les (γ_j) sont des classes de cohomologie *primitives* de $H(F_p \otimes \mathcal{A})$ pour p impair. Cette propriété, dont la vérification est immédiate, ne résulte pas de la démonstration que nous avons donnée, car il nous était indifférent de savoir si les générateurs (b_j) de degré 2 des algèbres $H(F_{p^h}, F_{p^h})$ étaient choisis primitifs.

45. COHOMOLOGIE DES ANALYSEURS CLASSIQUES. — Désignons par π l'endomorphisme de \mathcal{A} défini par la multiplication par p . L'analyseur $F_p \otimes \mathcal{A}$ s'obtient à partir de \mathcal{A} en « réduisant les coefficients mod p », c'est-à-dire en passant au quotient, et nous avons la *suite exacte*

$$(1) \quad 0 \rightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\pi} \mathcal{A} \xrightarrow{\mu} F_p \otimes \mathcal{A} \rightarrow 0.$$

Si nous passons à la cohomologie, nous obtenons la *suite exacte* ⁽⁵²⁾ :

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} H(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\pi^*} & H(\mathcal{A}) \\ \Delta \swarrow & & \nwarrow \mu^* \\ & (HF_p \otimes \mathcal{A}) & \end{array}$$

ou, en tenant compte des degrés,

$$(3) \quad \dots \rightarrow H^n(\mathcal{A}) \xrightarrow{\pi_n^*} H^n(\mathcal{A}) \xrightarrow{\mu_n^*} H^n(F_p \otimes \mathcal{A}) \xrightarrow{\Delta_n} H^{n+1}(\mathcal{A}) \rightarrow \dots$$

L'application μ^* est un homomorphisme d'algèbres.

PROPOSITION (12.1). — *Pour tout nombre premier p , les éléments non nuls de la p -composante de $H(\mathcal{A})$ sont d'ordre p .*

Démonstration. — Il suffit de montrer que $H(\mathcal{A})$ n'a pas d'éléments d'ordre p^2 . Or si $\zeta \in H(\mathcal{A})$ est d'ordre p^2 , $\zeta' = p\zeta \in \text{Im } \pi^* \cap \text{Noy } \pi^*$ et $\zeta' \neq 0$. Réciproquement, si $\zeta' \neq 0$ appartient à $\text{Im } \pi^* \cap \text{Noy } \pi^*$, il existe ζ tel que $\zeta' = p\zeta$ et ζ est d'ordre p^2 .

D'après la suite exacte (2), la relation $\text{Im } \pi^* \cap \text{Noy } \pi^* = 0$ équivaut à

$$\text{Im } \Delta \cap \text{Noy } \mu^* = 0.$$

Posons $D = \mu^* \Delta$; D est un endomorphisme de carré nul du module $H(F_p \otimes \mathcal{A})$, et la relation $\text{Im } \Delta \cap \text{Noy } \mu^* = 0$ équivaut à $\text{Noy } D = \text{Noy } \Delta$. Or nous avons

$$(4) \quad \text{Im } D \subset \text{Noy } \Delta \subset \text{Noy } D,$$

ce qui nous conduit à calculer la cohomologie du complexe $H(F_p \otimes \mathcal{A})$ muni de la différentielle D .

⁽⁵²⁾ Il s'agit d'un couple exact au sens de Massey (*Ann. Mat.*, t. 56, 1952, p. 363-396).

Nous conserverons les notations du théorème (12.1). Supposons d'abord p impair. Soit

$$\zeta = \zeta_{i_1} \dots \zeta_{i_q} \eta_{j_1}^{n_1} \dots \eta_{j_r}^{n_r} \in H(F_p \otimes \mathfrak{A}),$$

avec $i_1 < \dots < i_q \in \mathbb{N}$, $j_1 < \dots < j_r \in \mathbb{N}^*$, $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}^*$. Pour calculer $\Delta \zeta$, il faut prendre $h \in \mathfrak{A}$ tel que ζ soit la classe de cohomologie de μh , puis calculer la classe de cohomologie de $\frac{1}{p} \delta h$. Nous pouvons prendre $h = f_{i_1} \dots f_{i_q} g_{j_1}^{n_1} \dots g_{j_r}^{n_r}$ (où les puissances sont calculées au sens de la multiplication des cochaînes), et nous obtenons [cf. (3), (4), n° 43]

$$(5) \quad D\zeta = \sum_{1 \leq k \leq q} (-1)^k \zeta_{i_1} \dots \zeta_{i_{k-1}} \eta_{i_k} \zeta_{i_{k+1}} \dots \zeta_{i_q} \eta_{j_1}^{n_1} \dots \eta_{j_r}^{n_r},$$

où nous posons $\eta_0 = 0$. La différentielle D est une antidérivation de $H(F_p \otimes \mathfrak{A})$.

Désignons par E la sous-algèbre unitaire de $H(F_p \otimes \mathfrak{A})$ engendrée par les (ξ_j) et les (η_j) pour $j \in \mathbb{N}^*$; E est un *sous-complexe*, et nous avons une décomposition en somme directe

$$(6) \quad H(F_p \otimes \mathfrak{A}) = E + \xi_0 E,$$

avec

$$(7) \quad D(\xi_0 \zeta) = \xi_0 D(\zeta) \quad \text{pour } \zeta \in E.$$

Le complexe E avec sa différentielle D donnée par (5) se rattache au « *complexe standard* » d'une algèbre de Lie abélienne de dimension dénombrable sur le corps F_p (cf. [2], chap. VIII, § 4 et chap. XIII, § 7, ainsi que le lemme (10.1) ci-dessus).

La différence entre le complexe E et le complexe standard en question est la suivante : les éléments $(\eta_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ ont ici le degré 2 au lieu du degré 0, ce qui fait que la différentielle D est de degré +1 au lieu de -1.

Cela ne change évidemment rien aux propriétés d'acyclicité du complexe E , que nous allons rappeler.

L'augmentation ε du complexe E est définie en posant $\varepsilon(1) = 1$ et $\varepsilon(\zeta) = 0$ pour tout monome $\zeta (\neq 1)$ en les (ξ_j) , (η_j) . Définissons l'homotopie s de E en posant $s(1) = 0$, et, pour

$$\zeta = \eta_{j_1}^{n_1} \zeta_{j_1}^{\alpha_1} \dots \eta_{j_q}^{n_q} \zeta_{j_q}^{\alpha_q},$$

avec

$$(8) \quad \begin{cases} j_1 < \dots < j_q \in \mathbb{N}^*, & n_k \in \mathbb{N} & \alpha_k = 0 \text{ ou } 1, & n_k + \alpha_k > 0 & (\text{pour } 1 \leq k \leq q), \\ s\zeta = 0 & \text{si } \alpha_1 = 1, \\ s\zeta = -\eta_{j_1}^{n_1-1} \zeta_{j_1} \eta_{j_2}^{n_2} \zeta_{j_2}^{\alpha_2} \dots \eta_{j_q}^{n_q} \zeta_{j_q}^{\alpha_q} & \text{si } \alpha_1 = 0. \end{cases}$$

On vérifie sans peine que $Ds + sD = 1 - \varepsilon$. Si $\zeta = \zeta_1 + \xi_0 \zeta_2 \in \text{Noy } D$, avec

$$\zeta_1, \zeta_2 \in E, \quad \zeta = Ds\zeta_1 + \xi_0 Ds\zeta_2 + \varepsilon\zeta_1 + \xi_0 \varepsilon\zeta_2, \quad \text{d'où } \zeta \in \text{Noy } \Delta$$

Soit maintenant $p = 2$. Calculons la différentielle $D = \mu^* \Delta$ du complexe $H(F_2 \otimes \mathfrak{A})$.

Pour

$$\zeta = \zeta_{i_1}^{n_1} \dots \zeta_{i_q}^{n_q} \in H(F_2 \otimes \mathfrak{A}), \quad \text{avec } i_1 < \dots < i_q \in N, \quad n_1, \dots, n_q \in N^*,$$

nous obtenons (cf. n° 44, remarque a)

$$(9) \quad D\zeta = \sum_{1 \leq k \leq q} n_k \zeta_{i_1}^{n_1} \dots \zeta_{i_{k-1}}^{n_{k-1}} \zeta_{i_k-1}^2 \zeta_{i_k-1}^{n_k-1} \zeta_{i_{k+1}}^{n_{k+1}} \dots \zeta_{i_q}^{n_q},$$

où nous posons $\zeta_{-1} = 0$.

La différentielle D est une dérivation que nous pouvons écrire

$$D = \sum_{i \in N^*} \zeta_{i-1}^2 \frac{\partial}{\partial \zeta_i}.$$

Définissons l'augmentation ε de $H(F_2 \otimes \mathfrak{A})$ en posant

$$\varepsilon(1) = 1, \quad \varepsilon(\zeta_0) = \zeta_0, \quad \varepsilon(\zeta) = 0$$

pour tout monome $\zeta (\neq 1, \zeta_0)$ en les (ζ_i) . Définissons l'homotopie s en posant $s(1) = 0$ et

$$(10) \quad \begin{cases} s \zeta_0^{n_0} \dots \zeta_{i-1}^{n_{i-1}} \zeta_i = 0 & \text{pour } n_0, \dots, n_{i-1} \in N^*, \\ s \zeta_0^{n_0} \dots \zeta_{i-1}^{n_{i-1}} \zeta_i^{n_i} = \zeta_0^{n_0} \dots \zeta_{i-1}^{n_{i-1}} \zeta_{i-2}^{n_{i-2}} \zeta_{i-1}^{n_{i-1}-2} \zeta_i^{n_i-1} & \text{pour } n_0, \dots, n_i \in N^*, n_i \geq 2. \end{cases}$$

On vérifie facilement que $Ds + sD = 1 - \varepsilon$. Si $\zeta \in \text{Noy } D$, $\zeta = Ds\zeta + \varepsilon\zeta$ et, par conséquent, $\zeta \in \text{Noy } \Delta$, ce qui achève de démontrer la proposition (12.1).

Nous noterons ${}_p H(\mathfrak{A})$ la p -composante de $H(\mathfrak{A})$. La proposition (12.1) signifie que la restriction de μ^* à ${}_p H(\mathfrak{A})$ est un *monomorphisme*. Comme $\Delta H(F_p \otimes \mathfrak{A}) \subset {}_p H(\mathfrak{A})$, le noyau de Δ , c'est-à-dire d'après (2) l'image de μ^* , coïncide avec le noyau de D.

Nous noterons $Z_r^n(H(F_p \otimes \mathfrak{A}))$ le module des n -cocycles du complexe $H(F_p \otimes \mathfrak{A})$ qui sont homogènes de degré total r lorsque l'on attribue aux générateurs ζ_i et η_i le degré p^i (pour tout $i \in N$).

Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant qui résume les résultats obtenus.

THÉOREME (12.2). — Pour tous $n \in N^*$ et $r \geq 2$, le module $H_r^n(\mathfrak{A})$ s'identifie canoniquement à la somme directe

$$\sum_{p \text{ premier}} Z_r^n(H(F_p \otimes \mathfrak{A})) \simeq H_r^n(\mathfrak{A}).$$

Pour chaque p composante, l'identification est donnée par l'homomorphisme μ^* de (2), et est donc compatible avec la structure multiplicative.

Si maintenant Ω est un anneau commutatif unitaire quelconque, $H(\Omega \otimes \mathfrak{A})$ se calcule suivant la *formule de Künneth* : on obtient canoniquement les suites

exactes qui se décomposent en sommes directes

$$(11) \quad 0 \rightarrow \Omega \otimes H_r^n(\mathfrak{A}) \rightarrow H_r^n(\Omega \otimes \mathfrak{A}) \rightarrow \text{Tor}_1(\Omega, H_r^{n+1}(\mathfrak{A})) \rightarrow 0.$$

Plus simplement, si l'on désigne par ${}_p\Omega$ la p -composante de Ω (qui est un idéal) et par Ω_p l'anneau quotient $\Omega/{}_p\Omega$ (p premier), on a la décomposition valable pour $r \geq 2$

$$(12) \quad H_r^n(\Omega \otimes \mathfrak{A}) \simeq \sum_{p \text{ premier}} (\Omega_p \otimes {}_pH_r^n(\mathfrak{A}) + {}_p\Omega \otimes {}_pH_r^{n+1}(\mathfrak{A})).$$

Dans (11) et (12), les produits tensoriels ainsi que le foncteur Tor_1 sont calculés sur l'anneau \mathbb{Z} ; dans (12) les facteurs $\Omega_p \otimes {}_pH_r^n(\mathfrak{A})$ sont obtenus *canoniquement* comme sous-groupes de $H_r^n(\Omega \otimes \mathfrak{A})$.

Les groupes $H_r^n(\mathfrak{A})$ ne s'explicitent pas d'une manière simple à partir de n et de r : ils dépendent, en effet, des décompositions de l'entier r comme *somme de puissances d'un même nombre premier*.

Aussi est-il plus naturel de se donner un nombre premier p et de chercher pour quelles valeurs de r les p -composantes ${}_pH_r^n(\mathfrak{A})$ ne sont pas nulles. Les résultats suivants sont une traduction du théorème (12.2) pour $n = 2, 3, 4$, où nous conservons les notations (f_i) , (g_i) pour les cochaînes définies à partir de p [n° 44, (1) et (2)]

$$(13) \quad {}_pH_r^2(\mathfrak{A}) = 0 \text{ si } r \text{ n'est pas une puissance entière } (> 1) \text{ de } p, \text{ si } r = p^i, i \in \mathbb{N}^*, \\ {}_pH_r^2(\mathfrak{A}) \simeq \mathbb{F}_p \text{ est engendré par la classe du cocycle } g_i;$$

$$(14) \quad {}_pH_r^3(\mathfrak{A}) = 0 \text{ si } r \text{ n'est pas somme de deux puissances distinctes de } p; \text{ si } r = p^i + p^j, \\ 0 \leq i < j, \quad {}_pH_r^3(\mathfrak{A}) \simeq \mathbb{F}_p \text{ est engendré par la classe du cocycle } f_i g_j - f_j g_i;$$

$$(15) \quad {}_pH_r^4(\mathfrak{A}) = 0 \text{ si } r \text{ n'est pas somme de deux puissances entières } (> 1) \text{ de } p, \text{ ou somme} \\ \text{de trois puissances entières distinctes; si } r = p^i + p^j, 1 \leq i \leq j, \quad {}_pH_r^4(\mathfrak{A}) \simeq \mathbb{F}_p \\ \text{est engendré par la classe du cocycle } g_i g_j; \\ \text{si } r = p^i + p^j + p^k, 0 \leq i < j < k, \quad {}_pH_r^4(\mathfrak{A}) \simeq \mathbb{F}_p \text{ est engendré par la classe du} \\ \text{cocycle } g_i f_j f_k - f_i g_j f_k + f_i f_j g_k.$$

CHAPITRE IV.

APPLICATIONS DE LA COHOMOLOGIE A L'ÉTUDE DES LOIS DE GROUPES.

Dans tout ce chapitre il ne sera question que d'analyseurs complets. Les modules de cohomologie seront définis, conformément au n° 31, pour les analyseurs incomplets associés.

13. — Obstructions.

46. OBSTRUCTIONS DES BOURGEONS. — Soit \mathfrak{A} un analyseur. Pour tout $f(x, y) \in \mathfrak{A}^2$, nous poserons

$$(1) \quad (\Gamma f)(x, y, z) = f(f(x, y), z) - f(x, f(y, z)),$$

et nous désignerons, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, par $(\Gamma_r f)(x, y, z)$ la composante homogène de degré total r de $(\Gamma f)(x, y, z)$.

DÉFINITION (13.1). — Soient \mathfrak{A} un analyseur et $f(x, y) \in \mathfrak{A}^2$. Nous dirons que f détermine un r -bourgeon ($r \in \mathbb{N}^*$) si f vérifie les conditions :

- a. $(\Gamma f)(x, y, z) \equiv 0 \pmod{\deg. (r+1)}$;
- b. $f(x, y) \equiv x + y \pmod{\deg. 2}$.

Le r -bourgeon déterminé par f est constitué par l'ensemble des fonctions congrues à $f \pmod{\deg. (r+1)}$.

Le r -bourgeon déterminé par f sera dit abélien si $f(x, y) \equiv f(y, x) \pmod{\deg. (r+1)}$.

Autrement dit, un r -bourgeon est une loi de groupe dans l'analyseur nilpotent obtenu à partir de \mathfrak{A} par passage au quotient, en annulant toutes les fonctions de degré total $> r$ [cf. déf. (3.4) et (5.1)].

On peut choisir un représentant canonique dans chaque classe de fonctions déterminant un même r -bourgeon : il suffit de prendre la fonction dont toutes les composantes homogènes de degré total $> r$ sont nulles.

DÉFINITION (13.2). — Dans un analyseur \mathfrak{A} , nous dirons qu'un r' -bourgeon prolonge un r -bourgeon si $r' \geq r$ et si toute fonction qui détermine le r' -bourgeon détermine le r -bourgeon. Nous dirons de même qu'une loi de groupe prolonge un r -bourgeon si elle le détermine.

On est conduit naturellement à la notion de bourgeon et au problème du prolongement des bourgeons lorsque l'on cherche à construire une loi de groupe en calculant successivement ses composantes homogènes pour le degré total : la somme des composantes homogènes de degré $\leq r$ doit déterminer un r -bourgeon, qu'il faut prolonger en un $(r+1)$ -bourgeon si l'on veut poursuivre la construction de la loi de groupe.

LEMME (13.1). — Soient \mathfrak{A} un analyseur, $f(x, y) \in \mathfrak{A}^2$ une fonction déterminant un r -bourgeon. Alors $(\Gamma_{r+1} f)(x, y, z)$ est un 3-cocycle.

Démonstration. — Il faut montrer que $(\delta \Gamma_{r+1} f)(x, y, z, t) = 0$. Comme

$$(\Gamma f)(x, y, z) \equiv (\Gamma_{r+1} f)(x, y, z) \pmod{\deg. (r+2)},$$

il revient au même de montrer que

$$(\delta \Gamma f)(x, y, z, t) \equiv 0 \pmod{\deg. (r+2)}.$$

D'après la définition (8.1) de δ , cette dernière relation s'écrit

$$(2) \quad (\Gamma f)(y, z, t) - (\Gamma f)(x + y, z, t) + (\Gamma f)(x, y + z, t) - (\Gamma f)(x, y, z + t) + (\Gamma f)(x, y, z) \equiv 0 \pmod{\deg. (r+2)},$$

Comme

$$f(x, y) \equiv x + y \pmod{\text{deg. } 2} \quad \text{et} \quad (\Gamma f)(x, y, z) \equiv 0 \pmod{\text{deg. } (r+2)},$$

nous pouvons remplacer (2) par la relation équivalente, d'après la proposition (3.1),

$$(3) \quad (\Gamma f)(y, z, t) - (\Gamma f)(f(x, y), z, t) + (\Gamma f)(x, f(y, z), t) - (\Gamma f)(x, y, f(z, t)) \\ + (\Gamma f)(x, y, z) \equiv 0 \pmod{\text{deg. } (r+2)}.$$

Développons le premier membre de (3) d'après la définition (1) de Γf : nous obtenons une somme de dix termes, qui se réduisent à huit après suppression de deux termes égaux à $\pm f(f(x, y), f(z, t))$. Après regroupement, le premier membre de (3) s'écrit

$$(4) \quad f(x, f(y, f(z, t))) - f(y, f(z, t)) - f(x, f(f(y, z), t)) + f(f(y, z), t) + f(f(x, f(y, z)), t) \\ - f(x, f(y, z)) - f(f(f(x, y), z), t) + f(f(x, y), z).$$

Posons $g(x, y) = f(x, y) - x - y$; (4) s'écrit alors

$$(5) \quad g(x, f(y, f(z, t))) - g(x, f(f(y, z), t)) + g(f(x, f(y, z)), t) - g(f(f(x, y), z), t).$$

Comme $g(x, y) \equiv 0 \pmod{\text{deg. } 2}$, la proposition (3.1) montre que (5), c'est-à-dire le premier membre de (3), est congru à 0 $\pmod{\text{deg. } (r+2)}$.

LEMME (13.2). — Soient \mathfrak{A} un analyseur, $f(x, y) \in \mathfrak{A}^2$ une fonction déterminant un r -bourgeon, $h(x, y) \in \mathfrak{A}_{r+1}^2$. Posons $f' = f + h$. Alors

$$(6) \quad (\Gamma_{r+1} f')(x, y, z) = (\Gamma_{r+1} f)(x, y, z) - (\partial h)(x, y, z).$$

Démonstration. — Posons, comme précédemment,

$$f(x, y) \equiv x + y + g(x, y), \quad \text{d'où} \quad g(x, y) \equiv 0 \pmod{\text{deg. } 2}.$$

Nous avons

$$f'(f'(x, y), z) = f'(x, y) + z + g(f'(x, y), z) + h(f'(x, y), z),$$

d'où, en appliquant la proposition (3.1),

$$(7) \quad f'(f'(x, y), z) \equiv f(f(x, y), z) + h(x, y) + h(x + y, z) \pmod{\text{deg. } (r+2)}.$$

On établit, de même,

$$(8) \quad f'(x, f'(y, z)) \equiv f(x, f(y, z)) + h(y, z) + h(x, y + z) \pmod{\text{deg. } (r+2)}.$$

Les relations (7) et (8) impliquent (6).

Grâce aux deux lemmes précédents, nous pouvons énoncer la

PROPOSITION (13.1). — L'ensemble des fonctions $(\Gamma_{r+1} f)(x, y, z)$, où f parcourt une classe de fonctions déterminant un même r -bourgeon dans un analyseur \mathfrak{A} , constitue une classe de cohomologie de $H_{r+1}^3(\mathfrak{A})$, que nous appellerons

l'obstruction du r -bourgeon. Pour qu'un r -bourgeon soit prolongeable en un $(r+1)$ -bourgeon, il faut et il suffit que son obstruction soit nulle.

Voici un *exemple de bourgeon ayant une obstruction non nulle*. Dans l'analyseur classique à coefficients entiers mod 2 (cf. n° 44), la fonction

$$f(x, y) = x + y + xy^2$$

détermine un 4-bourgeon, car $(\Gamma f)(x, y, z) = xy^2z^2 - xy^2z^4$, et la classe de cohomologie représentée par xy^2z^2 n'est pas nulle (avec les notations du n° 44, elle est égale à $\xi_0\xi_1^2$).

PROPOSITION (13.2). — *Soit \mathfrak{A} un analyseur. Pour qu'une fonction*

$$f(x, y) = x + y + a(x, y),$$

où $a(x, y) \in \mathfrak{A}_2^2$, détermine un 2-bourgeon, il faut et il suffit que $a(x, y)$ soit bilinéaire. Si $a(x, y)$ est bilinéaire, une condition nécessaire pour que le 2-bourgeon déterminé par f ait une obstruction nulle est que la fonction $b(x, y) = a(x, y) - a(y, x)$ soit un crochet de Lie.

Démonstration. — Nous avons, d'après le lemme (13.2),

$$(\Gamma_2 f)(x, y, z) = -(\partial a)(x, y, z)$$

d'où la première partie de la proposition. Si $a(x, y)$ est bilinéaire nous obtenons

$$(9) \quad (\Gamma f)(x, y, z) = a(a(x, y), z) - a(x, a(y, z)) = (\Gamma a)(x, y, z).$$

Pour que l'obstruction soit nulle, il est nécessaire, d'après le théorème (9.2), que l'antisymétrisé de Γa soit nul. L'antisymétrisé de Γa apparaît comme une somme de 12 fonctions, à laquelle on peut donner une forme plus simple en posant $b(x, y) = a(x, y) - a(y, x)$; l'antisymétrisé de Γa s'écrit alors

$$b(b(x, y), z) + b(b(y, z), x) + b(b(z, x), y).$$

Nous avons ainsi retrouvé la proposition (5.2) sans utiliser l'identité de P. Hall.

47. OBSTRUCTIONS DES TRANSMUTATIONS; PROBLÈMES DE PROLONGEMENT.

LEMME (13.3). — *Soient \mathfrak{A} un analyseur, $f(x, y) \in \mathfrak{A}^2$ vérifiant*

$$f(x, y) \equiv x + y \pmod{\text{deg. } 2}, \quad \varphi(x) \in G_1(\mathfrak{A}), \quad a_r(x) \in \mathfrak{A}_r^1 \quad (r \geq 2).$$

Posons

$$\varphi'(x) = \varphi(x) + a_r(x).$$

Alors

$$(1) \quad f^{z'}(x, y) \equiv f^z(x, y) - (\partial a_r)(x, y) \pmod{\text{deg. } (r+1)}.$$

Démonstration. — Nous avons, par définition (cf. nos 23, 24),

$$f^{\varphi'}(x, y) = \varphi'(f(\varphi'^{-1}(x), \varphi'^{-1}(y))) = \varphi(f(\varphi'^{-1}(x), \varphi'^{-1}(y))) + a_r(f(\varphi'^{-1}(x), \varphi'^{-1}(y))).$$

Or [cf. prop. (5.4)]

$$\varphi'^{-1}(x) \equiv \varphi^{-1}(x) - a_r(x) \quad [\text{mod. deg. } (r+1)],$$

d'où, puisque $f(x, y) \equiv x + y \pmod{\text{deg. } 2}$,

$$f(\varphi'^{-1}(x), \varphi'^{-1}(y)) \equiv f(\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y)) - a_r(x) - a_r(y) \quad [\text{mod. deg. } (r+1)],$$

et

$$(2) \quad \varphi(f(\varphi'^{-1}(x), \varphi'^{-1}(y))) \equiv f^{\varphi'}(x, y) - a_r(x) - a_r(y) \quad [\text{mod. deg. } (r+1)].$$

De même,

$$(3) \quad a_r(f(\varphi'^{-1}(x), \varphi'^{-1}(y))) \equiv a_r(x + y) \quad [\text{mod. deg. } (r+1)].$$

Les relations (2) et (3) impliquent (1).

Nous sommes maintenant en mesure de formuler les *problèmes de prolongement* des transmutations et des bourgeons.

Soient $f(x, y)$ et $g(x, y)$ deux lois de groupes dans un analyseur \mathfrak{A} . Pour démontrer que f et g sont équivalentes, il faut construire $\varphi(x) \in G(\mathfrak{A})$ tel que $f^{\varphi} = g$ [déf. (5.4)]. Si nous transmutons d'abord f par une fonction de $GL(\mathfrak{A})$, nous nous ramenons au problème de l'équivalence *restreinte*. Écrivons donc

$$(4) \quad \varphi(x) = x + \sum_{2 \leq i < \infty} a_i(x), \quad \text{où } a_i(x) \in \mathfrak{A}_i^1.$$

Cherchons à déterminer successivement les fonctions $a_i(x)$, et posons pour $r \geq 2$

$$(5) \quad \varphi_r(x) = x + \sum_{2 \leq i \leq r} a_i(x).$$

Supposons choisie la fonction φ_r ; pour que nous puissions prolonger $\varphi_r(x)$ en $\varphi(x)$ tel que $f^{\varphi} = g$, il est nécessaire que

$$(6) \quad f^{\varphi_r} \equiv g \quad \text{mod. deg. } (r+1).$$

Supposons cette condition remplie. Soit $b_{r+1}(x, y)$ la composante homogène de degré total $(r+1)$ de $g - f^{\varphi_r}$. D'après le lemme (13.2), $b_{r+1}(x, y)$ est un 2-cocycle et représente, par conséquent, une classe de cohomologie de $H_{r+1}^2(\mathfrak{A})$ que nous appellerons l'*obstruction* de φ_r (par rapport aux lois f et g).

Pour que l'on puisse trouver $a_{r+1}(x) \in \mathfrak{A}_{r+1}^1$, tel que $f^{\varphi_{r+1}} \equiv g \pmod{\text{deg. } (r+2)}$, il faut et il suffit que l'obstruction de φ_r soit nulle, d'après le lemme (13.3).

Si l'obstruction de φ_r est nulle, $a_{r+1}(x)$ est déterminé à l'addition près d'une fonction pseudo-linéaire (1-cocycle).

Le prolongement de φ_r en φ_{r+1} peut donc être impossible (si l'obstruction n'est

pas nulle) ou *indéterminé* (si l'obstruction est nulle, mais si $H_{r+1}^1(\mathfrak{A}) \neq 0$). Dans ce dernier cas, la nullité des obstructions suivantes peut dépendre du choix de $a_{r+1}(x)$.

Pour construire une loi de groupe

$$(7) \quad f(x, y) = x + y + \sum_{2 \leq i < \infty} b_i(x, y), \quad \text{où } b_i(x, y) \in \mathfrak{A}_i^2,$$

nous chercherons de même à déterminer successivement les fonctions b_i .

Posons, pour $r \geq 2$,

$$(8) \quad f_r(x, y) = x + y + \sum_{2 \leq i \leq r} b_i(x, y).$$

Chaque f_r doit déterminer un r -bourgeon; pour que le prolongement de f_r en f_{r+1} soit possible, il faut et il suffit que l'obstruction du r -bourgeon soit nulle [prop. (13.1)]. Dans ce cas, $b_{r+1}(x, y)$ est déterminé par f_r à l'addition près d'un 2-cocycle. Le problème *peut donc être de nouveau impossible ou indéterminé*. S'il est indéterminé, la nullité des obstructions suivantes peut dépendre du choix de $b_{r+1}(x, y)$, mais elle ne dépend pas de l'addition d'un 2-cobord à $b_{r+1}(x, y)$. En effet, l'addition d'un 2-cobord équivaut à une transmutation par un élément de $G_r(\mathfrak{A})$, d'après le lemme (13.3), et deux bourgeons équivalents sont évidemment tous deux prolongeables ou non prolongeables. Plus précisément, on démontre sans peine le résultat suivant :

LEMME (13.4). — Soient \mathfrak{A} un analyseur, $f(x, y) \in \mathfrak{A}^2$ déterminant un r -bourgeon, et $\varphi(x) \in G(\mathfrak{A})$. Alors f^φ détermine un r -bourgeon, et l'on a

$$(9) \quad \Gamma(f^\varphi) \equiv (\Gamma f)^\varphi \quad [\text{mod. deg. } (r+2)].$$

En particulier, si $\varphi(x) \in G_1(\mathfrak{A})$, $\Gamma_{r+1}(f^\varphi) = \Gamma_{r+1}f$.

Du point de vue de l'équivalence et du prolongement des bourgeons, le choix de $b_{r+1}(x, y)$ ne dépend pas d'un 2-cocycle mais d'une 2-classe de cohomologie.

Ainsi la cohomologie permet-elle de formuler clairement le problème du *prolongement élémentaire* des bourgeons et des transmutations, c'est-à-dire de la construction d'une composante homogène supplémentaire des fonctions cherchées. Mais, comme nous l'avons signalé dans notre introduction, l'étude *globale* du système des obstructions est beaucoup plus complexe; en particulier, ce n'est plus un problème *linéaire* (cf. [7], § 4).

14. — Applications aux analyseurs rationnels.

48. THÉOREMES GÉNÉRAUX; APPLICATIONS A LA LOI DE HAUSDORFF. — L'étude des lois de groupes et de leurs équivalences dans les analyseurs rationnels [déf. (6.2)] va résulter des considérations du paragraphe 13, et du *théorème fondamental*

sur la cohomologie des analyseurs rationnels :

THÉOREME (14.1). — Soit \mathfrak{A} un analyseur rationnel. Alors $H_r^n(\mathfrak{A}) = 0$ pour $n \neq r$; $H_n^n(\mathfrak{A})$ s'identifie au module des fonctions n -linéaires antisymétriques de \mathfrak{A} , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Ce théorème est une conséquence immédiate des théorèmes (9.1), (9.2) et (10.1).

THÉOREME (14.2). — Dans un analyseur rationnel \mathfrak{A} , tout r -bourgeon est prolongeable en une loi de groupe si $r \geq 3$. Un 2-bourgeon déterminé par $x + y + a(x, y)$, où $a(x, y) \in \mathfrak{A}_2^2$, est prolongeable en une loi de groupe si et seulement si la fonction $a(x, y) - a(y, x)$ est un crochet de Lie.

En effet, l'obstruction d'un r -bourgeon est un élément de $H_{r+1}^3(\mathfrak{A})$. Elle est donc nulle pour $r \geq 3$. Pour $r = 2$, la condition nécessaire de la proposition (13.2) est suffisante d'après le théorème (9.2).

THÉOREME (14.3). — Soient $f(x, y)$ et $g(x, y)$ deux lois de groupes dans un analyseur rationnel \mathfrak{A} . Si $f \equiv g \pmod{\deg. r}$, $r \geq 3$, il existe une fonction $\varphi(x) \in G_{r-1}(\mathfrak{A})$ et une seule telle que $f^\varphi = g$.

Posons

$$f(x, y) \equiv x + y + a(x, y) \pmod{\deg. 2}, \quad g(x, y) \equiv x + y + b(x, y) \pmod{\deg. 2},$$

où $a(x, y), b(x, y) \in \mathfrak{A}_2^2$. Pour que f et g soient équivalentes au sens restreint, il faut et il suffit que $a(x, y) - a(y, x) = b(x, y) - b(y, x)$. Pour que f et g soient équivalentes, il faut et il suffit qu'il existe $c(x) \in GL(\mathfrak{A})$ tel que

$$c(a(x, y)) - c(a(y, x)) = b(c(x), c(y)) - b(c(y), c(x)).$$

Démonstration. — La première partie du théorème résulte de ce que $H_r^2(\mathfrak{A}) = 0$ pour $r > 2$. Une transmutation de f par une fonction de $G_1(\mathfrak{A})$ permet de remplacer $a(x, y)$ par le 2-cocycle canonique qui lui est cohomologue, c'est-à-dire par son antisymétrisé $\frac{1}{2}(a(x, y) - a(y, x))$. Enfin, si a et b sont supposés antisymétriques, les lois f et g sont équivalentes si et seulement si a est transmuté en b par une fonction de $GL(\mathfrak{A})$, ce qui démontre la dernière partie du théorème.

COROLLAIRE. — Dans l'analyseur de Lie rationnel, il existe une loi de groupe et une seule prolongeant le 2-bourgeon déterminé par $x + y + \frac{1}{2}[x, y]$. Nous l'appelons la loi de Hausdorff.

Nous avons ainsi retrouvé les principaux résultats du chapitre II [th. (6.1) et (7.1)]. L'avantage de la méthode cohomologique est d'expliquer pourquoi

l'on obtient des résultats aussi simples dans le cas des analyseurs rationnels : parce que les obstructions sont nulles *a priori*.

49. LOIS UNILINÉAIRES DANS LES ANALYSEURS RATIONNELS. — Nous allons étudier dans les analyseurs rationnels des lois de groupes remarquables que nous appellerons *lois unilinéaires* à gauche (resp. à droite). Ces lois ont en commun avec les lois canoniques les deux propriétés suivantes : une loi unilinéaire est contenue dans le sous-analyseur rationnel engendré par sa composante homogène de degré 2 ; une loi unilinéaire à gauche (resp. à droite) s'obtient comme image homomorphe de la loi unilinéaire à gauche (resp. à droite) universelle, qui joue le même rôle que la loi de Hausdorff pour les lois canoniques.

DÉFINITION (14.1). — *Nous dirons qu'une loi de groupe $f(x, y)$ dans un analyseur \mathfrak{A} est unilinéaire à gauche (resp. à droite) si la fonction $f(x, y) - y$ [resp. $f(x, y) - x$] est linéaire par rapport à x (resp. y).*

Il nous suffira évidemment d'étudier les lois unilinéaires à gauche.

LEMME (14.1). — *Soient \mathfrak{A} un analyseur, $f(x, y) \in \mathfrak{A}^2$ une loi de groupe unilinéaire à gauche. Désignons par $a(x, y)$ la composante homogène de degré total 2 de $f(x, y)$. Alors $a(x, y)$ vérifie la relation*

$$(1) \quad (\Gamma a)(x, y, z) - (\Gamma a)(x, z, y) = 0.$$

Démonstration. — Soit $b(x, y)$ la composante homogène de degré 3 de f . Si nous considérons le 2-bourgeon déterminé par $x + y + a(x, y)$, nous avons [cf. lemme (13.2) et (9), n° 46]

$$(2) \quad (\Gamma a)(x, y, z) = (\partial b)(x, y, z).$$

Or $b(x, y)$ est linéaire en x par hypothèse, et

$$(3) \quad (\partial b)(x, y, z) = (\partial_2 b)(x, y, z) = b(x, y + z) - b(x, y) - b(x, z),$$

d'où évidemment (1).

DÉFINITION (14.2). — *Soit Ω un anneau commutatif unitaire. Nous appellerons Ω -algèbre de composition à gauche un Ω -module muni d'une opération bilinéaire notée $x_1 \circ x_2$ vérifiant l'identité*

$$(4) \quad (x_1 \circ x_2) \circ x_3 - x_1 \circ (x_2 \circ x_3) = (x_1 \circ x_3) \circ x_2 + x_1 \circ (x_3 \circ x_2) = 0.$$

Aux Ω -algèbres de composition à gauche correspond un analyseur que nous appellerons l'*analyseur de composition à gauche sur Ω* (cf. n° 21).

Nous définissons de même, par le procédé exposé au n° 26, l'*analyseur rationnel de composition à gauche*.

THÉORÈME (14.4). — *Soit \mathfrak{A} l'analyseur rationnel de composition à gauche, engendré par la fonction bilinéaire $x_1 \circ x_2$ vérifiant (4). Il existe dans \mathfrak{A} une loi*

de groupe unilinéaire à gauche $\Psi(x, y)$ et une seule qui prolonge le 2-bourgeon déterminé par $x + y + x \circ y$. Dans un analyseur rationnel \mathfrak{B} , toute loi de groupe unilinéaire à gauche s'obtient d'une manière et d'une seule sous la forme $\varphi\Psi(x, y)$, où φ est un homomorphisme de \mathfrak{A} dans \mathfrak{B} . Nous appellerons $\Psi(x, y)$ la loi unilinéaire à gauche universelle dans les analyseurs rationnels.

Démonstration. — Cherchons à calculer successivement les composantes $a_i(x, y)$ de $\Psi(x, y)$, de telle sorte que chaque $a_i(x, y)$ soit homogène de degré $(1, i-1)$ par rapport à (x, y) , pour $i \geq 2$; nous devons prendre $a_2(x, y) = x \circ y$. Supposons que la fonction

$$(5) \quad f_r(x, y) = x + y + \sum_{2 \leq i \leq r} a_i(x, y)$$

détermine un r -bourgeon ($r \geq 2$). Pour calculer $a_{r+1}(x, y)$ il faut résoudre l'équation

$$(6) \quad (\partial a_{r+1})(x, y, z) = (\Gamma_{r+1} f_r)(x, y, z).$$

Il est clair que $(\Gamma_{r+1} f_r)(x, y, z)$ est linéaire par rapport à x . Convenons de considérer, dans (6), x comme une *constante* (cf. n° 17) : le problème devient alors de représenter le 2-cocycle $(\Gamma_{r+1} f_r)(x, y, z)$ de l'analyseur rationnel $\mathfrak{A}(x)$ comme un 2-cobord. L'existence de $a_{r+1}(x)$ pour $r \geq 3$ et son unicité pour $r \geq 2$ résultent du théorème (14.1), ou, plus directement, du n° 35. Pour $r = 2$, c'est l'identité (4) vérifiée par $a_2(x, y)$ qui assure l'existence de $a_3(x, y)$.

Nous avons ainsi démontré l'existence et l'unicité de la loi de groupe unilinéaire à gauche $\Psi(x, y)$ dans l'analyseur \mathfrak{A} . Indiquons maintenant un procédé de calcul explicite par récurrence des composantes a_r de la loi Ψ . Désignons, pour tout $r \geq 2$, par $b_r(x, y, z)$ la composante de $(\Gamma_{r+1} f_r)(x, y, z)$ qui est homogène de degré $(1, r-1, 1)$ par rapport à (x, y, z) . D'après (6) et l'axiome (A6), nous avons

$$(7) \quad a_{r+1}(x, y) = \frac{1}{r} b_r(x, y, y).$$

Pour calculer $b_r(x, y, z)$, nous pouvons négliger dans $(\Gamma f_r)(x, y, z)$ les termes qui sont de degré ≥ 2 par rapport à z , et remplacer ainsi $(\Gamma f_r)(x, y, z)$ par

$$f_r(x, y) + z + f_r(x, y) \circ z - f_r(x, y + z + y \circ z).$$

Nous obtenons, d'après la « formule de Taylor » (n° 11),

$$(8) \quad b_r(x, y, z) = a_r(x, y) \circ z - \mathfrak{D}_{y \rightarrow [r-2]y + [1]y \circ z} a_r(x, y),$$

où nous convenons de considérer x comme une constante (c'est-à-dire que nous omettons les signes « $x \rightarrow [1]x$ » au bas de l'opérateur \mathfrak{D}).

D'après (7), nous avons donc

$$(9) \quad a_{r+1}(x, y) = \frac{1}{r} \left(a_r(x, y) \circ y - \sum_{y \geq 1} \mathbf{D}_{r-2, 1, y+1, 1} a_r(x, y) \right).$$

Pour $r = 2$, cette formule donne

$$a_3(x, y) = \frac{1}{2} ((x \circ y) \circ y - x \circ (y \circ y));$$

pour $r = 3$, nous obtenons après simplification

$$a_4(x, y) = \frac{1}{6} (((x \circ y) \circ y) \circ y - 3(x \circ (y \circ y)) \circ y + 2x \circ ((y \circ y) \circ y)).$$

Remarquons que nous n'avons pas besoin de supposer l'analyseur \mathfrak{A} rationnel; il suffisait d'imposer la condition un peu plus faible: chaque groupe additif \mathfrak{A}_r^n est un \mathbf{Q}_{r-1} -module.

Achevons la démonstration du théorème (14.4). Soit $f(x, y)$ une loi de groupe unilinéaire à gauche dans un analyseur rationnel \mathfrak{B} , et $c(x, y)$ sa composante bilinéaire. La fonction c vérifie l'identité (4), d'après le lemme (14.1); il existe donc un homomorphisme φ et un seul de \mathfrak{A} dans \mathfrak{B} tel que $\varphi a_2 = c$.

Posons $f' = \varphi \Psi$; nous avons $f = f'$. Sinon, en effet, nous aurions

$$f(x, y) \equiv f'(x, y) + d_r(x, y) \quad [\text{mod. deg. } (r+1)],$$

où $d_r(x, y)$ serait un 2-cocycle non nul, homogène de degré 1 par rapport à x et de degré $(r-1)$ par rapport à y ($r \geq 3$). Or cela est impossible puisque le 2-cocycle d_r devrait être un 2-cobord, et, par conséquent, symétrique en x et y . Le théorème est donc démontré. Remarquons que la formule de récurrence (9) s'applique encore au calcul des composantes de la loi $f(x, y)$ dans l'analyseur \mathfrak{B} .

Exemples. — a. Soit \mathfrak{B} un analyseur rationnel. Désignons par \mathbf{M} le sous-module de \mathfrak{B}^1 constitué par les fonctions $\varphi(x)$ dont la composante homogène de degré 1 est nulle, et munissons \mathbf{M} de sa topologie canonique (n° 13). Nous pouvons mettre \mathbf{M} en correspondance biunivoque avec le groupe $G_1(\mathfrak{B})$, en associant à $\varphi(x) \in \mathbf{M}$ la fonction $x + \varphi(x) \in G_1(\mathfrak{B})$. Notons par le signe \star l'opération de groupe de \mathbf{M} qui correspond ainsi à celle de $G_1(\mathfrak{B})$

$$(10) \quad (\varphi \star \psi)(x) = \psi(x) + \varphi(x + \psi(x)) \quad \text{pour tous } \varphi, \psi \in \mathbf{M}.$$

Il est clair que $\varphi \star \psi - \psi$ est une fonction *linéaire* de φ . De plus, la fonction $\varphi \star \psi$ du couple (φ, ψ) se décompose en *composantes homogènes* données par la « formule de Taylor » (n° 11)

$$(11) \quad \varphi \star \psi = \varphi + \psi + \sum_{2 \leq i < \infty} A_i(\varphi, \psi),$$



où nous posons

$$(12) \quad (A_i(\varphi, \psi))(x) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mathfrak{D}_{x > 1/1x + 1i-11\psi(x)} \varphi(x) \quad \text{pour } \varphi, \psi \in M, i \geq 2.$$

Si l'on munit M de l'opération bilinéaire $A_2(\varphi, \psi)$, M devient une *algèbre de composition à gauche* (sur Z). L'hypothèse que \mathfrak{B} est *rationnel*, et la *topologie* de M permettent de considérer M comme un \mathfrak{A} -module au sens du n° 15, où nous désignons toujours par \mathfrak{A} l'analyseur rationnel de composition à gauche.

L'opération de groupe \star de M peut alors être définie à partir de la loi de groupe unilinéaire à gauche universelle $\Psi(x, y) \in \mathfrak{A}^2$ (cf. n° 22).

Ces affirmations peuvent être vérifiées directement, en utilisant la relation (9). On peut aussi montrer qu'une structure de « groupe analytique » (cf. [5]) unilinéaire à gauche sur un module topologique M peut être définie à partir de la loi de groupe unilinéaire à gauche universelle, si l'on impose certaines conditions concernant la multiplication des éléments de M par des nombres rationnels.

b. Nous pouvons appliquer, en particulier, les considérations précédentes à l'analyseur classique rationnel. Les formules se simplifient parce que les opérateurs de Sanov sont remplacés par des opérateurs de dérivation du calcul différentiel classique. Nos résultats peuvent être présentés comme suit.

Dans l'analyseur de Ritt rationnel (cf. n° 21, ex. e), on vérifie immédiatement que la fonction bilinéaire $x'_1 x_2$ satisfait à la relation (4). Il existe donc dans cet analyseur une loi de groupe unilinéaire à gauche $f(x, y)$ et une seule qui prolonge le 2-bourgeon déterminé par $x + y + x'y$. La formule (9) conduit très simplement à l'expression explicite de $f(x, y)$:

$$(13) \quad f(x, y) = y + \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{i!} x'^i y^i,$$

où nous utilisons des notations usuelles du calcul différentiel. La formule (13) n'est autre que la formule de Taylor classique [cf. (10)].

Remarquons que l'homomorphisme φ de l'analyseur rationnel de composition à gauche dans l'analyseur de Ritt rationnel [défini par $\varphi(x_1 \circ x_2) = x'_1 x_2$] n'est pas un monomorphisme. En effet, $x_1 \circ (x_2 \circ x_1) \neq x_2 \circ (x_1 \circ x_1)$, mais

$$\varphi(x_1 \circ (x_2 \circ x_1)) = (x_2 \circ (x_1 \circ x_1)) = x'_1 x_1 x'_2.$$

Nous avons vu plus haut (ex. a) un exemple d'algèbre de composition topologique sur laquelle la loi unilinéaire définit une structure de groupe. Nous montrerons que la loi unilinéaire permet aussi de construire des *germes de groupes topologiques*, comme la loi de Hausdorff. Pour cela, nous introduirons une notion générale de « norme » qui précise ce qu'il faut entendre par une

majoration d'une loi de groupe. Nous nous bornerons à étudier le cas du corps de base réel.

Soit \mathfrak{K} l'analyseur de Kurosch sur le corps \mathbb{R} des nombres réels (n° 21, ex. a) t. Pour tout $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, une fonction $f_\alpha(x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{K}_\alpha^n$ s'écrit univoquement comme une combinaison linéaire à coefficients réels des k_α « monomes » de degré α ⁽³³⁾; nous appellerons *norme* de $f_\alpha(x_1, \dots, x_n)$ et noterons $\|f_\alpha\|(x_1, \dots, x_n)$ le monome $S(f_\alpha) x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$, où $S(f_\alpha)$ est la *somme des valeurs absolues des coefficients des k_α monomes dans le développement de f_α* . Soient $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{K}^n$ et, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $f_\alpha(x_1, \dots, x_n)$ sa composante homogène de degré α . Nous appellerons *norme* de f et noterons $\|f\|(x_1, \dots, x_n)$, ou plus simplement $\|f\|$, la *série formelle à coefficients réels positifs*

$$(14) \quad \|f\|(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \|f_\alpha\|(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}[[x_1, \dots, x_n]].$$

Nous ordonnons l'ensemble des séries formelles à coefficients réels en posant

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \leq \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} b_\alpha x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$$

si et seulement si $a_\alpha \leq b_\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

On vérifie alors les propriétés suivantes de la norme dans \mathfrak{K} :

$$(15) \quad \|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\| \quad \text{pour } \lambda \in \mathbb{R}, f \in \mathfrak{K}^n,$$

$$(16) \quad \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| \quad \text{pour } f, g \in \mathfrak{K}^n.$$

Si $f(x_1, \dots, x_m) \in \mathfrak{K}^m$ et $g_i(x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{K}^n$ pour $1 \leq i \leq m$, alors

$$(17) \quad \|f(g_1, \dots, g_m)\| \leq \|f\|(\|g_1\|, \dots, \|g_m\|).$$

Si $f \in \mathfrak{K}^n$ et si \mathfrak{D} est le signe d'un opérateur de Sanov simple [déf. (2.4)], alors, en considérant l'opérateur \mathfrak{D} correspondant dans l'analyseur classique sur \mathbb{R}

$$(18) \quad \|\mathfrak{D}f\| \leq \mathfrak{D}\|f\|.$$

Soit maintenant \mathfrak{A} un analyseur sur \mathbb{R} engendré par une fonction bilinéaire donnée. Nous pouvons considérer l'épimorphisme correspondant φ de \mathfrak{K} sur \mathfrak{A} . Nous définissons la norme $\|f\|$ d'un élément f de \mathfrak{A}^n en posant

$$(19) \quad \|f\| = \inf \|g\|,$$

où la borne inférieure est calculée sur l'ensemble des $g \in \mathfrak{K}^n$ tels que $\varphi(g) = f$.

⁽³³⁾ Les monomes de \mathfrak{K}^n sont définis par récurrence sur leur degré : les x_i sont des monomes ($1 \leq i \leq n$), et le produit de deux monomes est un monome. L'entier k_α est donné par la formule

$$k_\alpha = (2|\alpha| - 2)! / \alpha_1! \dots \alpha_n! (|\alpha| - 1)!.$$

Les relations (15) à (18) sont encore vérifiées dans \mathfrak{A} . Remarquons cependant que, dans \mathfrak{A} , $\|fg\| = \|f\| \cdot \|g\|$, alors que cette égalité doit être remplacée par une inégalité [cas particulier de (17)] dans un analyseur $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{A}$.

PROPOSITION (14.1). — *La norme de la loi de groupe unilinéaire à gauche $\Psi(x, y)$ prolongeant le 2-bourgeon déterminé par $x + y + x \circ y$ dans l'analyseur de composition à gauche sur R vérifie l'inégalité*

$$(20) \quad \|\Psi(x, y)\| \leq \|y\| + \sum_{n \in \mathbb{N}} \|x\|^n \|y\|^n.$$

Il suffit, en effet, de majorer par récurrence les composantes homogènes de Ψ , en utilisant la relation (9).

COROLLAIRE. — *Soit M une algèbre de composition à gauche sur R normée et complète (c'est-à-dire que M est un espace de Banach vérifiant la condition $\|\xi \circ \eta\| \leq \|\xi\| \cdot \|\eta\|$ pour $\xi, \eta \in M$). Alors la loi de groupe unilinéaire à gauche $\Psi(x, y)$ définit dans M une série $\Psi(\xi, \eta)$ absolument convergente pour $\xi, \eta \in M$ et $\|\eta\| < 1$. Un voisinage convenable de 0 dans M est ainsi transformé en un germe de groupe topologique.*

D'après la proposition précédente, la transformation $\xi \rightarrow (\Psi(\xi, \eta) - \xi - \eta)$ est, pour $\|\eta\| < 1$, un endomorphisme linéaire continu de M , dont la norme est majorée par $\|\eta\|(1 - \|\eta\|)^{-1}$. Si $\|\xi\| < \frac{1}{2}$, il existe donc un élément η et un seul dans M tel que $\Psi(\eta, \xi) = 0$, et l'on a $\|\eta\| \leq \|\xi\|(1 - \|\xi\|)(1 - 2\|\xi\|)^{-1}$. On peut ainsi calculer les « produits » et les « inverses » des éléments de norme assez petite, et vérifier les axiomes d'un germe de groupe topologique.

En particulier, si M est une algèbre de composition à gauche de dimension finie sur R , la loi unilinéaire permet d'y définir un *germe de groupe de Lie*. A deux algèbres de composition non isomorphes peuvent correspondre deux germes de groupes de Lie isomorphes : par exemple, pour la dimension 1, il suffit de prendre $\xi \circ \eta = 0$ (resp. $\xi \circ \eta = \xi\eta$). Je ne sais pas donner de caractérisation complète des germes de groupes de Lie qu'on peut définir de cette manière.

Remarque. — La majoration de la loi de Hausdorff $\Phi(x, y)$ démontrée par Dynkin [3] peut s'écrire :

$$\|\Phi(x, y)\| \leq \int_0^1 \text{Log}(2 - e^{t(x+y)})^{-1} \frac{dt}{t}.$$

15. — Applications aux lois de groupes de Lie formels.

50. OBSTRUCTIONS; LOIS ET BOURGEONS UNIVERSELS. — Rappelons [déf. 7.2)] qu'une loi de groupe de Lie formel à q paramètres et à coefficients dans

l'anneau Ω est une loi de groupe dans l'analyseur $\Pi^q(\Omega \otimes_Z \mathfrak{A}) = \Omega \otimes_Z \Pi^q \mathfrak{A}$, où \mathfrak{A} désigne l'analyseur classique sur Z .

Les problèmes de prolongement des bourgeons et des transmutations peuvent conduire à des obstructions non nulles, et la connaissance des groupes de cohomologie est tout à fait insuffisante pour édifier une théorie des lois de groupes de Lie formels.

La détermination de la cohomologie de $\Pi^q(\Omega \otimes \mathfrak{A})$ ne présente aucune difficulté de principe. En effet, un *sous-complexe normal* du complexe réduit normalisé de la puissance cartésienne $\Pi^q(\Omega \otimes \mathfrak{A})$ [cf. prop. (11.3)] s'identifie au *produit tensoriel, sur l'anneau Ω , de q complexes isomorphes au complexe normalisé de $\Omega \otimes \mathfrak{A}$* (auquel il faut adjoindre une unité). D'après la formule de Künneth, les groupes de cohomologie de $\Pi^q(\Omega \otimes \mathfrak{A})$ peuvent être calculés complètement à partir de ceux de \mathfrak{A} , que nous connaissons [th. (12.2)].

Pour déterminer les obstructions éventuelles des bourgeons ou des transmutations, il est commode d'utiliser le théorème (11.1). Les calculs du n° 45 [cf. (13), (14), (15)] conduisent au résultat suivant :

PROPOSITION (15.1). — *Quel que soit l'anneau Ω et l'entier q , $H_r^2(\Omega \otimes \Pi^q \mathfrak{A}) = 0$ si r n'est pas une puissance entière d'un nombre premier ou une somme de deux puissances entières même d'un nombre premier; $H_r^3(\Omega \otimes \Pi^q \mathfrak{A}) = 0$ si r n'est pas une somme de deux ou de trois puissances entières d'un même nombre premier.*

Si nous laissons de côté le cas des analyseurs rationnels, qui entre dans le cadre de la théorie classique de Lie, il est naturel de prendre pour anneau de base Ω un anneau de caractéristique p (nombre premier). Il est même parfois nécessaire de supposer que Ω est un corps de caractéristique p algébriquement clos (cf. [7], § 4). Cependant nous démontrerons au numéro suivant des résultats valables pour les lois et bourgeons abéliens sur un anneau de base quelconque.

Nous omettrons parfois de spécifier que les lois de groupes et les bourgeons sont considérés dans une puissance cartésienne finie d'un analyseur classique.

Une fonction $F(X_1, \dots, X_n)$ dans l'analyseur $\Pi^q(\Omega \otimes \mathfrak{A})$ s'identifie à une famille de q séries formelles sans termes constants en nq indéterminées et à coefficients dans Ω . Ces coefficients seront appelés simplement *coefficients de la fonction F* .

Il nous sera commode d'identifier un r -bourgeon à la fonction qui le détermine et dont les composantes homogènes de degré $> r$ sont nulles. Nous pourrons ainsi parler sans ambiguïté des coefficients d'un r -bourgeon.

Si Ω et Ω' sont deux anneaux commutatifs unitaires et $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega'$ un homomorphisme unitaire, nous désignerons par φ^* l'homomorphisme associé de $\Pi^q(\Omega \otimes \mathfrak{A})$ dans $\Pi^q(\Omega' \otimes \mathfrak{A})$; l'image $\varphi^* F$ d'une fonction F s'obtient en transformant par φ chacun de ses coefficients.

DÉFINITION (15.1). — Une loi universelle de groupe de Lie formel à q paramètres est constituée par la donnée d'un anneau commutatif unitaire A et d'une loi $F(x, y)$ à q paramètres et à coefficients dans A , possédant la propriété suivante : pour tout anneau Ω et toute loi $f(x, y)$ à q paramètres et à coefficients dans Ω , il existe un homomorphisme φ et un seul de A dans Ω tel que $f = \varphi^*F$. Nous définissons par la propriété analogue correspondante les r -bourgeons universels, ainsi que les lois de groupes abéliennes universelles et les bourgeons abéliens universels.

Avant de démontrer l'existence des lois et bourgeons universels, tirons quelques conséquences immédiates de leur définition.

Si nous avons deux lois universelles à q paramètres : F sur l'anneau A et F' sur l'anneau A' , il existe un couple d'isomorphismes réciproques φ, ψ et un seul (resp. de A sur A' et de A' sur A) tel que $F' = \varphi^*F$ et $F = \psi^*F'$.

L'anneau de base A d'une loi universelle F est engendré par les coefficients de F .

Les mêmes résultats valent pour les bourgeons universels et pour les lois ou bourgeons abéliens universels.

Démontrons, par exemple, l'existence d'un r -bourgeon abélien universel à q paramètres. Soit, dans l'analyseur $\Pi^r(\Omega \otimes \mathfrak{A})$, une fonction $F(x, y)$ dont les composantes homogènes de degré $> r$ sont nulles. Les coefficients de F sont au nombre de $n = q \left(\binom{r+2q}{2q} - 1 \right)$. Pour que F soit un r -bourgeon abélien, il faut et il suffit que ses n coefficients annulent une famille de polynomes $(P_i)_{i \in I}$, qu'on obtient en écrivant que les conditions de la définition (13.1) sont satisfaites. Prenons l'anneau de polynomes A_0 en n indéterminées sur l'anneau \mathbb{Z} ; soit $F_0(x, y) \in \Pi^r(A_0 \otimes \mathfrak{A})$ la fonction dont les n coefficients sont précisément les indéterminées de l'anneau A_0 ; formons le quotient A de A_0 par l'idéal engendré par les $(P_i)_{i \in I}$, et soit φ l'épimorphisme canonique de A_0 sur A . Il est clair que $\varphi^*F_0 = F$ est un r -bourgeon abélien universel à q paramètres et à coefficients dans A .

Autrement dit, nous pouvons considérer que les r -bourgeons abéliens à q paramètres constituent une « variété algébrique » sur l'anneau \mathbb{Z} . Un bourgeon universel n'est autre qu'un « point générique » de cette variété.

Ces considérations s'étendent aux lois de groupes. Elles ne présentent d'intérêt que dans la mesure où l'on sait élucider la structure des lois et bourgeons universels. Nous ne savons démontrer de résultats valables que dans le cas abélien.

51. LOIS ET BOURGEONS ABÉLIENS UNIVERSELS. — Nous allons étendre aux lois de groupes et aux bourgeons abéliens à plusieurs paramètres les résultats de [7], § 2. Le lemme suivant remplacera le lemme 3 de [7].

LEMME (15.1). — Soient \mathfrak{A} l'analyseur classique sur Z , q un entier ≥ 1 . Pour tout anneau commutatif unitaire Ω , convenons de noter $S_r(q, \Omega)$ le Ω -module constitué par les 2-cocycles $G(X_1, X_2)$ dans l'analyseur $\Omega \otimes \Pi^q \mathfrak{A}$ qui sont homogènes de degré total r et symétriques par rapport à X_1 et X_2 . Alors :

- a. $S_r(q, Z)$ est un groupe abélien libre de rang $q \binom{r+q-1}{q-1}$ pour tout $r \geq 2$;
- b. $S_r(q, \Omega) = \Omega \otimes S_r(q, Z)$ pour tout $r \geq 2$ et tout anneau Ω .

Démonstration. — Notons \mathfrak{B} (resp. $\Omega \otimes \mathfrak{B}$) le complexe réduit (n° 38) de la puissance cartésienne $\Pi^q \mathfrak{A}$ (resp. $\Omega \otimes \Pi^q \mathfrak{A}$). Si nous considérons les q composantes $(g_i(X_1, X_2))_{1 \leq i \leq q}$ d'un 2-cocycle $G(X_1, X_2)$ dans $\Omega \otimes \Pi^q \mathfrak{A}$, nous voyons qu'il faut démontrer l'énoncé équivalent à celui du lemme pour les 2-cocycles symétriques dans les complexes réduits \mathfrak{B} (resp. $\Omega \otimes \mathfrak{B}$). Conformément aux conventions du paragraphe 11, nous remplacerons un « argument vectoriel » X_i par une famille d'arguments $(x_{1,i}, \dots, x_{q,i})$.

Considérons donc un 2-cocycle

$$g(X_1, X_2) = g(x_{1,1}, \dots, x_{q,1}, x_{1,2}, \dots, x_{q,2}) \in (\Omega \otimes \mathfrak{B})_r^2$$

symétrique par rapport à X_1 et X_2 . D'après la proposition (11.3), g est cohomologue à un 2-cocycle g' contenu dans le sous-complexe normal de $\Omega \otimes \mathfrak{B}$. Comme tout 2-cobord est symétrique, g' est encore symétrique. D'après la définition du complexe normal, g' est égal à

$$(1) \quad g'(x_{1,1}, \dots, x_{q,1}, x_{1,2}, \dots, x_{q,2}) = \sum_{1 \leq i \leq q} h_i(x_{i,1}, x_{i,2}) + \sum_{1 \leq i < j \leq q} h_{i,j}(x_{i,1}, x_{j,2}).$$

Puisque g' est symétrique, toutes les fonctions $h_{i,j}$ ($1 \leq i < j \leq q$) sont nulles. Quant aux fonctions $h_i(x_{i,1}, x_{i,2})$, elles s'identifient aux 2-cocycles symétriques $h_i(x_1, x_2)$ dans l'analyseur $\Omega \otimes \mathfrak{A}$.

Supposons d'abord $\Omega = Z$. Alors tout 2-cocycle de \mathfrak{A}_r^2 est symétrique et est égal à un cobord, ou à un cobord divisé par p si r est une puissance entière du nombre premier p [n° 45, (13)]. Par conséquent, tout 2-cocycle symétrique dans \mathfrak{B}_r^2 est égal à un cobord ∂k ($k \in \mathfrak{B}_r^1$) ou, si $r = p^i$, à la somme d'un cobord ∂k et d'un cobord divisé $\frac{1}{p} \partial k'$, où

$$k' = \sum_{1 \leq i \leq q} n_i x'_{i,1} \quad (n_i \in Z).$$

Or \mathfrak{B}_r^1 est un groupe abélien libre de rang $\binom{r+q-1}{q-1}$ et n'a pas de 1-cocycles non nuls, ce qui établit la première partie du lemme.

Pour achever la démonstration, remarquons que nous nous sommes déjà ramenés à l'étude des 2-cocycles h_i de (1), c'est-à-dire au cas où $q = 1$. Si nous appliquons les formules (12), (13) et (14) du n° 45, nous voyons que tout

2-cocycle de degré r dans $\Omega \otimes \mathfrak{A}$ peut s'écrire sous la forme

$$(2) \quad \lambda f(x_1, x_2) + \sum_p \lambda_p x_1^{p^i} x_2^{p^j};$$

dans cette formule, $f(x_1, x_2)$ est un 2-cocycle de \mathfrak{A}_r^* , p parcourt l'ensemble des nombres premiers tels que $r = p^i + p^j$ ($0 \leq i < j$), $\lambda, \lambda_p \in \Omega$, $p\lambda_p = 0$. Pour que le cocycle (2) soit symétrique, il faut et il suffit que tous les λ_p soient nuls, ce qui établit la seconde partie du lemme.

Pour simplifier nos énoncés qui feront intervenir des « ensembles d'indices » compliqués, nous poserons la définition suivante.

DEFINITION (15.2). — *Choisissons une base dans chacun des groupes abéliens libres $S_r(q, \mathbb{Z})$. Les éléments de la base de $S_r(q, \mathbb{Z})$ seront notés $g_i(x, y)$, avec $i \in I_{q,r}$. L'ensemble d'indices $I_{q,r}$ a $q \binom{r+q-1}{q-1}$ éléments. Les différents ensembles d'indices $I_{q,r}$ seront considérés comme disjoints, et nous poserons*

$$J_q = \bigcup_{2 \leq r < \infty} I_{q,r}, \quad J_{q,r} = \bigcup_{2 \leq s \leq r} I_{q,s}.$$

L'ensemble J_q est infini dénombrable; les sous-ensembles $(I_{q,r})_{2 \leq r < \infty}$ de J_q en constituent une partition. Le nombre d'éléments de l'ensemble $J_{q,r}$ est égal à $q \left(\binom{r+q}{q} - q - 1 \right)$.

LEMME (15.2). — *Soit Ω un anneau commutatif unitaire sans torsion. Alors tout r -bourgeon abélien à q paramètres et à coefficients dans Ω peut être prolongé en un $(r+1)$ -bourgeon abélien à coefficients dans Ω .*

Démonstration. — Soit $f_r(x, y) \in \Pi^q(\Omega \otimes \mathfrak{A})$ un r -bourgeon abélien. Puisque Ω est sans torsion, nous pouvons identifier Ω à un sous-anneau de $\Omega' = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega$, et identifier ainsi f_r à un r -bourgeon abélien à coefficients dans Ω' .

D'après le théorème (14.3), le r -bourgeon abélien $f_r(x, y)$ est équivalent, dans l'analyseur $\Pi^q(\Omega' \otimes \mathfrak{A})$, à $x + y$; il s'agit d'une équivalence au sens des r -bourgeons, c'est-à-dire [mod deg $(r+1)$]. Le r -bourgeon $f_r(x, y)$ est donc prolongeable en un $(r+1)$ -bourgeon abélien $f'(x, y)$ à coefficients dans Ω' .

Soit $a'_{r+1}(x, y)$ la composante homogène de degré $(r+1)$ de $f'(x, y)$; $a'_{r+1}(x, y)$ est symétrique en x et y et vérifie la relation

$$(3) \quad (\partial a'_{r+1})(x, y, z) = (\Gamma_{r+1} f_r)(x, y, z).$$

D'après la définition de Ω' , il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $na'_{r+1}(x, y)$ ait ses coefficients dans Ω . Désignons par Ω'' l'anneau quotient $\Omega/n\Omega$, par φ l'épimorphisme canonique de Ω sur Ω'' , et par $a''_{r+1}(x, y)$ la fonction $\varphi^*(na'_{r+1}(x, y))$ à coefficients dans Ω'' . D'après (3), $a''_{r+1}(x, y)$ est un 2-cocycle à coefficients dans Ω'' , symétrique en x et y . Autrement dit, $a''_{r+1}(x, y) \in S_{r+1}(q, \Omega'')$.

Nous avons donc, d'après le lemme (15.1),

$$(4) \quad a'_{r+1}(x, y) = \sum_{i \in I_{q,r+1}} \lambda''_i g_i(x, y), \quad \text{avec } \lambda''_i \in \Omega'' \text{ pour } i \in I_{q,r+1}.$$

Choisissons des éléments λ_i dans Ω , tels que $\varphi(\lambda_i) = \lambda''_i$ pour tout $i \in I_{q,r+1}$. Nous avons, d'après (4),

$$(5) \quad \varphi^* \left(na'_{r+1}(x, y) - \sum_{i \in I_{q,r+1}} \lambda_i g_i(x, y) \right) = 0.$$

Autrement dit la fonction

$$(6) \quad a_{r+1}(x, y) = a'_{r+1}(x, y) - \frac{1}{n} \sum_{i \in I_{q,r+1}} \lambda_i g_i(x, y)$$

a ses coefficients dans Ω . Comme $g_i(x, y) \in S_{r+1}(q, Z)$, $a_{r+1}(x, y)$ est symétrique en x et y , et

$$(\partial a_{r+1})(x, y, z) = (\partial a'_{r+1})(x, y, z).$$

Il résulte de (3) que $f_{r+1}(x, y) = f_r(x, y) + a_{r+1}(x, y)$ est un $(r+1)$ -bourgeon abélien à coefficients dans Ω .

THÉORÈME (15.1). — Soit $F(x, y)$ une loi de groupe abélienne universelle à q paramètres et A son anneau de base. Alors on peut choisir une famille $(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A tels que :

a. A s'identifie à l'anneau des polynômes $Z[(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}]$;

b. Si l'on désigne par A_r le sous-anneau de A engendré par les coefficients de la somme $F_r(x, y)$ des composantes homogènes de $F(x, y)$ de degré $\leq r$, A_r s'identifie à $Z[(\xi_i)_{i \in I_{q,r}}]$, et $F_r(x, y)$ est un r -bourgeon abélien universel sur l'anneau A_r (pour tout $r \geq 2$).

Démonstration. — Il suffit évidemment de démontrer le théorème pour une loi de groupe universelle que nous allons construire.

Formons l'anneau $A = Z[(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}]$, et désignons, pour tout $r \geq 2$, par A_r le sous-anneau $Z[(\xi_i)_{i \in I_{q,r}}]$.

Prenons

$$F_2(x, y) = x + y + \sum_{i \in I_{q,2}} \xi_i g_i(x, y);$$

F_2 est un 2-bourgeon abélien à coefficients dans A_2 .

Supposons déjà construit le r -bourgeon abélien $F_r(x, y)$ à q paramètres et à coefficients dans A_r ($r \geq 2$). Puisque A_r est sans torsion, nous pouvons, d'après le lemme (15.2), choisir un $(r+1)$ -bourgeon abélien $F'_{r+1}(x, y)$ à coefficients

dans A_r qui prolonge $F_r(x, y)$. Posons

$$(7) \quad F_{r+1}(x, y) = F'_{r+1}(x, y) + \sum_{i \in I_{q, r+1}} \xi_i g_i(x, y).$$

Nous obtenons un $(r+1)$ -bourgeon abélien F_{r+1} à coefficients dans A_{r+1} qui prolonge F_r .

Poursuivant notre construction par des choix successifs, nous obtenons la loi de groupe $F(x, y)$ qui prolonge tous les bourgeons $F_r(x, y)$.

Soit $f(x, y)$ une loi de groupe (resp. un r -bourgeon) à q paramètres et à coefficients dans un anneau Ω . Montrons que pour tout s (resp. $s \leq r$) il existe un homomorphisme $\varphi_s : A_s \rightarrow \Omega$ et un seul tel que

$$(8) \quad \varphi_s^* F_s(x, y) \equiv f(x, y) \quad [\text{mod. deg. } (s+1)].$$

Nous procéderons par récurrence sur s ; supposons vérifiée la relation (8), et $s < r$ si f est un r -bourgeon. Alors $\varphi_s^* F'_{s+1}(x, y)$ est un $(s+1)$ -bourgeon abélien à coefficients dans Ω qui prolonge $\varphi_s^* F_s(x, y)$. Nous avons donc, d'après le lemme (15.1),

$$(9) \quad f(x, y) \equiv \varphi_s^* F'_{s+1}(x, y) + \sum_{i \in I_{q, s+1}} \lambda_i g_i(x, y) \quad [\text{mod. deg. } (s+2)],$$

où les $\lambda_i \in \Omega$ sont *univoquement déterminés*. L'homomorphisme $\varphi_{s+1} : A_{s+1} \rightarrow \Omega$ doit coïncider avec φ_s sur A_s et vérifier $\varphi_{s+1}(\xi_i) = \lambda_i$ pour tout $i \in I_{q, s+1}$, ce qui le détermine univoquement. Si f est une loi de groupe, il existe un homomorphisme $\varphi : A \rightarrow \Omega$ et un seul tel que $\varphi^* F = f$, car φ doit prolonger tous les homomorphismes φ_s ; si f est un r -bourgeon, il existe un homomorphisme $\varphi_r : A_r \rightarrow \Omega$ et un seul tel que $\varphi_r^* F_r = f$.

Remarquons que, si l'on donne la loi universelle $F(x, y)$ et son anneau de base A , les éléments (ξ_i) doivent être effectivement choisis. On peut caractériser aisément le *groupe d'automorphismes* de A qui correspond aux divers choix possibles.

Nous pouvons interpréter le théorème (15.1) de la manière suivante : toute loi de groupe (resp. r -bourgeon) $f(x, y)$ à q paramètres et à coefficients dans un anneau Ω peut être mise en correspondance avec une famille $(\lambda_i)_{i \in I_q}$ [resp. $(\lambda_i)_{i \in I_{q, r}}$] d'éléments de Ω que nous appellerons ses *coordonnées*. Les coordonnées (λ_i) de $f(x, y)$ sont des fonctions polynomes (à coefficients dans \mathbb{Z}) des coefficients de $f(x, y)$, et les coefficients de $f(x, y)$ sont des fonctions polynomes (à coefficients dans \mathbb{Z}) de ses coordonnées (λ_i) . Les polynomes à coefficients entiers en question sont *indépendants* de l'anneau Ω et de la fonction $f(x, y)$. Les coordonnées d'une loi de groupe (resp. d'un r -bourgeon) peuvent être choisies arbitrairement dans un anneau Ω . Autrement dit, la « *variété algébrique sur \mathbb{Z}* » des lois de groupes (resp. des r -bourgeons) à q

paramètres est un « *espace affine* » de dimension infinie dénombrable [resp. de dimension $q \left(\binom{r+q}{q} - q - 1 \right)$].

Les considérations précédentes ne s'étendent pas sans modifications aux lois de groupes et aux bourgeons dans des puissances cartésiennes *infinies* d'analyseurs classiques. En effet, nous ne pouvons plus définir de lois de groupes ni de bourgeons universels (de même que nous ne pouvons pas parler de « point générique » dans un espace affine de dimension infinie où tout point ne peut avoir qu'un nombre fini de coordonnées non nulles).

Cependant, la méthode que nous avons suivie permet encore d'introduire des « *coordonnées* » pour les lois de groupes et les bourgeons à « une infinité de paramètres ». Un certain sous-ensemble de ces coordonnées doit être nul; à cela près, les coordonnées peuvent être choisies arbitrairement dans l'anneau de base considéré. Nous laissons au lecteur le soin de préciser ce point, mais nous énoncerons pour les puissances cartésiennes quelconques d'analyseurs classiques les deux conséquences suivantes du théorème (15.1).

THÉOREME (15.2). — Soit $f(x, y)$ un r -bourgeon abélien dans une puissance cartésienne $\Pi(\Omega \otimes \mathfrak{A})$ d'un analyseur classique. Alors, quels que soient l'entier r , l'ensemble I et l'anneau de base Ω , $f(x, y)$ peut être prolongé en une loi de groupe abélienne

Dans le cas où I est un ensemble fini, cet énoncé équivaut au suivant : une loi de groupe abélienne universelle à q paramètres détermine, pour tout r , un r -bourgeon abélien universel.

THÉOREME (15.3). — Soient Ω, Ω' deux anneaux commutatifs unitaires, φ un épimorphisme de Ω sur Ω' , $f'(x, y)$ une loi de groupe abélienne dans une puissance cartésienne $\Pi(\Omega' \otimes \mathfrak{A})$ de l'analyseur classique sur Ω' . Alors on peut choisir une loi de groupe abélienne $f(x, y)$ dans l'analyseur $\Pi(\Omega \otimes \mathfrak{A})$, telle que $\varphi^* f = f'$.

Autrement dit, on peut « remonter » les coefficients et les coordonnées de la loi f' dans l'anneau Ω . Ce résultat explique une partie de l'algorithme de Witt [10]; toute loi abélienne de groupe de Lie formel à coefficients entiers mod p s'obtient en réduisant (mod p) les coefficients d'une loi abélienne à coefficients entiers; cette dernière peut toujours être transmutée en $x + y$ par une fonction à coefficients rationnels.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] N. BOURBAKI, *Algèbre*, chap. IV.
 - [2] H. CARTAN et S. EILENBERG, *Homological Algebra* (Princeton)
 - [3] E. B. DYNKIN, *Algèbres de Lie normées et groupes analytiques* (*Uspekhi Mat. Nauk*, t. 3, 1950, p. 134-186).
 - [4] F. HAUSDORFF, *Die symbolische Exponentialformel in der Gruppentheorie* (*Ber. Sächs. Ges.*, t. 58, 1906, p. 19-48).
 - [5] M. LAZARD, *Sur les groupes analytiques dans les modules filtrés* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 235, 1952, p. 1465-1467).
 - [6] M. LAZARD, *Sur les groupes nilpotents et les anneaux de Lie* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, t. 71, 1954, p. 101-190).
 - [7] M. LAZARD, *Sur les groupes de Lie formels à un paramètre* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 83, 1955, p. 251-274).
 - [8] W. MAGNUS, *A connection between the Baker-Hausdorff formula and a problem of Burnside* (*Ann. Math.*, t. 52, 1950, p. 111-126).
 - [9] I. N. SANOV, *Sur une liaison entre des groupes périodiques dont la période est un nombre premier et des anneaux de Lie* (*Izv. Akad. Nauk S. S. S. R.*, ser. Math., t. 16, 1952, p. 23-58).
 - [10] E. WITT, *Zyklische Körper und Algebren der Charakteristik p vom Grad p^n* (*J. Reine Angew. Math.*, t. 176, 1937, p. 126-140).
- 