

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

R. FORTET

E. MOURIER

Convergence de la répartition empirique vers la répartition théorique

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 70, n° 3 (1953), p. 267-285

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1953_3_70_3_267_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1953, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONVERGENCE

DE LA RÉPARTITION EMPIRIQUE

VERS LA RÉPARTITION THÉORIQUE

PAR M. R. FORTET ET M^{lle} E. MOURIER.

1. *Position du problème.* — Soit \mathcal{X} un espace quelconque de points x ; \mathcal{B} un corps borélien de sous-ensembles e de \mathcal{X} , contenant \mathcal{X} lui-même; $P(e)$ une mesure sur \mathcal{B} , c'est-à-dire une fonction d'ensemble, définie et complètement additive sur \mathcal{B} , positive ou nulle, avec $P(\mathcal{X}) = 1$. Nous considérons une suite indéfinie d'éléments aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_j, \dots$ prenant leurs valeurs dans \mathcal{X} , admettant tous $P(e)$ comme loi de probabilité (*cf.* A. Blanc-Lapierre et R. Fortet [1], p. 71) ⁽¹⁾.

Soit $\varphi(e; x)$ la caractéristique de l'ensemble e [$\varphi(e; x) = 1$ si $x \in e$; $\varphi(e; x) = 0$ si $x \notin e$]; posons

$$(1.1) \quad P_n(e) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \varphi(e; X_j);$$

$P_n(e)$ est une mesure aléatoire; lorsque la suite $\{X_j\}$ est d'un type convenable, par exemple : suite d'éléments indépendants, en chaîne strictement stationnaire, etc., l'étude de la convergence stochastique de $P_n(e)$ vers $P(e)$ pour $n \rightarrow +\infty$ peut être considérée comme un des problèmes fondamentaux du Calcul des Probabilités; dans le cas où \mathcal{X} est la droite réelle ce problème est, au moins partiellement, résolu par le classique théorème de Glivenko-Cantelli (*cf.* § 6); le but de ce travail est d'étudier le comportement asymptotique de $P_n(e)$ sous des hypothèses beaucoup plus générales.

⁽¹⁾ Les numéros entre crochets, comme [1], renvoient à la bibliographie, p. 285.

Méthode. — Cette étude repose sur les idées suivantes : pour tout $x \in \mathcal{X}$, $\varphi(e; x)$ est, en e , une mesure définie sur \mathcal{B} ; toute combinaison linéaire d'un nombre fini de $\varphi(e; x)$ de la forme

$$\sum_{j=1}^n a_j \varphi(e; x_j),$$

où $x_1, \dots, x_j, \dots, x_n$ sont n points distincts ou non de \mathcal{X} et $a_1, \dots, a_j, \dots, a_n$ n nombres quelconques, est, en e , une fonction d'ensemble bornée, définie et complètement additive sur \mathcal{B} : soit \mathcal{E} l'ensemble de ces fonctions d'ensemble; \mathcal{E} est un espace vectoriel, réel ou complexe suivant que les a_j sont pris réels ou complexes; soit \mathcal{E}' un espace vectoriel arbitraire, tel toutefois que \mathcal{E} soit sous-espace vectoriel de \mathcal{E}' .

Les $\varphi(e; X_j)$ sont alors des éléments aléatoires prenant leurs valeurs dans l'espace vectoriel \mathcal{E}' , et d'ailleurs de même loi de probabilité, mutuellement indépendants si les X_j le sont entre eux, en chaîne strictement stationnaire si les X_j sont en chaîne strictement stationnaire, etc. (1.1) fait apparaître $P_n(e)$ comme la moyenne arithmétique des $\varphi(e; X_j)$ pour $j=1, 2, \dots, n$; l'étude du comportement asymptotique de $P_n(e)$ est donc une étude de lois des grands nombres pour des éléments aléatoires prenant leurs valeurs dans un espace vectoriel \mathcal{E}' .

Or les seules lois des grands nombres concernant un espace vectoriel \mathcal{E}' , à la fois générales et précises actuellement connues, qui ont été données par E. Mourier [1], supposent que \mathcal{E}' est un *espace de Banach séparable*. Il sera donc pour nous nécessaire, mais aussi suffisant, de construire une extension \mathcal{E}' de \mathcal{E} qui soit un espace de Banach séparable, pour, par simple application des résultats de E. Mourier [1], résoudre le problème posé.

Remarques. — *a.* Il est clair que dans la définition de \mathcal{E} , et par suite de \mathcal{E}' , on peut faire abstraction des $\varphi(e; x)$ dont le x appartient à un ensemble ω donné, arbitraire, tel que $P(\omega) = 0$.

b. Si $\lambda(e)$ est une fonction d'ensemble définie et complètement additive sur \mathcal{B} , d'ailleurs quelconque, on peut évidemment construire \mathcal{E} , et par suite \mathcal{E}' , à partir des fonctions d'ensemble $\varphi(e; x) - \lambda(e)$, au lieu des $\varphi(e; x)$; naturellement les résultats concerneront $P_n(e) - \lambda(e)$ au lieu de $P_n(e)$ elle-même.

Résultats. — La construction d'un \mathcal{E}' qui soit un espace de Banach séparable peut être obtenue dans de nombreux cas, et de diverses façons selon les hypothèses faites sur \mathcal{X} et sur $P(e)$, et selon l'application envisagée.

Dans tout ce qui suit nous supposons que :

α . \mathcal{X} est distancié et séparable;

β . Les sphères de \mathcal{X} font partie de \mathcal{B} .

(x', x'') désignera la distance de deux points quelconques x' et x'' de \mathcal{X} .

Notons qu'un moyen d'assurer que \mathcal{E}' est un espace de Banach est de le construire comme dual (fort) d'un espace de Banach de fonctions numériques de point définies sur \mathcal{X} : ce procédé sera suivi dans la section I ; dans la section II nous donnerons un exemple de construction directe de \mathcal{E}' .

SECTION I.

2. DÉFINITION ET ÉTUDE DE L'ESPACE \mathcal{F} . — Soit \mathcal{F} l'espace des fonctions numériques réelles $f(x)$ définies sur \mathcal{X} et telles que :

$$\text{b. s.}_{x', x'' \in \mathcal{X}} \frac{|f(x') - f(x'')|}{(x', x'')} < +\infty.$$

On posera

$$(2.1) \quad M[f] = \text{b. s.}_{x', x'' \in \mathcal{X}} \frac{|f(x') - f(x'')|}{(x', x'')},$$

\mathcal{F} est évidemment un espace vectoriel réel ; en prenant comme norme $\|f\|$ de $f \in \mathcal{F}$ le nombre $M[f]$ défini par (2.1), \mathcal{F} est un espace de Banach.

En effet :

1° $M[f]$ est une norme, car :

$$(2.2) \quad \begin{cases} \alpha. & M[f] \geq 0; \\ \beta. & M[f_1 + f_2] \leq M[f_1] + M[f_2], \quad (f_1 \text{ et } f_2 \in \mathcal{F}); \\ \gamma. & M[\lambda f] = |\lambda| M[f], \quad (f \in \mathcal{F}), \quad \lambda \text{ scalaire quelconque.} \end{cases}$$

Mais observons que $M[f] = 0$ signifie non que f est identiquement nulle, mais seulement que f est constante ; nous devons donc considérer deux fonctions différant d'une constante comme identiques en tant qu'éléments de \mathcal{F} ; toute fonction constante est l'élément nul θ de \mathcal{F} .

2° On vérifie aisément que \mathcal{F} est complet ; soit $\{f_n\}$ une suite d'éléments de \mathcal{F} , telle que $M[f_{n+m} - f_n] \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$, uniformément en m ; nous pouvons, x_0 désignant un point fixe arbitraire de \mathcal{X} , supposer $f_n(x_0) = 0$ pour tout n ; on a

$$|f_{n+m}(x) - f_n(x)| = |[f_{n+m}(x) - f_n(x)] - [f_{n+m}(x_0) - f_n(x_0)]| \leq M[f_{n+m} - f_n](x_0, x).$$

$|f_{n+m}(x) - f_n(x)|$ tend donc vers zéro, uniformément en m ; donc $f_n(x)$ tend vers une limite, soit $l(x)$; montrons que $l \in \mathcal{F}$, c'est-à-dire que :

$$\text{b. s.}_{x', x'' \in \mathcal{X}} \frac{|l(x') - l(x'')|}{(x', x'')} < +\infty ;$$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{|l(x') - l(x'')|}{(x', x'')} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|f_n(x') - f_n(x'')|}{(x', x'')} ; \\ \frac{|f_n(x') - f_n(x'')|}{(x', x'')} &\leq M[f_n]. \end{aligned}$$

Or $M[f_n]$ est bornée; on le voit en remarquant que si l'on prend n_0 assez grand pour que $M[f_n - f_{n_0}]$ soit inférieure à un nombre arbitraire A pour tout $n > n_0$, on a d'après (2.2) :

$$M[f_n] \leq M[f_n - f_{n_0}] + M[f_{n_0}] \leq A + M[f_{n_0}].$$

On remarque que la fonction $f(x) = (x_0, x)$, où x_0 est un point fixe arbitraire de \mathcal{X} , appartient à \mathcal{F} avec $\|(x_0, x)\| = 1$.

Une construction de \mathcal{E}' à partir de \mathcal{F} . — Soit \mathcal{F}^* l'espace de Banach défini comme étant le dual de \mathcal{F} . Remarquons que toute fonction d'ensemble $\psi(e)$ du type :

$$(2.3) \quad \psi(e) = \varphi(e; x') - \varphi(e; x''),$$

où x' et x'' sont deux points quelconques de \mathcal{X} , constitue une fonctionnelle linéaire continue f^* sur \mathcal{F} par la formule ⁽²⁾ :

$$(2.4) \quad \langle f^*, f \rangle = \int_{\mathcal{X}} f(x) d\psi(e) = f(x') - f(x''),$$

on voit que

$$\|f^*\| = \text{b. s.}_{f \in \mathcal{F}} \frac{|\langle f^*, f \rangle|}{M[f]} \leq \frac{M[f](x', x'')}{M[f]} = (x', x'');$$

d'ailleurs on a plus précisément :

$$(2.5) \quad \|f^*\| = (x', x'')$$

comme on le vérifie en considérant la fonction $f(x) = (x, x'')$.

Soit $\{y_n\}$ une suite dénombrable de points de \mathcal{X} , dense dans \mathcal{X} : une telle suite existe puisque \mathcal{X} est séparable. Soit \mathcal{F}_1^* l'ensemble des fonctions d'ensemble du type :

$$\psi(e) = \varphi(e; y_j) - \varphi(e; y_k),$$

où y_j et y_k sont deux points quelconques de la suite $\{y_n\}$. \mathcal{F}_1^* est dénombrable et $\mathcal{F}_1^* \subset \mathcal{F}^*$.

Soit maintenant \mathcal{E}' , le plus petit sous-espace vectoriel fermé de \mathcal{F}^* qui contient \mathcal{F}_1^* : \mathcal{E}' est un sous-espace de Banach *séparable* puisque \mathcal{F}_1^* est dénombrable.

Soit $P(e)$ une loi de probabilité sur $[\mathcal{X}; \mathcal{B}]$, telle que :

$$(2.6) \quad \int_{\mathcal{X}} (x_0, x) dP(e) < +\infty,$$

où x_0 est un point fixe quelconque de \mathcal{X} ; la propriété (2.6), évidemment indé-

⁽²⁾ Étant donné un élément a d'un espace de Banach \mathcal{A} et un élément a^* du dual \mathcal{A}^* de \mathcal{A} , nous désignons par $\langle a^*, a \rangle$ le nombre obtenu en appliquant à a la fonctionnelle linéaire a^* .

pendante de x_0 , entraîne d'après (2.1) que toute fonction $f(x) \in \mathcal{F}$ est absolument sommable-P. Soit \mathcal{E} l'ensemble des fonctions d'ensemble du type :

$$(2.7) \quad \varphi_0(e; z) = \varphi(e; z) - P(e),$$

où z est un point fixe quelconque de \mathcal{X} (cf. § 1, Remarque b).

Nous allons montrer que :

$$(2.8) \quad \mathcal{E} \subset \mathcal{E}'.$$

1° Soit $\{z_h\}$ ($h = 1, 2, \dots$) une suite dénombrable arbitraire de points z_h , de \mathcal{X} appartenant à la suite $\{y_n\}$; à z_h attribuons une masse $m_h \geq 0$, avec :

$$(2.9) \quad \sum_h m_h = 1, \quad \sum_{a'} (x_0, z_h) m_h < +\infty$$

et soit $\mu(e)$ la mesure correspondant à cette répartition de masses; la fonction d'ensemble

$$\gamma(e) = \varphi(e; z) - \mu(e),$$

en tant que définissant une fonctionnelle linéaire f^* sur \mathcal{F} par la formule :

$$\langle f'', f \rangle = \int_{\mathcal{X}} f(x) d\gamma(e)$$

est un élément de \mathcal{E}' ; d'abord f^* est une fonctionnelle linéaire continue d'après (2.9), on voit même que :

$$(2.10) \quad \|f^*\| \leq (x_0, z) + \sum_h (x_0, z_h) m_h,$$

quel que soit $x_0 \in \mathcal{X}$.

Supposons pour commencer que z est un point de la suite $\{y_n\}$; posons :

$$\psi_h(e) = m_h [\varphi(e; z) - \varphi(e; z_h)],$$

$\psi_h(e)$ est un élément de \mathcal{E}' ; donc :

$$\Psi_n(e) = \sum_{h=1}^n \psi_h(e)$$

aussi; or $\gamma(e)$ est limite forte dans \mathcal{F}^* de $\Psi_n(e)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$; en effet $\gamma(e) - \Psi_n(e)$ est une mesure du même type que $\gamma(e)$, la fonctionnelle linéaire f_n^* qu'elle définit satisfait d'après (2.10) à :

$$\|f_n^*\| \leq \left(1 - \sum_{h=1}^n m_h\right) (x_0, z) + \sum_{h>n} (x_0, z_h) m_h,$$

visiblement $\|f_n^*\| \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Donc $\gamma(e)$ est bien un élément de \mathcal{E}' . Étendons ce résultat au cas où z est un point quelconque; soit k tel que :

$$(z, y_k) < \varepsilon.$$

On peut écrire :

$$\gamma(e) = [\varphi(e; y_k) - \mu(e)] + [\varphi(e; z) - \varphi(e; y_k)];$$

$[\varphi(e; y_k) - \mu(e)]$ est un élément de \mathcal{E}' d'après ce qui précède; $[\varphi(e; z) - \varphi(e; y_k)]$ est un élément de \mathcal{T}^* , dont la norme est inférieure à ε d'après (2.5); comme ε peut être pris arbitraire, $\gamma(e)$ est bien un élément de \mathcal{E}' .

2° En choisissant convenablement la suite $\{z_h\}$ et les masses m_h , la fonctionnelle linéaire définie par $\varphi_0(e; z) - \gamma(e)$ a une norme arbitrairement petite.

Soit $\Sigma_h(\rho)$ la sphère (ouverte pour fixer les idées) de centre y_h et de rayon $\rho > 0$; \mathcal{X} est la réunion des $\Sigma_h(\rho)$, quel que soit ρ d'ailleurs; posons :

$$\begin{aligned} S_1(\rho) &= \Sigma_1(\rho), \\ S_2(\rho) &= \Sigma_2(\rho) \cap S_1(\rho), \\ &\dots\dots\dots, \\ S_{h+1}(\rho) &= \Sigma_{h+1}(\rho) - \Sigma_{h+1}(\rho) \cap \bigcup_{j=1}^h S_j(\rho). \end{aligned}$$

Les ensembles $S_h(\rho)$ sont disjoints et leur somme est \mathcal{X} , ils sont mesurables- \mathcal{B} .

Prenons $z_h = y_h$, $m_h = P[S_h(e)]$; $\mu(e)$ et $\gamma(e)$ ayant les valeurs correspondantes, on a :

$$\varphi_0(e; z) - \gamma(e) = \mu(e) - P(e)$$

qui définit une fonctionnelle linéaire f^* par la formule :

$$\begin{aligned} \langle f^*, f \rangle &= \int_{\mathcal{X}} f(x) d[\mu(e) - P(e)] = \int_{\mathcal{X}} f(x) d\mu(e) - \int_{\mathcal{X}} f(x) dP(e) \\ &= \int_{\mathcal{X}} f(x) d\mu(e) - \sum_h \int_{S_h(\rho)} f(x) dP(e). \end{aligned}$$

Sur $S_h(\rho)$, on a

$$f(x) = f(z_h) + u_h(x),$$

avec

$$|u_h(x)| \leq M[f](z_h, x) \leq M[f]\rho.$$

D'où

$$\langle f^*, f \rangle = \int_{\mathcal{X}} f(x) d\mu(e) - \sum_h f(z_h) m_h - \sum_h \int_{S_h(\rho)} u_h(x) dP(e).$$

Or

$$\begin{aligned} \sum_h f(z_h) m_h &= \int_{\mathcal{X}} f(x) d\mu(e), \\ \left| \sum_h \int_{S_h(\rho)} u_h(x) dP(e) \right| &\leq M[f]\rho. \end{aligned}$$

Donc

$$\|f^*\| \leq \rho$$

et comme ρ est arbitraire, le résultat annoncé est établi.

On en conclut que $\varphi_0(e; z)$ est un élément de \mathcal{E}' , c'est-à-dire que (2.8) est exact.

Remarquons que la norme de $\varphi_0(e; z)$ comme élément de \mathcal{E}' (ou de \mathcal{F}^*) est au plus égale à :

$$(2.11) \quad \int_{\mathcal{X}} (z, x) dP(e).$$

3. CONVERGENCE STOCHASTIQUE DE $P_n(e)$. — Soit $\{X_j\}$ une suite d'éléments aléatoires prenant leurs valeurs dans \mathcal{X} , mutuellement indépendants, et obéissant tous à la même loi de probabilité $P(e)$ ci-dessus, satisfaisant donc à (2.6), quelconque par ailleurs; $P_n(e)$ étant définie par (1.1),

$$P_n(e) - P(e) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n [\varphi(e; X_j) - P(e)] = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \varphi_0(e; X_j);$$

$\varphi_0(e; X_j)$ est un élément aléatoire, que nous désignerons par Φ_j , prenant ses valeurs dans l'espace de Banach séparable \mathcal{E}' construit au paragraphe 2; les Φ_j sont mutuellement indépendants et de même loi de probabilité; la moyenne arithmétique $P_n(e) - P(e)$ des Φ_j est aussi un élément de \mathcal{E}' ; nous désignerons par

$$\|\varphi_0(e; x)\|, \quad \|\varphi_0(e; X_j)\|, \quad \|P_n(e) - P(e)\|, \quad \dots$$

les normes de $\varphi_0(e; x)$, $\varphi_0(e; X_j)$, $P_n(e) - P(e)$, ... comme éléments de \mathcal{E}' . En vertu d'un théorème de E. Mourier (cf. E. Mourier [1]), on a :

THÉORÈME 1. — *Presque-sûrement* $\|P_n(e) - P(e)\|$ tend vers zéro lorsque $n \rightarrow \infty$.

Le théorème de E. Mourier suppose toutefois que :

a. φ^* désignant une fonctionnelle linéaire continue quelconque sur \mathcal{E}' si on l'applique à $\varphi_0(e; x)$ considéré comme élément de \mathcal{E}' , le nombre obtenu $\langle \varphi^*, \varphi_0(e; x) \rangle$ est une fonction du point x de \mathcal{X} : il faut que cette fonction de point soit mesurable-P.

b. Parce que \mathcal{E}' est séparable, si a est satisfaite, $\|\varphi_0(e; x)\|$ est une fonction mesurable-P de x sur \mathcal{X} , il faut que :

$$E[\|\varphi_0(e; X_j)\|] < +\infty.$$

c. Si a et b sont satisfaites, $\varphi_0(e; X_j)$ a une espérance mathématique $\bar{\varphi}_0 = E[\varphi_0(e; X_j)]$; il faut que cette espérance mathématique soit l'élément nul θ de \mathcal{E}' .

Nous allons montrer que sous les hypothèses déjà faites, les conditions a, b et c sont satisfaites :

a. $\langle \varphi^*, \varphi_0(e; x) \rangle$ est une fonction continue de x ; on a en effet :

$$\begin{aligned} |\langle \varphi^*, \varphi_0(e; x') \rangle - \langle \varphi^*, \varphi_0(e; x'') \rangle| &= |\langle \varphi^*, \varphi_0(e; x') - \varphi_0(e; x'') \rangle| \\ &= |\langle \varphi^*, \varphi(e; x') - \varphi(e; x'') \rangle| \\ &\leq \|\varphi^*\| \cdot \|\varphi(e; x') - \varphi(e; x'')\| \\ &\leq \|\varphi^*\| \cdot (x', x''). \end{aligned}$$

Or toute fonction du point x continue sur \mathcal{X} est mesurable — P puisque \mathcal{B} contient les sphères.

b. Quant à $E[\|\varphi_0(e; X_j)\|]$, sa valeur est :

$$E[\|\varphi_0(e; X_j)\|] = \int_{\mathcal{X}} \|\varphi_0(e; x)\| dP(\omega) \quad (3)$$

qui est finie d'après (2.11).

c. Par définition de l'espérance mathématique, pour toute fonctionnelle φ^* on a :

$$(3.1) \quad E[\langle \varphi^*, \varphi_0(e; X_j) \rangle] = \langle \varphi^*, \bar{\varphi}_0 \rangle.$$

Tout élément de \mathcal{E}' est une fonctionnelle linéaire continue f^* sur \mathcal{F} ; la forme $\langle f^*, f \rangle$, pour f^* variable dans \mathcal{E}' et f fixe arbitraire dans \mathcal{F} , constitue une fonctionnelle linéaire continue sur \mathcal{E}' ; appliquons (3.1) en prenant pour φ^* cette fonctionnelle définie par f ; on trouve :

$$\begin{aligned} \langle \varphi^*, \bar{\varphi}_0 \rangle &= E \left[\int_{\mathcal{X}} f(x) d\varphi_0(e; X_j) \right] \\ &= E \left[f(X_j) - \int_{\mathcal{X}} f(x) dP(e) \right] \\ &= \int_{\mathcal{X}} f(x) dP(e) - \int_{\mathcal{X}} f(x) dP(e) = 0. \end{aligned}$$

De sorte que $\bar{\varphi}_0$ qui, en tant qu'élément de \mathcal{E}' , est une fonctionnelle linéaire continue sur \mathcal{F} donne zéro quand on l'applique à un f quelconque de \mathcal{F} ; c'est donc l'élément nul θ de \mathcal{E}' .

Remarque. — Le théorème de E. Mourier utilisé ci-dessus suppose seulement que les X_j forment une suite strictement stationnaire; on peut donc l'appliquer sous cette hypothèse plus générale, il en résulte alors que presque-sûrement $P_n(e) - P(e)$ tend fortement vers un élément L de \mathcal{E}' , qui n'est pas forcément l'élément nul, mais peut être aléatoire d'espérance mathématique nulle. Toutefois ici et dans la suite de ce Mémoire nous nous limiterons pour simplifier au cas des X_j mutuellement indépendants, le lecteur fera sans peine d'éventuelles extensions au cas strictement stationnaire.

(3) Pour éviter une confusion avec le e de $\varphi_0(e; x)$, on a, dans cette formule, appelé ω l'ensemble dont P est une fonction.

En outre, un autre théorème de R. Fortet et E. Mourier [1], permet d'affirmer que :

THÉOREME 2. — $E[\|P_n(e) - P(e)\|]$ tend vers zéro lorsque $n \rightarrow +\infty$.

$P_n(e) - P(e)$ étant un élément de \mathcal{E}' , définit une fonctionnelle linéaire continue f^* sur \mathcal{F} par la formule :

$$(3.2) \quad \langle f^*, f \rangle = \int_{\mathcal{X}} f(x) d[P_n(e) - P(e)] = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(X_j) - E[f(X_j)]$$

et l'on a

$$|\langle f^*, f \rangle| \leq \|f^*\| M[f] = \|P_n(e) - P(e)\| M[f],$$

il en résulte

THÉOREME 3. — Lorsque $n \rightarrow +\infty$, quel que soit le nombre positif fini ρ , presque-sûrement la moyenne arithmétique $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(X_j)$ tend vers

$$\int_{\mathcal{X}} f(x) dP(e) = E[f(X_j)],$$

uniformément en f pour $f \in \mathcal{F}$ avec $M[f] \leq \rho$.

En outre :

$$E \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(X_j) - E[f(X_j)] \right|$$

tend vers zéro avec la même uniformité en f .

4. APPLICATION. — Il est naturel d'appliquer les résultats précédents au cas où \mathcal{X} est la droite euclidienne réelle; la loi de probabilité $P(e)$ est alors déterminée par sa fonction de répartition $F(x)$, assujettie d'après (2.6) à :

$$(4.1) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |x| dF(x) < +\infty.$$

$P_n(e)$ est également déterminée par sa fonction de répartition $F_n(x)$; le point essentiel est de trouver l'expression de la norme $\|P_n(e) - P(e)\|$ de $[P_n(e) - P(e)]$, comme élément de \mathcal{F}^* , en fonction de $F(x)$ et $F_n(x)$. Plus généralement, soit $G(x)$ une fonction de répartition telle que :

$$(4.2) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |x| dG(x) < +\infty$$

et quelconque par ailleurs; $G(x) - F(x)$ constitue un élément f^* de \mathcal{F}^* par la formule :

$$(4.3) \quad \langle f^*, f \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) d[G(x) - F(x)] \quad (f \in \mathcal{F});$$

évaluons $\|f^*\|$ à partir de $F(x)$ et $G(x)$.

1° Prenons pour $f \in \mathcal{F}$ la fonction absolument continue dont la dérivée (par rapport à la mesure-L) $f'(x)$ vaut :

$$f'(x) = \varepsilon M \quad \text{si} \quad -\alpha \leq x \leq \beta \quad \begin{cases} (M > 0, \alpha > 0, \beta > 0); \\ \varepsilon = +1 & \text{si } G(x) - F(x) \geq 0, \\ \varepsilon = -1 & \text{si } G(x) - F(x) < 0; \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{si } x < -\alpha \quad \text{ou} \quad x > \beta$$

et supposons que $-\alpha$ et β sont des points de continuité pour $[G(x) - F(x)]$.

On a :

$$\langle f^*, f \rangle = \lim_{a, b \rightarrow +\infty} \int_{-a}^b f(x) d[G(x) - F(x)]$$

$[-a$ et b points de continuité de $G(x) - F(x)]$; d'où :

$$\begin{aligned} \langle f^*, f \rangle &= \lim_{a, b \rightarrow +\infty} \left\{ |f(x)[G(x) - F(x)]|_a^b - \int_{-a}^b [G(x) - F(x)] f'(x) dx \right\} \\ &= -M \int_{-\alpha}^{\beta} |G(x) - F(x)| dx. \end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$(4.4) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |G(x) - F(x)| dx < +\infty$$

et que

$$(4.5) \quad \|f^*\| \geq \int_{-\infty}^{+\infty} |G(x) - F(x)| dx.$$

2° Si f est un élément quelconque de \mathcal{F} , $-a$ et b étant des points de continuité de $[G(x) - F(x)]$, on a :

$$\begin{aligned} \langle f^*, f \rangle &= \lim_{a, b \rightarrow +\infty} \int_{-a}^b f(x) d[G(x) - F(x)] \\ &= \lim_{a, b \rightarrow +\infty} \left\{ |f(x)[G(x) - F(x)]|_a^b - \int_{-a}^b [G(x) - F(x)] df \right\}. \end{aligned}$$

Or l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} [G(x) - F(x)] df$ est absolument convergente, avec

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} [G(x) - F(x)] df \right| \leq M[f] \int_{-\infty}^{+\infty} [G(x) - F(x)] dx.$$

Donc la limite

$$\lim_{a, b \rightarrow +\infty} \{ |f(x)[G(x) - F(x)]|_a^b \} = \lim_{a, b \rightarrow +\infty} \{ f(b)[G(b) - F(b)] - f(-a)[G(-a) - F(-a)] \}$$

existe, quelle que soit la façon dont a et b tendent vers $+\infty$; ceci d'ailleurs quelle que soit $f \in \mathcal{F}$; prenons alors :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \leq 0, \\ x & \text{pour } x > 0. \end{cases}$$

On en déduit que la limite :

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x[G(x) - F(x)]|$$

existe ; donc elle vaut zéro, sans quoi (4.4) ne pourrait avoir lieu. Il en résulte que pour tout $f \in \mathcal{F}$, on a :

$$\langle f^*, f \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) d[G(x) - F(x)] = - \int_{-\infty}^{+\infty} [G(x) - F(x)] df(x),$$

donc :

$$(4.6) \quad \|f^*\| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |G(x) - F(x)| dx;$$

(4.5) et (4.6) prouvent que :

$$(4.7) \quad \|f^*\| = \int_{-\infty}^{+\infty} |G(x) - F(x)| dx;$$

en d'autres termes, $\|f^*\|$ est l'aire arithmétique comprise entre le graphique de $F(x)$ et celui de $G(x)$; (4.7) résout le problème posé et nous en tirons en outre que :

Presque-sûrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_n(x) - F(x)| dx = 0$$

et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |F_n(x) - F(x)| dx \right] = 0.$$

Ainsi les théorèmes généraux du paragraphe 3 fournissent des théorèmes nouveaux même dans le cas si connu de la droite réelle.

5. VARIANTE DE LA MÉTHODE PRÉCÉDENTE. — La construction de \mathcal{G}' ne vaut que si $P(e)$ satisfait à la condition (2.6) ; une modification convenable permet d'éviter cette restriction.

Soit \mathcal{G} l'ensemble des fonctions f de \mathcal{F} qui satisfont à la condition :

$$\text{b. s. } |f(x)| = N[f] < +\infty$$

En prenant comme norme dans \mathcal{G} la quantité :

$$\|f\| = M[f] + N[f],$$

\mathcal{G} est un espace de Banach; notons que deux fonctions de \mathcal{G} qui diffèrent d'une constante ne sont pas identiques. Soit \mathcal{G}^* le dual de \mathcal{G} . Toute fonction d'ensemble $m(e)$ sur \mathcal{B} , complètement additive et bornée, constitue un élément f^* de \mathcal{G}^* par la formule :

$$\langle f^*, f \rangle = \int f(x) dm(e)$$

et l'on voit que :

$$\|f^*\| \leq |m|(\mathcal{X})$$

en désignant par $|m|(e)$ la variation totale ^(*) de $m(e)$. En particulier si $P(e)$ est une loi de probabilité quelconque sur \mathcal{B} , $P(e)$ est un élément de \mathcal{G}^* ; tout $\varphi(e; x)$ est un élément de \mathcal{G}^* . Soit \mathcal{E}' le plus petit sous-espace vectoriel fermé de \mathcal{G}^* contenant tous les $\varphi(e; \gamma_n)$; \mathcal{E}' est séparable; on vérifie immédiatement que tout $\varphi(e; x)$ appartient à \mathcal{E}' , ainsi que toute mesure $m(e)$ du type :

$$m(e) = \sum_{k=1}^n m_k \varphi(e; z_k),$$

avec

$$m_k \geq 0, \quad \sum_{k=1}^n m_k \leq 1$$

les z_k appartenant à la suite $\{\gamma_h\}$; il en est de même pour une mesure $m(e)$ du type :

$$m(e) = \sum_{k=1}^{+\infty} m_k \varphi(e; z_k),$$

avec la même condition pour les z_k et

$$m_k \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} m_k \leq 1,$$

car la différence :

$$\mu_n(e) = m(e) - \sum_{k=1}^n m_k \varphi(e; z_k)$$

a sa variation totale sur \mathcal{X} égale à :

$$|\mu_n|(\mathcal{X}) = \sum_{k > n} m_k,$$

quantité infiniment petite si $n \rightarrow +\infty$.

(*) Cf. A. BLANC-LAPIERRE et R. FORTET [4], chap. XV.

$P(e)$ fait partie de \mathcal{E}' : reprenons les ensembles $S_h(\rho)$ de la page 272 ; soit $m(e)$ la mesure constituée en affectant les centres γ_h des sphères $\Sigma_h(\rho)$ des masses $m_h = P[S_h(\rho)]$; le calcul de la page 272 montre, en désignant par f^* l'élément de \mathcal{G}^* constitué par $m(e) - P(e)$, que :

$$|\langle f^*, f \rangle| \leq M[f]\rho \quad (f \in \mathcal{G}),$$

$P(e) \in \mathcal{E}'$ en résulte immédiatement.

Il s'ensuit que $\varphi(e; X_j)$ est un élément aléatoire prenant ses valeurs dans \mathcal{E}' et satisfaisant (*mutatis mutandis* aux conditions a, b, c) de la page 273 :

- a. Si φ^* est une fonctionnelle linéaire continue quelconque sur \mathcal{E}' , $\langle \varphi^*, \varphi(e; x) \rangle$ est une fonction de x mesurable — P ;
- b. $E[\|\varphi(e; X_j)\|] < +\infty$;
- c. $\varphi(e; X_j)$ a une espérance mathématique qui n'est autre que $P(e)$.

Les mêmes théorèmes de E. Mourier permettent d'énoncer :

THÉOREME 4. — $\|P_n(e) - P(e)\|$ désignant la norme de $[P_n(e) - P(e)]$ comme élément de \mathcal{G}^* , lorsque $n \rightarrow +\infty$:

1° presque-sûrement, $\|P_n(e) - P(e)\|$ tend vers zéro ;

2° $E[\|P_n(e) - P(e)\|]$ tend vers zéro ;

3° quel que soit le nombre positif ρ , uniformément en f pour $f \in \mathcal{G}$, avec

$M[f] + N[f] \leq \rho$, presque-sûrement la moyenne arithmétique $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(X_j)$ tend vers

$$\int_{\mathcal{X}} f(x) dP(e) = E[f(X_j)]$$

et (avec la même uniformité en f)

$$E\left[\left|\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(X_j) - E[f(X_j)]\right|\right] \rightarrow 0.$$

6° Application. — Comme espace \mathcal{X} prenons le plan euclidien ; on peut supposer ce plan orienté, de sorte que les deux demi-plans que détermine dans \mathcal{X} un axe arbitraire Δ peuvent être distingués l'un de l'autre, par exemple l'un étant qualifié de demi-plan à gauche (de Δ) et l'autre de demi-plan à droite ; nous désignerons par Δ^- le demi-plan à gauche, étant entendu pour fixer les idées que Δ ne fait pas partie de Δ^- .

Soient $\Delta_{-\varepsilon}$ et $\Delta_{+\varepsilon}$ les deux parallèles à Δ , situées à une distance ε ($\varepsilon > 0$) de Δ , respectivement à gauche et à droite.

Soit $P(e)$ une loi de probabilité sur le plan \mathcal{X} , absolument continue par rapport à la mesure de Borel ; nous allons étudier la convergence de $P_n(\Delta^-)$ vers $P(\Delta^-)$.

Soient :

$f(x)$ la fonction qui vaut 1 si $x \in \Delta^-$, 0 si $x \notin \Delta^-$;

$f_-(x)$ la fonction qui vaut 1 si $x \in \Delta_{-\varepsilon}^-$, 0 si $x \notin \Delta^-$, $\frac{\delta(x)}{\varepsilon}$, pour $x \notin \Delta_{-\varepsilon}^-$ et $\in \Delta^-$, $\delta(x)$, désignant la distance de x à Δ ;

$f_+(x)$ la fonction qui vaut 1 si $x \in \Delta^-$, 0 si $x \notin \Delta_{+\varepsilon}^-$, $1 - \frac{\delta(x)}{\varepsilon}$ pour $x \notin \Delta^-$ et $\in \Delta_{+\varepsilon}^-$ en désignant encore par $\delta(x)$ la distance de x à Δ .

On a :

$$(6.1) \quad f_-(x) \leq f(x) \leq f_+(x) \quad (x \in \mathcal{X});$$

$f_-(x)$ et $f_+(x)$ appartiennent à \mathcal{G} et sont de même norme :

$$\|f_-\| = \|f_+\| = 1 + \frac{1}{\varepsilon}.$$

$P_n(\Delta^-)$ a pour valeur :

$$P_n(\Delta^-) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(X_j).$$

Posons

$$Q_n^+ = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f_+(X_j), \quad Q_n^- = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f_-(X_j);$$

d'après (6.1), il vient ;

$$(6.2) \quad Q_n^- \leq P_n(\Delta^-) \leq Q_n^+.$$

Or :

$$P_n(\Delta^-) - P(\Delta^-) = [P_n(\Delta^-) - Q_n^+] + [Q_n^+ - P(\Delta_{+\varepsilon}^-)] + [P(\Delta_{+\varepsilon}^-) - P(\Delta^-)].$$

D'après (6.2) :

$$|P_n(\Delta^-) - Q_n^+| \leq |Q_n^+ - Q_n^-| \leq |Q_n^+ - P(\Delta_{+\varepsilon}^-)| + |P(\Delta_{+\varepsilon}^-) - P(\Delta_{-\varepsilon}^-)| + |P(\Delta_{-\varepsilon}^-) - Q_n^-|,$$

de sorte que :

$$(6.3) \quad |P_n(\Delta^-) - P(\Delta^-)| \leq 2 |P(\Delta_{+\varepsilon}^-) - P(\Delta_{-\varepsilon}^-)| + 2 |Q_n^+ - P(\Delta_{+\varepsilon}^-)| + |Q_n^- - P(\Delta_{-\varepsilon}^-)|.$$

De plus on a visiblement :

$$\begin{aligned} P(\Delta^-) &\leq E[f_+(X_j)] \leq P(\Delta_{+\varepsilon}^-), \\ P(\Delta_{-\varepsilon}^-) &\leq E[f_-(X_j)] \leq P(\Delta^-). \end{aligned}$$

De (6.3) on tire alors :

$$(6.4) \quad |P_n(\Delta^-) - P(\Delta^-)| \leq 5 |P(\Delta_{+\varepsilon}^-) - P(\Delta_{-\varepsilon}^-)| + 2 |Q_n^+ - E[f_+(X_j)]| + |Q_n^- - E[f_-(X_j)]|.$$

Prenons ε assez petit pour que, quel que soit Δ , on ait :

$$P(\Delta_{+\varepsilon}^-) - P(\Delta_{-\varepsilon}^-) < \eta$$

(η , nombre positif arbitraire), ce qui est possible puisque $P(e)$ est absolument continue; ε étant ainsi choisi, d'après le théorème 4, 3°), presque-sûrement,

$$|Q_n^+ - E[f_+(X_j)]| \quad \text{et} \quad |Q_n^- - E[f_-(X_j)]|$$

tendent vers zéro, uniformément par rapport à Δ puisque, lorsque ε est fixé, les normes $\|f_+\|$ et $\|f_-\|$ ne dépendent pas de Δ . On en conclut que :

THÉOREME 5. — *Lorsque $n \rightarrow +\infty$, presque-sûrement $P_n(\Delta^-)$ tend vers $P(\Delta^-)$ uniformément par rapport à Δ .*

Un résultat analogue a été obtenu (mais non encore publié) par J. Wolfowitz, qui a prouvé que $P_n(\Delta^-)$ tend presque-sûrement vers $P(\Delta^-)$ uniformément par rapport à Δ , mais en introduisant une hypothèse supplémentaire inutile. Ce théorème peut s'étendre dans diverses directions :

1° La restriction que $P(e)$ est absolument continue peut évidemment être sinon supprimée, du moins élargie;

2° On peut obtenir un résultat analogue pour d'autres familles de sous-ensembles du plan que la famille des demi-plans (par exemple, la famille des sous-ensembles déduits d'un sous-ensemble donné par un déplacement arbitraire);

3° On peut évidemment appliquer le théorème 5, *mutatis mutandis*, à n'importe quel espace euclidien \mathfrak{X} à un nombre fini quelconque de dimensions. Prenons en particulier le cas où \mathfrak{X} est la droite euclidienne : le rôle de Δ est alors joué par un nombre x arbitraire, $P(e)$ et $P_n(e)$ sont caractérisées par leurs fonctions de répartition $F(x)$ et $F_n(x)$; $F(x)$ étant absolument continue, on obtient que :

Presque-sûrement lorsque $n \rightarrow +\infty$, $|F_n(x) - F(x)|$ tend vers zéro, uniformément en x ; ce qui est le théorème classique de Glivenko-Cantelli; plus précisément c'est le résultat de Glivenko : on passe sans difficulté au théorème général de Glivenko-Cantelli en levant la restriction que $F(x)$ est absolument continue.

Remarque. — Par rapport à la méthode du paragraphe 2 reposant sur la considération de la classe \mathfrak{F} de fonctions f , la variante du paragraphe 5 a consisté à *restreindre* la classe des fonctions f , réduite à l'espace \mathcal{G} qui est un sous-espace de \mathfrak{F} , de manière à pouvoir corrélativement élargir la classe des $P(e)$: cet élargissement s'est marqué par la suppression de la condition (2.6).

Mais il peut, au contraire, être avantageux de disposer de résultats concernant des $P(e)$ plus particulières, mais s'appliquant à des f plus générales : par exemple dans le cas où \mathfrak{X} est la droite $x'Ox$, la considération des moments d'ordre supérieur au premier oblige à introduire des fonctions f du type : $f(x) = |x|^\alpha$, avec $\alpha > 1$, qui n'appartiennent pas à \mathfrak{F} . Il est facile d'adapter la

méthode et d'élargir \mathcal{F} de façon à englober de telles f , par exemple de la façon suivante :

Appelons $\mathcal{F}_{(\alpha)}$, $\alpha > 1$, quelconque, l'espace des fonctions $f(x)$ qui satisfont aux conditions suivantes, où x_0 désigne un point fixe arbitraire de \mathcal{X} :

$$\begin{aligned} a. \quad & \text{b. s. } \frac{|f(x') - f(x'')|}{(x', x'')} = M(r) < +\infty; \\ & \substack{(x_0, x') \leq r \\ (x_0, x'') \leq r} \\ b. \quad & \text{b. s. } \min_r \left[M(r), \frac{M(r)}{r^{\alpha-1}} \right] = M_{(\alpha)}[f] < +\infty. \end{aligned}$$

On constate que $\mathcal{F}_{(\alpha)}$, si l'on y prend $M_{(\alpha)}[f]$ comme norme de f , est un espace de Banach; les fonctions f qui appartiennent à $\mathcal{F}_{(\alpha)}$ ne dépendent pas de x_0 , par contre la norme $M_{(\alpha)}[f]$ dépend de x_0 . Comme pour \mathcal{F} , deux fonctions f et g de $\mathcal{F}_{(\alpha)}$ qui diffèrent d'une constante doivent être considérées comme identiques.

Supposons maintenant que $P(e)$ soit telle que :

$$(6.5) \quad \int_{\mathcal{X}} (x_0, x)^2 dP(e) < +\infty,$$

condition d'ailleurs indépendante de x_0 , on vérifie que les raisonnements du paragraphe 2, (6.5) jouant le rôle de (2.6), peuvent être reproduits *mutatis mutandis*, ce qui conduit à des énoncés analogues à ceux du paragraphe 3, que le lecteur formulera lui-même sans peine.

SECTION II.

7. UN EXEMPLE DE CONSTRUCTION DIRECTE DE \mathcal{E}' . — Il y a des cas où il est possible de construire \mathcal{E}' directement. A titre d'exemple, considérons le cas où \mathcal{X} est la droite et où la fonction de répartition $F(x)$ caractérisant $P(e)$ est continue; le changement de variable :

$$u = F(x)$$

permet alors, comme il est classique, de se ramener au cas où les X_j sont des variables aléatoires de loi uniforme sur le segment $(0, 1)$; plaçons-nous dans ces conditions. Soit \mathcal{H} l'espace, de Hilbert et séparable, des fonctions $f(u)$ de carré sommable sur $(0, 1)$:

$$\int_0^1 |f(u)|^2 du < +\infty.$$

Toute fonction de répartition $F(u)$ sur $(0, 1)$, étant monotone, bornée, appartient à \mathcal{H} : en particulier la fonction de répartition $F(u; X_j)$ caractérisant $\varphi(e; X_j)$, celle $F_n(u)$ caractérisant $P_n(e)$ sont des éléments aléatoires prenant leurs valeurs dans \mathcal{H} : on peut donc adopter \mathcal{H} comme espace \mathcal{E}' .

On vérifie que l'élément aléatoire $F(u; X_j)$ satisfait aux conditions a, b, c (cf. p. 279) voulues pour que les théorèmes de E. Mourier [1] et R. Fortet et E. Mourier [1] utilisés précédemment soient applicables; en particulier, l'espérance mathématique de $F(u; X_j)$ est la fonction $f(u) = u$ sur $(0, 1)$; de plus :

$$(7.1) \quad E[\| F(u; X_j) \|^2] < +\infty.$$

Il en résulte :

THÉORÈME 6. — Lorsque $n \rightarrow +\infty$:

$$1^\circ \text{ Presque-sûrement, } \int_0^1 |F_n(u) - u|^2 du \rightarrow 0;$$

$$2^\circ E \left[\int_0^1 |F_n(u) - u|^2 du \right] \rightarrow 0;$$

3° Quel que soit le nombre positif φ , uniformément pour $f(u)$ telle que : $\int_0^1 |f(u)|^2 du \leq \varphi$, presque-sûrement la moyenne arithmétique $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(X_j)$ tend vers $\int_0^1 f(u) du$ et (avec la même uniformité en f) :

$$E \left[\left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(X_j) - \int_0^1 f(u) du \right|^2 \right] \rightarrow 0.$$

On peut d'ailleurs compléter ces résultats en utilisant le fait que $\mathcal{E}' = \mathcal{H}$ n'est pas un espace de Banach séparable quelconque, mais un espace de Hilbert.

Dans ces conditions, et compte tenu de (7.1), il résulte d'un théorème de E. Mourier [1] que, lorsque $n \rightarrow \infty$, la loi de probabilité de :

$$\sqrt{n} [F_n(u) - u]$$

(comme élément aléatoire prenant ses valeurs dans \mathcal{H}) tend vers une loi laplacienne qu'on peut définir par sa caractéristique; comme une fonctionnelle linéaire continue quelconque sur \mathcal{H} se définit par une fonction arbitraire $f(u)$ de carré sommable sur $(0, 1)$, cette caractéristique peut se représenter par :

$$(7.2) \quad \varphi(f) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} E \left\{ \left[\int_0^1 f(u) [F(u; X_j) - u] du \right]^2 \right\} \right\}.$$

Désignons par Z un élément aléatoire laplacien prenant ses valeurs dans \mathcal{H} et obéissant à la loi de caractéristique (7.2). Un théorème de R. Fortet et E. Mourier [2] nous indique alors que, lorsque $n \rightarrow +\infty$, la fonction de répartition de :

$$\Omega_n^2 = n \| F_n(u) - u \|^2 = n \int_0^1 |F_n(u) - u|^2 du$$

tend vers la fonction de répartition de $\|Z\|^2$.

Or, un second théorème de R. Fortet et E. Mourier [2] nous permet de déterminer la fonction de répartition de $\|Z\|^2$; posons :

$$\Phi(f, g) = E \left\{ \int_0^1 \int_0^1 f(u) g(v) [F(u; X_f) - u] [F(v; X_f) - v] du dv \right\}.$$

$\Phi(f, g)$ est une forme bilinéaire par rapport aux deux éléments f et g de \mathcal{H} ; c'est une forme complètement continue et définie positive, possédant un déterminant de Fredholm $D(\lambda)$, qui n'est autre que le déterminant de Fredholm classique de l'opération linéaire intégrale symétrique définie positive et complètement continue :

$$(7.3) \quad g(v) = \int E \{ [F(u; X_f) - u] [F(v; X_f) - v] \} f(u) du.$$

On sait que la caractéristique $\varphi(r) = E[e^{ir\|Z\|^2}]$ de $\|Z\|^2$ est égale à :

$$(7.4) \quad \varphi(r) = [D(2ir)]^{-\frac{1}{2}}.$$

Un calcul simple montre que :

$$E \{ [F(u; X_f) - u] [F(v; X_f) - v] \} = [\min(u, v) - uv],$$

de sorte que (7.3) s'écrit :

$$(7.5) \quad g(v) = \int_0^1 [\min(u, v) - uv] f(u) du.$$

La détermination du déterminant de Fredholm $D(\lambda)$ de (7.5) est classique (cf. M. Kac [1]); on trouve

$$D(\lambda) = \frac{\text{sh}(\sqrt{-\lambda})}{\sqrt{-\lambda}}$$

et, par suite,

$$(7.6) \quad \varphi(r) = \left[\frac{\text{sh}(\sqrt{-2ir})}{\sqrt{-2ir}} \right]^{-\frac{1}{2}},$$

de sorte que la fonction de répartition de Ω_n^2 tend vers celle de caractéristique (7.6), résultat indiqué pour la première fois par H. Cramer. Il est clair que l'on pourrait opérer de façon tout à fait semblable à partir, au lieu de \mathcal{H} , de l'espace de Hilbert \mathcal{H}' des fonctions $f(u)$ de carré sommable sur $(0, 1)$, non plus par rapport à la mesure — B, mais par rapport à une mesure arbitraire; on retrouve alors très simplement les résultats de T. W. Anderson et D. A. Darling [1] qui sont une extension du résultat de Cramer.

Une autre extension consiste à traiter par la même méthode le cas où \mathcal{X} est un espace euclidien à un nombre fini quelconque s de dimensions : quel que soit s il est possible de caractériser $P(e)$ et $P_n(e)$ par des fonctions de répartition $F(x_1, x_2, \dots, x_s)$ et $F_n(x_1, x_2, \dots, x_s)$ à s variables : tout ce qui précède

peut être refait, y compris la détermination de la loi asymptotique de $n\|F_n - F\|^2$; mais on remarquera que, pour $P(e)$ et $P_n(e)$ données, $F(x_1, x_2, \dots, x_s)$, $F_n(x_1, x_2, \dots, x_s)$ dépendent des axes auxquels on rapporte \mathcal{X} .

L'exemple qui a fait l'objet de ce paragraphe montre que lorsque \mathcal{S}' est un espace de Hilbert, il devient possible d'adjoindre aux théorèmes du type de ceux obtenus à la section I, d'intéressants résultats, comme la loi asymptotique de Ω_n^2 .

Nous exposerons dans un autre Mémoire comment on peut systématiquement rechercher un espace \mathcal{S}' qui soit un espace de Hilbert.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] T. W. ANDERSON et D. A. DARLING, *Asymptotic Theory of certain goodness of fit criteria based on stochastic Processes* (*Ann. Math. Stat.*, t. 23, n° 2, juin 1952).
 - [1] A. BLANC-LAPIERRE et R. FORTET, *Théorie des fonctions aléatoires*, Masson et C^{ie} édit., Paris, 1953.
 - [1] R. FORTET et E. MOURIER, *Loi des grands nombres et théorie ergodique* (*C. R. Acad. Sci.*, 234, 1952, p. 699).
 - [2] R. FORTET et E. MOURIER, *Résultats complémentaires sur les éléments aléatoires prenant leurs valeurs dans un espace de Banach* (à l'impression).
 - [1] M. KAC, *On some connections between probability theory and differential and integral equations* (Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1950, University of California Press).
 - [1] E. MOURIER, *Éléments aléatoires dans un espace de Banach* (Thèse de Doctorat, Paris, 1952).
-