

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

GEORGES POITOU

**Sur l'approximation des nombres complexes par les nombres des corps imaginaires quadratiques dénués d'idéaux non principaux particulièrement lorsque vaut l'algorithme d'Euclide**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 70, n° 3 (1953), p. 199-265

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1953\\_3\\_70\\_3\\_199\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1953_3_70_3_199_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1953, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

SUR  
L'APPROXIMATION DES NOMBRES COMPLEXES

PAR LES  
NOMBRES DES CORPS IMAGINAIRES QUADRATIQUES  
DÉNUÉS D'IDÉAUX NON PRINCIPAUX  
PARTICULIÈREMENT LORSQUE VAUT L'ALGORITHME D'EUCLIDE

PAR M. GEORGES POITOU.

---

Introduction.

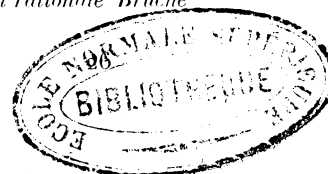
On connaît le théorème d'Hurwitz selon lequel il existe, pour tout nombre réel irrationnel  $x$ , une infinité de fractions  $\frac{p}{q}$  telles que  $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$ , la constante  $\sqrt{5}$  étant « la meilleure possible » <sup>(1)</sup>.

A la question de l'approximation des nombres réels irrationnels par des nombres rationnels s'apparente celle de l'approximation des nombres complexes  $X$  par des « fractions »  $\frac{P}{Q}$  dont les deux termes sont des entiers d'un même corps quadratique imaginaire, par exemple, dans le cas le plus connu, des « entiers de Gauss »  $a + b\sqrt{-1}$  ( $a$  et  $b$  entiers rationnels). On montre facilement l'existence d'une constante positive  $c$  (dépendant du corps choisi) telle que, pour tout  $X$ , il existe une infinité de  $\frac{P}{Q}$  avec  $\left|X - \frac{P}{Q}\right| < \frac{1}{c|Q|^2}$ . La meilleure de ces constantes (plus correctement : leur borne supérieure), soit  $C$ , joue un rôle analogue au nombre  $\sqrt{5}$  du théorème d'Hurwitz. On l'appellera la constante d'Hurwitz du corps envisagé.

---

<sup>(1)</sup> HURWITZ, *Über die angenäherte Darstellung des Irrationalzahlen durch rationale Brüche* (*Math. Ann.*, t. 39, 1889, p. 279-284).

*Ann. Ec. Norm.*, (3), LXX. — Fasc. 3.



Cette thèse développe la méthode et étend les résultats de recherches poursuivies en commun avec M. Roger Descombes pendant l'année 1950 <sup>(2)</sup>. A cette époque étaient connues les constantes d'Hurwitz des corps  $R(\sqrt{-m})$  pour  $m = 3, 1, 7$  et  $2$  (soit pour  $D = 3, 4, 7$  et  $8$ , en désignant par  $-D$  les *discriminants* correspondants, égaux à  $-m$  ou à  $-4m$ ) <sup>(3)</sup>. Notons  $C_D$  la constante d'Hurwitz du corps de discriminant  $-D$ .

Un théorème de Furtwängler étendu par Hofreiter <sup>(4)</sup> établit que, si le corps envisagé n'a pas d'idéaux non principaux (soit pour  $D = 3, 4, 7, 8, 11, 19, 43, 67, 163$ ), on a  $C_D \leq \sqrt{|\Delta|}$ , où  $\Delta$  est, parmi les discriminants des surcorps relativement quadratiques de  $R(\sqrt{-D})$ , celui de module minimum. Or il se trouve, dans les cas  $D = 3, 4, 7$  et  $8$ , qu'on a justement  $C_D = \sqrt{|\Delta|}$ , phénomène déjà constaté dans le cas rationnel (5 étant le discriminant minimum d'un corps quadratique *réel*). On supposa qu'il en était de même pour  $D = 11$ , qu'on avait donc  $C_{11} = \sqrt[5]{5}$ . En sens inverse, les minorationes générales dont il sera question dans I. 4 furent portées à  $C_{11} > \sqrt[5]{\frac{51}{50}}$  <sup>(5)</sup>.

En réalité, comme nous l'avons montré dans notre première Note, on a  $C_{11} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ , ce qui constituait le premier exemple d'une constante d'Hurwitz différente de sa borne de Furtwängler-Hofreiter.

Nous pouvons y ajouter maintenant le cas  $D = 19$ , puisque  $C_{19} = 1$ . Les

<sup>(2)</sup> Ces recherches ont été signalées dans deux Notes aux *Comptes rendus* : DESCOMBES et POITOU, *Sur l'approximation dans  $R(i\sqrt{11})$*  (C. R. Acad. Sc., t. 231, 1950, p. 264); *Sur l'approximation dans le corps des racines cubiques de l'unité* (C. R. Acad. Sc., t. 232, 1951, p. 292).

<sup>(3)</sup> Pour  $R(\sqrt{-1})$  : FORD, *On the closeness of approach of complex rational fractions to a complex irrational number* (Trans. Amer. Math. Soc., t. 27, 1925, p. 146-154). PERRON, *Über die Approximation einer komplexen Zahl durch Zahlen des Körpers  $K(i)$*  : I. (Math. Ann., t. 103, 1930, p. 533-544); II. (Math. Ann., t. 105, 1931, p. 160-164).

Pour  $R(\sqrt{-3})$  : PERRON, *Über einen Approximationssatz von Hurwitz und über die Approximation einer komplexen Zahl durch Zahlen des Körpers der dritten Einheitswurzeln* (S.-B. Bayer. Akad. Wiss., 1931, p. 129-154).

Pour  $R(\sqrt{-2})$  : PERRON, *Diophantische Approximationen in imaginären quadratischen Zahlkörpern, insbesondere im Körper  $\mathbb{K}(i\sqrt{2})$*  (Math. Z., t. 37, 1933, p. 749-767).

Pour  $R(\sqrt{-7})$  : HOFREITER, *Diophantische Approximationen in imaginären quadratischen Zahlkörpern* (Mh. Math. Phys., t. 45, 1936, p. 175-190).

Perron utilise des lemmes sur les ovales de Cassini. Ford et Hofreiter, partant des propriétés du groupe modulaire (opérant d'après Picard sur un demi-espace), obtiennent d'élégantes démonstrations [(voir aussi SPEISER, *Über die Minima Hermitescher Formen* (J. reine angew. Math., t. 167, 1932, p. 88-97) mais l'extension de cette méthode semble difficile].

<sup>(4)</sup> FURTWÄNGLER, *Über die simultane Approximation von Irrationalzahlen* : I. (Math. Ann., t. 96, 1927, p. 169-175); II. (Math. Ann., t. 99, 1928, p. 71-83). HOFREITER, *Über die Approximation von komplexen Zahlen* (Mh. Math. Phys., t. 42, 1935, p. 401-416).

<sup>(5)</sup> SCHMETTERER, *Approximation komplexer Zahlen durch Zahlen  $K(i\sqrt{11})$*  Dissertation, Wien, 1940.

autres constantes d'Hurwitz ne sont pas connues, mais l'exemple de II. 7, qui prouve  $C_{43} \leq \sqrt{\frac{5}{11}}$ , montre que la situation est la même pour  $D = 43$ , et, sans aucun doute, aussi pour  $D = 67$  et  $163$  (car  $|\Delta|^2$  est un entier naturel).

La coïncidence remarquable rencontrée dans les quatre cas les plus simples paraît donc fortuite, n'ayant pas reçu jusqu'à présent d'explication.

Dans le cas de l'approximation des nombres réels irrationnels par des nombres rationnels, on sait que, si l'on écarte certains nombres quadratiques (équivalents, par des substitutions modulaires, à  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ), on peut remplacer dans l'énoncé d'Hurwitz la constante  $\sqrt{5}$  par  $\sqrt{8}$ ; si l'on écarte de nouveaux nombres quadratiques (équivalents à  $\sqrt{2}$ ), on peut prendre  $\frac{\sqrt{221}}{5} \dots$ . Plus précisément, Markoff a montré qu'il existe une suite de telles constantes, croissant jusqu'à leur limite 3, chacune correspondant à une classe de nombres quadratiques <sup>(6)</sup>.

Notre seconde Note donnait les premiers résultats de cette nature connus dans le cas complexe, dans le cas particulièrement favorable de  $R(\sqrt{-3})$ . Ces résultats, exposés dans VI, comprennent l'existence de trois « minima isolés » et, à défaut de la détermination du premier point d'accumulation du spectre de Markoff, que je n'ai pu encore obtenir, des limitations numériques précises pour ce point avec une étude poussée de la structure des nombres mis en cause. Il ne paraît pas douteux qu'on ne puisse, pour les plus simples des autres corps, obtenir de même des résultats de ce genre <sup>(7)</sup>. Notons à ce propos que notre détermination de  $C_{11}$  (dans V) montre, sans aucune complication supplémentaire, que cette constante est isolée.

\*  
\* \*

L'outil que nous utilisons est une extension de l'algorithme des fractions continues. Hurwitz a donné en 1888 une telle extension, qui se réduit dans le cas rationnel au développement « par l'entier le plus proche » <sup>(8)</sup>. Mais l'algorithme d'Hurwitz n'a pas été utilisé, à ma connaissance, dans les problèmes dont nous nous occupons (voir d'ailleurs V. 10).

Renonçant à la recherche prépondérante des analogies formelles, j'ai essayé de dégager ce qui, dans la technique algorithmique, se rattache le plus profon-

<sup>(6)</sup> MARKOFF, *Sur les formes quadratiques binaires indéfinies* : I. (*Math. Ann.*, t. 15, 1879, p. 381-407); II. (*Math. Ann.*, t. 17, 1880, p. 379-400),

<sup>(7)</sup> M. J. W. S. CASSELS a montré récemment que la constante d'Hurwitz du corps de Gauss est isolée. CASSELS, *Über einen Perronschen Satz* (*Arch. Math.*, t. 3, 1952, p. 10-14).

<sup>(8)</sup> HURWITZ, *Über die Entwicklung complexer Grössen in Kettenbrüche* (*Acta Math.*, t. 11, 1888, p. 187-200).

dément aux propriétés d'approximation. De ce point de vue se présentent aussitôt les fractions que nous appelons les « réduites » d'un nombre complexe (définies dans II). Ces fractions existent dans tous les corps imaginaires quadratiques. En rangeant toutes les réduites d'un même nombre par ordre de complication croissante, on obtient une suite, dite « suite de meilleure approximation », qui est analogue à la suite des réduites du développement en fraction continue d'un nombre réel. Mais une différence notable apparaît. Alors que dans le cas rationnel, deux réduites consécutives sont toujours adjacentes, dans le cas complexe, le déterminant de deux réduites consécutives peut prendre des valeurs différentes de 1 et même, selon toute vraisemblance <sup>(9)</sup>, arbitrairement grandes, pourvu que  $D$  soit assez grand.

Il est remarquable que, pour  $D=3$ , ce déterminant ait toujours pour module 1. Les suites de meilleure approximation dans ce corps sont alors très maniables et peuvent rendre dans les problèmes d'approximation les mêmes services que le développement en fraction continue usuel.

Pour les autres corps où l'*algorithme d'Euclide* est valable ( $D=4, 7, 8, 11$ ), on peut pallier la complication des suites de meilleure approximation par l'introduction des « meilleures suites régulières », suites dont l'approximation peut être un peu moins bonne, mais où deux fractions consécutives sont adjacentes. Ce mode de développement coïncide avec le précédent pour  $D=3$ , et tous deux se réduisent au développement usuel dans le cas réel. L'analogie paraît ainsi, de notre point de vue, aussi bonne que possible. Mais les développements complexes sont formellement plus compliqués que le développement ordinaire, en particulier par le fait qu'un « quotient incomplet » n'est plus uniquement déterminé par la donnée du « quotient complet » correspondant et aussi à cause de la complexité relative des règles qui caractérisent les développements parmi l'ensemble des suites arbitraires d'entiers complexes.

Pour les corps non euclidiens, mais où l'*identité de Bezout* est valable (c'est-à-dire où tous les idéaux sont principaux) il devient nécessaire d'introduire des déterminants non égaux à 1. Pour le plus simple de ces corps ( $D=19$ ), il suffit d'introduire en outre des déterminants égaux à 2. L'algorithme correspondant est étudié dans VII, puis appliqué à la détermination de  $C_{19}$ . Les difficultés qu'on y rencontre montrent le rôle non essentiel, mais simplificateur de l'algorithme d'Euclide.

Les corps où il existe des idéaux non principaux donnent lieu à des difficultés supplémentaires.

Des problèmes analogues à ceux qui sont traités dans ce travail se posent pour des ensembles convenables de quaternions, mais ne peuvent y trouver place.

Je suis heureux de pouvoir ici assurer de ma vive reconnaissance M. A. Denjoy,

---

<sup>(9)</sup> Voir note <sup>(20)</sup>, p. 218.

dont l'enseignement et la conversation ont déterminé mon orientation, et M. A. Châtelet dont la grande compétence m'a été précieuse. Je les remercie également, ainsi que M. G. Valiron, d'avoir bien voulu constituer le jury de cette thèse. J'exprime ma gratitude à M. Ch. Pisot pour ses encouragements et ses conseils irremplaçables et à M. P. Montel, qui a accepté ce Mémoire dans les *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*. Qu'il me soit permis, enfin, d'adresser une amicale pensée à M. R. Descombes, dont la lucidité a souvent joué un rôle décisif dans mes démonstrations.

## I. — Notations. Généralités.

I. 1. OBSERVATION LIMINAIRE. — Cet exposé comprend sept parties, consacrées, la première à des généralités, la seconde et la troisième aux réduites, la quatrième aux meilleures suites régulières, la cinquième à  $R(\sqrt{-11})$ , la sixième à  $R(\sqrt{-3})$  et la septième à  $R(\sqrt{-19})$ . On observera une disparité de style entre les différentes parties. La nécessité de maintenir la longueur totale de l'exposé dans des limites raisonnables, m'a conduit à abréger beaucoup, dans l'ensemble, les trois démonstrations difficiles de V, VI et VII. J'ai cru utile de donner de la première de ces démonstrations une rédaction relativement explicite, où seuls quelques calculs purement mécaniques sont omis, mais signalés. Dans la seconde démonstration, les calculs mécaniques sont le plus souvent passés sous silence. Enfin, la dernière démonstration est réduite ici à sa trame.

I. 2. NOTATIONS. —  $R$  désignant le corps des nombres rationnels,  $K$  sera le corps imaginaire quadratique  $R(\sqrt{-m})$ ,  $m$  étant un entier positif sans diviseurs carrés. Le discriminant de  $K$  sera noté  $-D$ . Si  $m \equiv 3 \pmod{4}$ , on a  $D = m$ ; sinon  $D = 4m$ .

$N$  désignera l'ensemble des entiers  $1, 2, 3, \dots$ ;  $Z$  celui des entiers rationnels;  $E$  celui des entiers de  $K$  (le plus souvent nommés simplement « entiers »). Une base de  $E$  sur  $Z$  est formée de  $1$  et de  $\omega = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{-m})$  si  $m \equiv 3 \pmod{4}$ ; de  $1$  et de  $\theta = \sqrt{-m}$  dans les autres cas.

Soit  $U$  l'ensemble des unités de  $K$ ;  $U$  comprend seulement  $1$  et  $-1$ , sauf dans le cas  $D = 4$ , où  $U$  comprend les racines quatrièmes de l'unité, et dans le cas  $D = 3$ , où  $U$  comprend les racines sixièmes de l'unité.

$\mathcal{C}$  désignera le corps complexe,  $\bar{z}$  l'imaginaire conjugué d'un nombre complexe  $z$ . On notera  $|z|$  le module de  $z$ , et  $|z|^2$  ou  $\|z\|$  le produit  $z\bar{z}$ . On observera que, si  $z \in K$ ,  $\|z\|$  s'identifie à la norme de  $z$ . Si  $z$  est un entier non nul,  $\|z\| \in N$ . On désignera par  $\mathcal{R}(z)$  et  $\mathcal{J}(z)$  la partie réelle et la partie imagi-

naire de  $z$ . On posera  $[z, t] = z\bar{t} + \bar{z}t = 2\Re(z\bar{t})$  pour  $z$  et  $t \in \mathcal{C}$ . C'est le double du produit scalaire usuel. Lorsque  $z$  et  $t$  sont des entiers,  $[z, t] \in \mathbb{Z}$ .

Sauf mention expresse du contraire, on désignera par rotations les transformations  $z \rightarrow uz$ , avec  $u \in \mathbb{U}$ ; par symétries les composées des rotations et de  $z \rightarrow \bar{z}$ ; par inversion la transformation  $z \rightarrow \frac{1}{z}$ .

Des entiers seront dits équivalents si leurs quotients sont des unités; des suites (infinies) ou des séquences (finies) d'entiers seront dites équivalentes si leurs termes de rang pair sont multipliés, leurs termes de rang impair divisés par une même unité. Elles correspondent, par un procédé que l'on indiquera, à des nombres complexes transformés par rotation.

Une fraction  $\frac{p}{q}$  est un nombre de  $K$ , quotient de deux entiers non tous deux nuls; irréductible, si le plus grand commun diviseur (*a priori*, peut-être idéal) de  $p$  et  $q$  est 1. Deux fractions seront dites absolument équivalentes si elles ne diffèrent que par la multiplication des deux termes par une même unité; équivalentes par rapport à un nombre  $x$  (ou simplement : équivalentes, lorsque aucune confusion ne sera possible) si elles donnent les mêmes valeurs respectives à  $|q|$  et à  $|qx - p|$ . Deux fractions  $\frac{p}{q}$  et  $\frac{p'}{q'}$  seront dites adjacentes si  $pq' - qp' \in \mathbb{U}$ .

Pour chaque nombre complexe  $x$  n'appartenant pas à  $K$ , on désignera par *constante d'approximation de  $x$*  et l'on notera  $C(x)$  la limite supérieure de  $\frac{1}{|q(qx - p)|}$  pour toutes les fractions  $\frac{p}{q}$  de  $K$  à dénominateur non nul. L'ensemble des constantes d'approximation est le *spectre de Markoff* de  $K$  <sup>(10)</sup>. Sa borne inférieure, notée par la lettre  $C$  avec, lorsque cette précision est utile, l'indication de la valeur de  $D$  en indice (exemple :  $C_3$ ), est la *constante d'Hurwitz* <sup>(11)</sup> de  $K$ .

Indiquons enfin quelques notations pour des régions du plan complexe.  $r$  étant un nombre réel, les notations  $d(r)$ ,  $d'(r)$ ,  $g(r)$ ,  $g'(r)$  désignent respectivement les régions définies par  $\Re(z) > r$ ,  $\Re(z) \geq r$ ,  $\Im(z) < r$  et  $\Im(z) \leq r$ .

$a$  étant complexe et  $b$  réel non nul, on désigne par  $\frac{(a)}{b}$ ,  $i\frac{(a)}{b}$ ,  $i'\frac{(a)}{b}$ ,  $e\frac{(a)}{b}$ ,  $e'\frac{(a)}{b}$  les régions définies pour  $z$  respectivement par  $|bz - a| = 1$ ,  $< 1$ ,  $\leq 1$ ,  $> 1$  et  $\geq 1$ . Enfin il est entendu que les notations  $\bar{\rho}$ ,  $u\rho$  désignent les transformées de la région  $\rho$  par  $z \rightarrow \bar{z}$ ,  $z \rightarrow uz$ .

<sup>(10)</sup> En souvenir des beaux résultats de Markoff dans le cas rationnel, sur les constantes d'approximation inférieures à 3.

<sup>(11)</sup> En souvenir de la détermination par Hurwitz de la constante analogue dans le cas rationnel, soit  $\sqrt{5}$ . [Bien que ce résultat soit implicitement connu depuis KORKINE et ZOLOTAREFF, *Sur les formes quadratiques* (*Math. Ann.*, t. 6, 1873, p. 366-389) : Sur ce point d'histoire, voir l'article de Markoff, cité plus haut.]

1.3. LES CORPS QUADRATIQUES IMAGINAIRES. — On sait que, dans les cinq cas  $D=3, 4, 7, 8, 11$ ,  $K$  possède l'algorithme d'Euclide, c'est-à-dire que pour chaque point complexe  $z$ , il existe un entier de  $K$  à une distance de  $z$  strictement inférieure à 1. C'est dire, aussi bien, que les cercles  $i(a)$  avec  $a \in E$ , recouvrent  $\mathcal{C}$ . L'algorithme d'Euclide implique que les idéaux de  $K$  sont tous principaux, et l'on a l'identité de Bezout.

Ces conséquences sont encore valables pour  $D=19, 43, 67, 163$ , en l'absence de l'algorithme d'Euclide. Les plus simples des corps qui possèdent des idéaux non principaux correspondent à  $D=15, 20, 23, 24, \dots$

Une partie de nos raisonnements sera valable lorsqu'on remplace l'ensemble  $E$  des entiers de  $K$  par un ordre  $A$  de  $K$  (sous-anneau de  $E$ , contenant 1 et engendrant  $K$ ). La théorie classique des idéaux ne s'applique pas aux ordres distincts de  $E$ . Les plus simples de ces ordres correspondent à  $D=12, 16, \dots$

1.4. LES MINORATIONS GÉNÉRALES DE  $\mathcal{C}$ . — La constante d'Hurwitz  $C$  d'un ordre  $A$  de discriminant  $-D$ , borne inférieure des constantes d'approximation, est aussi l'inverse de la borne inférieure des nombres positifs  $\gamma$  tels que  $|q(qx-p)| < \gamma$  ait une infinité de solutions  $p, q (q \neq 0)$  dans  $A$ , quel que soit  $x$ . Or le point  $(p, q)$  décrit dans  $\mathcal{C}^2$  le réseau  $A^2$ , dont le déterminant (en tant que module de rang 4 sur  $\mathbb{Z}$ ) est égal au carré de celui de  $A$ , soit  $\frac{D}{4}$ . Soit  $H$  le domaine de  $\mathcal{C}^2$  défini par  $|zz'| < 1$ , et soit  $h$  son déterminant critique ( $H$  étant considéré comme un ensemble étoilé de l'espace à quatre dimensions réelles)<sup>(12)</sup>.  $H$  étant un invariant par les transformations  $(z, z') \rightarrow (zk, \frac{z'}{k})$ , on a, d'après une remarque de Davenport-Rogers<sup>(13)</sup>,  $h \leq C^2 \frac{D}{4}$ , c'est-à-dire  $C \geq 2 \sqrt{\frac{h}{D}}$ .

Les minorations connues de  $h$  utilisent l'inscription dans  $H$  des jauges définies par  $|z| + |z'| < 2$ <sup>(14)</sup> ou encore  $|z|^2 + |z'|^2 < 2$ <sup>(15)</sup>. Bien que cette deuxième jauge soit la plus petite, c'est une boule, dont le déterminant critique est connu<sup>(16)</sup>, et elle se trouve donner le résultat le meilleur.

(12) Pour la terminologie géométrique en usage, voir par exemple : CHABAUTY, *Sur les minima arithmétiques des formes* (Ann. Sc. Éc. Norm. Sup., t. 66, 1949, p. 367-394).

(13) DAVENPORT-ROGERS, *Diophantine inequalities with an infinity of solutions* (Phil. Trans. Roy. Soc. London, A, t. 242, 1949-1950, p. 311-344, théorème 1 a).

(14) HOFREITER, *Diophantische Approximationen in imaginären quadratischen Zahlkörpern* (Mh. Math. Phys., t. 43, 1936, p. 175-190). Voir aussi : PERRON, *Diophantische Ungleichungen in imaginären quadratischen Körpern* (Mat. Tidsskrift, B, 1949, p. 1-17).

(15) PERRON, *Diophantische Approximationen in imaginären quadratischen Zahlkörpern, insbesondere im Körper  $\mathbb{K}(i\sqrt{2})$*  (Math. Z., t. 37, 1933, p. 749-767); OPPENHEIM, *Diophantische Approximationen in imaginären quadratischen Zahlkörpern* (Mh. Math. Phys., t. 46, 1937, p. 196).

(16) KORKINE et ZOLOTAREFF, *Sur les formes quadratiques positives quaternaires* (Math. Ann., t. 3, 1872, p. 581-583).



On obtient ainsi  $C \geq \sqrt[8]{\frac{8}{D}}$  (Oppenheim). Une meilleure estimation de  $h$  permettrait de remplacer 8 par un nombre plus grand, mais, même avec la détermination exacte de  $h$ , on ne pourra dépasser  $3\sqrt[4]{13} = 10,8\dots$  puisque  $C_3 = \sqrt[4]{13}$ , et, même alors, la minoration de  $C$  ainsi obtenue ne sera pas très précise pour les autres ordres.

## II. — Réduites, suites de meilleure approximation. Exemples.

II. 1. Une fraction  $\frac{p_0}{q_0}$  est dite une *réduite* du nombre  $\xi$  s'il n'existe pas de fraction à la fois plus simple et meilleure qui ne lui soit équivalente, c'est-à-dire, sous forme explicite, si les systèmes

$$(s') \quad |q| \leq |q_0|, \quad |q\xi - p| < |q_0\xi - p_0|$$

et

$$(s'') \quad |q| < |q_0|, \quad |q\xi - p| \leq |q_0\xi - p_0|$$

sont impossibles en entiers  $p, q$  non tous deux nuls.

(Cette définition pourrait être modifiée de plusieurs façons en ce qui concerne les « cas limites ». Nous nous y tiendrons pour simplifier. On observera que, dans le cas rationnel, on obtient ainsi les « réduites » du développement en fraction continue, sauf peut-être au début.)

Deux réduites aussi simples sont donc équivalentes. Si l'on convient de représenter un ensemble de réduites équivalentes par l'une quelconque d'entre elles, les réduites se rangent en une suite  $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$  telle que  $|q_n|$  croît strictement et  $|q_n\xi - p_n|$  décroît strictement lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Cette suite s'appelle la *suite de meilleure approximation* de  $\xi$ . La première des réduites (que la tradition affecte, dans le cas rationnel, de l'indice  $-1$ ) est équivalente à  $\frac{1}{0}$  et l'on peut prendre  $\frac{1}{0}$  elle-même.

On voit immédiatement qu'on peut toujours trouver une réduite plus simple et meilleure qu'une fraction donnée. Il en résulte que, si  $\frac{p_0}{q_0}$  et  $\frac{p_1}{q_1}$  sont deux réduites consécutives (dans la suite de meilleure approximation), il n'existe pas de fraction  $\frac{p}{q}$  strictement meilleure que  $\frac{p_0}{q_0}$  et strictement plus simple que  $\frac{p_1}{q_1}$ . Car si le système

$$(t) \quad |q\xi - p| < |q_0\xi - p_0|, \quad |q| < |q_1|$$

était possible, il serait vérifié par au moins une réduite, ce qui contredit l'hypothèse que  $\frac{p_0}{q_0}$  et  $\frac{p_1}{q_1}$  sont consécutives. Réciproquement, deux réduites  $\frac{p_0}{q_0}$

et  $\frac{p_1}{q_1}$  telles que  $(t)$  soit impossible sont consécutives. Il suffit même de supposer, outre l'impossibilité de  $(t)$ , celles de  $(s'')$  pour  $\frac{p_0}{q_0}$  et de  $(s')$  pour  $\frac{p_1}{q_1}$ . En effet, celles de  $(s')$  pour  $\frac{p_0}{q_0}$  et de  $(s'')$  pour  $\frac{p_1}{q_1}$  sont des conséquences de celle de  $(t)$ . Plus généralement, pour vérifier qu'une certaine séquence de fractions, rangées par  $|q|$  strictement croissantes, est composée de réduites consécutives de  $\xi$ , il suffit de vérifier l'impossibilité de tous les systèmes  $(t)$ , de  $(s')$  pour la première fraction et de  $(s'')$  pour la dernière. Par conséquent, pour vérifier qu'une suite de fractions, rangées par  $|q|$  strictement croissantes et commençant par  $\frac{1}{0}$ , est la suite de meilleure approximation de  $\xi$ , il suffit de vérifier l'impossibilité de tous les systèmes  $(t)$ . Pour vérifier qu'une suite de fractions, rangées par  $|q|$  strictement croissantes, à partir d'un certain rang, est identique, à partir d'un certain rang, à la suite de meilleure approximation de  $\xi$ , il suffit de vérifier que le système  $(t)$  est impossible à partir d'un certain rang.

II. 2. Les deux réduites consécutives  $\frac{p_0}{q_0}$  et  $\frac{p_1}{q_1}$  du nombre  $\xi$  ont pour déterminant  $p_0q_1 - p_1q_0$  un entier  $d$  évidemment non nul. On peut donc écrire toute fraction  $\frac{p}{q}$  sous la forme

$$p = \frac{ap_1 + bp_0}{d}, \quad q = \frac{aq_1 + bq_0}{d},$$

où  $a$  et  $b$  sont des entiers non tous deux nuls tels que

$$ap_1 + bp_0 \equiv 0 \pmod{d}, \quad aq_1 + bq_0 \equiv 0 \pmod{d}.$$

Les points  $(a, b)$  décrivent un réseau  $L$  de l'espace à quatre dimensions, qui s'identifie à  $E \times E$  si  $|d| = 1$ .

Le fait que  $\frac{p_0}{q_0}$  et  $\frac{p_1}{q_1}$  sont des réduites consécutives s'exprime par l'impossibilité des systèmes :  $(s')$  pour  $\frac{p_0}{q_0}$ , soit  $(s'_0)$ ;  $(s'')$  pour  $\frac{p_1}{q_1}$ , soit  $(s''_1)$ ;  $(t)$ .

Ces systèmes prennent, en posant

$$\underline{x} = -\frac{q_0\xi - p_0}{q_1\xi - p_1}, \quad \underline{y} = -\frac{q_0}{q_1},$$

respectivement les formes

$$\begin{array}{ll} (S'_0) & |b\underline{x} - a| < |d|, \quad |b\underline{y} - a| \leq |d| \\ (S''_1) & |b\underline{x} - a| \leq |\underline{x}d|, \quad |b\underline{y} - a| < |\underline{y}d|; \\ (T) & |b\underline{x} - a| < |\underline{x}d|, \quad |b\underline{y} - a| < |d|. \end{array}$$

L'impossibilité de ces systèmes dans  $L$  (privé de l'origine) est nécessaire et

suffisante pour que  $\frac{p_0}{q_0}$  et  $\frac{p_1}{q_1}$  soient des réduites consécutives (sous réserve qu'on les ait bien rangées, c'est-à-dire que  $|\underline{y}| < 1$ ).

*Remarque.* — En particulier,  $\frac{p_0}{q_0}$  et  $\frac{p_1}{q_1}$  sont certainement deux réduites consécutives si  $|\underline{y}| < 1$  et si le système

$$(T^*) \quad |bx - a| \leq |xd|, \quad |by - a| \leq |d|$$

n'a dans L que des solutions congrues à  $(0, 0) \pmod{d}$ , auquel cas nous dirons brièvement qu'il est impossible.

D'autre part, nous avons vu que pour toute fraction  $\frac{p}{q}$  il y a une réduite  $\frac{p'}{q'}$  telle que  $|q'| \leq |q|$ ,  $|q'\xi - p'| \leq |q\xi - p|$  et par suite  $|q'(q'\xi - p')| \leq |q(q\xi - p)|$ . Il en résulte que, si une suite  $\frac{p_n}{q_n}$  de fractions est identique à la suite de meilleure approximation de  $\xi$  à partir d'un certain rang, on a

$$C(\xi) = \overline{\lim} \frac{1}{|q_n(q_n\xi - p_n)|} \quad (17).$$

En posant  $d_n = q_{n-1}p_{n-2} - q_{n-2}p_{n-1}$ ,  $x_n = -\frac{q_{n-2}\xi - p_{n-2}}{q_{n-1}\xi - p_{n-1}}$ ,  $y_n = -\frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}$ , on a l'identité  $x_n - y_n = \frac{d_n}{q_{n-1}(q_{n-1}\xi - p_{n-1})}$ , et l'on obtient par suite

$$C(\xi) = \overline{\lim} \left| \frac{x_n - y_n}{d_n} \right|.$$

II. 3. REMARQUE SUR LES RÉDUITES DES NOMBRES RÉELS. — Soient  $\frac{p_0}{q_0}$  et  $\frac{p_1}{q_1}$  deux réduites consécutives du développement en fraction continue usuel d'un nombre réel irrationnel  $\xi$ . On a donc, comme l'on sait, en posant

$$y = -\frac{q_0}{q_1} \quad \text{et} \quad x = -\frac{q_0\xi - p_0}{q_1\xi - p_1}, \\ -1 < y < 0 \quad \text{et} \quad x > 1.$$

Nous allons montrer que  $\frac{p_0}{q_0}$  et  $\frac{p_1}{q_1}$  sont encore deux réduites consécutives (à notre sens) de  $\xi$  dans un corps imaginaire quadratique quelconque.

Il suffit de prouver l'impossibilité du système

$$(T^*) \quad |bx - a| \leq x, \quad |by - a| \leq 1$$

en entiers (de E) non nuls (l'un et l'autre).

---

(17) Cette propriété, bien connue dans le cas réel, est pourtant omise par la plupart des traités classiques.

Or on a

$$\|by - a\| = \|b\|y^2 + \|a\| - y[a, b], \quad \left\|b - \frac{a}{x}\right\| = \|b\| + \frac{\|a\|}{x^2} - \frac{[a, b]}{x}$$

et l'on écrit donc le système (T\*) sous la forme

$$[a, b]y \geq \|b\|y^2 + \|a\| - 1, \quad \frac{[a, b]}{x} \geq \|b\| - 1 + \frac{\|a\|}{x^2},$$

ce qui implique, en vertu de  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ ,  $[a, b]y > 0$  et  $\frac{[a, b]}{x} > 0$ , ce qui est impossible.

Ainsi, la suite de meilleure approximation (à notre sens) d'un nombre réel irrationnel est toujours identique à son développement en fraction continue usuel. Il en sera évidemment de même pour les meilleures suites régulières (voir IV).

Nous donnerons maintenant quatre exemples qui conduisent à quelques remarques et qui montrent comment l'on calcule des constantes d'approximation, et par suite, comment l'on peut assigner aux constantes d'Hurwitz des limitations supérieures.

II. 4. PREMIER EXEMPLE. — Considérons dans le corps  $(R(\sqrt{-19}))$  la suite  $\Phi$  de fractions :  $\frac{1}{0}, \frac{\omega}{1}, \frac{-4}{-\omega}, \frac{-3\omega}{-4}, \frac{11}{3\omega}, \frac{8\omega}{11}, \dots$ , soit  $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$  avec  $n = -1, 0, 1, 2, 3, 4 \dots$  obtenue par un « développement en fraction continue » (pour l'instant purement formel) où les « quotients incomplets »  $a_n$  sont définis par  $a_{2k} = \omega$ ,  $a_{2k+1} = -\omega$ .

De la récurrence  $y_{2k} = \frac{4y_{2k+2} - \omega}{\omega y_{2k+2} - 1}$ , on tire  $\frac{y_{2k+2} - x}{y_{2k+2} - y} = \lambda \frac{y_{2k} - x}{y_{2k} - y}$ , où  $x = \frac{\omega}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$  et  $y = \frac{\omega}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$  sont les racines de l'équation  $\omega z^2 - 5z + \omega = 0$ , et  $\lambda = \frac{1}{2}(7 + 3\sqrt{5})$  est un nombre réel supérieur à 1. Donc  $y_{2k}$  tend rapidement vers  $y$  en restant sur la droite  $0\omega$ , et même sur l'intervalle  $(0, y)$ . De même  $y_{2k+1}$  tend vers  $-\bar{y}$  sur l'intervalle  $(0, -\bar{y})$ , exception faite pour  $y_1$  qui est en 0. En particulier, on a, pour tout  $n$ ,  $|y_n| < 1$ . Les dénominateurs des fractions de  $\Phi$  croissent strictement en module.

Montrons que  $\Phi$  est la suite de meilleure approximation de  $x$ . D'après les formules de récurrence, on a  $x_{2k} = x$  et  $x_{2k+1} = -\bar{x}$  puisque c'est vrai au début (la vérification la plus simple résulte du cas  $k=0$  par l'introduction d'une fraction à rôle uniquement formel  $\frac{p_{-2}}{q_{-2}} = \frac{0}{1}$ ). Il suffira donc, eu égard à la

symétrie des rangs pairs et impairs, de prouver l'impossibilité du système analogue à (T) :

$$|bx - a| < |x| \quad |by' - a| < 1$$

où  $y'$  est un nombre quelconque de l'intervalle  $(0, y)$ .

On a nécessairement  $|b| < \frac{1+|x|}{|x-y'|} < \frac{1+|x|}{|x-y|} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} < \sqrt{7}$ , donc il suffit d'examiner les cas  $b = 1, 2, \omega$  et  $\bar{\omega}$ .

Pour  $b = 1$ , la seconde équation implique  $a = 0$  ou  $1$ , ce qui contredit la première.

Il en est de même pour  $b = 2$ , puisque,  $y$  étant sur la frontière du cercle  $\frac{(\omega)}{2}$ ,  $y'$  lui est extérieur.

Pour  $b = \omega$ , on a  $by = \frac{\omega-5}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ , d'où nécessairement  $a = -1$  ou  $-2$ , mais  $|\omega x + 1| > |\omega x + 2| = \left| \frac{1+\sqrt{5}}{2} \left(\frac{\omega}{\sqrt{5}} - 1\right) \right| > \frac{1+\sqrt{5}}{2} = |x|$ , ce qui contredit la première équation.

Enfin, pour  $b = \bar{\omega}$ , on a  $by = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$ , d'où nécessairement  $a = 1$  ou  $2$ , mais  $|\bar{\omega}x + 1| > |\bar{\omega}x - 2| = |x|$ , ce qui contredit la première équation.

Donc  $\Phi$  est bien la suite de meilleure approximation de  $x$ , et, puisque  $|x_n - y_n|$  a pour limite  $|x - y| = 1$ , on a  $C(x) = 1$ . En particulier, on a donc  $C_{10} \leq 1$ . Nous montrerons dans VII qu'en fait,  $C_{10} = 1$ .

*Remarque.* — Des raisonnements analogues dans le cas de  $R(\sqrt{-5})$  montrent que pour  $x = \frac{\theta}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \theta + 1/\theta + \dots$ , on a encore  $C(x) = 1$ , donc aussi  $C_{20} \leq 1$ .

II. 5. DEUXIÈME EXEMPLE. — Considérons dans le corps  $R(\sqrt{-11})$  la suite  $\Psi$  de fractions  $\frac{p_n}{q_n}$  (commençant à  $n = -1$ ).

$$\frac{1}{0}, \quad \frac{1}{1}, \quad \frac{\bar{\omega}}{-\omega}, \quad \frac{\bar{\omega}+1}{\bar{\omega}}, \quad \frac{\omega+2}{2}, \quad \frac{4}{\bar{\omega}+2}, \quad \frac{2-3\omega}{-1-2\omega}, \quad \frac{6-3\omega}{2-3\omega}, \quad \dots$$

obtenue par la fraction continue où  $a_{2k} = 1$ ,  $a_{4k+1} = -\omega$ ,  $a_{4k-1} = -\bar{\omega}$ .

Pour prouver la croissance des dénominateurs, on vérifie immédiatement que  $|y_{2k}| < 1$  entraîne  $|y_{2k+3}| < 1$  et  $|y_{2k+4}| < 1$ .

Comme  $y_2 = \frac{1}{\omega}$  et  $y_4 = -\frac{\bar{\omega}}{2}$  vérifient la condition, elle est toujours vraie, sauf peut-être pour  $y_1$  et  $y_3$ . En fait  $y_1 = 0$ , et  $y_3 = 1$ . La croissance est donc stricte, sauf entre  $|q_1|$  et  $|q_2|$ . Donc  $\Psi$  ne peut être une suite de meilleure approximation (au moins avec les conventions adoptées plus haut).

Montrons pourtant qu'elle est identique, à partir d'un certain rang (qu'on précisera facilement), à la suite de meilleure approximation du nombre  $x = \frac{2 + \sqrt{5} + \sqrt{-11}}{4}$ , l'une des racines de l'équation

$$z = 1 + 1/\omega + 1/1 + 1/\bar{\omega} + 1/z \quad \text{ou} \quad 2z^2 = z(1 + 2\omega) + 2 - \omega$$

(l'autre racine étant  $y = \frac{2 - \sqrt{5} + \sqrt{-11}}{4}$ ).

On a donc  $x_{4k} = x$ ,  $x_{4k+2} = \bar{x}$ ,  $x_{4k+1} = x'$ ,  $x_{4k-1} = \bar{x}'$ , avec  $x' = \frac{1}{x-1}$ . De plus, comme plus haut,  $\lim y_{4k} = y$ , donc  $y_{4k+2}$ ,  $y_{4k+1}$  et  $y_{4k-1}$  tendent respectivement vers  $\bar{y}$ ,  $y'$  et  $\bar{y}'$ , avec  $y' = \frac{1}{y-1}$ .

Il nous suffira donc de prouver l'impossibilité du système (T), d'une part avec  $\underline{x} = x$  et  $\underline{y}$  voisin de  $y$ ; d'autre part avec  $\underline{x} = x'$ , et  $\underline{y}$  voisin de  $y'$ .

Or on a  $|b| < \frac{1+x}{|\underline{x}-\underline{y}|}$  qui est voisin, dans le premier cas, de 2,097, et, dans le second cas, de 2,213. Donc, en tout cas, on peut se borner à  $b = 1, \omega, \bar{\omega}$  ou 2 tandis que, d'après les majorations analogues pour  $|a|$ ,  $a$  ne peut prendre que ces valeurs ou des symétriques. Examinons successivement les huit cas obtenus suivant les valeurs de  $\underline{x}$  et  $b$ .

Supposons d'abord  $\underline{x} = x$ .

$b = 1$ . — Alors, d'après la deuxième équation,  $a = -\bar{\omega}$ . En effet, bien que  $y$  soit sur la frontière du cercle  $(\omega)$ ,  $y_{4k} \in e(\omega)$ , ce qui s'établit par récurrence : on a  $y_2 \in e(\bar{\omega})$ , et  $y_{4k} \in e(\omega)$  entraîne  $y_{4k+2} \in e(\bar{\omega})$  qui entraîne  $y_{4k+4} \in e(\omega)$ . Pour  $a = -\bar{\omega}$ , on a  $|bx - a| = |x + \bar{\omega}| = \sqrt{2 + \frac{\sqrt{5}}{2}} > |x|$  puisque  $|x| = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{5}}{2}$ , d'où l'impossibilité.

$b = \omega$ . — La deuxième équation donne  $a = -1$  ou  $-2$ , mais on a  $|\omega x + 2| > |\omega x + 1| = \sqrt{\frac{5}{2} + \sqrt{5}} > |x|$ .

$b = \bar{\omega}$ . — La deuxième équation donne  $a = 1$  ou  $2$ , mais on a

$$|\bar{\omega}x - 1| > |\bar{\omega}x - 2| = |x|.$$

$b = 2$ . — La deuxième équation donne  $a = \omega$  ou  $-\bar{\omega}$ , mais on a  $|2x + \bar{\omega}| > |2x - \omega| = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > |x|$ .

Il y a donc impossibilité dans tous les cas où  $\underline{x} = x$ .

Supposons maintenant  $\underline{x} = x'$ .

$b = 1$ . — La deuxième équation donne  $a = -1$ , mais on a  $|x' + 1| > |x'|$ .

$b = \omega$ . — La deuxième équation donne  $a = \omega$ , mais on a

$$|\omega x' - \omega| = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} |x'| > |x'|.$$

$b = \bar{\omega}$ . — La deuxième équation donne  $a = -1$ , mais on a

$$|\bar{\omega} x' + 1| = \left| \frac{2x'}{\sqrt{5}} \right| = |x'|.$$

$b = 2$ . — D'après  $y_{4k} \in e(\omega)$ , on a  $y_{4k+1} \in e\left(\frac{-\omega}{2}\right)$ , donc la deuxième équation donne  $a = -1$ , mais on a  $|2x' + 1| > |x'|$ .

Il y a donc impossibilité dans tous les cas.  $\Psi$  est, à partir d'un certain rang, la suite de meilleure approximation de  $x$ , donc  $C(x) = \overline{\lim} |x_n - y_n|$ . Or  $|x_{2n} - y_{2n}|$  a pour limite  $|x - y| = \frac{\sqrt{5}}{2}$ , tandis que  $|x_{2n+1} - y_{2n+1}|$  a pour limite 1. Donc  $\overline{\lim} |x_n - y_n| = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ;  $C(x) = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ; en particulier, on a donc  $C_{11} \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$ . Nous montrerons dans V qu'en fait,  $C_{11} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ .

II. 6. TROISIÈME EXEMPLE. — Dans le cas rationnel, la suite de meilleure approximation est fournie par un développement en fraction continue bien déterminé, car deux fractions équivalentes par rapport à un nombre  $x$  irrationnel sont nécessairement absolument équivalentes (leurs termes sont simultanément identiques ou opposés). L'exemple qui suit illustre la différence de situation dans les cas complexes.

Considérons dans le corps  $R(\sqrt{-1})$  la suite X de fractions  $\frac{p_n}{q_n}$  (commençant à  $n = -1$ )

$$\frac{1}{0}, \frac{2}{1}, \frac{1-4\theta}{-2\theta}, \frac{8\theta}{1+4\theta}, \frac{-15-4\theta}{-8}, \frac{-3\theta}{-15+4\theta}, \frac{56\theta-15}{3\theta}, \dots$$

définie par la fraction continue  $2, -2\theta, -2, 2\theta, 2, \dots$ , où  $a_n = 2(-\theta)^n$ . On montrera facilement, comme ci-dessus, que  $|y_n| < 1$ , et que X est la suite de meilleure approximation du nombre  $\alpha = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\theta}{2}$  (voir d'ailleurs IV.5).

De plus, on voit immédiatement par récurrence que  $\mathcal{J}(y_{2k}) = \frac{(-1)^k}{2}$  et  $x_{2k} = (-1)^k \alpha$  de sorte que la fraction  $\frac{(-1)^k(2+\theta)p_{2k-1} + p_{2k-2}}{(-1)^k(2+\theta)q_{2k-1} + q_{2k-2}}$  ou  $\frac{p_{2k} + (-1)^k\theta p_{2k-1}}{q_{2k} + (-1)^k\theta q_{2k-1}}$  est équivalente à  $\frac{p_{2k}}{q_{2k}}$  sans lui être absolument équivalente.

Ainsi, la suite de meilleure approximation de  $\alpha$  peut être représentée par une infinité de développements en fraction continue équivalents.

On notera que  $|x_n - y_n|$  tend vers  $\sqrt{3}$ ; donc  $C(\alpha) = \sqrt{3}$ ; or on sait, d'après Ford, que c'est précisément la valeur de  $C_4$ .

II. 7. QUATRIÈME EXEMPLE. — Terminons par exemple plus compliqué, où l'on part d'une suite de fractions *non régulière* (c'est-à-dire où deux fractions consécutives ne sont pas toujours adjacentes).

Considérons dans le corps  $R(\sqrt{-43})$  la suite  $\Xi$  de fractions  $\frac{p_n}{q_n}$  (commençant à  $n = -1$ )

$$\frac{1}{0}, \quad \frac{\omega}{2}, \quad \frac{-5}{-\omega}, \quad \frac{-3\omega}{-7}, \quad \frac{14}{3\omega}, \quad \frac{8\omega}{19} \quad \dots$$

définie par  $p_{-1} = 1$ ,  $q_{-1} = 0$ ,  $p_0 = \omega$ ,  $q_0 = 2$  et les formules de récurrence :

$$p_n = \frac{a_n p_{n-1} + b_n p_{n-2}}{b_{n-1}}, \quad q_n = \frac{a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2}}{b_{n-1}},$$

avec  $a_{2k} = \omega$ ,  $b_{2k} = 2$ ;  $a_{2k+1} = -\bar{\omega}$ ,  $b_{2k+1} = 1$ .

On vérifie facilement que  $p_n$  et  $q_n$  sont toujours entiers, et que  $|y_n| < 1$ .

En prenant  $x = \frac{7+\sqrt{5}}{22}\omega$ , racine de  $\bar{\omega}x^2 - 7x + \omega = 0$ , on a  $x_{2k} = x$  et  $x_{2k+1} = -\frac{4+\sqrt{5}}{11}\bar{\omega} = x'$ , tandis que  $y_{2k}$  et  $y_{2k+1}$  tendent respectivement vers les nombres conjugués sur  $R(\sqrt{-43})$ ,  $y$  et  $y'$ . De plus,  $d_{2k} = 1$  et  $d_{2k+1} = 2$ .

Montrons d'abord que  $\frac{p_{2k}}{q_{2k}}$  et  $\frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}$  sont deux réduites consécutives. Il suffit de vérifier l'impossibilité du système (T\*) avec  $\underline{x} = x$ ,  $\underline{y} = y$ ,  $d = 1$  <sup>(18)</sup>.

Or ce système implique  $|b| \leq \frac{1+|x|}{|x-y|} = \frac{2\sqrt{11}+7+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} < 3,56 < \sqrt{13}$ , donc il suffit d'examiner les cas  $b = 1, 2, 3, \omega, \bar{\omega}, \omega+1$  et  $\bar{\omega}+1$ .

L'impossibilité évidente de l'équation  $|by-a| \leq 1$  lorsque  $1 \leq \mathcal{J}(by) \leq \frac{\sqrt{43}}{2} - 1$  exclut les cas  $b = 2, 3, \omega+1$ .

Pour  $b = 1$ , on a nécessairement  $a = 0$ .

Pour  $b = \bar{\omega}$ ,  $by = \frac{7-\sqrt{5}}{2}$  donc  $a = 2$  ou  $3$ , mais on a

$$|bx-a| = \left| \frac{7+\sqrt{5}}{2} - a \right| \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2} > |x|.$$

Pour  $b = \bar{\omega}+1$ , raisonnement analogue.

<sup>(18)</sup> Le système (T\*), n'ayant qu'un nombre fini de solutions pour  $\underline{x}$  et  $\underline{y}$  voisins de  $x$  et  $y$ , est impossible pour  $\underline{x}$  et  $\underline{y}$  suffisamment voisins de  $x$  et  $y$  s'il est impossible pour  $\underline{x} = x$ ,  $\underline{y} = y$ .



Pour  $b = \omega$ ,  $by = y - \frac{7-\sqrt{5}}{2}$ , d'où  $a = -2$ , mais on a

$$|bx - a| = \left| x - \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right| > |x|.$$

L'impossibilité est donc établie.

Étudions maintenant le système (T) avec  $\underline{x} = x'$ ,  $\underline{y} = y'$ ,  $d = 2$ . Le réseau L est défini par le système

$$ap_{2k} + bp_{2k-1} \equiv 0 \pmod{2}, \quad aq_{2k} + bq_{2k-1} \equiv 0 \pmod{2}$$

qui s'écrit, d'après les relations de récurrence :

$$\begin{aligned} (a\omega + b)p_{2k-1} + 2p_{2k-2} &\equiv 0 \pmod{2} \\ (a\omega + b)q_{2k-1} + 2q_{2k-2} &\equiv 0 \pmod{2}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire encore  $a\omega + b \equiv 0 \pmod{2}$  ou  $a \equiv b\bar{\omega} \pmod{2}$ . D'après

$$|b| \leq \frac{2(1+|x'|)}{|x'-y'|} = \frac{4+\sqrt{5}+\sqrt{11}}{\sqrt{5}} < 4,27 < \sqrt{19}, \text{ il suffit de considérer les cas}$$

où  $b = 1, 2, 3, 4, \omega, \bar{\omega}, \omega \pm 2, \bar{\omega} \pm 2$ .

Rangeons-les selon leur valeur modulo 2.

1°  $b \equiv 0$ ,  $a \equiv 0$ . Pour  $b = 2$  ou  $4$ ,  $|by' - a| \leq 2$  est impossible.

2°  $b \equiv 1$ ,  $a \equiv \bar{\omega}$ . Pour  $b = 1$ ,  $|by' - a| \leq 2$  est impossible.

Pour  $b = 3$ ,  $|by' - a| \leq 2$  implique  $a = -\bar{\omega}$ . On a alors

$$|bx' - a| = \left| -\frac{\bar{\omega}}{11} (1 + 3\sqrt{5}) \right| < 2|x'|.$$

Ainsi  $b = 3$ ,  $a = -\bar{\omega}$  est une solution de (T).

3°  $b \equiv \bar{\omega}$ ,  $a \equiv \omega$ . Pour  $b = \bar{\omega}$  ou  $\bar{\omega} - 2$ , on a  $|\mathcal{J}(by')| = \frac{4-\sqrt{5}}{11} \frac{\sqrt{43}}{2}$ , donc  $|by' - a| \leq 2$  est impossible.

Pour  $b = \bar{\omega} + 2$ ,  $by' = 4 - \sqrt{5} - \frac{3\bar{\omega}}{11} (4 - \sqrt{5})$ , d'où  $a = \omega$  ou  $\omega + 2$ .

Si  $a = \omega$ ,  $|bx' - a| = \left| 3 + \sqrt{5} - \bar{\omega} \frac{3\sqrt{5}+1}{11} \right| > 2|x'|.$

Si  $a = \omega + 2$ ,  $|bx' - a| = \left| 1 + \sqrt{5} - \bar{\omega} \frac{3\sqrt{5}+1}{11} \right| < 2|x'|.$

Donc  $b = \bar{\omega} + 2$ ,  $a = \omega + 2$  est une solution de (T).

4°  $b \equiv \omega$ ,  $a \equiv 1$ . Pour  $b = \omega$ ,  $by' = -(4 - \sqrt{5})$  d'où  $a = -1$  ou  $-3$  ;  
or  $|bx' + 1| = 3 + \sqrt{5} > 2|x'|$  et  $|bx' + 3| = 1 + \sqrt{5} < 2|x'|.$

Donc  $b = \omega$ ,  $a = -3$  est une solution de (T).

Pour  $b = \omega + 2$ ,  $by' = -(4 - \sqrt{5}) - \frac{2\bar{\omega}}{11} (4 - \sqrt{5})$ , d'où  $a = -1$  ou  $-3$ ,

mais  $|bx' + 1|^2 = \frac{16}{11}(17 + 7\sqrt{5}) > 4|x'|^2$ , et  $|bx' + 3|^2 = \frac{8}{11}(21 + 8\sqrt{5}) > 4|x'|^2$ .

Pour  $b = \omega - 2$ ,  $by' = -(4 - \sqrt{5}) + \frac{2\bar{\omega}}{11}(4 - \sqrt{5})$ , d'où  $a = -1$  ou  $-3$ ,  
mais  $|bx' + 1|^2 = \frac{12}{11}(17 + 7\sqrt{5}) > 4|x'|^2$  et  $|bx' + 3|^2 = 4(3 + \sqrt{5}) > 4|x'|^2$ .

Finalement, (T) a pour solutions  $(-\bar{\omega}, 3)$ ,  $(\omega + 2, \bar{\omega} + 2)$  et  $(-3, \omega)$ ;  $p_{2k}$  et  $p_{2k+1}$  ne sont pas des réduites consécutives, pour  $k$  assez grand.

Parmi les fractions intermédiaires, il serait aisé de voir lesquelles sont des réduites. Il vaut mieux remarquer que c'est inutile pour déterminer  $C(x)$ .

En effet, si  $p = \frac{ap_{2k} + bp_{2k-1}}{2}$ ,  $q = \frac{aq_{2k} + bq_{2k-1}}{2}$ , on a

$$\frac{q}{q_{2k}} = \frac{a - by_{2k+1}}{2}, \quad \frac{qx - p}{q_{2k}x - p_{2k}} = \frac{a - bx_{2k+1}}{2},$$

d'où

$$\frac{|q(qx - p)|}{|q_{2k}(q_{2k}x - p_{2k})|} = \left| \frac{(by_{2k+1} - a)(bx_{2k+1} - a)}{4} \right|.$$

On a  $\frac{1}{C(x)} = \lim_{P \rightarrow Q} |Q(Qx - P)|$ , où  $\frac{P}{Q}$  décrit  $\Xi$ , et les trois familles de fractions qui correspondent aux solutions de (T), cet ensemble de fractions englobant certainement toutes les réduites. Or  $\left| \frac{(by' - a)(bx' - a)}{4} \right|$  vaut respectivement :

pour  $(-\bar{\omega}, 3)$  :  $\left| \frac{\bar{\omega}^2}{4} \frac{(3\sqrt{5} - 1)}{11} \frac{(3\sqrt{5} + 1)}{11} \right| = 1$ ;

pour  $(\omega + 2, \bar{\omega} + 2)$  : racine carrée de  $\frac{(96 + 24\sqrt{5})(96 - 24\sqrt{5})}{4^2 \cdot 11^2} = \frac{36}{11} > 1$ ;

pour  $(-3, \omega)$  :  $\frac{(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)}{4} = 1$ .

Comme toutes ces quantités sont supérieures à 1, on a  $C(x) = \overline{\lim} \left| \frac{x_n - y_n}{d_n} \right|$  bien que  $\Xi$  ne soit pas la suite de meilleure approximation de  $x$ ; c'est-à-dire, puisque  $\left| \frac{x_{2k+1} - y_{2k+1}}{2} \right|$  et  $|x_{2k} - y_{2k}|$  ont la même limite  $\sqrt{\frac{5}{11}}$ ,  $C(x) = \sqrt{\frac{5}{11}}$ . En particulier, on a donc  $C_{43} \leq \sqrt{\frac{5}{11}}$ . La valeur exacte de  $C_{43}$  est inconnue.

Après ces exemples, on conçoit que dans chaque cas particulier, l'obtention de majorations « raisonnables » de  $C$  n'exige qu'une patience proportionnée à la complication du corps.

### III. — Réduites. Table des valeurs du déterminant de deux réduites consécutives.

III. 1. Soient  $\frac{p_0}{q_0}$  et  $\frac{p_1}{q_1}$  deux réduites consécutives d'un nombre  $\xi$  qui n'appartient pas à  $K$ , à éléments dans un ordre  $A$  de  $K$ , de discriminant  $-D$ . Ceci

implique, avec les notations de II. 2 ( $\underline{x}$  et  $\underline{y}$  étant remplacés par  $x$  et  $y$ ), que le réseau  $L$  des couples  $(a, b)$  d'éléments de  $A$  vérifiant les conditions

$$ap_1 + bp_0 \equiv 0 \pmod{d} \quad aq_1 + bq_0 \equiv 0 \pmod{d}$$

n'a d'autre point que l'origine dans la région définie par

$$\left| b - \frac{a}{x} \right| < |d| \quad |by - a| < |d|.$$

On peut encore dire que le réseau  $L'$  transformé de  $L$  par la transformation

$$(a, b) \rightarrow \left( \frac{by - a}{d}, \frac{b - \frac{a}{x}}{d} \right)$$

n'a d'autre point que l'origine dans la région définie par  $|z_1| < 1$ ,  $|z_2| < 1$ ,  $z_1$  et  $z_2$  étant deux variables complexes.

$L$  est transformé en  $A^2$  par la transformation  $(a, b) \rightarrow \left( \frac{ap_1 + bp_0}{d}, \frac{aq_1 + bq_0}{d} \right)$ , donc son déterminant (en tant que réseau à quatre dimensions réelles) est

$$\Delta(L) = \|d\| \Delta(A^2) = \frac{D \|d\|}{4}.$$

Le déterminant de  $L'$  est, de même,  $\frac{D \left| 1 - \frac{y}{x} \right|^2}{4 \|d\|}$ .

Si nous désignons par  $\beta$  le déterminant critique du « bicercle » défini par  $|z_1| < 1$ ,  $|z_2| < 1$ , nous obtenons donc l'inégalité

$$\beta \leq \frac{D \left| 1 - \frac{y}{x} \right|^2}{4 \|d\|} \quad \text{ou bien} \quad |d| \leq \sqrt{\frac{D}{4\beta}} \left| 1 - \frac{y}{x} \right|$$

ou encore, compte tenu de l'identité  $\left| 1 - \frac{y}{x} \right| = \left| \frac{d}{q_1(q_0\xi - p_0)} \right|$ ,

$$|q_1(q_0\xi - p_0)| \leq \sqrt{\frac{D}{4\beta}}.$$

On obtient donc un théorème sur l'approximation des réduites analogue à celui qui est classique dans le cas rationnel, avec la constante 1 au second membre.

Ici, le second membre dépend de la valeur de  $\beta$ , laquelle est encore inconnue.  $\beta$  est évidemment inférieur au carré du déterminant critique du cercle, soit  $\frac{3}{4} = 0,75$ .

En sens inverse, le théorème de Minkowski donne  $\beta > \frac{\pi^2}{16} = 0,61\dots$

---

(<sup>19</sup>) MAHLER, *On lattice points in a cylinder* (Quat. J. Math., t. 17, 1946, p. 16). Voir aussi :

La méthode introduite par Mahler <sup>(19)</sup> montre que  $\beta > \frac{\pi}{4} \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,68\dots$ . On peut conjecturer que la valeur de  $\beta$  est  $\frac{3}{4}$ . Dans ce cas, pour  $D = 3$  on obtiendrait le théorème  $|q_1(q_0\xi - p_0)| < 1$ , d'ailleurs établi dans IV. 4, et qui est « le meilleur possible de son espèce ».

Le théorème que nous avons obtenu a un autre aspect : si l'on tient compte que  $|x| > 1$ ,  $|y| < 1$ , on a  $\left|1 - \frac{y}{x}\right| < 2$  et par suite  $|d| < \sqrt{\frac{D}{\beta}}$ . On obtient ainsi une borne pour le déterminant de deux réduites consécutives dans un ordre de discriminant  $-D$ .

III. 2. Nous allons rechercher quelles valeurs peut prendre ce déterminant  $d$ , lorsque  $A$  est l'anneau  $E$  de tous les entiers de  $K$ . D'après  $|x| > 1$  et  $|y| < 1$ , le réseau  $L$  n'a pas de points dans la région définie par  $|a| + |b| < |d|$ , et même pas de points tels que  $|a| + |b| \leq |d|$ ,  $a, b \neq 0$ .

Étudions les idéaux  $i_0 = (p_0, q_0)$  et  $i_1 = (p_1, q_1)$  qui divisent  $d$ , et posons

$$d = i_0 i_1 = i_1 i_0.$$

S'il y a dans la classe de  $i_0$  (lorsqu'on considère les idéaux principaux comme équivalents) un idéal  $i$  tel que  $\|i\| < \|i_0\|$  (la norme étant aussi définie pour les idéaux!), l'idéal  $i i_0$  est un nombre  $b$  non nul de  $E$ , tel que  $|b| < |d|$ . Avec  $a = 0$ , il satisfait donc  $|a| + |b| < |d|$ , ce qui est impossible.

Ainsi,  $i_0$  doit avoir une norme minimum, parmi les idéaux qui lui sont équivalents. Il en est de même pour  $i_1$ .

En particulier, si  $i_0$  est principal, il est égal à 1. Il existe alors des entiers  $h, k$  tels que  $p_0 h + q_0 k = 1$ . Posons  $P = ap_1 + bp_0$ ,  $Q = aq_1 + bq_0$ ; le système  $P \equiv 0$ ,  $Q \equiv 0 \pmod{d}$  équivaut à  $q_0 P - p_0 Q \equiv 0$ ,  $hP + kQ \equiv 0 \pmod{d}$ , ce qui s'écrit encore  $da \equiv 0$ ,  $b \equiv sa \pmod{d}$ , ou bien seulement  $b \equiv sa \pmod{d}$ , où  $s$  est un entier. Si, de plus,  $i_1$  est aussi principal, alors  $s$  est inversible  $\pmod{d}$ . Tel est le cas, en particulier, si le corps  $K$  n'a pas d'idéaux non principaux.

Remarquons encore que, d'après l'impossibilité de  $|a| + |b| \leq |d|$  avec  $a, b \neq 0$ , il ne peut y avoir, dans la classe de  $s \pmod{d}$ , ni dans la classe inverse, aucun entier de module  $\leq |d| - 1$ .

III. 3. Indiquons un lemme immédiat.

Supposons d'abord  $K$  dépourvu d'idéaux non principaux.

Supposons donnés trois nombres complexes  $x, y, d$  tels que  $|x| > 1$ ,  $x \notin K$ ;  $|y| < 1$ ,  $y \in K$ ;  $d \neq 0$ ,  $d \in E$ , et supposons que les systèmes  $(S'_0)$ ,  $(S'_1)$  et  $(T)$  soient impossibles en entiers (de  $E$ ) non tous deux nuls.

Alors on peut trouver un nombre  $\xi \notin K$  et deux réduites consécutives  $\frac{p_0}{q_0}$  et  $\frac{p_1}{q_1}$  du nombre  $\xi$ , de façon que  $p_0 q_1 - p_1 q_0 = d$ ,  $-\frac{q_0}{q_1} = y$  et  $\frac{q_0 \xi - p_0}{q_1 \xi - p_1} = x$ .

La démonstration est évidente :  $y$  étant mis sous forme irréductible  $-\frac{q_0}{q_1}$ , on peut déterminer successivement  $p_0, p_1$  (d'après l'absence d'idéaux non principaux), puis  $\xi$  (puisque  $x \notin K$ , c'est possible et la solution n'est pas dans  $K$ ). D'après l'énoncé,  $\frac{p_0}{q_0}$  et  $\frac{p_1}{q_1}$  sont deux réduites consécutives de  $\xi$ .

Dans le cas général où  $K$  peut avoir des idéaux non principaux, on peut seulement satisfaire la condition que  $\left| y + \frac{q_0}{q_1} \right|$  soit arbitrairement petit [avec  $(q_0, q_1) = 1$ ], et alors le reste subsiste.

III. 4. Nous pouvons maintenant dresser une table des valeurs de  $d$  pour les corps les plus simples <sup>(20)</sup>. Nous nous limiterons à ceux qui n'ont pas d'idéaux non principaux, nommément ceux où  $D = 3, 4, 7, 8, 11$  et  $19$ .

Naturellement,  $d$  n'est défini qu'à la multiplication près par une unité; nous n'écrirons qu'un représentant de chaque classe, et même un seul représentant pour deux classes imaginaires conjuguées.

$d = 1$  intervient pour tout corps  $K$ , comme le montre par exemple la considération des réduites des nombres réels, d'après II. 3.

$D = 3$ .

D'après III. 1,  $d = 1, \omega + 1$  ou  $2$ .

Si  $d = 2$ , un système complet de restes (mod 2) est  $0, 1, \omega, \bar{\omega}$ . Comme tous ces nombres ont un module  $\leq 1$ , il y a contradiction avec la remarque finale de III. 2 : 2 n'est pas une valeur de  $d$ .

Si  $d = \omega + 1$ , un système complet de restes (mod  $\omega + 1$ ) est  $-1, 0, 1$ . Il y a lieu d'examiner les relations  $b \equiv \varepsilon a \pmod{\omega + 1}$ , avec  $\varepsilon = \pm 1$ . On a les trois solutions  $\varepsilon b = 1, a = 1, -\omega$  ou  $-\bar{\omega}$ . Le raisonnement de III. 2 ne suffit plus, mais je vais montrer que quels que soient  $x$  et  $y$ , les inégalités  $|by - a| < \sqrt{3}$ ,  $\left| b - \frac{a}{x} \right| < \sqrt{3}$  sont vérifiées par au moins l'un des trois couples  $(a, b)$ .

Il suffit de montrer que chacune des deux inégalités ne peut être fausse que pour un seul couple. Or, si l'on avait par exemple  $|t + \omega| \geq \sqrt{3}$  et  $|t + \bar{\omega}| \geq \sqrt{3}$  pour  $|t| < 1$ , en posant  $t = m + n\sqrt{-1}$  ( $m, n$  réels), on aurait

<sup>(20)</sup> On peut donner des résultats partiels, tels que le suivant, pour un corps quelconque. Tous les entiers naturels inférieurs à  $|\omega|$  (resp.  $|\theta|$ ) sont des valeurs de  $d$ , au moins s'ils sont premiers avec  $\frac{m+1}{4}$  (resp.  $m$ ).

$\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(n \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \geq 3$ , d'où  $2(m^2 + n^2) + 2m + 2 \geq 6$ , ce qui contredit  $m^2 + n^2 < 1$ .

Ainsi, dans le cas  $D = 3$ ,  $d$  ne peut être qu'une unité : même résultat que dans le cas réel.

$D = 4$ .

D'après III. 1,  $d = 1, \theta + 1, 2$  ou  $\theta + 2$ .

Si  $d = \theta + 2$  ou  $2$ , les classes premières à  $d$  sont représentables par des unités, ce qui contredit la remarque finale de III. 2.

Si  $d = \theta + 1$ , supposons  $L$  défini par la relation  $a \equiv b \pmod{\theta + 1}$  et prenons (par exemple)  $x$  et  $y$  tels que

$$|y - 1| > \sqrt{2}, \quad |y - \theta| > \sqrt{2}, \quad \left|1 + \frac{1}{x}\right| > \sqrt{2}, \quad \left|1 + \frac{\theta}{x}\right| > \sqrt{2}.$$

Il en résulte facilement  $\frac{1 + |x|}{|x - y|} < \sqrt{2}$ , et, pour les solutions de  $|by - a| \leq \sqrt{2}$ ,  $\left|b - \frac{a}{x}\right| \leq \sqrt{2}$ , ceci implique  $|a| < 2$  et  $|b| < 2$ . Mais, tous les entiers de module  $\sqrt{2}$  étant équivalents, l'impossibilité de ce système avec  $a \equiv b \pmod{\theta + 1}$  résulte de son impossibilité pour  $|a| = |b| = 1$ , laquelle résulte précisément du choix de  $x$  et  $y$ . Eu égard au lemme de III. 3, nous voyons que  $\theta + 1$  est une valeur de  $d$ .

*Remarque.* — On pourra montrer que le cas envisagé est le seul, à des rotations ou symétries près, où  $d = \theta + 1$  (à la condition de « fermer » certaines des régions où se trouvent  $x$  et  $y$ ). On a donc, dans tous les cas où  $d = \theta + 1$ , comme ici,  $|x - y| \leq \sqrt{2}(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$ , et l'on voit que chacune des deux réduites dont le déterminant est  $\theta + 1$  vérifie  $|q(q\xi - p)| \geq \frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}$ .

$D = 7$ .

D'après III. 1,  $d = 1, \omega, 2, \omega + 1, 2\omega - 1, 2\omega, \omega + 2$  ou  $3$ .

Si  $d = 3, 2\omega, \omega + 2, \omega + 1$  ou  $2$ , les classes premières à  $d$  sont représentables par des entiers de module inférieur à  $|d| - 1$ , ce qui contredit la remarque de III. 2.

Si  $d = 2\omega - 1$ , un système complet de restes  $\pmod{2\omega - 1}$  est  $-1, -\bar{\omega}, 0, \omega, 1, \omega + 1, 2$ . Mais les classes de  $\omega + 1$  et  $2$  ont pour inverses celles de  $-\omega$  et  $\omega$ , et, comme  $\omega = \sqrt{2} < \sqrt{7} - 1$ , la remarque de III. 2 montre que  $2\omega - 1$  n'est pas une valeur de  $d$ .

Si  $d = \omega$ , on vérifiera que la relation  $b \equiv a \pmod{\omega}$ , avec  $x$  voisin de  $1$  et  $y$  voisin de  $-1$ , par exemple, conduit à un système (T\*) impossible; donc  $\omega$  est une valeur de  $d$ .

$D = 8$ .

D'après III. 1,  $d = 1, \theta, \theta + 1, 2, \theta + 2, 2\theta, 2\theta + 1, 3$  ou  $\theta + 3$ .

Si  $d = 3, 2\theta + 1, 2\theta$  ou  $\theta + 2$ , les classes premières à  $d$  sont représentables par des entiers de module inférieur à  $|d| - 1$ , ce qui contredit III. 2.

Si  $d = \theta + 3$ , un système complet de restes est formé par  $0, 1, 2, \theta, \theta + 1, \theta + 2$  et leurs opposés.

Il ne reste, d'après III. 2, à examiner (au signe près) que la relation  $b \equiv a(\theta + 2) \pmod{\theta + 3}$  qui admet la solution  $a = \bar{\theta}, b = \theta$ , où  $|a| + |b| = 2\sqrt{2} < \sqrt{11} = |d|$ .

Si  $d = 2$ , on vérifiera que la relation  $b \equiv a(\theta + 1) \pmod{2}$  donne un système  $(T^*)$  impossible avec  $x$  voisin de 1 et  $y$  voisin de  $-1$ , par exemple.

Si  $d = \theta + 1$ , on vérifiera que la relation  $b \equiv a \pmod{\theta + 1}$  donne un système  $(T^*)$  impossible avec  $x$  voisin de 1 et  $y$  voisin de  $-1$ , vérifiant les conditions  $\left|1 + \frac{\theta}{x}\right| > \sqrt{3}, |\theta y + 1| > \sqrt{3}$ .

Si  $d = \theta$ , on vérifiera que la relation  $b \equiv a \pmod{\theta}$  donne un système  $(T^*)$  impossible avec  $x$  voisin de 1 et  $y$  voisin de  $-1$ .

$D = 11$ .

D'après III. 1,  $d = 1, \omega, 2, \omega + 1, 3, \omega + 2, 2\omega - 1, 2\omega, 2\omega + 1, \omega + 3$  ou 4.

Si  $d = \omega + 3, 2\omega, 2\omega - 1$  ou  $\omega + 2$ , les classes premières à  $d$  qui ne sont pas représentables par des entiers de module inférieur à  $|d| - 1$  ont pour inverses des classes représentables par de tels entiers, ce qui contredit III. 2.

Si  $d = 4$ , il ne subsiste, au signe près, que la relation  $b \equiv (2\omega - 1)a$ , qui admet la solution  $a = \bar{\omega}, b = 1 + \omega$ , telle que  $|a| + |b| = \sqrt{3} + \sqrt{5} < 4$ , ce qui contredit III. 2.

Si  $d = 2\omega + 1$ , il ne subsiste, au signe près, que la relation  $b \equiv 4a$ , qui admet la solution  $a = \omega, b = -2$ , telle que  $|a| + |b| = 2 + \sqrt{3} < \sqrt{15} = |d|$ , ce qui contredit III. 2.

Si  $d = 3$ , il ne subsiste, au signe près, que la relation  $b \equiv a(\omega + 1)$ , qui donne des solutions au système  $(T)$ , quels que soient  $x$  et  $y$ .

En effet, supposons au contraire  $(T)$  impossible. D'après  $|x| > 1$ , on ne peut avoir à la fois  $\left|\bar{\omega} - \frac{\bar{\omega}}{x}\right| \geq 3$  et  $\left|\omega + \frac{\omega}{x}\right| \geq 3$  et par suite on n'a pas à la fois  $|\bar{\omega}y - \bar{\omega}| < 3, |\omega y + \omega| < 3$ ; supposons par exemple  $|\omega y + \omega| \geq 3$ . De même, on montre que ou bien  $|y - (\omega + 1)| \geq 3$ , ou bien  $|(\omega + 1)y - 1| \geq 3$ ; mais chacune de ces deux hypothèses contredit  $|\omega y + \omega| \geq 3$ , puisque  $|y| < 1$ . Ainsi  $(T)$  est toujours possible, et 3 n'est pas une valeur de  $d$ .

Si  $d = \omega + 1$ , on vérifiera l'impossibilité de  $(T^*)$  pour la relation  $b \equiv a\bar{\omega}$

avec  $x$  voisin de 1 et  $y$  voisin de  $-1$ , vérifiant les conditions  $\left|1 + \frac{\bar{\omega}}{x}\right| > \sqrt{5}$ ,  $|\bar{\omega}y - 1| > \sqrt{5}$ .

Si  $d = 2$  ou  $\omega$ , on vérifiera l'impossibilité de  $(T^*)$  pour les relations respectives  $b \equiv a\omega \pmod{2}$  et  $b \equiv a \pmod{\omega}$ , avec  $x$  voisin de 1 et  $y$  voisin de  $-1$ .

$D = 19$ .

D'après III. 1,  $d = 1, 2, \omega, \omega + 1, 3, \omega + 2, 4, \omega + 3, 2\omega - 1, 2\omega, 2\omega + 1, 5$ , ou  $\omega + 4$ .

Si  $d = 2\omega, \omega + 3$  ou  $\omega + 2$ , la contradiction avec III. 2 est immédiate.

Si  $d = \omega + 4$ , il ne reste, au signe près, que  $s = -9$  et 11, appartenant d'ailleurs à des classes inverses. Mais, d'après  $-9\bar{\omega} \equiv \bar{\omega} \equiv 11\bar{\omega}$ , on peut satisfaire les congruences correspondantes avec  $|a| + |b| = 2\sqrt{5} < 5$ .

Si  $d = 5$ , il ne reste, aux symétries près, que  $s = 2\omega - 1$  et  $2\omega + 1$ , permettant  $a = \bar{\omega}$  et  $b = \bar{\omega}$ , donc  $|a| + |b| = 2\sqrt{5} < 5$ .

Si  $d = 2\omega + 1$ , il ne reste, au signe près, que  $s = 6$  et 4, appartenant à des classes inverses. Pour  $b \equiv 6a$  par exemple, on a  $a = 2, b = -\omega$  donnant  $|a| + |b| = 2 + \sqrt{5} < \sqrt{23}$ .

Si  $d = 2\omega - 1$ , il ne reste, au signe près, que  $s = 4$  et 5, appartenant à des classes inverses. Pour  $b \equiv 5a$  par exemple, on a  $a = 2, b = \omega$  donnant  $|a| + |b| = 2 + \sqrt{5} < \sqrt{19}$ .

Si  $d = 4$ , il ne reste, aux symétries près, que  $s = 2\omega - 1$  et  $2\omega + 1$ , permettant  $a = 2$  et  $b = \pm 2$ , donc  $|a| + |b| \leq 4$ .

Si  $d = 3$ , avec  $b \equiv a(\omega + 1)$ ; ou  $d = \omega + 1$ , avec  $b \equiv 3a$ ; ou  $d = \omega$ , avec  $b \equiv 2a$ ; ou  $d = 2$ , avec  $b \equiv a\omega$ , on vérifiera l'impossibilité de  $(T^*)$  avec  $x$  voisin de 1 et  $y$  voisin de  $-1$ , et, dans le second cas, la condition supplémentaire  $\left|1 + \frac{\bar{\omega}}{x}\right| > \sqrt{7}$ .

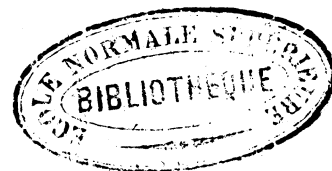
Table des valeurs de  $d$ .

D	$d$ .	D	$d$ .
3	1	8	1, 0, 0 + 1, 2
4	1, 0 + 1	11	1, $\omega$ , 2, $\omega + 1$
7	1, $\omega$	19	1, 2, $\omega$ , $\omega + 1$ , 3

Il faut naturellement compléter cette table par les rotations et symétries.

#### IV. — Meilleures suites régulières. Précisions pour $D = 3$ et 4.

IV.1. Nous supposons que  $K$  est l'un des cinq corps où l'algorithme d'Euclide est valable, c'est-à-dire  $D = 3, 4, 7, 8$  ou 11.





De l'algorithme d'Euclide résulte, pour toute fraction irréductible  $\frac{p_0}{q_0}$  donnée, l'existence d'au moins une fraction  $\frac{p}{q}$  adjacente à  $\frac{p_0}{q_0}$  et telle que  $|qx - p| < |q_0x - p_0|$ ,  $x$  étant un nombre complexe donné qui n'appartient pas à  $K$ . De plus,  $\frac{p}{q}$  sera irréductible.

On peut donc définir des suites de fractions approchant  $x$ , qu'on appelle *meilleures suites régulières* de  $x$  :  $\frac{p_0}{q_0}$  étant une réduite quelconque de  $x$  (irréductible puisqu'il n'y a pas dans  $K$  d'idéaux non principaux),  $\frac{p_n}{q_n}$  sera la plus simple des fractions  $\frac{p}{q}$  adjacentes à  $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$  telles que  $|qx - p| < |q_{n-1}x - p_{n-1}|$ , étant entendu que, s'il y a plusieurs fractions aussi simples vérifiant cette condition,  $\frac{p_n}{q_n}$  doit être l'une de celles qui rendent  $|qx - p|$  le plus petit possible (pour les « cas limites », voir en II. 1 la définition des réduites).

On voit immédiatement qu'aucun dénominateur  $q_n$  n'est nul, sauf peut-être  $q_0$  (et alors  $|p_0| = 1$ ).

D'après les conditions d'adjacence, on peut, en multipliant au besoin  $p_n$  et  $q_n$  par une même unité, écrire les formules de récurrence :

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2},$$

où  $a_n$  est un entier, qu'on peut appeler le quotient incomplet de rang  $n$ .

Posons

$$x_n = -\frac{q_{n-2}x - p_{n-2}}{q_{n-1}x - p_{n-1}} \quad \text{et} \quad y_n = -\frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}.$$

$x_n$  et  $y_n$  sont finis et non nuls, le premier hors de  $K$  et le second dans  $K$ , et ils satisfont à la même récurrence :

$$x_n - a_n = \frac{1}{x_{n+1}}, \quad y_n - a_n = \frac{1}{y_{n+1}}.$$

Le quotient incomplet  $a_n$  est défini, à partir de  $x_n$  et de  $y_n$ , par les conditions que  $|x_n - a_n| < 1$  et  $|y_n - a_n|$  minimum, étant entendu qu'en cas de doute, il faut rendre aussi  $|x_n - a_n|$  minimum, ce qui s'exprime encore par l'impossibilité des systèmes (l'inconnue étant l'entier  $a$ ) :

$$\begin{aligned} |x_n - a| &< 1 & |y_n - a| &< |y_n - a_n|, \\ |x_n - a| &< |x_n - a_n| & |y_n - a| &= |y_n - a_n|. \end{aligned}$$

Ces systèmes peuvent encore s'écrire, en posant  $a - a_n = b$  :

$$\begin{aligned} |bx_{n+1} - 1| &< x_{n+1} & |by_{n+1} - 1| &< 1, \\ |bx_{n+1} - 1| &< 1 & |by_{n+1} - 1| &= 1. \end{aligned}$$

La dernière équation pouvant évidemment s'écrire  $|by_{n+1} - 1| \leq 1$ , ce sont donc les systèmes (T) et (S') avec  $a = 1$ .

En particulier, en prenant pour  $b$  une unité  $\frac{1}{u}$ , on a, à tout rang  $n$ , l'impossibilité que  $x_n \in i(u)$ ,  $y_n \in i'(u)$ .

IV.2. Il résulte immédiatement des définitions qu'on a  $|x_n| > 1$ , mais il n'est pas évident que  $|y_n| < 1$ . Nous allons établir ce point, essentiel pour la validité de l'algorithme.

Nous utilisons, à titre de lemme, l'invariance par le groupe modulaire de  $K$  d'une famille  $F$  de cercles finis et infinis comprenant :

- 1° les cercles  $\frac{(a)}{b}$  avec  $b \in \mathbb{N}$ ,  $a \in \mathbb{E}$ ,  $b$  divisant  $\|a\| - 1$ ;
- 2° les droites  $[u, z] = v$  avec  $u \in \mathbb{U}$ ,  $v \in \mathbb{Z}$ .

Il suffit de vérifier l'invariance par les translations  $d$  ( $d \in \mathbb{E}$ ) et par l'inversion par rapport au cercle (o).

Or la première, évidente pour les droites, résulte pour les cercles du fait que  $\|a + db\| - 1 = \|a\| - 1 + b[a, d] + b^2\|d\|$  est divisible par  $b$  en même temps que  $\|a\| - 1$ .

Pour la seconde, remarquons que si  $a$  est complexe, mais non de module 1, et  $b$  réel non nul, l'inverse par rapport à (o) du cercle  $\frac{(a)}{b}$  est le cercle  $\frac{(a)}{c}$  avec  $bc = \|a\| - 1$ , ce qui prouve qu'un cercle de  $F$  devient un cercle de  $F$ , à moins que  $a \in \mathbb{U}$ . Dans ce dernier cas, l'inverse de  $\frac{(a)}{b}$  est la droite  $[z, \bar{a}] = b$  (et réciproquement); la droite  $[z, a] = 0$  devient  $[z, \bar{a}] = 0$ ;  $F$  est bien invariante.

Démontrons maintenant la propriété envisagée. Supposons, au contraire,  $|y_{n+1}| \geq 1$ . Alors  $|y_n - a_n| \leq 1$ , c'est-à-dire  $y_n \in i'(a_n)$ , tandis que  $x_n \in i(a_n)$ . Donc  $x_n$  et  $y_n$  appartiennent à un même cercle de  $F$  (je sous-entends que  $x_n$  est à l'intérieur et  $y_n$  à l'intérieur ou sur la frontière).

Or il est impossible que, à quelque rang  $i$ ,  $x_i$  et  $y_i$  appartiennent (avec le même sous-entendu) à un cercle  $\frac{(a)}{b}$  de  $F$  où  $a$  soit une unité. Nous l'avons vu pour  $b = 1$ , et c'est vrai *a fortiori* pour  $b \in \mathbb{N}$ , les cercles correspondants étant intérieurs au précédent. De la sorte, la transformation modulaire qui fait passer de  $x_n$  et  $y_n$  à  $x_{n-1}$  et  $y_{n-1}$  transforme le cercle de  $F$  auquel les premiers appartiennent en un véritable cercle, et par conséquent les intérieurs sont associés. Donc  $x_{n-1}$  et  $y_{n-1}$  appartiennent à un même cercle de  $F$ ; de même pour  $x_{n-2}$  et  $y_{n-2}$ , etc., donc  $\frac{1}{x_2}$  et  $\frac{1}{y_2}$  appartiennent à un même cercle  $\frac{(a)}{b}$  de  $F$ , c'est-à-dire qu'on a

$$\left| a - \frac{b}{x_2} \right| < 1, \quad \left| a - \frac{b}{y_2} \right| \leq 1$$

et la fraction  $\frac{p}{q} = \frac{ap_1 + bp_0}{aq_1 + bq_0}$  vérifie

$$|qx - p| < |q_0x - p_0|, \quad |q| \leq |q_0|,$$

ce qui contredit l'hypothèse que  $\frac{p_0}{q_0}$  est une réduite. De cette absurdité résulte que, à tout rang  $n$ , on a  $|y_n| < 1$ .

*Remarque.* — On démontrera aussi l'impossibilité de  $x_n \in i' \frac{(a)}{b}, y_n \in i \frac{(a)}{b}$  pour tout cercle  $\frac{(a)}{b}$  de F.

IV. 3. Montrons que  $|x_n - y_n|$  est borné inférieurement par une quantité positive.

En effet, le couple  $(x_n, y_n)$  appartient à l'ensemble  $\Omega$  des couples  $(x, y)$  tels que  $|x| \geq 1, |y| \leq 1$  et que les deux inégalités simultanées  $|x - a| < 1$  et  $|y - a| < 1$  soient impossibles pour tout  $a \in E$ . S'il existait dans  $\Omega$  des couples tels que  $|x - y|$  soit arbitrairement petit, il y aurait des couples où  $x = y$ ; un tel nombre complexe serait à une distance au moins égale à 1 de tout  $a \in E$ , ce qui est impossible, puisque l'algorithme d'Euclide est valable pour K.

Il existe donc un nombre  $g > 0$  tel que  $|x_n - y_n| > g$ . L'interprétation de ce résultat est immédiate, en écrivant que

$$|x_n - y_n| = \left| \frac{p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1}}{q_{n-1}(q_{n-1}x - p_{n-1})} \right| = \frac{1}{|q_{n-1}(q_{n-1}x - p_{n-1})|}.$$

On a donc, pour chaque fraction  $\frac{p}{q}$  d'une meilleure suite régulière du nombre  $x$ ,  $\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{g|q|^2}$ .

Nous avons vu plus haut que toute suite régulière de fractions commençant par une réduite de  $x$  est une meilleure suite régulière de  $x$  à la condition d'impliquer à chaque rang  $n$  l'impossibilité des systèmes (T) et (S') avec  $a = 1$ .

De l'existence de  $g > 0$  résulte aisément l'existence d'une constante finie B telle qu'il suffit de vérifier cette impossibilité pour  $|b| < B$ . Comment peut-on définir un système minimum de conditions à vérifier à chaque rang? Peut-on s'affranchir de la condition de départ? Quelles relations y-a-t-il entre les différentes « meilleures suites régulières » d'un même nombre? Existe-t-il un nombre  $x$ , une meilleure suite régulière de  $x$ , et un rang  $n$  tels que  $x_n$  et  $y_n$  prennent des valeurs données convenablement choisies? Peut-on prendre pour meilleure suite régulière celle dont la première fraction est  $\frac{1}{0}$ ? A ces questions,

liées à celle de la « valeur exacte » de  $g$ , je ne sais apporter que des réponses partielles, pour lesquelles il est évidemment nécessaire de disjoindre les différents corps. On notera que l'utilisation « pratique » de l'algorithme (dans des démonstrations telles que celles de V et VI) ne souffre pas de cette situation.

Pour terminer ces considérations générales, je donne une définition. Il résulte évidemment de ce qui précède qu'une suite infinie d'entiers prise arbitrairement n'est pas la suite des quotients incomplets d'une meilleure suite régulière d'un nombre  $x$  (ou, comme nous dirons plus brièvement, un développement de  $x$ ). Il existe des séquences d'un nombre fini d'entiers qui ne figurent — à titre de quotients incomplets consécutifs — dans aucun développement. Telles sont par exemple la séquence réduite au seul entier 0, ou bien celle composée d'un entier rationnel positif et d'un entier rationnel négatif. Ces séquences sont dites interdites. Les exemples précédents concernent des séquences interdites dans tous les corps. Il y en a aussi de particulières à chaque corps; on en verra de nombreux exemples.

Nous allons examiner plus en détail les cas  $D = 3$  et  $D = 4$ .

#### IV.4. $D = 3$ .

D'après les résultats de III. 4, nous voyons que la meilleure suite régulière qui débute par la réduite  $\frac{p_0}{q_0}$  ne diffère pas de l'ensemble des réduites suivant  $\frac{p_0}{q_0}$  dans la suite de meilleure approximation. Nous allons donner de ce fait remarquable une deuxième démonstration, en même temps que nous répondrons aux questions précédentes.

Soit donnée une suite régulière de fractions où les nombres  $x_n$  et  $y_n$  vérifient  $|x_n| > 1$  et  $|y_n| < 1$  et rendent impossible le système

$$(T) \quad |bx_n - a| < |x_n| \quad |by_n - a| < 1$$

lorsque  $a$  et  $b$  sont des unités (où l'on peut supposer  $a = 1$ , donc les meilleures suites régulières vérifient ces propriétés). Montrons que ce système est également impossible en entiers quelconques  $a$ ,  $b$  (ce qui entraîne que la suite considérée est l'ensemble de toutes les réduites, à partir de l'une d'entre elles). Nous utilisons comme intermédiaire une minoration de  $|x_n - y_n|$ .

D'après les rotations et symétries, on peut supposer  $0 \leq \arg x_n \leq \frac{\pi}{6}$ , de sorte que  $x_n$  satisfait  $|bx_n - 1| < |x_n|$ , avec  $b = 1$  et  $b = \bar{\omega}$ . On doit donc avoir  $|y_n - 1| \geq 1$  et  $|y_n - \bar{\omega}| \geq 1$ , et le minimum de  $|x_n - y_n|$  est fourni, pour  $y_n$ , par les points 0 et  $\bar{\omega}$ ; donc  $|x_n - y_n| \geq 1$ . En fait, le minimum est fourni par 0 tant que  $\arg(x_n - 1) \geq \frac{\pi}{6}$ , c'est-à-dire  $|\omega x_n - 1| \geq 1$ ; dans le cas contraire,  $|\omega x_n - 1| < 1$  implique  $|y_n - \bar{\omega}| \geq 1$  et le minimum est encore fourni par 0; ainsi, on a, dans tous les cas,  $|x_n - y_n| \geq |x_n|$  (avec l'inégalité stricte, sauf au début). Si le système (T) a des solutions, c'est avec

$$|b| < \frac{1 + |x_n|}{|x_n - y_n|} \quad \text{et} \quad |a| < \frac{(1 + |y_n|)|x_n|}{|x_n - y_n|}$$

donc, ici,  $|b| < 1 + \frac{1}{|x_n|}$ ,  $|a| < 1 + |y_n|$ , c'est-à-dire  $|a|$  et  $|b| = 1$  ou  $\sqrt{3}$ .

Mais (T) est impossible avec  $a = b = 1$ , donc aussi avec  $|a| = |b| = \sqrt{3}$ , car tous les entiers de norme 3 sont équivalents. Eu égard aux rotations, il suffit donc de vérifier l'impossibilité pour  $b = 1$ ,  $a = \omega + 1$  et pour  $b = \omega + 1$ ,  $a = 1$ . Même, une seule des deux vérifications suffit, puisque les hypothèses sont invariantes par l'échange de  $x_n$  et  $\frac{1}{y_n}$ , de  $y_n$  et  $\frac{1}{x_n}$ , et de  $a$  et  $b$ .

Supposons donc  $b = 1$ ,  $a = \omega + 1$ ; alors  $y_n \in i(\omega + 1)$  implique  $y_n \in i(\omega)$  et  $y_n \in i(1)$ , tandis que  $|x_n - (\omega + 1)| < |x_n|$  implique  $|x_n - \omega| < |x_n|$  ou  $|x_n - 1| < |x_n|$ , ce qui montre l'impossibilité.

Nous avons donc obtenu la démonstration cherchée, répondu aux questions du paragraphe précédent, et découvert que la meilleure valeur de  $g$  est 1; nous avons même un résultat un peu plus fort. En effet,  $|x_n - y_n| > |x_n|$  (pour  $n > 2$ ) implique

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{|q_n q_{n+1}|} \quad (\text{pour } n > 0).$$

Que ce théorème soit « le meilleur possible » résulte de la démonstration, ou encore de la considération des nombres  $x$  réels.

#### IV. 5. $D = 4$ .

Soit donnée une suite régulière de fractions où, à tous les rangs  $n$ , les nombres  $x_n$  et  $y_n$  vérifient  $|x_n| > 1$  et  $|y_n| < 1$  et rendent impossibles les systèmes (T) et (S') pour  $|a| = 1$  et  $|b| = 1$  ou  $\sqrt{2}$ . Les meilleures suites régulières vérifient ces conditions.

Montrons d'abord que  $|x_n - y_n| > 1$ . Nous pouvons supposer  $0 \leq \arg x_n \leq \frac{\pi}{4}$ . On a donc  $|x_n - 1| < |x_n|$ .

Si  $\mathcal{J}(x_n) > \frac{1}{2}$ , de sorte que  $|x_n - \theta| < |x_n|$ , on a donc  $|y_n - 1| \geq 1$ ,  $|y_n - \theta| \geq 1$ , d'où résulte  $|x_n - y_n| > |x_n| > 1$ .

Supposons maintenant  $\mathcal{J}(x_n) \leq \frac{1}{2}$ . Si  $x_n \in i(1 + \theta)$ , on a  $|(1 - \theta)x_n - 1| < |x_n|$  donc  $|(1 - \theta)y_n - 1| \geq 1$ , ce qui implique encore  $|x_n - y_n| > |x_n| > 1$ . Enfin, si  $x_n \in e'(1 + \theta)$ , on a  $|x_n - y_n| > |1 - y_n| \geq 1$ .

Montrons maintenant que toutes les fractions de la suite sont des réduites, c'est-à-dire que les systèmes (S') et (S'') sont impossibles. Ils le sont évidemment pour  $|a| = 1$  et  $|b| = 1$  ou  $\sqrt{2}$ , le premier par hypothèse, et le second parce qu'il implique (T). D'autre part, les solutions de (S') et (S'') vérifient  $|b| < \frac{2}{|x_n - y_n|}$  et  $|a| < \frac{|x_n| + |y_n|}{|x_n - y_n|}$ . D'après les raisonnements précédents, ceci implique  $|b| < 2$ .

Montrons qu'on a aussi  $|a| < 2$ .

Ceci est évident dans les deux premiers cas du raisonnement précédent, d'après  $|x_n - y_n| > |x_n| > 1 > |y_n|$ .

Examinons le troisième cas, où  $x_n \in e'(1 + \theta)$  avec  $0 \leq \mathcal{J}(x_n) \leq \frac{1}{2}$  et  $\mathcal{R}(x_n) \geq 1$ . On a  $y_n \in e(1)$ . Montrons d'abord que  $y_n$  est du même côté que 0 de la droite joignant 1 et  $\theta$ , c'est-à-dire  $|1 + \theta - y_n| \geq |y_n|$ . En effet, dans le cas contraire, on aurait  $|1 + \theta - y_n| < |y_n|$  et  $|1 + \theta - x_n| < |x_n|$ , ce qui donnerait une solution de (T) au rang précédent avec  $|a| = 1$  et  $|b| = \sqrt{2}$ . Soit maintenant  $\alpha$  l'intersection extérieure à (0) des cercles (1) et  $(1 + \theta)$ , et  $\beta$  l'intersection intérieure à (0) du cercle (1) et de la droite joignant 1 et  $\theta$ . On voit aisément que

$$\left| \frac{x_n}{x_n - y_n} \right| \leq \left| \frac{x_n}{x_n - \beta} \right| \leq \left| \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \right| \quad \text{et} \quad \left| \frac{y_n}{x_n - y_n} \right| \leq \left| \frac{y_n}{1 - y_n} \right| \leq \left| \frac{\beta}{1 - \beta} \right| = |\beta|$$

de sorte que

$$|a| < \left| \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \right| + |\beta| = \frac{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - 2} + \sqrt{2} - \sqrt{2} = 1,218\dots + 0,765\dots = 1,983\dots < 2.$$

Comme tous les entiers de norme 2 sont équivalents, l'impossibilité de (S') et (S'') pour  $|a| = |b| = \sqrt{2}$  résulte de cette impossibilité pour  $|a| = |b| = 1$ .

Il nous reste à examiner, à des rotations près, les systèmes

$$|x_n - (1 + \theta)| < 1 \quad |y_n - (1 + \theta)| \leq 1$$

et

$$|x_n - (1 + \theta)| \leq 1 \quad |y_n - (1 + \theta)| < 1.$$

Or le premier s'écrit :

$$|(1 - \theta)x_n - 1| < |x_n| \quad |(1 - \theta)y_n - 1| \leq |y_n|.$$

Il implique un système (T) puisque  $|y_n| < 1$ , donc est impossible. Le deuxième implique  $|x_{n-1} - a| \leq 1$ ,  $|y_{n-1} - a| < 1$  avec  $a = a_{n-1} - \theta + 1$ , donc il implique un système (T) avec  $b = 1$  au rang  $n - 1$ . D'autre part,  $y_n \in i(1 + \theta) \cap i(0)$  est donc contenu dans  $i(1) \cup i(\theta)$  et l'on peut supposer, d'après l'impossibilité de (T) pour  $|a| = |b| = 1$ , et à une symétrie près,  $\mathcal{J}(x_n) \leq \frac{1}{2}$  et  $y_n \in e(1)$ . On a alors nécessairement  $a_{n-1} = \theta - 1$ ,  $2\theta - 1$ ,  $\theta$  ou  $2\theta$ . Dans le premier cas,  $a = 0$ ; il y a contradiction avec  $|x_n| > 1$ . Dans les deux suivants,  $|a| = 1$ ; il y a contradiction avec l'impossibilité de (T) pour  $|a| = |b| = 1$ . Enfin, dans le cas  $a_{n-1} = 2\theta$ , on a  $|x_{n-1} - \theta| < |x_{n-1}|$  et  $|y_{n-1} - \theta| < 1$ , ce qui est encore impossible.

Ainsi, toutes les fractions de la suite sont des réduites.

Examinons maintenant le système (T). Il implique  $|b| < \frac{1 + |x_n|}{|x_n - y_n|}$  et

$|a| < \frac{|x_n|(1+|y_n|)}{|x_n-y_n|}$ . Or, nous avons vu que  $\left| \frac{x_n}{x_n-y_n} \right| < 1,218\dots$ , de sorte que  $|a|$  et  $|b|$  sont bornés par  $2,218\dots$  et ne peuvent donc prendre que les valeurs  $1, \sqrt{2}$  et  $2$ . On vérifiera aisément qu'il n'y a pas de solutions avec  $|a|$  ou  $|b| = 2$ . Les seules solutions possibles sont donc avec  $|a| = \sqrt{2}$  et  $|b| = 1$ , donc aux rotations près, par exemple  $a = 1 + \theta$  et  $b = 1$ . On a donc  $|x_n - (1 + \theta)| < |x_n|$ , et, puisqu'on peut supposer par symétrie  $\arg x_n \leq \frac{\pi}{4}$ ,  $\mathcal{R}(x_n) > \frac{1}{2}$ ; donc  $y_n \in e'(1)$  puisque (T) est impossible pour  $a = b = 1$ . On a déjà vu qu'on a de plus  $|1 + \theta - y_n| \geq |y_n|$ , ce qui limite  $y_n$  à un triangle (curviligne) dont les sommets sont  $0, \beta$  et  $\gamma$ , ce dernier étant l'intersection intérieure à (o) de (1) et  $(1 + \theta)$ , et par conséquent  $x_n$  est limité par les trois conditions

$$|x_n - (1 + \theta)| < |x_n|, \quad \mathcal{R}(x_n) \leq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_n \in e(1 + \theta).$$

Il résulte de ce régionnement que le système (T) possède au plus une solution (à une équivalence près). Lorsqu'il existe une solution, c'est-à-dire lorsque  $x_n$  et  $y_n$  sont dans les régions précédentes (ou celles qui s'en déduisent par une même rotation ou symétrie) la fraction correspondante  $\frac{p'}{q'}$  est une réduite, d'après son unicité.

Alors  $\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}, \frac{p'}{q'}$  et  $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$  sont des réduites consécutives.

Si  $x_n$  et  $y_n$  sont tels que (T) est impossible, on peut trouver, d'après III.3, un nombre  $x$  et deux fractions adjacentes avec  $x_n$  et  $y_n$  donnés, qui soient deux réduites consécutives de  $x$ .

Supposons maintenant (T) possible au rang  $n$ ,  $x_n$  et  $y_n$  étant dans les régions indiquées précédemment. On voit facilement que  $a_{n-1} = 0$  ou  $0 - 1$  et que le système (T) est impossible au rang  $n - 1$  (d'où il résulte qu'il est aussi impossible au rang suivant). Il existe donc un nombre  $x$  dont une meilleure suite régulière contient deux fractions consécutives avec  $x_n$  et  $y_n$  donnés, ces fractions n'étant pas deux réduites consécutives.

Sur les cinq réduites consécutives  $\frac{p_{n-3}}{q_{n-3}}, \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}, \frac{p'}{q'}, \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \frac{p_n}{q_n}$ , une seule,  $\frac{p'}{q'}$ , manque dans toute meilleure suite régulière contenant la première. Mais  $\frac{p'}{q'}$  est adjacente à  $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ ; donc la meilleure suite régulière de départ  $\frac{p'}{q'}$  est identique aux précédentes dès le rang suivant. Toutes les meilleures suites régulières sont identiques à partir d'un certain rang.

La considération de  $\frac{p'}{q'}$  n'offre guère d'intérêt que si

$$|q'(q'x - p')| < |q_{n-1}(q_{n-1}x - p_{n-1})|,$$

ce qui s'exprime par  $|x_n - (1 + \theta)| |y_n - (1 + \theta)| < 1$ . On a donc, en vertu de  $1 > |y_n - (1 + \theta)| \geq |\beta - (1 + \theta)| = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$ , la majoration  $|x_n - y_n| < 1 + \frac{1}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} < 2,4$ ; cette borne grossière suffit à limiter l'utilité de la réduite « intermédiaire ».

On a vu que la valeur exacte de  $g$  est 1. On peut aussi déterminer, sans aucune difficulté, les « valeurs exactes » des différentes constantes  $g^*$  telles que  $|qx - p| < \frac{1}{g^* |q^*|}$ , où  $\frac{p}{q}$  est l'une des réduites, et  $\frac{p^*}{q^*}$  sa suivante, soit dans la suite de meilleure approximation, soit dans les meilleures suites régulières.

## V. — Détermination de la constante d'Hurwitz de $R(\sqrt{-11})$ .

V. 1. D'après II. 5, la constante d'Hurwitz  $C_{11}$  de  $R(\sqrt{-11})$  est au plus égale à  $\frac{\sqrt{5}}{2} = 1,118\dots$ . Nous allons rechercher s'il existe des nombres  $x$  tels que  $C(x) < \frac{\sqrt{5}}{2}$ . Si l'on développe ces nombres en une meilleure suite régulière, on a  $\overline{\lim} |x_n - y_n| \leq C(x)$ , donc *a fortiori*  $\overline{\lim} |x_n - y_n| < \frac{\sqrt{5}}{2}$ . On peut donc exclure les meilleures suites régulières présentant une infinité de rangs  $n$  où  $|x_n - y_n| \geq \frac{\sqrt{5}}{2}$ . Pour préciser, nous dirons qu'une séquence de quotients incomplets est exclue ( $\lambda$ ), où  $\lambda$  est un nombre réel supérieur à  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ , si, dans toute meilleure suite régulière contenant cette séquence, on a nécessairement  $|x_n - y_n| \geq \lambda$  pour au moins un rang  $n$  (lié à la séquence). Ainsi, si  $a$  est un entier différent de  $\pm 1, \pm \omega, \pm \bar{\omega}, \pm(\omega + 1), \pm(\bar{\omega} + 1), \pm 2, \pm(\omega + 2), \pm(\bar{\omega} + 2), \pm 3$ , on a  $|a| \geq \sqrt{11} = 3,316\dots$  et la séquence constituée de ce seul entier est exclue (1, 31), puisque dans toute meilleure suite régulière où  $a_n = a$ , on a  $|x_n - y_n| \geq |a| - |x_n - a| - |y_n| > |a| - 2$  d'après  $|y_n| < 1, |x_n - a_n| < 1$ .

Une séquence exclue ne peut donc plus, à partir d'un certain rang, figurer dans les développements des nombres  $x$  que nous cherchons. En particulier, ces développements sont constitués, à partir d'un certain rang, uniquement par les dix-huit entiers énumérés neuf lignes plus haut.

Il est aisé de restreindre cette liste.

En effet, si  $a_n = \omega + 2, \bar{\omega} + 2$  ou 3, on a  $\mathcal{R}(x_n) > 2$ , car d'après  $|\omega + 2 - y_n| > |\omega + 1 - y_n|$ ,  $a_n = \omega + 2$  implique  $x_n \in e'(\omega + 1)$ . En particulier  $|x_n - 1| < |x_n|$ , donc on a  $|y_n - 1| \geq 1$  puisque (T) est impossible pour  $a = b = 1$ . Or  $y_n \in i(0) \cap e'(1)$  implique  $\mathcal{R}(y_n) < \frac{1}{2}$ . On a donc



$\mathcal{R}(x_n - y_n) > 1,5$ , donc aussi  $|x_n - y_n| > 1,5$  et les six derniers entiers de la liste sont exclus (1,5).

### V. 2. Supposons maintenant $a_n = 2$ .

Comme précédemment, on a  $x_n \in e'(1)$  et  $y_n \in e'(1)$ .

Si  $x_n$  n'est ni dans  $i(\omega + 1)$ , ni dans  $i(\bar{\omega} + 1)$ ,  $\mathcal{R}(x_n)$  est minimum lorsque  $x_n$  est l'intersection, intérieure à (2), de (1) et  $(\omega + 1)$ , soit  $\frac{15 + \sqrt{33} + i(3\sqrt{11} - \sqrt{3})}{12}$ , donc on a  $\mathcal{R}(x_n) \geq \frac{15 + \sqrt{33}}{12}$ , et  $\mathcal{R}(x_n - y_n) \geq \frac{9 + \sqrt{33}}{12} = 1,228\dots$

Si  $x_n \in i(\omega + 1)$ , par exemple, on a  $|\omega + 1 - y_n| \geq |2 - y_n|$ . On vérifiera élémentairement que le minimum de la distance de la région  $i(\omega + 1) \cap i(2) \cap e'(1)$  à la partie de la région  $i(0) \cap e'(1)$  satisfaisant  $|\omega + 1 - y| \geq |2 - y|$  est obtenu pour les points  $x = \frac{3 + i\sqrt{3}}{2}$  et  $y = \frac{5 - \sqrt{22} + i\sqrt{12 - 2\sqrt{22}}}{6}$ ; on a donc  $|x_n - y_n| \geq |x - y| \geq \mathcal{R}(x - y) = \frac{4 + \sqrt{22}}{6} = 1,448\dots$

Ainsi 2 est exclu (1,22) et nous pouvons nous limiter aux développements constitués (à partir d'un certain rang) par les entiers  $\pm 1$ ,  $\pm \omega$ ,  $\pm \bar{\omega}$ ,  $\pm(\omega + 1)$ ,  $\pm(\bar{\omega} + 1)$ .

### V. 3. Étudions maintenant les séquences à deux termes $a_{p-1}a_p$ , où $a_{p-1} + \omega$ et $a_p - \omega$ sont des entiers rationnels.

Comme  $y_{p-1} \in i(0)$ ,  $y_{p-1} - a_{p-1} = \frac{1}{y_p} \in i(-a_{p-1})$ , donc selon que  $a_{p-1}$  est  $-\omega - 1$ ,  $-\omega$ ,  $\bar{\omega}$  ou  $\bar{\omega} + 1$ ,  $y_p$  appartient à  $i(\frac{\bar{\omega} + 1}{4})$ ,  $i(\frac{\bar{\omega}}{2})$ ,  $i(\frac{-\omega}{2})$  ou  $i(\frac{-\omega - 1}{4})$ ; quant à  $x_p$  il appartient à  $i(-\bar{\omega} - 1)$ ,  $i(-\bar{\omega})$ ,  $i(\omega)$  ou  $i(\omega + 1)$ .

Il y a seize cas possibles; on constatera qu'ils se ramènent à six par des considérations de symétrie.

Si  $x_p \in i(\omega + 1)$ , tandis que  $y_p \in i(\frac{\bar{\omega}}{2})$ ,  $i(\frac{-\omega}{2})$  ou  $i(\frac{-\omega - 1}{4})$ ,  $|x_p - y_p|$  est supérieur respectivement à  $\frac{\sqrt{31} - 3}{2} = 1,283\dots$ ,  $\frac{\sqrt{37} - 3}{2} = 1,541\dots$  ou  $\frac{5\sqrt{5} - 5}{4} = 1,545\dots$

Si  $x_p \in i(\omega + 1)$ ,  $y_p \in i(\frac{\bar{\omega} + 1}{4})$ , on a  $|x_p - y_p| > \left| x_p - \frac{\bar{\omega} + 1}{4} \right| - \frac{1}{4}$ . Mais, comme  $x_p \in e'(1)$ ,  $\left| x_p - \frac{\bar{\omega} + 1}{4} \right|$  est minimum pour  $x_p = \frac{9 + \sqrt{33} + i(3\sqrt{11} + \sqrt{3})}{12}$  et vaut alors  $\left| \frac{9 + 2\sqrt{33} + i(9\sqrt{11} + 2\sqrt{3})}{24} \right|$ , soit  $\frac{\sqrt{31 + 2\sqrt{33}}}{4} = 1,629\dots$ ; donc  $|x_p - y_p| > 1,379$ .

Si  $x_p \in i(\omega)$ ,  $y_p \in i\left(\frac{-\omega}{2}\right)$ , la projection de  $x_p - y_p$  sur la droite  $o\omega$  est supérieure à  $\sqrt{3} - \frac{1}{2} = 1,232\dots$ ; donc  $|x_p - y_p| > 1,232\dots$ .

Si  $x_p \in i(\omega)$ ,  $y_p \in i\left(\frac{\bar{\omega}}{2}\right)$ , on a  $|x_p - y_p| > \left|x_p - \frac{\bar{\omega}}{2}\right| - \frac{1}{2}$ .

Comme  $x_p \in e'(1) \cap e(o)$ ,  $\left|x_p - \frac{\bar{\omega}}{2}\right|$  est minimum pour  $x_p = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$  et vaut alors  $\left|\frac{1+i(2\sqrt{3}+\sqrt{11})}{4}\right| = \frac{\sqrt{6+\sqrt{33}}}{2} = 1,713\dots$ ; donc  $|x_p - y_p| > 1,123\dots$ .

En résumé, les séquences à deux termes étudiées sont exclues  $(1, 21)$ .

V. 4. Supposons maintenant  $a_n = \omega + 1$ .

Montrons d'abord qu'on a nécessairement  $a_{n-1} = -\bar{\omega}$  (ce qui signifie que les séquences à deux termes  $a, \omega + 1$  sont exclues pour  $a \neq -\bar{\omega}$ ). Comme  $|\omega + 1 - y_n|$  est supérieur à  $|\omega - y_n|$  et à  $|1 - y_n|$ , on a  $x_n \in e'(1) \cap e'(\omega) \cap i(\omega + 1)$ . De plus,  $\mathcal{R}(x_n) > \frac{1}{2}$ , donc  $y_n \in e'(1)$ .

Supposons d'abord  $y_n \in i(o) \cap e'(1) \cap e'\left(\frac{\omega}{2}\right)$ . On vérifiera élémentairement que  $|x_n - y_n|$  est minimum pour  $x_n = \frac{9 + \sqrt{33} + i(3\sqrt{11} + \sqrt{3})}{12}$ ,  $y_n = \frac{4 - \sqrt{11} + i(2\sqrt{11} - 3)}{10}$ , de sorte que  $|x_n - y_n| > |1,1 + i0,6| > 1,25$  et ce cas est exclu  $(1, 25)$  (le sens de cette expression se passe de définition).

Supposons maintenant, au contraire,  $y_n \in i(o) \cap e'(1) \cap i\left(\frac{\omega}{2}\right)$ , d'où  $a_{n-1} - y_{n-1} \in i(-\bar{\omega}) \cap d'\left(-\frac{1}{2}\right)$ , donc  $a_{n-1} = \omega$  ou  $-\bar{\omega}$ ; mais, si  $a_{n-1} = \omega$ ,  $y_{n-1} \in i(1)$  tandis que  $x_n \in d(o)$  implique  $x_{n-1} \in d\left(\frac{1}{2}\right)$ , ce qui contredit l'impossibilité de (T) pour  $a = b = 1$ .

Examinons les valeurs possibles de  $a_{n+1}$  et  $a_{n+2}$ .

Remarquons d'abord que si  $x_n \in i(\omega + 1) \cap e'(\omega)$  avec  $\mathcal{J}(x) \geq \mathcal{J}(\omega + 1)$ , on a  $|x_n| \geq |\omega + 1| = \sqrt{5}$ , donc  $|x_n - y_n| > 1,236\dots$ .

On peut donc supposer  $\mathcal{J}(x_n) < \mathcal{J}(\omega + 1)$ , c'est-à-dire  $\mathcal{J}(x_{n+1}) > 0$ . De plus,  $x_n \in e'(\omega) \cap e'(1)$  implique  $x_{n+1} \in d'\left(-\frac{1}{2}\right) \cap e'\left(\frac{-\bar{\omega}}{2}\right)$ , donc  $a_{n+1} = -\bar{\omega}$ ,  $\omega$ ,  $\omega + 1$  ou  $1$ . Mais dans le cas  $a_{n+1} = 1$ , on a  $\mathcal{R}(x_n) > 2$  tandis que  $\mathcal{R}(y_n) < 0,5$ , donc  $|x_n - y_n| > 1,5$ .

Quant au cas  $a_{n+1} = \omega + 1$ , nous venons de voir qu'il est exclu  $(1, 25)$  si  $a_n \neq -\bar{\omega}$ , ce qui est précisément le cas.

Il reste donc seulement  $a_{n+1} = -\bar{\omega}$  ou  $\omega$ .

De plus, si  $x_{n+1} \in i(-\bar{\omega}) \cap i(\omega)$ , comme  $a_n - y_n \in d(o)$  implique  $y_{n+1} \in g(o)$ ,

on a  $|y_{n+1} + \bar{\omega}| < |y_{n+1} - \omega|$ , et, par suite,  $a_{n+1} = -\bar{\omega}$ . Donc, si  $a_{n+1} = \omega$ , on a  $x_{n+1} \in i(\omega) \cap e'(-\bar{\omega})$ , donc  $x_{n+1} \in d(o)$  et aussi  $x_n \in d\left(\frac{3}{2}\right)$ .  
 Si  $a_{n+1} = -\bar{\omega}$ , on a  $x_{n+1} \in i(-\bar{\omega}) \cap d'\left(-\frac{1}{2}\right) \cap e'\left(\frac{-\bar{\omega}}{2}\right)$ , et par suite  $x_{n+2} \in e(o) \cap d'(o) \cap e'(\omega)$ , d'où  $a_{n+2} = \omega + 1$ ,  $1$ ,  $\bar{\omega} + 1$ ,  $\bar{\omega}$  ou  $-\omega$ . Mais les trois derniers sont exclus (1, 21) d'après V. 3; donc  $a_{n+2} = \omega + 1$  ou  $1$ . Dans ce dernier cas, où  $a_{n+2} = 1$ , on a encore  $x_n \in d\left(\frac{3}{2}\right)$ .

V. 5. Nous venons de voir que  $\omega + 1$  ne peut être suivi que de  $\omega$  ou de  $-\bar{\omega}$ , ce dernier étant nécessairement suivi de  $\omega + 1$  ou de  $1$ ; dès lors, si la séquence  $\omega + 1 - \bar{\omega}$  ne se répète pas indéfiniment, nous finirons par rencontrer  $\omega + 1$  suivi de  $\omega$  ou de  $-\bar{\omega}$ . Désignons ce rang par  $n$ : on a  $a_n = \omega + 1$  et  $\mathcal{R}(x_n) > 1,5$ . Montrons que ceci impose  $y_n \in i(o) \cap e'(1) \cap i\left(\frac{\omega + 1}{2}\right)$ . En effet, si  $\mathcal{J}(y_n) \leq 0$ , d'après  $y_n \in i(o) \cap e'(1)$ , le minimum de  $|\omega + 1 - y_n|$  est atteint pour  $y_n = 0$ , donc on a  $|x_n - y_n| > \sqrt{5} - 1 = 1,236\dots$ . Si  $\mathcal{J}(y_n) > 0$ , mais  $y_n \in e'\left(\frac{\omega + 1}{2}\right)$ ,  $\mathcal{R}(y_n)$  est maximum pour  $y_n = \frac{9 - \sqrt{33} + i(3\sqrt{11} - \sqrt{3})}{12}$  et vaut  $\frac{9 - \sqrt{33}}{12}$ . On a donc  $|x_n - y_n| > \frac{9 + \sqrt{33}}{12} = 1,228\dots$

Supposons maintenant  $y_n \in i(o) \cap e'(1) \cap i\left(\frac{\omega + 1}{2}\right)$  et examinons quels entiers peuvent précéder  $a_{n-1} = -\bar{\omega}$ . On a d'abord  $y_{n-1} - a_{n-1} \in e(o) \cap g'\left(\frac{1}{2}\right) \cap i\left(\frac{\bar{\omega} + 1}{2}\right)$ , puis  $y_{n-1} \in e(-\bar{\omega}) \cap g'(o) \cap i\left(\frac{\omega}{2}\right)$  et  $y_{n-2} - a_{n-2} \in e\left(\frac{-\bar{\omega}}{2}\right) \cap g'(o) \cap i(\bar{\omega})$ , d'où  $a_{n-2} = -\bar{\omega}$  ou  $\omega$ .

Si  $a_{n-2} = \omega$ , on a  $y_{n-2} \in e\left(\frac{\omega}{2}\right) \cap g'\left(\frac{1}{2}\right) \cap i(1)$ , d'où  $y_{n-3} - a_{n-3} \in e(\bar{\omega}) \cap e'(1) \cap d\left(\frac{1}{2}\right)$  et  $a_{n-3} = -\omega$ ,  $-\omega - 1$  ou  $-\bar{\omega} - 1$ .

Mais  $-\omega$  et  $-\omega - 1$  ne peuvent être suivis de  $\omega$  d'après V. 3. D'autre part, la séquence à deux termes  $a_{n-3} = -\bar{\omega} - 1$ ,  $a_{n-2} = \omega$  se déduit par la symétrie  $z \rightarrow -\bar{z}$  de la séquence  $\omega + 1 - \bar{\omega}$ , et, d'après V. 4,  $a_{n-1}$  devrait être égal à  $-\bar{\omega} - 1$  ou  $-1$ , ce qui n'est pas ici le cas. Donc l'hypothèse  $a_{n-2} = \omega$  est exclue.

Si  $a_{n-2} = -\bar{\omega}$ , on a  $y_{n-2} \in e\left(\frac{-\bar{\omega} - 1}{2}\right) \cap g'\left(-\frac{1}{2}\right) \cap i(o)$ , et par suite  $y_{n-3} - a_{n-3} \in e\left(\frac{-\omega - 1}{2}\right) \cap i'(-1) \cap e(o)$  et  $a_{n-3} = \bar{\omega} + 1$ ,  $1$ ,  $\omega + 1$  ou  $-\omega$ . Les deux derniers sont exclus d'après V. 3;  $a_{n+3} = \omega + 1$  ne peut être suivi de  $-\bar{\omega} - \bar{\omega}$  d'après V. 4; enfin, si  $a_{n-3} = 1$ , on a  $x_n \in e'(1)$ , donc  $x_{n-1} \in g'(o)$ , puis  $x_{n-2} \in g'\left(-\frac{1}{2}\right)$ , et  $x_{n-3} \in i'(o)$ , ce qui est impossible.

Ainsi  $\omega + 1$  est exclu (1, 21) sauf peut-être dans les suites pour lesquelles on a, à partir d'un certain rang,  $a_{2p} = \omega + 1$  et  $a_{2p+1} = -\bar{\omega}$ . Mais alors,  $x_{2n}$  est égal à l'une des racines de l'équation  $x = \omega + 1 + 1/(-\bar{\omega} + 1/x)$  ou  $-\bar{\omega}x^2 + (3 + \bar{\omega})x - \omega - 1 = 0$ , et  $y_{2n}$  tend vers l'autre racine, donc  $|x_{2n} - y_{2n}|$  est voisin de  $\left| \frac{\sqrt{-3\omega - 3}}{-\bar{\omega}} \right| = \sqrt[4]{5} = 1,495\dots$ , ce qui est encore exclu. Donc,  $\omega + 1$  est exclu (1, 21).

V.6. Il nous reste à étudier les développements constitués (à partir d'un certain rang) uniquement par les entiers 1,  $\omega$  et leurs symétriques.

Signalons d'abord quelques types de séquences interdites (au sens de la définition donnée dans IV. 3).

I. Les séquences suivantes sont interdites parce qu'elles imposent, au rang de leur premier terme,  $x_n \in i'(0)$ .

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & -1 & & & \omega & -\bar{\omega} & \omega & & \\ 1 & -\omega & -1 & & \omega & \omega & -\bar{\omega} & -\bar{\omega} & \\ 1 & \bar{\omega} & -\omega & -1 & 1 & -\omega & -\omega & -\omega & \\ 1 & -\omega & -\omega & -1 & 1 & -\omega & -\omega & \bar{\omega} & \end{array}$$

II. Sont interdites les séquences où  $a_n = \bar{\omega}$ ,  $x_n \in i(-\omega)$  et  $|y_n + \omega| < |y_n - \bar{\omega}|$ , c'est-à-dire  $y_n \in g(0)$ , en particulier celles où  $a_n = \bar{\omega}$  est précédé de 1, 1  $\bar{\omega}$ ,  $\bar{\omega}$   $\bar{\omega}$  ou 1  $-\omega$   $\bar{\omega}$  et suivi de  $-1$ ,  $-\omega$   $-1$  ou  $-\omega$   $-\omega$ .

III. De même, les séquences où  $a_n = 1$ ,  $x_n \in i(\omega)$  et  $|y_n - \omega| < |y_n - 1|$ , en particulier celles où  $a_n = 1$  est précédé de  $-\omega$   $-\omega$  1,  $-\omega$   $\omega$ , 1  $-\bar{\omega}$   $-\bar{\omega}$ ,  $\omega$   $-\bar{\omega}$  ou  $-\omega$  1  $-\omega$  et suivi de  $-\omega$   $-\omega$  ou  $-\bar{\omega}$   $\bar{\omega}$ .

Naturellement, les séquences symétriques sont aussi interdites.

V. 7. Montrons maintenant que 1 (ou  $-1$ ) doit intervenir une infinité de fois dans le développement. Supposons au contraire qu'à partir d'un certain rang le développement soit constitué uniquement par  $\omega$  et ses symétriques. D'après V.3, on peut supposer qu'il contient uniquement  $\omega$  et  $-\bar{\omega}$ . Donc, ou bien un seul de ces entiers intervient à partir d'un certain rang, ou bien on rencontre une infinité de fois un cas tel que  $a_n = \omega$ ,  $a_{n+1} = -\bar{\omega}$ . D'après I, on ne peut avoir  $a_{n+2} = \omega$ , donc on a  $a_{n+2} = -\bar{\omega}$ ; on rencontre donc certainement un cas tel que  $a_p = -\bar{\omega}$ ,  $a_{p+1} = -\bar{\omega}$ ,  $a_{p+2} = \omega$ . Mais, d'après I, on ne peut avoir  $a_{p+3} = \omega$  ni  $a_{p+3} = -\bar{\omega}$ , d'où la contradiction.

Il faut donc qu'un seul entier, soit  $\omega$ , intervienne à partir d'un certain rang. Mais alors,  $x_n$  est égal à l'une des racines de l'équation  $x = \omega + \frac{1}{x}$ , et  $y_n$  tend

vers l'autre racine, donc  $|x_n - y_n|$  est voisin de  $\sqrt[4]{5} = 1,495\dots$  : et ce cas est exclu.

V. 8. Les développements que nous cherchons contiennent donc 1 (ou  $-1$ ) une infinité de fois. Nous supposons donc maintenant  $a_n = 1$  et examinons les valeurs possibles des entiers suivants. Il suffit d'examiner les trois cas où  $a_{n+1} = 1, \bar{\omega}$  ou  $-\omega$ . (Désormais l'utilisation de V. 3 ne sera plus explicitée.)

1°  $a_n = 1, a_{n+1} = 1$  :

$a_{n+2} = -1$  est interdit;  $a_{n+2} = 1$  implique  $x_{n+1} \in d\left(\frac{3}{2}\right)$ , et, comme  $y_{n+1} \in g\left(-\frac{1}{2}\right)$ ,  $|x_{n+1} - y_{n+1}| > 2$ .

Si  $a_{n+2} = \omega$ , comme  $y_{n+2} \in g(0)$ , on a nécessairement  $x_{n+2} \in e'(-\bar{\omega})$ , donc  $x_{n+2} \in d(0)$ , ce qui implique  $x_{n+1} \in d(1)$  et  $|x_{n+1} - y_{n+1}| > 1,5$ . On a donc  $a_{n+2} = -\omega$  ou  $-\bar{\omega}$ . On verra de même que  $a_{n-1} = -\omega$  ou  $-\bar{\omega}$ .

Supposons désormais  $a_{n+2} = -\omega$ . On a donc  $x_{n+1} \in i\frac{(\omega+1)}{2}$ . Si  $a_{n-1} = -\bar{\omega}$ ,  $y_{n+1} \in i\frac{(-\omega-1)}{2}$  et  $|x_{n+1} - y_{n+1}| > |\omega+1| - 1 = \sqrt{5} - 1 = 1,236\dots$ . On a donc  $a_{n-1} = -\omega$ , ce qui donne la séquence  $-\omega \ 1 \ 1 \ -\omega$ .

Examinons  $a_{n+3}$  et  $a_{n-2}$ .

Si  $a_{n+3} = 1$ , on a  $x_{n+2} \in d(0)$ ,  $x_{n+1} \in d(1)$  et  $|x_{n+1} - y_{n+1}| > 1,5$ ;  $a_{n+3} = -1$  est interdit (I); donc  $a_{n+3} = -\omega$  ou  $\bar{\omega}$ .

Donc  $a_{n-2} = -\omega$  est interdit (III);  $a_{n-2} = -1$  est interdit (II); si  $a_{n-2} = 1$ , on a  $y_n \in g(0)$  et  $x_n \in d\left(\frac{3}{2}\right)$ , donc  $|x_n - y_n| > 1,5$ ; donc  $a_{n-2} = \bar{\omega}$ . Cherchons enfin  $a_{n-3}$  :  $a_{n-3} = -1$  ou  $-\omega$  est interdit (I); donc  $a_{n-3} = 1$  ou  $\bar{\omega}$ .

Montrons qu'il en résulte  $y_{n-2} \in g'(0)$  : en effet, si l'on suppose que, pour  $a_{n-3} = \bar{\omega}$ ,  $y_{n-2} \in d(0)$ , ceci implique  $y_{n-3} \in d\left(\frac{1}{2}\right)$ , tandis que  $x_{n-3} \in i(1)$ ; donc c'est absurde : on a bien, par suite,  $y_{n-2} \in g'(0)$ ; donc  $y_{n-1} \in i'(-1)$ ;  $y_n \in i'\frac{(-\omega)}{2}$ , donc  $\mathcal{R}(y_n) \leq \frac{1}{4}$ , tandis que  $\mathcal{R}(x_n) \geq \frac{3}{2}$ ; d'où  $|x_n - y_n| > 1,25$ .

Ce cas est donc exclu.

2°  $a_n = 1, a_{n+1} = \bar{\omega}$  :

$a_{n+2} = -1$  est interdit (II), et  $a_{n+2} = 1$  est exclu (1,5) au rang  $n+1$ , comme plus haut; donc  $a_{n+2} = -\omega$  ou  $\bar{\omega}$ .

Si  $a_{n+2} = -\omega$ ,  $a_{n+3} = -\omega$  ou  $-1$  est interdit (II),  $a_{n+3} = \bar{\omega}$  est interdit (I), donc  $a_{n+3} = 1$ .

Si  $a_{n+2} = \bar{\omega}$ ,  $a_{n+3} = -1$  est interdit (II), donc  $a_{n+3} = 1, \bar{\omega}$  ou  $-\omega$ .

Si  $a_{n+3} = -\omega$ ,  $a_{n+4} = -1$  est interdit (II);  $a_{n+4} = \bar{\omega}$  ou  $-\omega$  sont interdits (I);

donc  $a_{n+4} = 1$ ; donc si  $a_{n+3} = \bar{\omega}$  ou  $-\omega$ , on a  $x_{n+3} \in i(\bar{\omega})$ , donc  $x_{n+2} \in i \frac{(1 + \bar{\omega})}{2}$ ,  $x_{n+1} \in i \frac{(2 + \bar{\omega})}{2}$ , donc  $x_{n+1} \in d\left(\frac{3}{4}\right)$ . Comme  $y_{n+1} \in g\left(-\frac{1}{2}\right)$ , on a  $|x_{n+1} - y_{n+1}| > 1,25$ .

Reste le cas où  $a_{n+3} = 1$ . Alors  $x_{n+2} \in i(\bar{\omega}) \cap d(1)$ . Si de plus  $x_{n+2} \in e' \frac{(\bar{\omega} + 1)}{2}$ , le minimum de  $\left|x_{n+2} + \frac{1}{2}\right|$  est obtenu pour  $x_{n+2} = 1 - i \frac{\sqrt{11} + \sqrt{3}}{4}$  et vaut 1,960... . Comme  $y_{n+1} \in g\left(\frac{1}{2}\right)$  entraîne  $y_{n+2} \in i \frac{(-1)}{2}$ , on a donc  $|x_{n+2} - y_{n+2}| > 1,460$ . Si maintenant  $x_{n+2} \in i \frac{(\bar{\omega} + 1)}{2}$ , on a  $x_{n+1} \in i \frac{(\bar{\omega} + 2)}{2}$ , donc  $x_{n+1} \in d\left(\frac{3}{4}\right)$  et  $|x_{n+1} - y_{n+1}| > 1,25$ .

*Conclusion :*

1 ne peut être suivi de  $\bar{\omega}$  que dans la séquence  $1 \bar{\omega} - \omega 1$ , que nous noterons A.

3°  $a_n = 1$ ,  $a_{n+1} = -\omega$  :

$a_{n+2} = -1$  est interdit (I), donc  $a_{n+2} = -\omega$ ,  $\bar{\omega}$  ou 1.

Si  $a_{n+2} = -\omega$ ,  $a_{n+3} = 1$ , car  $-1$ ,  $-\omega$ ,  $\bar{\omega}$  sont interdits (I). Si  $a_{n+2} = \bar{\omega}$ ,  $a_{n+3} = 1$  ou  $\bar{\omega}$ , car  $-1$  et  $-\omega$  sont interdits (I). Si  $a_{n+3} = \bar{\omega}$ , il peut être suivi d'un certain nombre de fois  $\bar{\omega}$ .

Introduisons donc les séquences  $1 - \omega \bar{\omega} \bar{\omega}$  et  $\bar{\omega} \bar{\omega} \bar{\omega}$ , en désignant par  $p$  le dernier rang, et en supposant  $a_{p+1} \neq \bar{\omega}$ . Cherchons  $a_{p+1}$  :  $a_{p+1} = -1$  est interdit (II), ainsi que  $a_{p+1} = -\omega$  suivi de  $a_{p+2} = -\omega$  ou  $-1$ ;  $a_{p+1} = -\omega$ ,  $a_{p+2} = \bar{\omega}$  est interdit (I); donc ou bien  $a_{p+1} = 1$ , ou bien  $a_{p+1} = -\omega$  et  $a_{p+2} = 1$ .

Si  $a_{p+1} = 1$ ,  $x_p \in d(1)$  tandis que, dans les deux cas,  $y_p \in i \frac{(-\omega - 1)}{2}$  donc  $y_p \in g\left(-\frac{1}{4}\right)$  et  $|x_p - y_p| > 1,25$ .

*Conclusion :*

1 ne peut être suivi de  $-\omega$  que dans les séquences :

1	$-\omega$	1					notée	B
1	$-\omega$	$-\omega$	1				»	C
1	$-\omega$	$\bar{\omega}$	1				»	D
1	$-\omega$	$\bar{\omega}$	...	$\bar{\omega}$	$-\omega$	1	»	E ( $k$ fois $\bar{\omega}$ , $k \geq 2$ ).

V. 9. Les développements cherchés sont donc constitués seulement par les séquences A, B, C, D, E et leurs symétriques. Mais, comme A, B, C, D, E commencent et finissent par 1 (et non  $-1$ ), il faut se borner à ces séquences et à leurs imaginaires conjuguées,  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{C}$ ,  $\bar{D}$ ,  $\bar{E}$ .

Avant d'examiner ces combinaisons, prouvons que B ne peut être précédée que de  $-\bar{\omega}$ .

Supposons donc  $a_n = 1$ ,  $a_{n+1} = -\omega$ ,  $a_{n+2} = 1$ .

Si  $a_{n-1} = -\omega$ ,  $y_{n+1} \in i \frac{(-\bar{\omega}-2)}{2}$  et  $x_{n+1} \in i(-\omega) \cap e(o) \cap d(o)$ , de sorte que  $\left| x_{n+1} + \frac{\bar{\omega}+2}{2} \right|$  est minimum pour  $x_{n+1} = -i$  et vaut alors 1,976..., d'où  $|x_{n+1} - y_{n+1}| > 1,47$ .

Si  $a_{n-1} = \bar{\omega}$  ou  $\omega$ , on a nécessairement la fin d'une séquence D ou  $\bar{D}$ .

Dans le premier cas,  $a_{n-3} = 1$ ,  $a_{n-2} = -\omega$ ,  $a_{n-1} = \bar{\omega}$ , donc  $y_{n-1} \in i \frac{(\bar{\omega})}{2}$  implique  $y_n \in i(-\omega)$ , d'où  $|x_n - y_n| > \left| \frac{3\bar{\omega}+2}{2} \right| - \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{37}-3}{2} = 1,541\dots$ , puisque  $x_n \in i \frac{(\bar{\omega}+2)}{2}$ . Dans le second cas,  $a_{n-3} = 1$ ,  $a_{n-2} = -\bar{\omega}$ ,  $a_{n-1} = \omega$ , on a  $y_n \in i(-1) \cap i(-\bar{\omega})$ , donc  $y_n \in i \frac{(-\bar{\omega}-1)}{2}$ , et  $x_n \in d(1)$ , d'où  $|x_n - y_n| > 1,25$ .

Enfin  $a_{n-1} = -1$  est interdit, et par suite on a  $a_{n-1} = -\bar{\omega}$ . De cette précision résulte la remarque, que les séquences  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{C}$ ,  $\bar{D}$ ,  $\bar{E}$  figurent toutes dans la liste de V.8 (III) et impliquent au rang de leur dernier terme  $|y_n - \omega| > |y_n - 1|$ .

Introduisons quelques notations :  $UU'$  désignera une séquence où, à un certain rang  $n$ , on a  $a_n = 1$  ;  $a_n a_{n+1} a_{n+2} \dots$  constituant la séquence  $U'$ , alors que  $\dots a_{n-2} a_{n-1} a_n$  constituent la séquence  $U$ .

Désignons par  $\Sigma$  l'une quelconque des séquences A, B, C, D, E ; par  $\bar{\Sigma}$  l'une quelconque des séquences  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{C}$ ,  $\bar{D}$ ,  $\bar{E}$  ; par  $Y$  indifféremment  $\Sigma$  ou  $\bar{\Sigma}$ .

Envisageons les séquences  $\bar{\Sigma}Y$ . Il résulte de la remarque précédente qu'elles sont interdites pour  $Y = C, D, E$ , d'après III.  $Y = \bar{B}$  a déjà été exclu.

Pour  $Y = \bar{C}$ , la projection de  $x_n$  sur la droite  $o\bar{\omega}$  (orientée dans ce sens) est supérieure à  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , tandis que celle de  $y_n$  est inférieure à  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ , d'où  $|x_n - y_n| > \frac{5}{6}\sqrt{3} = 1,443\dots$

Enfin, pour  $Y = \bar{A}, \bar{D}, \bar{E}$ , on a  $x_n \in i \frac{(\bar{\omega}+2)}{2}$ , d'où, par projection sur la droite  $\omega 1$ ,  $|x_n - y_n| > \sqrt{3} - \frac{1}{2} = 1,232\dots$

Ainsi  $Y$  ne peut être que A ou B ; donc seules peuvent intervenir une infinité de fois les séquences A, B,  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ .

De plus, nous avons vu que B ne peut être précédée de  $-\omega$ , donc de A ou de B ; et si  $-\omega$  précède A, on a, au premier rang de A,  $x_n \in i(\omega+1)$  et  $y_n \in i \frac{(\bar{\omega})}{2}$ , d'où  $|x_n - y_n| > \left| \frac{3\omega+1}{2} \right| - \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{31}-3}{2} = 1,283\dots$  Il y a donc alternance de séquences A ou B et de séquences  $\bar{A}$  ou  $\bar{B}$ .

Mais, pour  $\overline{\text{BA}}$ , on a, au rang du 1 médian,  $x_n \in i(\omega + 1) \cap i(2)$ , d'où  $x_n \in i \frac{(\omega + 3)}{2}$ , et  $y_n \in g(o)$ , donc  $|x_n - y_n| > 1,25$ . Seules restent possibles, à partir d'un certain rang, les suites périodiques  $A\overline{A}A\overline{A} \dots$  et  $B\overline{B}B\overline{B} \dots$ .

Pour les nombres dont le développement, à partir d'un certain rang, a pour période  $\overline{A\overline{A}}$ ,  $\overline{\lim} |x_n - y_n|$  est au moins égale à la différence des racines de l'équation  $x = 1 + 1/\overline{\omega} + 1/\overline{\omega} - \omega + 1/1 + 1/\omega + 1/\overline{\omega} + 1/x$  ou  $4x^2 - 4x(1 + \omega) + (1 + 3\overline{\omega}) = 0$  ce qui donne  $\overline{\lim} |x_n - y_n| \geq \sqrt{2} = 1,414\ldots$

Pour les nombres dont le développement, à partir d'un certain rang, a pour période  $\overline{BB}$ ,  $|x_n - y_n|$  a, pour chaque parité, la même limite que pour le nombre  $x$  de II. 5.

La démonstration de II. 5 prouve d'ailleurs que pour tous ces nombres (que nous appellerons critiques)  $C(x) = \frac{\sqrt{5}}{2} = 1,118\dots$

En résumé, tous les nombres complexes sont exclus  $(1, 21)$ , sauf les nombres critiques, pour lesquels  $C(x) = \frac{\sqrt{5}}{2}$ . *Telle est donc la valeur de la constante d'Hurwitz de  $R(\sqrt{-11})$ . De plus, elle est isolée dans son spectre de Markoff. Les autres valeurs sont supérieures à  $1, 21$  (constante qu'on peut facilement améliorer de quelques centièmes).*

V. 10. REMARQUES. — On peut énoncer le résultat  $C_{11} \geq \frac{\sqrt{5}}{2}$  sous la forme : Pour tout  $x$  complexe, il existe une infinité de fractions  $\frac{p}{q}$  de  $R(\sqrt{-11})$  telles que  $|q(qx - p)| < \frac{2}{\sqrt{5}} + \varepsilon$ , si petit que soit  $\varepsilon > 0$ .

On peut remplacer  $\varepsilon$  par 0. Il suffit de le démontrer pour les nombres critiques. Or, pour ceux-ci, les formules de récurrence pour  $y_n$  se condensent, pour  $k$  assez grand, en :

$$\frac{y_{4k+4}-x}{y_{4k+4}-y} = \lambda \frac{y_{4k}-x}{y_{4k}-y}, \quad \frac{y_{4k+6}-\bar{x}}{y_{4k+6}-\bar{y}} = \lambda \frac{y_{4k+2}-\bar{x}}{y_{4k+2}-\bar{y}}$$

avec les notations de II. 5 et  $\lambda = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$  réel  $> 1$ .

$y_{4k}$  et  $y_{4k+2}$  tendent respectivement vers  $y$  et  $\bar{y}$  le long de deux arcs de cercle (de rayon fini ou infini) passant respectivement par  $x, y$  et  $\bar{x}, \bar{y}$ . Notons que  $x$  et  $y$  sont sur  $(\omega)$ , mais  $y_{4k} \in e'(\omega)$  d'après la remarque finale de IV. 2. On en déduit élémentairement que l'un des deux arcs au moins est supérieur à un demi-diamètre, ce qui montre que de  $|x_{4k} - y_{4k}|$  et  $|x_{4k+2} - y_{4k+2}|$  l'un au moins tend vers  $\frac{\sqrt{5}}{2}$  par valeurs supérieures. Les fractions correspondantes satisfont  $|q(qx - p)| < \frac{2}{\sqrt{5}}$ .



Comparons maintenant le développement précédent de  $x$  à celui que fournit l'algorithme d'Hurwitz. Désignons les nombres analogues aux précédents qui y interviennent par les mêmes lettres accentuées. Dans cet algorithme on choisit pour  $a'_n$  l'entier le plus proche de  $x'_n$ , avec  $x'_0 = x$ .

On obtient ainsi  $a'_0 = 1$ ,  $a'_1 = \omega$ ,  $a'_2 = -\omega - 1$ ,  $a'_3 = \omega + 1$  et l'on constate que  $x'_i = x'_2$ , donc la suite est périodique (à deux termes) après deux termes irréguliers.

D'autre part, les formules de récurrence condensées :

$$p_{4k+4} = (\omega + 1)p_{4k+2} - p_{4k}, \quad p_{4k+2} = (\bar{\omega} + 1)p_{4k} - p_{4k-2}$$

et les égalités  $p_0 = p'_0$ ,  $p_2 = p'_1$  donnent immédiatement

$$p_{8k} = p'_{4k}, \quad p_{8k+2} = p'_{4k+1}, \quad p_{8k+4} = -p'_{4k+2}, \quad p_{8k+6} = -p'_{4k+3}$$

avec des égalités analogues pour les dénominateurs, d'où l'on tire

$$\lim |q'_n(q'_n x - p'_n)| = 1.$$

L'algorithme d'Hurwitz ne retient donc, parmi les réduites de  $x$ , que les moins bonnes.

Touche-t-on à l'explication du rôle effacé qu'il a joué dans les problèmes d'approximation de nombres complexes ?

## VI. — Étude des petites valeurs du spectre de Markoff de $R(\sqrt{-3})$ .

VI. 1. Perron a montré que  $C_3 = \sqrt[4]{13}$ . Notre but est de préciser la connaissance des petites valeurs du spectre de Markoff de  $R(\sqrt{3})$ . La démonstration cheminera, comme celle de V, par exclusion progressive des séquences impliquant, à certains rangs  $n$ ,  $|x_n - y_n|$  assez grand.

Pour commencer (VI. 2 à VI. 10) nous donnons quelques propriétés des nombres  $x$  tels que  $C(x) < \sqrt{\frac{13}{3}} = 2,081\dots$ . Nous serons ensuite obligés de nous limiter aux nombres tels que  $C(x)$  ne dépasse guère 2,07; ceci sera précisé en temps utile.

Indiquons ici une remarque sur le « retournement » des séquences. Soient  $a_m a_{m+1} \dots a_n$  et  $b_m b_{m+1} \dots b_n$  deux séquences de quotients incomplets telles que  $a_{m+k} = -b_{n-k}$  (le changement de signe n'est pas essentiel). Désignons par des lettres non accentuées les nombres  $x$  et  $y$  associés à la première séquence, par des lettres accentuées ceux qui sont associés à la seconde.  $\frac{1}{y'_{n-k+1}}$  et  $\frac{1}{x'_{n-k+1}}$  satisfont aux mêmes récurrences vers les indices décroissants que  $x_{m+k}$  et  $y_{m+k}$  vers les indices croissants. De plus, dans le cas particulier du corps  $R(\sqrt{-3})$ , les régions permises pour  $(x_{m+k}, y_{m+k})$  et  $(\frac{1}{y'_{n-k+1}}, \frac{1}{x'_{n-k+1}})$  sont les mêmes.

Comme  $\frac{1}{x'_{j+1}} - \frac{1}{y'_{j+1}} = x'_j - y'_j$ , les deux séquences sont simultanément exclues. Ce « principe de retournement », commun à  $R$  et à  $R(\sqrt{-3})$ , ne s'applique pas aux autres cas.

VI. 2. Si  $|a_n| > 2$ , et  $0 \leq \arg x_n \leq \frac{\pi}{6}$  par exemple, on voit que  $y_n \in e'(\mathbf{1}) \cap e'(\omega)$  et  $x_n \in e'(\omega + \mathbf{1}) \cap e'(2)$ , d'où  $|x_n - y_n| > |\omega + 2| = \sqrt{7} > 2,6$ . On a donc, à chaque rang,  $|a_n| \leq 2$ . Par suite,  $y_n$  et  $x_n - a_n$  sont extérieurs à un certain voisinage de 0 que le lecteur précisera. Ceci sera utile plus loin.

Nous étudions d'abord (VI. 2, 3, 4,) l'intervention de quotients incomplets de module différent de 1.

Nous supposons  $0 \leq \arg x_n \leq \frac{\pi}{6}$ , donc  $a_n = \omega + \mathbf{1}$  ou 2. On a dans tous les cas  $y_n \in e'(\mathbf{1}) \cap e'(\omega)$  et  $x_n \in e'(\mathbf{1})$ . Si, de plus,  $x_n \in \bar{\omega} d\left(\frac{1}{2}\right)$ , alors  $y_n \in e'(\bar{\omega})$ .

Si  $x_n \in i(\omega + \mathbf{1}) \cap i(2)$ ,  $a_n = \omega + \mathbf{1}$  ou 2 selon que  $\mathcal{R}(\omega y_n) < \text{ou} > \frac{1}{2}$ ; si  $\mathcal{R}(\omega y_n) = \frac{1}{2}$ ,  $a_n = \omega + \mathbf{1}$  ou 2 selon que  $\mathcal{R}(\omega x_n) < \text{ou} > \frac{1}{2}$ ; enfin, si  $\mathcal{R}(\omega y_n) = \mathcal{R}(\omega x_n) = \frac{1}{2}$ ,  $a_n$  est indéterminé, les fractions obtenues avec  $a_n = 2$  ou  $\omega + \mathbf{1}$  étant équivalentes.

Dans ce cas, et dans d'autres analogues, nous prendrons sans autre explication celle des valeurs de  $a_n$  qui nous sera la plus commode.

Éliminons quelques cas faciles :

Si  $a_n = 2$  avec  $x_n \in e'(\omega + \mathbf{1})$ ,  $|a_{n+1}| \leq 2$  implique  $x_n \in d\left(2 + \frac{2}{7}\right)$ ; de même  $y_n \in g\left(-\frac{2}{7}\right)$ ;  $|x_n - y_n| > 2,5$ .

Si  $a_n = \omega + \mathbf{1}$  avec  $x_n \in e'(2)$ ,  $|a_{n+1}| \leq 2$  implique  $\mathcal{I}(\omega x_n) > \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ ;  $\mathcal{I}(\omega y_n) < 0$ ; donc  $|x_n - y_n| > 2,09$ .

Si  $a_n = \omega + \mathbf{1}$  avec  $x_n \in \bar{\omega} d\left(\frac{1}{2}\right)$ ,  $x_n \in d\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ;  $y_n \in g\left(-\frac{2}{7}\right)$ ; donc  $|x_n - y_n| > 2,1$ .

Si  $a_n = 2$  avec  $x_n \in i(\omega + \mathbf{1}) \cap \bar{\omega} d'\left(\frac{1}{2}\right)$ , il ne subsiste en fait que le cas  $\mathcal{R}(\omega x_n) = \mathcal{R}(\omega y_n) = \frac{1}{2}$ , où il nous plaît de prendre  $a_n = \omega + \mathbf{1}$ .

Il ne reste donc que deux cas, que nous allons étudier successivement :

A.  $a_n = \omega + \mathbf{1}$ , avec  $x_n \in e'(\mathbf{1}) \cap i(2) \cap \bar{\omega} g'\left(\frac{1}{2}\right)$ .

B.  $a_n = 2$ , avec  $x_n \in e'(\mathbf{1}) \cap i(\omega + \mathbf{1}) \cap \bar{\omega} g'\left(\frac{1}{2}\right)$ .

VI. 3. Étudions  $a_n = \omega + \mathbf{1}$  dans le cas A.

On a  $x_{n+1} \in \bar{\omega} d'\left(-\frac{1}{2}\right) \cap \omega d\left(\frac{1}{2}\right) \cap e'(\omega)$ , d'où, *a priori*,  $a_{n+1} = \mathbf{1}$ ,  $\bar{\omega} + \mathbf{1}$ ,  $2$ ,  $\omega + \mathbf{1}$ ,  $2\omega$ . En fait, d'après VI. 2, il ne subsiste que  $a_{n+1} = \mathbf{1}$  ou  $\omega + \mathbf{1}$ .

Si  $a_{n+1} = 1$ ,  $x_n \in d(2) \cap \bar{\omega} g'(\frac{1}{2})$ , d'où  $|x_n - y_n| > \left| 2 + i\frac{\sqrt{3}}{3} \right| = \sqrt{\frac{13}{3}}$ .

On a donc  $a_{n+1} = \omega + 1$ , qui intervient d'après VI. 2 dans les deux cas :  $x_{n+1} \in i(2\omega) \cap \bar{\omega} d'(-\frac{1}{2})$  et  $x_{n+1} \in i(2) \cap \bar{\omega} g'(\frac{1}{2})$ . Dans le second cas,

$|a_{n+2}| \leq 2$  implique  $x_{n+1} \in i\frac{(4+\omega)}{2} \cup i\frac{(5+3\omega)}{3}$ ;  $y_{n+1} \in e'(\omega) \cap i\frac{(-1-\bar{\omega})}{2}$ ;

donc  $|x_{n+1} - y_{n+1}| > \left| \frac{13+3\omega}{7} \right| = \frac{\sqrt{31}}{7} > 2,1$

Il ne reste donc que  $a_{n+1} = \omega + 1$ , le champ de  $x_{n+1}$  se déduisant de celui de  $x_n$  par la transformation  $z \rightarrow \omega z$ ; on a donc nécessairement la suite périodique (à six termes) :

$$\omega + 1 \quad \omega + 1 \quad \bar{\omega} - \omega \quad -\bar{\omega} - 1 \quad -\bar{\omega} - 1 \quad \bar{\omega} - \omega \quad \omega + 1 \quad \dots$$

qui donne  $C(x) = 2$ .

Si la périodicité est initiale, on a la suite de meilleure approximation de  $x = 1 + \sqrt{\omega}$ . On observera que chaque réduite de rang pair possède une réduite équivalente (mais non absolument) correspondant au choix d'un quotient incomplet équivalent à 2, au lieu d'un quotient incomplet équivalent à  $\omega + 1$ . Les nombres considérés ont donc une infinité de développements (on notera la parenté avec II. 6), et nous en rencontrerons encore d'autres, ceux-là non conformes aux règles choisies.

#### VI. 4. Étudions $a_n = 2$ dans le cas B.

On a immédiatement  $a_{n+1} = -\omega$  (et  $a_{n-1} = -\omega$ ) et  $x_{n+2} \in d'(0) \cap \bar{\omega} g'(\frac{1}{2})$ .

Si  $x_{n+2} \in i(1)$ ,  $x_n \in d(2) \cap \bar{\omega} g'(\frac{1}{2})$ , d'où  $|x_n - y_n| > \sqrt{\frac{13}{3}}$ .

Comme  $y_{n+2} \in i\frac{(1-3\omega)}{2}$ , si  $J(\omega x_{n+2}) \geq 3$ , on a  $|x_{n+2} - y_{n+2}| > \frac{3\sqrt{3}-1}{2} > 2,09$ .

Enfin  $\omega + 1$  et  $\omega - \bar{\omega}$  ne peuvent plus intervenir, et  $2\omega$  ne peut être précédé que de  $-1$  ou  $\omega$ . On a donc  $a_{n+2} = \omega$  avec  $x_{n+2} \in d'(0) \cap e'(1)$  (et, de même,  $a_{n-2} = \omega$ ). On peut donc avoir, *a priori*,  $a_{n+3} = \bar{\omega} + 1$ ,  $\bar{\omega} - \omega$ ,  $-\omega - 1$  (mais ils n'interviennent plus);  $2$ ,  $2\bar{\omega}$ ,  $-2\omega$  (mais ils ne peuvent être précédés de  $\omega$ );  $-2$ ,  $1$ ,  $\bar{\omega}$  ou  $-\omega$ .

Montrons que ces trois derniers sont exclus. En effet  $a_{n-2} = \omega$  implique

$y_{n+2} \in i\frac{(1+\bar{\omega}-5)}{9}$ , et d'autre part  $x_{n+2} \in d(1)$  ou  $\omega d(\frac{3}{2})$  ou  $\bar{\omega} g(1)$ , donc on a

$$|x_{n+2} - y_{n+2}| > \left| \frac{2i\sqrt{3}}{3} - y_{n+2} \right| > 2,1.$$

Il ne reste donc que  $a_{n+3} = -2$ , le champ de  $x_{n+3}$  se déduisant de celui de  $x_n$  par la transformation  $z \rightarrow -z$ ; on a donc nécessairement la suite périodique (à six termes) :

$$2 \quad -\omega \quad \omega \quad -2 \quad \omega \quad -\omega \quad 2 \quad \dots$$

Les nombres correspondants sont les mêmes que dans VI. 3, mais le développement n'en est pas valable, certains  $x_n$  ayant pour module 1.

Nous pouvons donc énoncer le résultat partiel suivant :

*Les nombres  $x$  tels que  $C(x) < \sqrt[13]{\frac{13}{3}}$  comprennent les nombres de VI. 3 pour lesquels  $C(x) = 2$  et des nombres dont tous les quotients incomplets, à partir d'un certain rang, ont pour module 1.*

VI.5. Nous sommes donc ramenés à l'étude des séquences constituées uniquement par les six unités du corps  $1, \omega, -\bar{\omega}, -1, -\omega$  et  $\bar{\omega}$ .

Introduisons de nouvelles notations. Parmi les séquences à deux termes, il y a six classes de séquences équivalentes, parmi lesquelles celle de  $(-1, 1)$  est une classe de séquences interdites.

Désignons respectivement par  $A, B, C, \bar{B}, \bar{C}$  les classes dont des représentants sont  $1, 1, 1, \omega, 1, -\omega, 1, \bar{\omega}, 1, -\bar{\omega}$ . La notation des classes de séquences plus longues obéit à la convention suivante : on écrit, dans leur ordre naturel, les signes qui désignent les classes auxquelles appartiennent les séquences de deux quotients incomplets consécutifs qu'on peut extraire de la séquence donnée. Exemple : la classe dont un représentant est  $1 - \omega, 1, \bar{\omega}, \omega$  sera notée  $CC\bar{B}A$ .

Il est clair que cette notation caractérise bien une classe de séquences équivalentes et que le choix arbitraire d'une des six unités pour l'un des quotients incomplets qui interviennent implicitement détermine complètement une séquence dans cette classe.

Examinons quelles séquences à deux chiffres contenant  $a_n$  peuvent intervenir suivant la position de  $x_n$  et  $y_n$ .

Distinguons dans le champ de  $x_n$ , soit  $i(a_n) \cap e(o)$ , huit régions définies comme suit :

$$\begin{array}{ll} (1. & |x - \omega a_n| < |x - a_n| \\ (2. & |x - a_n| \leq |x - \omega a_n| < 1 \\ (3. & |x - \omega a_n| \geq 1, \quad |x| \leq |x - \bar{\omega} a_n| \\ (4. & |x - \omega a_n| \leq |x - \bar{\omega} a_n| < |x| \end{array}$$

$(\bar{1}. , (\bar{2}. , (\bar{3}. , (\bar{4}. ,$  étant les régions respectivement symétriques par rapport à la droite  $o a_n$ .

De même, nous distinguons dans le champ de  $y_n$ ,  $i(o) \cap e(a_n)$ , huit régions notées  $.k)$  et  $.\bar{k})$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) définies par la condition que les régions  $(k. et .k)$ , et aussi les régions  $(\bar{k}. et .\bar{k})$ , soient symétriques par rapport au point  $\frac{a_n}{2}$ .

Pour abréger, nous écrirons par exemple  $(p.q.r.$  au lieu de  $(p. \cup (q. \cup (r.$  et, le cas échéant : «  $a_n$  est en position  $(u;v)$  » au lieu de «  $x_n \in (u. et y_n \in .v).$  »

L'impossibilité de (T) pour  $|a| = |b| = 1$  se traduit, avec ces notations, par l'interdiction des positions  $(u; v)$  dans les cas suivants :

$$u(\text{resp. } \bar{v}, \bar{u}, \bar{v}) = 1 \text{ ou } 2, \quad v(\text{resp. } u, \bar{v}, \bar{u}) = 4, \bar{4}, \bar{3}, \bar{2} \text{ ou } 1.$$

Rappelons que, d'après IV. 4, les suites pour lesquelles, à chaque rang,  $a_n$  est dans l'une des positions non interdites sont des suites de meilleure approximation.

Le lecteur vérifiera aisément la correspondance suivante entre la position de  $a_n$  et la classe de la séquence  $a_n a_{n+1}$ .

Position de $a_n$ .	Classe de $a_n a_{n+1}$ .	Position de $a_{n+1}$ .
(1.	C	(1.2.3.
(2.	$\bar{B}$	(4. $\bar{4}$ . $\bar{3}$ .
(3;1)	$\bar{B}$	(3.
	ou	
	A	(1.
(3;2.3.4. $\bar{4}$ . $\bar{3}$ )	$\bar{B}$	(2.3.
(4.	$\bar{B}$	(1.
	ou	
	A	(3.4.

On complètera par la symétrie  $z \rightarrow \bar{z}$ .

D'après le principe de retournement, il y a une correspondance analogue entre la position de  $a_n$  obtenue par échange du rôle de  $x$  et  $y$ , la classe de  $a_{n-1} a_n$  et la position de  $a_{n-1}$ .

Ces correspondances « mécanisent » la recherche des séquences non interdites et seront systématiquement utilisées dans la suite.

VI. 6. Nous allons nous occuper d'abord des développements constitués (à partir d'un certain rang) par une seule des trois lettres A, B ou C (avec ou sans barre). Ensuite, nous envisagerons les mélanges possibles.

Les suites constituées uniquement par A (à partir d'un certain rang) donnent  $C(x) = \sqrt{5}$  et sont donc d'intérêt.

Les suites constituées par C ou  $\bar{C}$  (à partir d'un certain rang) comportent uniquement C, ou uniquement  $\bar{C}$ , car C ne peut être suivi de  $\bar{C}$ , d'après VI. 5. Elles sont équivalentes ou symétriques à des suites où pour tout  $n$  assez grand,  $a_n = \omega$ . Pour ces suites  $C(x)$  est égal au module de la différence des racines de l'équation  $x^2 - \omega x - 1 = 0$ , soit  $\sqrt[4]{13} = 1,8988\dots$ . Les nombres considérés sont les nombres « critiques », pour lesquels  $C(x) = C_3$ . Il résultera de la suite qu'ils sont les seuls nombres critiques.

VI. 7. Étudions les suites constituées par B et  $\bar{B}$ .

Remarquons d'abord que  $B\bar{B}B$  est interdit par VI. 5.

$BBBB\bar{B}$  est représentée par  $\omega \text{ I } \omega \text{ I } \omega \text{ I } \bar{\omega}$ ;  $n$  étant le rang médian, on a  $x_n \in i(\bar{\omega} + 2)$  et  $y_n \in i \frac{(-3\bar{\omega})}{4} \cap e'(\omega)$ , d'où  $|x_n - y_n| > 2,1$ .

$\bar{B}BBBB\bar{B}$  est représentée par  $\bar{\omega} \text{ I } \omega \text{ I } \omega \text{ I } \bar{\omega}$ ;  $n$  étant le rang médian, on a  $x_n \in i(\bar{\omega} + 2)$  et  $y_n \in i(-\bar{\omega} - 1)$ , d'où  $|x_n - y_n| > 2,3$ .

$B\bar{B}\bar{B}BB\bar{B}$  est représentée par  $\omega \text{ I } \omega \text{ I } \omega \text{ I } \omega$ ;  $n$  étant le rang médian, on a  $x_n \in i(\bar{\omega} + 2) \cap i \frac{(3)}{2}$  et  $y_n \in i(-\omega - 1) \cap i \frac{(-1)}{2}$ , d'où  $|x_n - y_n| > 2,1$ .

Il résulte de ceci que, si une suite ne comprend pas uniquement (à partir d'un certain rang) des  $B$  ou des  $\bar{B}$  [en ce cas, elle ne serait pas intéressante puisqu'elle donnerait  $C(x) = \sqrt[4]{21} > 2,1$ ] elle est constituée de blocs de deux ou trois lettres identiques, deux blocs de deux ne pouvant se suivre.

Donc, ou bien il n'intervient, à partir d'un certain rang, que des blocs de trois [et l'on a une suite périodique donnant  $C(x) = \sqrt{\frac{13}{3}}$ ]; ou bien intervient une infinité de fois une séquence égale (à la barre près) à  $\bar{B}BBB\bar{B}\bar{B}BBB\bar{B}\bar{B}\bar{B}$ , représentée par  $-\omega \omega \text{ I } \omega \text{ I } \bar{\omega} \text{ I } \omega \text{ I } \omega -\omega \omega -\omega \text{ I}$ ;  $n$  étant le rang de l'avant-dernier  $\text{I}$ , on a  $x_n \in i \frac{(9\bar{\omega} + 9)}{11}$  et  $y_n \in i \frac{(-220\bar{\omega} - 169)}{439}$ , d'où  $|x_n - y_n| > 2,09$ ; ou bien enfin les blocs de deux et de trois alternent régulièrement. Si nous choisissons la suite  $\dots B\bar{B}\bar{B}BBB\bar{B}\bar{B}BBB\bar{B}\dots$  représentée par  $\dots \omega \text{ I } \bar{\omega} \text{ I } \omega \text{ I } \omega -\omega \omega \text{ I } \omega \text{ I } \bar{\omega} \dots$ ,  $n$  étant le rang du second  $\text{I}$ ,  $|x_n - y_n|$  tend vers le module de la différence des racines de l'équation  $(3\omega + 1)x^2 - 2x(3\omega - 1) - (3 + \omega) = 0$ , soit  $|x_n - y_n|^2 \rightarrow \frac{32\sqrt{3}}{13}$ ; on constate que  $|x_p - y_p|^2$  a la même limite, sauf pour  $p \equiv n + 1 \pmod{5}$ , où  $|x_p - y_p|^2 \rightarrow 2\sqrt{3}$ . On a donc, pour les nombres considérés,  $C(x) = \sqrt{\frac{32\sqrt{3}}{13}} = 2,0648\dots$ .

*Ce sont les seuls nombres tels que  $C(x) < \sqrt{\frac{13}{3}}$  dont le développement ne contient que  $B$  et  $\bar{B}$  à partir d'un certain rang.*

#### VI. 8. Montrons que $AA$ est exclu.

Supposons  $a_{n-1} = \text{I}$ ,  $a_n = \text{I}$ ,  $a_{n+1} = \text{I}$ . On a d'après VI.5 :  $a_{n-1} = \text{I}(4.\bar{4}; 3.4.\bar{3}.\bar{4})$ ,  $a_n = \text{I}(4.\bar{4}; 4.\bar{4})$ ,  $a_{n+1} = \text{I}(3.4.\bar{3}.\bar{4}; 4.\bar{4})$ ; d'où  $a_{n+2} = \text{I}(3.4.\bar{3}.\bar{4}; 4.\bar{4})$  ou  $\bar{\omega}(1.2.3; 2)$  ou  $\omega(\bar{1}.\bar{2}.\bar{3}; \bar{2})$  et  $a_{n-2} = \text{I}(4.\bar{4}; 3.4.\bar{3}.\bar{4})$  ou  $\bar{\omega}(2; 1.2.3)$  ou  $\omega(\bar{2}; \bar{1}.\bar{2}.\bar{3})$ .

Supposons d'abord  $x_{n+2} \in i(1)$ , donc  $x_{n+1} \in d\left(\frac{3}{2}\right)$ .

Si  $a_{n-2} = \text{I}$ ,  $y_{n+1} \in i\left(\frac{-4}{5}\right)$ , donc  $|x_{n+1} - y_{n+1}| > 2,1$ .

Si  $a_{n-2} = \omega$ ,  $y_{n+1} \in i^{\frac{(-\bar{\omega}-2)}{3}} \cap e^{\frac{(-\bar{\omega})}{2}}$ , donc  $|x_{n+1} - y_{n+1}| > 2,087$ .

Si  $a_{n-2} = \bar{\omega}$ , on a la même inégalité.

Supposons maintenant  $a_{n+2} = \omega(\bar{3}; \bar{2})$ , seul cas restant, à la symétrie près. Il suit, d'après VI. 5,  $a_{n+3} = 1(\bar{2}. \bar{3}; \bar{3})$  puis  $a_{n+4} = \omega$ , ce qui impose  $x_n \in i^{\frac{(7)}{4}} \cap i^{\frac{(3\omega+13)}{19}}$ ,  $y_n$  étant dans la région symétrique, soit par rapport à la droite  $\mathcal{R} = \frac{1}{2}$ , soit par rapport au point  $\frac{1}{2}$ . De toute façon,  $|x_n - y_n| > 2,1$ .

*Les développements des nombres  $x$  tels que  $C(x) < \sqrt{\frac{13}{2}}$  ne contiennent plus A A, à partir d'un certain rang.*

VI. 9. D'après VI. 5, les séquences B et C ne peuvent être voisines. Étudions la séquence  $\bar{C}B$ , représentée par  $a_{n-1} = \omega$ ,  $a_n = \omega$ ,  $a_{n+1} = 1$ . On trouve immédiatement  $a_{n-1}(\bar{1}; \bar{1}. \bar{2}. \bar{3})$ , d'où  $a_{n-2} = \bar{\omega}$ , 1 ou  $\omega$ ; et  $a_{n+1}(3.4.4.\bar{3}; \bar{4})$ , d'où  $a_{n+2} = 1(3.4.4.\bar{3}; \bar{4})$ , ou  $\omega(\bar{1}. \bar{2}. \bar{3}; \bar{2})$  ou  $\bar{\omega}(\bar{1}. \bar{2}. \bar{3}; \bar{2})$ .

$x_{n+1}$  appartient donc à la réunion des régions  $i(1) \cap e'(\omega) \cap \omega d(1)$ ,  $i(1) \cap e'(\bar{\omega}) \cap \bar{\omega} d(1)$  et  $\omega g'(1) \cap \omega g'(1) \cap d(\frac{3}{2})$ .

Si  $a_{n-2} = \bar{\omega}$ ,  $y_{n+1} \in i^{\frac{(-2\bar{\omega}-1)}{2}}$ , d'où  $|x_{n+1} - y_{n+1}| > 2,1$ .

Si  $a_{n-2} = 1$ , c'est avec  $. \bar{3}. \bar{4}. \bar{4}. \bar{3}$ , donc  $y_{n+1} \in \omega g'(0) \cap e' \frac{(-\bar{\omega})}{2} \cap i^{\frac{(-1-2\bar{\omega})}{3}}$

et  $|x_{n+1} - y_{n+1}| > \sqrt{\frac{20+6\sqrt{3}}{7}} > \sqrt{\frac{13}{3}}$ . Il reste donc seulement le cas  $a_{n-2} = \omega(\bar{1}; \bar{1}. \bar{2}. \bar{3})$ , c'est-à-dire la séquence  $\bar{C}\bar{C}B$ .

$a_{n-3} = \omega, \bar{\omega}$  ou 1, donc  $y_{n+1} \in \omega g'(0) \cap \bar{\omega} g'(-\frac{1}{2}) \cap \left[ i^{\frac{(-\bar{\omega}-3)}{4}} \cap i(-\bar{\omega}-1) \right]$ , en particulier on a  $y_{n+1} \in g'(-\frac{5}{8})$ .

Si  $x_{n+2} \in i(1)$ ,  $x_{n+1} \in d(\frac{3}{2})$  et  $|x_{n+1} - y_{n+1}| > 2,1$ . Il reste donc  $a_{n+2} = \omega(\bar{3}; \bar{2})$  ou  $\bar{\omega}(\bar{3}; \bar{2})$ .

Si  $a_{n+2} = \omega$ , on trouve  $a_{n+3} = 1$  et  $a_{n+4} = 1$  ou  $\omega$ , ce qui implique  $x_{n+1} \in e'(\bar{\omega}) \cap \left[ i^{\frac{(4+3\bar{\omega})}{4}} \cup i^{\frac{(5+3\bar{\omega})}{4}} \right]$ , d'où  $|x_{n+1} - y_{n+1}| > \sqrt{\frac{919}{204}} > 2,1$ .

Si  $a_{n+2} = \bar{\omega}$ , on trouve de même  $a_{n+3} = 1$  et  $a_{n+4} = \bar{\omega}$  [ $a_{n+4} = 1$  impliquant  $x_{n+1} \in d(\frac{3}{2})$ ] ce qui donne une séquence  $\bar{C}\bar{C}B\bar{B}\bar{B}\bar{B}$ . Ainsi :

*La séquence  $\bar{C}B$  n'intervient, à partir d'un certain rang du développement des nombres tels que  $C(x) < \sqrt{\frac{13}{3}}$ , que par le groupement  $\bar{C}\bar{C}B\bar{B}\bar{B}\bar{B}$ .*

VI. 10. Étudions le voisinage d'une séquence A et d'une séquence B ou  $\bar{B}$ .  
Supposons que  $a_{n-1} a_n a_{n+1}$  soit de la classe A B.

Il résulte de VI. 5 que  $x_{n-1} \in (4.$ , donc que  $a_{n-2} a_{n-1}$  est de classe A, B ou  $\bar{B}$ .  
Le premier cas est exclu par VI. 8.

Examinons successivement les deux autres.

*Étude de  $\bar{B} A B$ .* — On a alors  $a_{n+1} (\bar{1} . \bar{2} . \bar{3} ; \bar{2})$ , donc  $a_{n+1} a_{n+2}$  est de classe B ou  $\bar{C}$ ; ce dernier cas est exclu par VI. 9.

Il reste donc (par le principe du retournement) la séquence  $\bar{B} \bar{B} A B B$  avec  $a_{n+2} (\bar{2} . \bar{3} . \bar{4} . \bar{4} . 3 ; \bar{3})$ , d'où  $a_{n+2} a_{n+3}$  de classe A, B ou  $\bar{B}$ .

$\bar{B} \bar{B} A B B \bar{B}$  est représentée par  $\bar{1} \bar{\omega} \bar{1} \bar{1} \bar{\omega} \bar{1} \bar{\omega}$  avec  $a_{n+3} = \bar{\omega} (1 . 2 . 3 .$ , d'où  $x_n \in i(\bar{\omega} + 2)$  et  $y_n \in i \frac{(-3)}{4}$ , donc  $|x_n - y_n| > 2, 1$ .

$\bar{B} \bar{B} A B B A$  est représentée par  $\bar{1} \bar{\omega} \bar{1} \bar{1} \bar{\omega} \bar{1} \bar{1}$  avec  $a_{n+3} = \bar{1} (3 . 4 . \bar{4} . \bar{3} ; \bar{4})$ ,  
 $x_n \in i \frac{(3\bar{\omega} + 5)}{4} \cap e' \frac{(3\bar{\omega} + 4)}{4}$  et  $y_{n-3} \in e'(\bar{\omega})$ , d'où  $y_n \in i \frac{(-3)}{4} \cap e'(-\bar{\omega})$ , donc  
 $|x_n - y_n| > 2, 1$ .

Il reste donc (par le principe de retournement) la séquence  $\bar{B} \bar{B} \bar{B} A B B B$ ,  
représentée par  $\bar{\omega} \bar{1} \bar{\omega} \bar{1} \bar{1} \bar{\omega} \bar{1} \bar{\omega}$ .

On a  $y_{n-1} \in i \frac{(-3\bar{\omega})}{4} \cap e'(\bar{\omega})$ , donc  $y_n \in i \frac{(-3)}{4} \subset i \frac{(-3\bar{\omega} - 4)}{9}$ , et  
 $x_n \in i \frac{(3)}{2} \subset i \frac{(3\bar{\omega} + 4)}{4}$ .

Si  $x_n \in e' \frac{(\bar{\omega} + 3)}{3}$ , on a  $|x_n - y_n| > 2, 1$ .

Dans le cas contraire,  $x_{n-1} \in i \frac{(\bar{\omega} + 7)}{4}$  et  $|x_{n-1} - y_{n-1}| > 2, 09$ .

*La séquence  $\bar{B} A B$  n'intervient qu'un nombre fini de fois dans le développement  
des nombres tels que  $C(x) < \sqrt{\frac{13}{3}}$ .*

*Étude de  $B A B$ .* — On voit comme précédemment qu'il ne reste que  
 $B B B A B B B$ , représentée par  $\bar{\omega} \bar{1} \bar{\omega} \bar{1} \bar{1} \bar{\omega} \bar{1} \bar{\omega}$  avec  $x_{n+3} \in (\bar{1} . \bar{2} . \bar{3} . \bar{4} . 4 . 3 .$

Si  $x_{n+3} \in (\bar{1} . \bar{2} . \bar{3} .$ , on a  $x_{n+2} \in i(\bar{1}) \cap e'(\bar{\omega}) \cap \bar{\omega} d(\bar{1})$ , tandis que  
 $y_{n+2} \in i \frac{(-16 - 21\bar{\omega})}{43}$ , d'où  $|x_{n+2} - y_{n+2}| > 2, 1$ .

Si  $x_{n+3} \in (\bar{4} . 4 . 3 .$ ,  $a_{n+3} a_{n+4}$  est de classe A, B ou B, ce dernier cas seulement  
si  $x_{n+3} \in (\bar{4} .$ , et impliquant  $x_{n+4} \in (\bar{1} .$  donc  $a_{n+4} a_{n+5}$  de classe  $\bar{C}$ , ce qui est  
impossible d'après VI. 9.

Si  $\bar{B}$  est la classe de  $a_{n+3} a_{n+4}$ , c'est-à-dire  $a_{n+4} = -\bar{\omega}$ , on a  $x_{n+1} \in i(2\bar{\omega} + 1)$   
tandis que  $y_{n+1} \in i \frac{(-13 - 3\bar{\omega})}{24} \cap i \frac{(-\bar{\omega})}{2}$ , d'où  $|x_{n+1} - y_{n+1}| > \frac{\sqrt{54796}}{76} - 1 > 2, 08$ .



Donc, si  $C(x) < 2,08$ ,  $BAB$  n'intervient à partir d'un certain rang que par  $BBBABBB$ , ce qui entraîne une suite périodique de période  $ABBB$ , et impose à  $C(x)$  d'être égal au module de la différence des racines de l'équation  $(2 + \omega)x^2 - (2 + \bar{\omega})x - (2 + \omega) = 0$ , soit  $\sqrt{\frac{5}{7}}\sqrt{37} > \sqrt{\frac{13}{3}} > 2,08$ .

A partir d'un certain rang du développement des nombres tels que  $C(x) < 2,08$ ,  $A$  ne peut voisiner avec  $B$  ou  $\bar{B}$ .

VI. 11. De ceci, de VI. 9 et du début de VI. 7 résulte que  $CB$  n'intervient que dans  $\bar{C}\bar{C}B\bar{B}\bar{B}\bar{B}\bar{B}$ , représentée par  $\omega\omega\omega\bar{1}\bar{\omega}\bar{1}\bar{\omega} - \bar{\omega}$  [pour  $C(x) < 2,08$ ; « à partir d'un certain rang » sera désormais sous-entendu].

Désignons par  $n$  le rang du premier  $1$ , abrégeons  $B\bar{B}\bar{B}\bar{B}\bar{B}$  en  $T$ , et examinons quelles séquences peuvent précéder celle-ci. Notons que  $x_n \in i \frac{(27+12\omega)}{23}$ .  $\bar{C}\bar{C}\bar{C}\bar{C}\bar{C}\bar{C}T$ , représentée par  $\omega\omega\omega\omega\omega\omega\bar{1}\bar{\omega}\bar{1}\bar{\omega} - \bar{\omega}$ , implique  $y_n \in i \frac{(-5-3\bar{\omega})}{8}$ , d'où  $|x_n - y_n| > 2,08$ .  $T\bar{C}\bar{C}\bar{C}\bar{C}\bar{C}\bar{C}T$ , représentée par  $-\bar{\omega}\bar{\omega}\bar{1}\bar{\omega}\bar{1}\omega\omega\omega\omega\omega\bar{1}\dots$ , implique  $y_n \in i \frac{(-659-480\bar{\omega})}{1308}$ , d'où  $|x_n - y_n| > 2,08$ .  $T\bar{C}\bar{C}\bar{C}\bar{C}\bar{C}T$ , représentée par  $-\bar{\omega}\bar{\omega}\bar{1}\bar{\omega}\bar{1}\omega\omega\omega\omega\omega\bar{1}\dots$ , implique  $y_n \in i \frac{(-389-270\bar{\omega})}{750}$ , d'où  $|x_n - y_n| > 2,08$ .  $T\bar{C}\bar{C}\bar{C}T$ , représentée par  $-\bar{\omega}\bar{\omega}\bar{1}\bar{\omega}\bar{1}\omega\omega\omega\bar{1}\dots$ , implique  $y_n \in i \frac{(-220-169\bar{\omega})}{439}$ , d'où  $|x_n - y_n| > 2,08$ .  $T\bar{C}\bar{C}T$ , représentée par  $-\bar{\omega}\bar{\omega}\bar{1}\bar{\omega}\bar{1}\omega\omega\omega\bar{1}\dots$ , implique  $y_n \in i \frac{(-129-91\bar{\omega})}{260}$ ,  $y_{n+2} \in i \frac{(-480-659\omega)}{1308}$  et n'intervient, d'après VI. 7, que dans les trois cas suivants :

$T\bar{C}\bar{C}B\bar{B}\bar{B}\bar{B}\bar{B}\bar{B}\bar{B}\bar{B}\bar{B}$	représentée par	$\dots \bar{1}\bar{\omega}\bar{1}\bar{\omega} - \bar{\omega}\bar{\omega}\bar{1}\bar{\omega}\bar{1}\omega$
$T\bar{C}\bar{C}B\bar{B}\bar{B}\bar{B}\bar{B}\bar{B}\bar{B}$	»	$\dots \bar{1}\bar{\omega}\bar{1}\bar{\omega} - \bar{\omega}\bar{\omega} - \bar{\omega} - \bar{1}$
$T\bar{C}\bar{C}B\bar{B}\bar{B}\bar{B}\bar{B}\bar{C}\bar{C}$	»	$\dots \bar{1}\bar{\omega}\bar{1}\bar{\omega} - \bar{\omega}\bar{1} - \omega$

(le premier  $1$  écrit représentant toujours  $a_n$ ) qui impliquent respectivement  $x_n \in i \frac{(1477+608\omega)}{1257}$ , d'où  $|x_n - y_n| > 2,08$ ;  $x_{n+2} \in i \frac{(9+9\omega)}{11}$ , d'où  $|x_{n+2} - y_{n+2}| > 2,08$ ;  $x_n \in i \frac{(8+3\omega)}{6}$ , d'où  $|x_n - y_n| > 2,08$ .

Ainsi : avec  $C(x) < 2,08$ ,  $CB$  n'intervient que dans  $A\bar{C}\dots\bar{C}T$ , le nombre des  $\bar{C}$  étant 2, 3, 4 ou 5.

VI. 12. D'après VI. 5, 10 et 11,  $A\bar{C}$  n'intervient que dans  $CA\bar{C}$ , précédée de A ou C et suivie de A ou  $\bar{C}$ .

$ACA\bar{C}\bar{C}T$ , représentée par  $\omega \bar{\omega} \bar{\omega} \omega \omega \omega \bar{1} \bar{\omega} \bar{1} \bar{\omega} - \bar{\omega}$ , où  $n$  est le rang du premier 1, donne  $y_{n-3} \in i \frac{(-2\omega-1)}{2} \cap \bar{\omega} g(0)$  et  $x_{n-3} \in i \frac{(129+91\omega)}{141}$ , d'où  $|x_{n-3} - y_{n-3}| > 2,2$ .

$ACA\bar{C}\bar{C}\bar{C}$ , représentée par  $\omega \bar{\omega} \bar{\omega} \omega \omega \omega \omega$ , où  $n$  est le dernier rang, donne, suivant qu'il suit B, A ou  $\bar{C}$ ,  $x_{n-3} \in i \frac{(\omega+1)}{2} \cap \bar{\omega} d(0) \cap i \frac{(3+4\omega)}{4}$ , ou  $i \frac{(\omega+1)}{2} \cap \bar{\omega} d(0) \cap i \frac{(4+3\omega)}{4}$ , ou  $i \frac{(\omega+1)}{2} \cap i(2) \cap \omega d(1)$ , et dans tous les cas  $|x_{n-3} - y_{n-3}| > 2,1$ . On a donc exclu  $ACA\bar{C}\bar{C}$ , ce qui montre que  $A\bar{C}$  n'intervient que dans  $CCA\bar{C}\bar{C}$ , sauf peut-être dans la suite périodique de période  $ACA\bar{C}$ . Mais celle-ci, représentée par  $\omega \omega \bar{\omega} \bar{\omega}$ , donne un autre développement (illégitime, certains  $x_n$  ayant pour module 1) des nombres de VI. 3.  $CCA\bar{C}\bar{C}$  peut être précédée de A, B, C et suivie de A, B,  $\bar{C}$ . Mais :

$\bar{C}\bar{C}ACCA\bar{C}\bar{C}$ , représentée par  $\omega \omega \omega \bar{\omega} \bar{\omega} \bar{\omega} \omega \omega$ ,  $n$  étant le dernier rang, donne  $y_{n-3} \in i \frac{(-3-\omega)}{3}$ ,  $x_{n-3}$  étant inclus aux mêmes régions que huit lignes plus haut, translatées de  $-i\sqrt{3}$ , d'où  $|x_{n-3} - y_{n-3}| > 2,09$ .

$\bar{T}CCA\bar{C}\bar{C}T$ , représentée par  $-\bar{\omega} \bar{\omega} \bar{1} \bar{\omega} \bar{1} \omega \omega \bar{\omega} \bar{\omega} \bar{\omega} \bar{1} \omega \bar{1} \omega - \omega$ ,  $n+7$  étant le dernier rang, donne  $x_n \in i \frac{(129+91\bar{\omega})}{141}$ ,  $y_n \in i \frac{(-129-91\bar{\omega})}{260}$ , d'où  $|x_n - y_n| > 2,08$ .

$CCCA\bar{C}\bar{C}T$ , représentée par  $\omega \omega \omega \omega \bar{\omega} \bar{\omega} \bar{\omega} \bar{1} \omega \bar{1} \omega - \omega$ ,  $n+7$  étant le dernier rang, donne  $x_n \in i \frac{(129+91\bar{\omega})}{141}$ ,  $y_n \in i(-\bar{\omega}-1) \cap \omega g(0)$ , d'où  $|x_n - y_n| > 2,08$ .

Avec  $C(x) < 2,08$ ,  $A\bar{C}$  n'intervient que dans  $CCCA\bar{C}\bar{C}\bar{C}$ . Par suite,

$\bar{C}\bar{B}$  n'intervient que dans  $\bar{A}\bar{C} \dots \bar{C}T$ , avec 3, 4, ou 5 fois  $\bar{C}$ .

Nous allons examiner successivement les suites où B (et  $\bar{B}$ ) n'intervient plus à partir d'un certain rang, puis celles où il intervient une infinité de fois. Nous nous restreindrons désormais aux nombres tels que  $C(x) < 2,0703$ .

VI. 13. Les séquences constituées de A, C et  $\bar{C}$  peuvent être représentées par des séquences où ne figurent que  $\omega$  et  $\bar{\omega}$ . Nous utiliserons ici une notation spéciale pour ces séquences, en indiquant le nombre de quotients incomplets identiques consécutifs, le point indiquant un changement de chiffre. Par exemple, 1.3.2.2 (qu'on peut aussi noter .3.2.2) représentera indifféremment les séquences  $\omega \bar{\omega} \bar{\omega} \omega \omega \bar{\omega} \bar{\omega}$  ou  $\bar{\omega} \omega \omega \bar{\omega} \bar{\omega} \omega \omega$ .

Les raisonnements déjà faits ont exclu .1. , .2. , et .3. . Montrons d'abord l'exclusion de .5. et de .6. .

$\overline{\omega} \overline{\omega} \omega \omega \omega \omega \overline{\omega} \overline{\omega}$ ,  $n+3$  étant le dernier rang, donne  $x_n \in i \frac{(2\omega+4)}{3}$  et  $y_n \in i \frac{(-\overline{\omega}-3)}{3}$ , d'où  $|x_n - y_n| > 2,1$ .

$\overline{\omega} \overline{\omega} \omega \omega \omega \omega \omega \omega \overline{\omega} \overline{\omega} \overline{\omega} \overline{\omega}$ ,  $n+4$  étant le dernier rang, donne  $x_n \in i(2\omega+1)$  et  $y_n \in i \frac{(-97-64\overline{\omega})}{176}$ , d'où  $|x_n - y_n| > 2,072$ .

Soit maintenant  $a_n = \omega$  le dernier quotient incomplet de la dernière séquence .4. dans 7.4.7 ou 4.4.4.7 . On a  $x_n \in i \frac{(26+70\omega)}{51}$  et  $y_n \in i \frac{(-171-77\overline{\omega})}{318}$  ou  $i \frac{(-161\overline{\omega}-369)}{690}$ , d'où  $|x_n - y_n| > 2,072$  dans les deux cas. Il en résulte que .4. ne peut intervenir que dans la suite périodique .4.4.4... , donnant  $C(x)$  égal au module de la différence des racines de  $(1+\overline{\omega})x^2 - x - (1+\omega) = 0$ , soit  $\sqrt{\frac{13}{3}}$ .

Ainsi toutes les tranches comportent au moins sept quotients incomplets. Montrons l'exclusion de .8. et de .11. .

Soit  $a_{n+2} = \omega$  le dernier quotient incomplet de .8. dans 4.8.4; on a  $x_n \in i \frac{(15\omega+34)}{30}$  et  $y_n \in i \frac{(-64\overline{\omega}-97)}{176}$ , d'où  $|x_n - y_n| > 2,076$ .

Soit  $a_{n+2} = \omega$  le dernier quotient incomplet de .11. dans 4.11.7; on a  $x_n \in i \frac{(171+77\omega)}{152}$  et  $y_n \in i \frac{(-337\overline{\omega}-482)}{931}$ , d'où  $|x_n - y_n| > 2,073$ .

Montrons l'exclusion de .k. pour  $k \geq 14$ .

Soit  $a_{n+2} = \omega$  le dernier quotient incomplet de 14. dans 14.9; on a  $x_n \in i \frac{(506+229\omega)}{450}$  et  $y_n \in i \frac{(-229-165\overline{\omega})}{450}$ , d'où  $|x_n - y_n| > 2,0703$ .

Soit maintenant  $a_n = \omega$  le dernier quotient incomplet de 11. dans 11.7.7; on a  $x_n \in i \frac{(1378+3807\omega)}{2754}$  et  $y_n \in i \frac{(-133-96\overline{\omega})}{261}$ , d'où  $|x_n - y_n| > 2,075$ .

Soit  $a_{n+2} = \omega$  le dernier quotient incomplet de .13. dans 7.13.9; on a  $x_n \in i \frac{(506+229\omega)}{450}$  et  $y_n \in i \frac{(-7129-5185\overline{\omega})}{14015}$ , d'où  $|x_n - y_n| > 2,073$ . D'après les deux dernières exclusions, il ne nous reste que .7. , .9. , .10. et .12. .

Soit  $a_n = \omega$  le dernier quotient incomplet de .k. dans 7.k.7.7 avec  $k=9$  ou 10 ( $k=12$  est déjà exclu); on a  $x_n \in i \frac{(1378+3807\omega)}{2754}$  et, suivant le cas  $y_n \in i \frac{(-2431-1701\overline{\omega})}{4698}$  ou  $i \frac{(-4132-2997\overline{\omega})}{8182}$ , d'où  $|x_n - y_n| > 2,074$  dans les deux cas.

Or .7. ne peut intervenir que par ces séquences, ou par la suite périodique



$\bar{C}\bar{C}\bar{C}A\bar{C}\bar{C}\bar{C}A\bar{C}\bar{C}\bar{C}T$  donne  $y_n \in i \frac{(-34 - 15\omega)}{63}$ ,  $|x_n - y_n| > 2,08$ .

Il reste donc seulement  $k=6$ . Mais  $\bar{C}\bar{C}\bar{C}\bar{C}\bar{C}\bar{C}A\bar{C}\bar{C}\bar{C}\bar{C}\bar{C}\bar{C}A\bar{C}\bar{C}\bar{C}T$  donne  $y_n \in i \frac{(-812 - 566\omega)}{1619}$ ,  $|x_n - y_n| > 2,0706$ .

D'après les raisonnements de VI. 13, il reste seulement  $T\bar{C}\bar{C}\bar{C}A\bar{C}\bar{C}\bar{C}\bar{C}\bar{C}\bar{C}\bar{C}A\bar{C}\bar{C}\bar{C}T$ .

Pour  $C(x) < 2,0703$ , A et C n'interviennent que dans  $U = C\bar{C}\bar{C}A\bar{C}\bar{C}\bar{C}$  et  $V = \bar{C}\bar{C}\bar{C}A\bar{C}\bar{C}\bar{C}\bar{C}\bar{C}\bar{C}A\bar{C}\bar{C}\bar{C}$ , sauf dans les suites périodiques déjà signalées.

Soit  $a_{n+1} = \omega$  le terme de raccord entre T et V. On a  $x_n \in i \frac{(378158 + 112540\omega)}{262823}$ .

UTVT implique  $y_n \in i \frac{(-273 - 755\omega)}{1558}$ ,  $|x_n - y_n| > 2,0703$ .

UTTVT implique  $y_n \in i \frac{(-14616 - 40555\omega)}{83712}$ ,  $|x_n - y_n| > 2,0703$ .

TTTVT implique  $y_n \in i \frac{(-11784 - 32700\omega)}{67945}$ ,  $|x_n - y_n| > 2,0703$ .

Ceci exclut V. De plus, soit  $a_{n+1} = \omega$  le terme de raccord entre le T médian et le second U dans TUTUT (en tolérant la confusion de T, U et de leurs imaginaires conjugués, qui est désormais sans inconvénient). On a  $a_n = 1$ ,

$x_n \in i \frac{(7006 + 2085\omega)}{4870}$ ,  $y_n \in i \frac{(-11886 - 32853\omega)}{67801}$ ,  $|x_n - y_n| > 2,0706$ .

Ainsi :

Pour  $C(x) < 2,0703$ , le développement de  $x$  est obtenu à partir d'un certain rang, ou bien par l'une des suites périodiques donnant respectivement  $C(x) = \sqrt[4]{13}$ ,  $2$  et  $\sqrt{\frac{32\sqrt{3}}{13}}$ , ou bien par des combinaisons des séquences U et T, où les U n'apparaissent qu'entre deux T et les T par groupes d'au moins deux.

VI. 15. Soit  $a_n = \bar{\omega}$  le terme de raccord entre C et A de U dans TTUTT. On a  $x_n \in i \frac{(11784 + 32700\omega)}{23609}$ ,  $y_n \in i \frac{(-6955 - 4829\omega)}{13920}$ ,  $|x_n - y_n| > 2,070068$ .

Il n'y a donc pas d'autres constantes d'approximation que celles déjà trouvées, inférieures à cette dernière valeur. En particulier :

Le spectre de Markoff de  $R(\sqrt{-3})$  possède trois premières valeurs isolées, qui sont  $\sqrt[4]{13} = 1,898815\dots$ ,  $2$  et  $\sqrt{\frac{32\sqrt{3}}{13}} = 2,064875\dots$ . Les autres valeurs sont supérieures à  $2,070068$ .

VI. 16. Considérons la suite périodique  $s_k = [\text{UTT} \dots \text{T}]$  (avec  $k$  fois T,  $k \geq 2$ ), développement d'un nombre  $\xi_k$ , et, dans cette suite, les premiers termes des séquences A. Les nombres  $x$  associés à ces termes sont tous égaux à un nombre  $x^{(k)}$ , dont le conjugué sur  $R(\sqrt{-3})$ ,  $y^{(k)}$ , est la limite des nombres  $y$  correspondants. Lorsque  $k$  augmente indéfiniment,  $x^{(k)}$  et  $y^{(k)}$  ont pour limites les nombres  $x$  et  $y$  associés au rang correspondant dans le développement fictif  $\dots \text{TTUTT} \dots$  infini dans les deux sens [ceci résulte du lemme suivant :

*soient, pour  $j = 1, 2, \dots$ , donnés dans E, des  $e_j \neq 0$ ;  $z = t_j(z')$  la transformation  $z = e_j + \frac{1}{z'}$ ;  $r_j$  des régions du plan complexe extérieures au cercle unité, telles que  $r_j = t_j(r_{j-1})$ . Alors le diamètre de  $r_j$  tend vers zéro lorsque  $j \rightarrow \infty$ , ce qui se déduit sans difficulté de la décroissance évidente de ce diamètre]. Il en va de même pour les rangs obtenus en décalant les précédents d'une quantité fixe  $d$ .*

Nous allons :

A. montrer que, à moins que  $-5 < d < 6$ , les nombres limites  $x$  et  $y$  sont suffisamment voisins de ceux de la suite périodique  $[\text{T}]$  pour que  $|x - y| < 2,07$ ;

B. calculer les limites  $x$  et  $y$  pour  $-4 \leq d \leq 5$  et voir que la plus grande des distances  $|x - y|$  correspondantes surpasse 2,07. Il en résultera que cette valeur est point limite des  $C(\xi_k)$ , et par suite point d'accumulation du spectre de Markoff de  $R(\sqrt{-3})$ .

A. Représentons les séquences  $\overline{\text{BBUT}}$  et  $\overline{\text{BBTT}}$  respectivement par  $\overline{01000000001010} - \overline{0}$  et  $\overline{0101010} - \overline{001010}$ . Au premier rang, les nombres  $x$  correspondants sont inclus respectivement à  $i \frac{(9091 + 11886\overline{0})}{13971}$  et  $i \frac{(9091 + 11784\overline{0})}{13920}$  et diffèrent donc (en module) de moins de 0,004.

Comme la seconde séquence est extraite de la suite T pour laquelle  $C(x) = 2,0648\dots$ , A est prouvé pour ce rang, correspondant à  $d = -5$ . Il l'est encore pour  $d < -5$ , d'après la « décroissance du diamètre » et aussi pour  $d \geq 6$ , par le « principe de retournement ».

B. Représentons le développement fictif  $\dots \text{TTUTT} \dots$  par

$$\dots 10100000001010 - \overline{0} \dots,$$

en désignant le premier rang écrit par  $n - 2$ . On a donc  $a_n = 1$ , et nous devons calculer  $|x_k - y_k|$  pour  $n \leq k \leq n + 9$ . D'après le principe de retournement, il suffit de prendre  $n \leq k \leq n + 4$ .

En fait, on trouve, après quelques calculs,  $|x_{n+1} - y_{n+1}| < 1,9$ ;  $|x_{n+2} - y_{n+2}| < 2,04$ ;  $|x_{n+3} - y_{n+3}| < 1,7$  et

$$|x_n - y_n| = |x_{n+4} - y_{n+4}| = \sqrt{\frac{28 + 16\sqrt{3}}{13}} = 2,070169 \dots$$

Ce nombre est un point d'accumulation du spectre de Markoff de  $R(\sqrt{-3})$ .

Il serait intéressant de décider si c'est le plus petit point d'accumulation. On voit d'après VI. 15 que le plus petit point d'accumulation s'obtient par des combinaisons convenables des séquences T et U. La question est donc de savoir s'il y a des combinaisons plus adéquates que celles où les tranches de T ont une longueur indéfiniment croissante.

**VII. — Définition d'un algorithme approprié au cas  $D=19$  et détermination de la constante d'Hurwitz de  $R(\sqrt{-19})$ .**

VII. 1. Bien que les considérations qui vont suivre puissent, dans une certaine mesure, s'étendre aux corps imaginaires quadratiques dépourvus d'idéaux non principaux, nous nous limiterons au corps  $K = R(\sqrt{-19})$ . Dedekind a montré que tous les idéaux de ce corps sont principaux; on a donc l'identité de Bezout, d'où l'on déduit, grâce à des considérations géométriques élémentaires et immédiates, le lemme suivant :

**LEMME.** — Si  $\frac{p}{q}$  est une fraction irréductible et  $x$  un nombre complexe non dans  $K$ , il existe une fraction  $\frac{p'}{q'}$  telle que  $|q'x - p'| < |qx - p|$ , avec  $|pq' - p'q| = 1$  ou  $2$ .

De plus, si  $\frac{p'}{q'}$  est la plus simple de ces fractions — c'est-à-dire si toute fraction  $\frac{p''}{q''}$  satisfaisant aux conditions du lemme vérifie  $|q''| \geq |q'|$  — et si  $q' \neq 0$ , elle est irréductible. En effet, un facteur commun à  $p'$  et  $q'$  doit diviser  $p'q' - p'q$ , donc ce ne peut être que  $2$ . Mais alors la fraction définie par  $p'' = \frac{p'}{2}$ ,  $q'' = \frac{q'}{2}$  vérifie  $|q''| < |q'|$  et les conditions du lemme.

On peut donc ainsi définir des suites de fractions approchant  $x : \frac{p_0}{q_0}$  étant une réduite quelconque de  $x$  (donc irréductible),  $\frac{p_n}{q_n}$  sera, parmi les fractions  $\frac{p}{q}$  telles que  $|p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n| = 1$  ou  $2$ , la plus simple de celles qui vérifient  $|qx - p| < |q_{n-1}x - p_{n-1}|$ , étant entendu que, s'il y a plusieurs fractions vérifiant cette condition  $\frac{p_n}{q_n}$  doit être l'une de celles qui rendent  $|qx - p|$  le plus petit possible.

On peut s'arranger pour que les nombres  $b_n = (-1)^n (p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n)$  soient positifs, et l'on a les formules de récurrence :

$$b_{n-1} p_n = a_n p_{n-1} + b_n p_{n-2}, \quad b_{n-1} q_n = a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2},$$

avec  $a_n \in E$ .

Il y a quatre classes d'entiers (mod 2), qui forment un corps. En notant  $\{e\}$  la classe de  $e$  pour  $e \in E$  ou même  $e \in K$ , les quatre classes sont  $\{0\}, \{1\}, \{\omega\}, \{\bar{\omega}\}$ . Désormais, dans les congruences, l'indication (mod 2) sera le plus souvent sous-entendue.

Lorsque  $b_{n-1} = 2$ , les nombres  $\frac{ap_{n-1} + bp_{n-2}}{b_{n-1}}$  et  $\frac{aq_{n-1} + bq_{n-2}}{b_{n-1}}$  sont entiers à la condition que  $a \equiv u_n b$  avec  $u_n = \left\{ \frac{p_{n-2}}{p_{n-1}} \right\} = \left\{ \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}} \right\}$ . En particulier,  $a_n \equiv u_n b_n$ . Si  $b_{n-2} = 1$ , on a  $u_n = \left\{ \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} \right\}$ ; si  $b_n = 2$ , on a  $a_n \equiv 0$  et  $u_{n+1} = u_n + \left\{ \frac{a_n}{2} \right\}$ ; ces deux formules permettent de calculer les  $u_n$  de proche en proche.

Posons  $x_n = -\frac{1}{b_{n-1}} \frac{q_{n-2} x - p_{n-2}}{q_{n-1} x - p_{n-1}}$  et  $y_n = -\frac{1}{b_{n-1}} \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}$  (on s'écarte ici un peu des notations utilisées jusque là). Ces nombres satisfont à la même récurrence :

$$b_n x_n - \frac{a_n}{b_{n-1}} = \frac{1}{b_n x_{n+1}}, \quad b_n y_n - \frac{a_n}{b_{n-1}} = \frac{1}{b_n y_{n+1}}.$$

Le couple  $(a_n, b_n)$  est défini, à partir de  $x_n$  et  $y_n$ , par les conditions que le couple soit permis, que  $b_n = 1$  ou  $2$ , que  $\left| b_n x_n - \frac{a_n}{b_{n-1}} \right| < 1$  et que  $\left| b_n y_n - \frac{a_n}{b_{n-1}} \right|$  soit minimum parmi tous les couples  $(a, b)$  permis satisfaisant les conditions précédentes, étant entendu qu'en cas de doute il faut rendre aussi  $\left| b_n x_n - \frac{a_n}{b_{n-1}} \right|$  minimum.

Pour démontrer la croissance des dénominateurs, nous procédons de façon analogue à IV. 2. On pourra s'y reporter.

Soit  $\mathcal{F}$  la famille des cercles  $\frac{(a)}{b}$  avec  $a \in E, b \in N, b$  divise  $\|a\| - 1$ , et des droites  $[1, z] = v$  avec  $v \in Z$ .

$\mathcal{F}_\omega$  la famille comprenant :

les cercles  $\frac{(a/2)}{b}$  avec  $a \in E, b \in N, b$  divise  $\|a\| - 4$  et  $a \equiv \omega$ ;

les cercles  $\frac{(a)}{2c}$  avec  $a \in E, c \in N, c$  divise  $\|a\| - 1$  et  $c + c' \equiv [a, \omega], \left( c' = \frac{\|a\| - 1}{c} \right)$ ;

les droites  $[1, z] = v + \frac{1}{2}$  avec  $v \in Z$ .

$\mathcal{F}_{\bar{\omega}}$  la famille imaginaire conjuguée de  $\mathcal{F}_\omega$ .

LEMME *a*. —  $\mathcal{F}$  est invariante par l'inversion  $z \rightarrow \frac{1}{z}$ .  $\mathcal{F}_\omega$  et  $\mathcal{F}_{\bar{\omega}}$  s'échangent par l'inversion  $z \rightarrow \frac{1}{4z}$ .



LEMME *b*. —  $\mathcal{F}$  est invariante par les translations entières. Les translations  $\frac{d}{2}$  avec  $d \equiv \omega$  échangent  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}_\omega$ . Les translations  $\frac{d}{2}$  avec  $d \equiv 0$  ou  $1$  transforment  $\mathcal{F}_\omega$  en  $\mathcal{F}_\omega$  ou  $\mathcal{F}_{\bar{\omega}}$ .

Nous omettons les démonstrations de ces deux lemmes, qui n'offrent pas de difficulté.

Introduisons encore quelques notations : Désignons par :

$\mathbf{Y}_n$  la proposition :  $b_{n-1} |y_n| < 1$  ;

$\mathbf{U}_n$  la proposition : si  $b_{n-1} = 2$ , alors  $u_n = \{\omega\}$  ou  $\{\bar{\omega}\}$  ;

$\mathbf{A}'_n$  la proposition : si  $b_{n-1} = 1$  et  $b_n = 2$ , alors  $a_n \equiv \omega$  ou  $\bar{\omega}$  ;

$\mathbf{A}''_n$  la proposition : si  $b_{n-1} = 2$  et  $b_n = 2$ , alors  $\frac{a_n}{2} \equiv 0$  ou  $1$  ;

$\mathbf{F}_n$  la proposition :  $\mathbf{U}_n$  est vraie et  $x_n$  et  $y_n$  n'appartiennent pas (le premier à l'intérieur ou sur la frontière, le second à l'intérieur) à un même cercle de la famille  $\mathcal{F}_n$  définie comme suit : si  $b_{n-1} = 1$ ,  $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}$  ; si  $b_{n-1} = 2$ ,  $u_n = \{\omega\}$ ,  $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_\omega$  ; si  $b_{n-1} = 2$ ,  $u_n = \{\bar{\omega}\}$ ,  $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{\bar{\omega}}$ .

Remarquons que la définition de l'algorithme donne l'impossibilité du système

$$\left| bx_n - \frac{a}{b_{n-1}} \right| < 1, \quad \left| by_n - \frac{a}{b_{n-1}} \right| < \left| b_n y_n - \frac{a_n}{b_{n-1}} \right|, \quad a \equiv bu_n \pmod{b_{n-1}}$$

qui implique, en posant  $cb_{n-1} = ba_n - ab_n$ , celle de

$$\left| cx_{n+1} + \frac{b}{b_n} \right| < b_n |x_{n+1}|, \quad \left| cy_{n+1} + \frac{b}{b_n} \right| < 1.$$

En prenant  $b_n = 1$ ,  $c = 1$ ,  $b = \pm 1$ , puis  $b_n = 2$ ,  $c = 2$ ,  $b = \pm 2$ , on obtient le

LEMME *c*. —  $x_n$  et  $y_n$  n'appartiennent pas (le premier à l'intérieur ou sur la frontière, le second à l'intérieur) à un même cercle de  $\mathcal{F}_n$  passant par l'origine.

Les lemmes *a*, *b* et *c* entraînent le

LEMME *d*. —  $\mathbf{F}_n$ ,  $\mathbf{A}'_n$  et  $\mathbf{A}''_n$  impliquent  $\mathbf{F}_{n+1}$ .

Si  $b_n |y_{n+1}| \geq 1$ , on a  $y_n \in i \frac{(a_n/b_{n-1})}{b_n}$ , tandis que  $x_n \in i \frac{(a_n/b_{n-1})}{b_n}$ . Or  $\frac{(a_n/b_{n-1})}{b_n}$  est un cercle de  $\mathcal{F}_n$  lorsque  $b_{n-1} = 1$ , et il en est de même lorsque  $b_{n-1} = 2$ , pourvu que  $\mathbf{A}''_n$  soit vraie. On a donc le

LEMME *e*. —  $\mathbf{F}_n$  et  $\mathbf{A}''_n$  impliquent  $\mathbf{Y}_{n+1}$ .

Pour prouver  $\mathbf{A}'_n$  et  $\mathbf{A}''_n$ , il suffit de montrer l'impossibilité des deux cas :  $b_{n-1} = 1$ ,  $b_n = 2$ ,  $a_n \equiv 1$  et  $b_{n-1} = 2$ ,  $b_n = 2$ ,  $\frac{a_n}{2} \equiv \omega$  par exemple. Or, dans le

second cas,  $U_n$  implique que, ou bien le couple  $\left(\frac{a_n}{2}, 1\right)$  est permis, et la contradiction avec les règles de l'algorithme est alors évidente, ou bien les couples  $\left(\frac{a_n}{2} \pm 1, 1\right)$  sont permis. Dans le premier cas, les couples  $\left(\frac{a_n \pm 1}{2}, 1\right)$  sont toujours permis. Donc, dans les deux cas,  $x_n$  est intérieur à deux cercles de rayon 1 correspondant à des couples permis. Les règles de l'algorithme imposent donc à  $y_n$  des restrictions correspondantes, qui impliquent son appartenance à l'intérieur ou à la frontière des mêmes cercles, ce qui contredit  $F_n$ . On a donc le

LEMME *f.* —  $F_n$  implique  $A'_n$  et  $A''_n$ .

Pour prouver  $U_n$  il suffit de montrer l'impossibilité que  $u_n = \{1\}$ . Mais, dans cette hypothèse, le couple  $a_n = b_n = 1$  est permis. La fraction correspondante  $\frac{p}{q}$  vérifie  $\frac{q}{q_{n-1}} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}\right)$  et  $\frac{qx - p}{q_{n-2}x - p_{n-2}} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{q_{n-1}x - p_{n-1}}{q_{n-2}x - p_{n-2}}\right)$ , donc contredit les règles de l'algorithme si  $|q_{n-2}| < |q_{n-1}|$ . On a donc le

LEMME *g.* —  $Y_n$  implique  $U_n$ .

D'après les lemmes précédents, pour démontrer toutes les propriétés envisagées, il suffit de vérifier  $Y_2$  et  $F_2$ .

Mais  $Y_2$  est une conséquence immédiate du fait que  $\frac{p_0}{q_0}$  est une réduite. Alors  $U_2$  est vrai et il suffit, d'après le lemme *a*, de vérifier que  $\frac{1}{b_1^2 x_2}$  et  $\frac{1}{b_1^2 y_2}$  n'appartiennent pas (au même sens que plus haut) à un même cercle de la famille déduite de  $\mathcal{F}_2$  par l'inversion  $z \rightarrow \frac{1}{b_1^2 z}$ . Or ceci entraînerait, comme dans IV. 2, l'existence d'une fraction plus simple et strictement meilleure que  $\frac{p_0}{q_0}$ , ce qui est impossible, puisque celle-ci est une réduite.

Ainsi,  $Y_n$ ,  $U_n$ ,  $A'_n$ ,  $A''_n$ ,  $F_n$  sont vraies à tous les rangs. On en déduit en particulier l'existence d'une constante  $g > 0$  telle que toutes les fractions  $\frac{p}{q}$  du développement de  $x$  vérifient  $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{g|q|^2}$ .

On peut donner des résultats précédents une interprétation plus suggestive :

Considérons les cercles  $(a)$  pour  $a \in E$  et  $\frac{(a)}{2}$  pour  $a \equiv \omega$  ou  $\bar{\omega}$ , dont les intérieurs recouvrent le plan. Convenons pour un instant que la distance d'un point à un cercle est le quotient de sa distance au centre par le rayon. On a deux chaînes de points  $X_k$  et  $Y_k$  tels que  $X_{n+1}$  et  $Y_{n+1}$  soient les inverses de  $X_n$  et  $Y_n$  par rapport à celui des cercles contenant  $X_n$  à son intérieur dont  $Y_n$  est le plus proche (au sens indiqué). A ce cercle  $X_{n+1}$  est extérieur,  $Y_{n+1}$  intérieur. Avec son centre comme origine les affixes de  $X_{n+1}$  et  $Y_{n+1}$  sont  $x_{n+1}$  et  $y_{n+1}$ .

VII. 2. Pour prouver que  $C_{10} = 1$ , il suffit, d'après II. 4, de montrer que dans le développement de tout nombre  $x \notin K$  par l'algorithme précédent, on a  $\lim |x_n - y_n| \geq 1$ . La démonstration de ce fait est l'objet des pages suivantes.

Pour abréger cet exposé, nous omettrons tous les calculs; nous qualifierons d'*exclu* tout développement impliquant, à quelque rang  $n$ ,  $|x_n - y_n| \geq 1$ , et aussi tout développement identique, à partir d'un certain rang, à la suite *critique* définie par  $b_n = 1$ ,  $a_{2k} = \omega$  et  $a_{2k+1} = -\bar{\omega}$  (suite étudiée dans II, 4); enfin nous conviendrons que l'affirmation qu'une certaine circonstance a lieu pour les développements signifie que tous les développements présentant la circonstance contraire sont exclus.

*Exemple.* — Si  $b_{n-1} = 1$  et  $\mathcal{J}(x_n) \geq 0$ , alors on a  $\mathcal{J}(y_n) > 0$ . Ceci traduit le fait que si  $b_{n-1} = 1$ ,  $\mathcal{J}(x_n) \geq 0$ ,  $\mathcal{J}(y_n) \leq 0$ , on a  $|x_n - y_n| \geq 1$  ou bien  $|x_{n-1} - y_{n-1}| \geq 1$  (la vérification en étant, comme toujours, laissée au lecteur).

On voit que, si  $b_{n-1} = 1$  et  $\mathcal{J}(y_n) \geq 0$ , on a, avec  $b_n = 1$ ,  $a_n = 1, -1, \omega + 1, \omega, -\bar{\omega}$  ou  $-\bar{\omega} - 1$ ; avec  $b_n = 2$ ,  $a_n = \omega + 2, \omega + 1, \omega, -\bar{\omega}, -\bar{\omega} - 1$  ou  $-\bar{\omega} - 2$ .

Si  $b_{n-1} = 2$  et  $u_n = \omega$ , on a, avec  $b_n = 2$ ,  $a_n = 4, 2, -2$  ou  $-4$ ; avec  $b_n = 1$ ,  $a_n = \omega + 2, \omega, -\bar{\omega} - 1, \bar{\omega} + 1, -\omega$  ou  $-\omega - 2$ .

Signalons un exemple typique d'exclusion, qui sera souvent utilisé (sans avertissement): le cas où  $b_{n-1} = 2$ ,  $u_n = \bar{\omega}$ ,  $x_n \in d' \left( -\frac{1}{4} \right) \cap e'(\bar{\omega}/2) \cap e'((\omega + 1)/2)$  et  $y_n \in g' \left( -\frac{1}{4} \right)$  (voir aux rangs  $n, n + 1, n + 2$ ).

VII.3. La première partie de la démonstration, la plus importante et, de beaucoup, la plus longue, concerne à la fois trois situations: le cas  $b_{n-1} = 1$ ,  $b_n = 1$ ,  $a_n = 1$ , divisé en A, B, C, D, E, F; les trois cas voisins G, H, I; enfin les différents cas J (voir plus loin les définitions de tous ces cas). L'enchevêtrement des trois études correspondantes confère une certaine complexité à la démonstration globale, qui conduit finalement à l'exclusion de tous les cas déjà envisagés.

*Étude préliminaire du cas  $b_{n-1} = 1$   $b_n = 1$ ,  $a_n = 1$ .* — On voit immédiatement que, si  $\mathcal{J}(x_n) \geq 0$ , l'argument de  $x_n$  est supérieur à  $\frac{\pi}{6}$ . Distinguons les six cas suivants:

$$\begin{array}{ll} \text{A : } x_n \in e(0) \cap i(1) \cap i\left(\frac{\omega}{2}\right); & \text{D : } x_n \in i(1) \cap e'\left(\frac{\omega + 1}{2}\right) \cap i\left(\frac{\omega + 2}{2}\right); \\ \text{B : } x_n \in e(0) \cap e'\left(\frac{\omega}{2}\right) \cap i\left(\frac{\omega + 1}{3}\right); & \text{E : } x_n \in e(0) \cap e'\left(\frac{\omega + 1}{2}\right) \cap g'(1); \\ \text{C : } x_n \in i(1) \cap e'\left(\frac{\omega + 1}{3}\right) \cap i\left(\frac{\omega + 1}{2}\right); & \text{F : } x_n \in d(1) \cap e'\left(\frac{\omega + 2}{2}\right). \end{array}$$

Le cas échéant, nous désignerons par les mêmes lettres les cas respectivement imaginaires conjugués, aucune confusion n'étant possible.

L'étude de F est simple : on montre facilement que  $b_{n+1}=1$ ,  $a_{n+1}=-\omega$ ,  $b_{n+2}=1$ ,  $a_{n+2}=1$ ,  $b_{n+3}=2$ ,  $a_{n+3}=-\bar{\omega}$ . Un examen plus précis aux rangs  $n+3$ ,  $n+1$  et  $n+4$  montre que  $b_{n+4}=1$ ,  $a_{n+4}=-\bar{\omega}$ , d'où une limitation de  $x_{n+3}$  assurant l'exclusion au rang  $n+1$ .

On peut aussi exclure D directement dans le cas particulier où

$$y_n \in g(0) \cup i \frac{(\omega)}{4} \cup i \frac{(2\omega-1)}{6} \cup i \frac{(2+4\omega)}{13}$$

(voir jusqu'au rang  $n+2$ ). On remarquera que dans l'étude de G, H, I, J, le cas D n'intervient que par ce cas particulier et peut donc être négligé.

Enfin, on notera que, pour E,  $a_{n+1}=-\omega$ ,  $b_{n+1}=1$ , le couple  $(a_{n+2}, b_{n+2})$  pouvant être  $(-\omega, 1)$ ,  $(\bar{\omega}, 1)$  ou  $(\bar{\omega}+1, 2)$ . Dans le cas E' où  $y_n \in e' \frac{(\omega+1)}{2}$ , on montre l'exclusion du dernier, et, par suite,  $x_{n+1} \in i \frac{(-3\omega)}{4}$ .

VII. 4. Dans les cas G, H, I, on a, à une symétrie près,  $b_{n-1}=2$ ,  $u_n=\{\bar{\omega}\}$  et  $x_n \in d\left(-\frac{1}{4}\right) \cap e(0) \cap e'(\bar{\omega}/2)$  avec, pour

$$G : y_n \in i(0) \cap i((-\omega-1)/2) \cap g\left(-\frac{1}{4}\right);$$

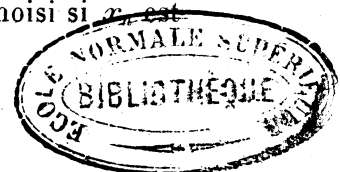
$$H : y_n \in i \frac{(-1)}{2} \cap i((-\omega-1)/2) \cap d'\left(-\frac{1}{4}\right);$$

$$I : y_n \in i \frac{(-1)}{2} \cap e'((-\omega-1)/2) \cap i(\bar{\omega}/2).$$

En même temps que G sera traité le cas où  $b_{n-1}=1$ ,  $x_n \in d\left(\frac{1}{2}\right) \cap e' \frac{(\omega+1)}{2} \cap e'(1)$ ,  $y_n \in i \frac{(\omega+1)}{2} \cap i(0) \cap e'(1)$  et celui où  $b_{n-1}=1$ ,  $x_n \in d\left(-\frac{1}{2}\right) \cap e' \frac{(-\bar{\omega})}{2} \cap e(0)$ ,  $y_n \in i(0) \cap g\left(-\frac{1}{2}\right) \cap i \frac{(-\bar{\omega})}{2}$  dans lesquels la position relative de  $x_n$  et  $y_n$  est la même. Le dernier cas cité contient (avec un décalage d'un rang) le cas E'' complémentaire de E' dans E. Nous ne nous assujettirons pas à indiquer les changements de notations correspondants à ces variantes du cas G.

*Première étude de G.* — Le couple  $(a_n, b_n)$  peut prendre les trois valeurs  $(-\bar{\omega}, 1)$ ,  $(2, 2)$  et  $(\omega+1, 1)$ .

Soit  $\sigma$  le cercle de centre  $\frac{1}{2} - \frac{\omega}{6}$  et de rayon  $\frac{\sqrt{5}}{3}$ , lieu des points dont le rapport des distances à  $\frac{\omega+1}{2}$  et à  $\frac{1}{2}$  est 2. Si  $y_n \in i(\sigma)$ , le second couple est préférable (c'est-à-dire fournit une fraction plus simple, donc doit être choisi si  $x_n$  est



intérieur aux deux cercles correspondants) au troisième ; c'est le contraire si  $y_n \in e(\sigma)$ . Dans les deux cas, le premier couple est préférable aux deux autres.

L'exclusion du troisième couple est, par suite, évidente si  $y_n \in i(\sigma)$  ; on l'obtient aussi dans le cas contraire (voir jusqu'au rang  $n + 3$ ).

L'exclusion du second couple est aisée si  $y_n \in e(\sigma)$  ; dans le cas contraire, on montre que  $a_n = 2$ ,  $b_n = 2$  ;  $a_{n+1} = -\omega - 1$ ,  $b_{n+1} = 1$  ;  $a_{n+2} = 1$ ,  $b_{n+2} = 1$  dans E'.

Alors on a  $x_n \in i \frac{((\omega + 1)/2)}{3} \cap e'(-\bar{\omega}/2)$ .

Pour le premier couple  $a_n = -\bar{\omega}$ ,  $b_n = 1$ , on obtient les résultats suivants :

ou bien  $x_n \in i \frac{(-\bar{\omega})}{2}$ , avec  $b_{n+1} = 1$  et  $a_{n+1} = \omega$  ou  $-\bar{\omega}$  ; ou bien  $x_n \in i \frac{(-1)}{2} \cap i(-\bar{\omega}/2)$ , en particulier  $x_n \in i \frac{((\omega + 1)/2)}{3}$ , avec  $a_{n+1} = 1$ ,  $b_{n+1} = 1$  dans B,  $a_{n+2} = -\omega - 1$ ,  $b_{n+2} = 2$ ,  $a_{n+3} = 2$ ,  $b_{n+3} = 2$  et un nouveau cas G.

*Première étude de H.* — Les valeurs de  $(a_n, b_n)$  sont les mêmes que pour G, le troisième couple étant exclu immédiatement.

Dans le cas où  $a_n = -\bar{\omega}$ ,  $b_n = 1$ , on a  $x_n \in i \frac{((\omega + 1)/2)}{3}$  dans trois cas :  $a_{n+1} = \omega + 1$ ,  $b_{n+1} = 2$  ;  $a_{n+1} = \omega$ ,  $b_{n+1} = 1$ ,  $a_{n+2} = \omega$ ,  $b_{n+2} = 2$  ;  $a_{n+1} = 1$ ,  $b_{n+1} = 1$  dans C et  $a_{n+2} = -\omega$ ,  $b_{n+2} = 2$  suivi de H. Ces cas exceptés, on a  $a_{n+1} = \omega$ ,  $b_{n+1} = 1$ , donc  $x_n \in i \frac{(-\bar{\omega})}{4}$ , avec ou bien  $a_{n+2} = -\bar{\omega}$ ,  $b_{n+2} = 1$ , ou bien  $a_{n+2} = -\bar{\omega} - 1$ ,  $b_{n+2} = 2$  et un cas G.

Dans le cas où  $a_n = 2$ ,  $b_n = 2$ , on a  $x_n \in i \frac{((\omega + 1)/2)}{3}$  si  $a_{n+1} = -\omega - 1$ ,  $b_{n+1} = 1$ ,  $a_{n+2} = 1$ ,  $b_{n+2} = 1$  dans E'. Ce cas excepté, on peut montrer qu'il ne reste que  $a_{n+1} = \omega + 1$ ,  $b_{n+1} = 1$ , avec ou bien  $a_{n+2} = -\bar{\omega} - 1$ ,  $b_{n+2} = 2$ ,  $a_{n+3} = 2$ ,  $b_{n+3} = 2$  et un cas G, ou bien  $a_{n+2} = -\bar{\omega}$ ,  $b_{n+2} = 2$  et un cas H nécessairement suivi de  $a_{n+3} = -\bar{\omega}$ ,  $b_{n+3} = 1$ .

*Première étude de I.* — Ici, il reste seulement  $a_n = -\bar{\omega}$ ,  $b_n = 1$ ,  $a_{n+1} = \omega$ ,  $b_{n+1} = 1$  avec ou bien  $a_{n+2} = -\bar{\omega}$ ,  $b_{n+2} = 1$ , ou bien  $a_{n+2} = -\bar{\omega} - 1$ ,  $b_{n+2} = 2$  avec un cas G.

VII. 5. La désignation générale de cas J s'applique à un certain nombre de cas où  $y_n$  est assez voisin de la valeur qu'il prend dans la suite critique. Nous montrerons que seule la suite critique peut suivre : on peut voir dans cette idée la clef de toute la démonstration.

Nous supposons que  $b_{n-1} = 1$  et nous désignons respectivement par

$$\begin{aligned} J_0 : & \text{ le cas où } y_n \in i \frac{(-21\bar{\omega})}{76} \cap i \frac{(-\bar{\omega})}{2}; \\ J'_0 : & \text{ » } i \frac{(-24\bar{\omega}-1)}{88} \cap i \frac{(-\bar{\omega})}{2} \cap i \frac{(-3\bar{\omega}-1)}{12}; \\ J_1 : & \text{ » } i \frac{(-21\bar{\omega})}{76} \cap e' \frac{(-\bar{\omega})}{2}; \\ J_2 : & \text{ » } i \frac{(1-9\bar{\omega})}{33} \cap i \frac{(-\bar{\omega})}{2} \cap e' \frac{(\omega)}{4}; \\ J'_2 : & \text{ » } i \frac{(-8\bar{\omega})}{29} \cap i \frac{(-\bar{\omega})}{2} \cap e' \frac{(1-9\bar{\omega})}{33}; \\ J_3 : & \text{ » } i \frac{(-8\bar{\omega})}{29} \cap e' \frac{(-\bar{\omega})}{2} \cap i \frac{(\omega)}{4}; \\ J_4 : & \text{ » } i \frac{(1-9\bar{\omega})}{33} \cap i \frac{(-\bar{\omega})}{2} \cap i \frac{(\omega)}{4}. \end{aligned}$$

Dans tous les cas, nous supposons que  $x_n \in e' \frac{(-\bar{\omega})}{2} \cap g' \left( \frac{1}{2} \right)$ , et même, pour  $J_3$  et  $J_4$ , que  $x_n \in g'(0)$ .

Quatre couples  $(a_n, b_n)$  sont possibles ;  $(\omega, 2)$ ,  $(-\bar{\omega}-1, 2)$ ,  $(-1, 1)$  et  $(-\bar{\omega}, 1)$ . Dans ce dernier cas, on se retrouve dans un cas  $J$  au rang suivant,  $J_1$  si l'on avait  $J_4$  ou  $J_3$ ,  $J'_0$  si l'on avait  $J_4$ , et  $J_0$  si l'on avait  $J_0$ ,  $J'_0$ ,  $J_2$  ou  $J'_2$ . Il suffit donc d'étudier les trois premiers couples :

1°  $a_n = \omega$ ,  $b_n = 2$ . — On montre d'abord que  $x_{n+1} \in i(\bar{\omega}/2)$ ; puis deux cas se présentent :

Si  $x_{n+1} \in e'((-\omega-1)/2)$ , on a  $a_{n+1} = \bar{\omega}$ ,  $b_{n+1} = 1$ ;  $a_{n+2} = -\omega$ ,  $b_{n+2} = 1$ ; et l'on obtient l'exclusion, *sauf dans le cas  $J'_2$* .

Si  $x_{n+1} \in i((-\omega-1)/2)$ , on a :

*pour  $J_1$  et  $J_3$ ,  $a_{n+1} = \bar{\omega}$ ,  $b_{n+1} = 1$ ; puis  $a_{n+2} = -\omega-1$ ,  $b_{n+2} = 2$  et un cas  $G$  qui s'exclut; ou bien  $a_{n+2} = -\omega$ ,  $b_{n+2} = 1$ , dont l'exclusion est aisée.*

*pour  $J_0$ ,  $J'_0$  et  $J_4$ ,  $a_{n+1} = -\omega-1$ ,  $b_{n+1} = 1$ ;  $a_{n+2} = 1$ ,  $b_{n+2} = 1$ , dans les cas  $E'$  et  $C$ , ce dernier suivi de  $a_{n+3} = -\bar{\omega}$ ,  $b_{n+3} = 2$  et  $G$ ; on obtient aussi l'exclusion, qui vaut ainsi pour le cas total, *sauf dans  $J_2$  et  $J'_2$ .**

2°  $a_n = -\bar{\omega}-1$ ,  $b_n = 2$ . — On montre d'abord que  $x_n \in i(-\bar{\omega})$ , d'où  $a_{n+1} = \bar{\omega}$ ,  $b_{n+1} = 1$ , puis  $b_{n+2} = 1$  avec  $a_{n+2} = -1$ ,  $\bar{\omega}$  ou  $\omega$ .  $a_{n+2} = -1$  est dans  $E'$ , d'où son exclusion. On montre encore que  $x_{n+2} \in i(\bar{\omega}) \cap g(0) \cap e' \frac{(-\omega)}{2}$ , et il faut distinguer deux cas.

Dans  $J_1$  et  $J_3$ , on a  $a_{n+2} = -\omega$ ,  $b_{n+2} = 1$ ;  $a_{n+3} = \bar{\omega}+1$ ,  $b_{n+3} = 2$  avec  $G$  ou bien  $a_{n+3} = \bar{\omega}$ ,  $b_{n+3} = 1$ , ce qui s'exclut de toute façon.

Dans les autres cas, on a  $a_{n+2} = \bar{\omega}$ ,  $b_{n+2} = 1$ ;  $a_{n+3} = -1$ ,  $b_{n+3} = 1$  dans E' ou C, ce dernier entraînant G après le rang suivant, et l'on a l'exclusion au rang  $n+4$ , ou au rang  $n$ . Ce 2° est ainsi complètement exclu.

3°  $a_n = -1$ ,  $b_n = 1$ . — Négligeons le cas B, qui n'intervient pas dans les applications. Il reste donc C ou E'.

Dans E', on a l'exclusion au rang  $n-1$ .

Dans C, il suit  $a_{n+1} = \bar{\omega}$ ,  $b_{n+1} = 2$  dans les cas H et I. Compte tenu des limitations correspondantes et des exclusions aux rangs  $n+1$  et surtout  $n-1$ , il reste  $a_{n+2} = \omega$ ,  $b_{n+2} = 1$ ;  $a_{n+3} = -\bar{\omega}$ ,  $b_{n+3} = 1$ ;  $a_{n+4} = \omega+1$ ,  $b_{n+4} = 2$  avec un cas G qui donne l'exclusion restante au rang  $n+4$ .

*Résumé des cas J.* — Il peut rester  $a_n = -1$ ,  $b_n = 1$  (cas B), et  $a_n = \omega$ ,  $b_n = 2$  avec des limitations pour  $x$  dans les seuls cas  $J_2$  et  $J'_2$ .

VII. 6. PREMIÈRES CONSÉQUENCES. — Donnons d'abord une précision sur le cas G, lorsque  $a_n = -\bar{\omega}$ ,  $b_n = 1$ ;  $a_{n+1} = \omega$ ,  $b_{n+1} = 1$ . Si  $x_n \in e'((\omega+1)/2)$ , on a  $a_{n+2} = -\bar{\omega}$ ,  $b_{n+2} = 1$  avec, ensuite, un cas  $J_4$  déjà exclu. D'autre part, si  $a_n = -\bar{\omega}$ ,  $b_n = 1$ ;  $a_{n+1} = -\bar{\omega}$ ,  $b_{n+1} = 1$ ; on a  $a_{n+2} = 1$ ,  $b_{n+2} = 1$  dans les cas E' et C, ce dernier impliquant  $x_n \in i \frac{(-\bar{\omega}-1)}{6}$ .

Étudions maintenant le cas E'.

Nous avons vu qu'il reste deux cas :

1°  $b_{n-1} = b_n = b_{n+1} = b_{n+2} = 1$ ,  $a_n = 1$ ,  $a_{n+1} = -\omega$ ,  $a_{n+2} = \bar{\omega}$ . On montre alors que :

ou bien  $a_{n+3} = \bar{\omega}$ ,  $b_{n+3} = 2$ ;  $a_{n+4} = \omega$ ,  $b_{n+4} = 1$ ; puis  $a_{n+5} = -\bar{\omega}-1$ ,  $b_{n+5} = 2$  et un cas G, qu'on exclut d'après la première étude de ce cas; ou bien  $a_{n+3} = -\omega$ ,  $b_{n+3} = 1$  et un cas  $J_3$  déjà exclu.

2°  $b_{n-1} = b_n = b_{n+1} = b_{n+2} = b_{n+3} = 1$ ,  $a_n = 1$ ,  $a_{n+1} = -\omega$ ,  $a_{n+2} = -\omega$ ,  $a_{n+3} = 1$ . Au dernier rang, on a C ou E', mais on peut (en décalant au besoin les indices) supposer que c'est C.

On a alors  $a_{n+4} = -\bar{\omega}$ ,  $b_{n+4} = 2$  et un cas H ou I.

En utilisant la première étude de ces cas, on obtient l'exclusion sans difficulté, sauf dans les deux cas suivants :

Si  $a_{n+5} = -\omega$ ,  $b_{n+5} = 1$ ;  $a_{n+6} = \bar{\omega}$ ,  $b_{n+6} = 1$ ;  $a_{n+7} = \omega$ ,  $b_{n+7} = 1$ ; on a un cas  $J_2$ , dont il suit  $a_{n+8} = \omega$ ,  $b_{n+8} = 2$  dans le cas indiqué plus haut, puis  $a_{n+9} = -\bar{\omega}$ ,  $b_{n+9} = 1$ , et  $a_{n+10} = \omega$ ,  $b_{n+10} = 1$  ou bien  $a_{n+10} = \omega+1$ ,  $b_{n+10} = 2$  et un cas I, donc  $x_{n+10} \in i(\omega)$  de toute façon, et exclusion au rang  $n+7$ .

Si  $a_{n+5} = 2$ ,  $b_{n+5} = 2$ ;  $a_{n+6} = \bar{\omega}+1$ ,  $b_{n+6} = 1$ ;  $a_{n+7} = -\omega-1$ ,  $b_{n+7} = 2$ ;

$a_{n+8}=2$ ,  $b_{n+8}=2$  et un cas G. L'exclusion s'obtient au rang  $n+5$  ou au rang  $n+3$ , sauf dans le cas où  $a_{n+9}=-\omega$ ,  $b_{n+9}=1$ ;  $a_{n+10}=-\omega$ ,  $b_{n+10}=1$ ;  $a_{n+11}=1$ ,  $b_{n+11}=1$  (dans E');  $a_{n+12}=-\bar{\omega}$ ,  $b_{n+12}=1$ ;  $a_{n+13}=-\bar{\omega}$ ,  $b_{n+13}=1$ ;  $a_{n+14}=1$ ,  $b_{n+14}=1$ .

Si, à ce rang, on a E', il y a exclusion au rang  $n+12$ ; si c'est C, l'exclusion a lieu au rang  $n+13$ , compte tenu de ce qui peut suivre.

*Le cas E' est donc exclu.*

VII. 7. RETOUR AUX CAS G, H, I. — Dans le cas G, si  $a_n=-\bar{\omega}$ ,  $b_n=1$ ;  $a_{n+1}=\omega$ ,  $b_{n+1}=1$ ; on montre que  $a_{n+2}=\omega$ ,  $b_{n+2}=2$ ; puis  $a_{n+3}=-\omega-1$ ,  $b_{n+3}=1$ ;  $a_{n+4}=1$ ,  $b_{n+4}=1$ ;  $a_{n+5}=-\bar{\omega}$ ,  $b_{n+5}=2$  et un cas G.

Désignons la séquence comprise entre ces deux cas G par  $\mu$ , et remarquons qu'en ce cas  $x_n \in i \frac{((\omega+1)/2)}{3}$ .

Cette inclusion est encore vraie si  $a_n=-\bar{\omega}$ ,  $b_n=1$ ;  $a_{n+1}=1$ ,  $b_{n+1}=1$  (cas B) qui implique  $a_{n+2}=-\omega-1$ ,  $b_{n+2}=2$ ;  $a_{n+3}=2$ ,  $b_{n+3}=2$  et un cas G; désignons cette séquence par  $\nu$ .

A part  $\mu$  et  $\nu$ , G ne peut être suivi que de  $a_n=-\bar{\omega}$ ,  $b_n=1$ ;  $a_{n+1}=-\bar{\omega}$ ,  $b_{n+1}=1$ ;  $a_{n+2}=1$ ,  $b_{n+2}=1$ ;  $a_{n+3}=-\omega$ ,  $b_{n+3}=2$  et un cas G d'où l'exclusion de ce dernier cas.

On termine en prouvant l'exclusion des combinaisons  $\mu\nu\mu$ ,  $\nu\nu\mu$ ,  $\nu\nu\nu$  et  $\mu\mu\mu$ .

*Le cas G est donc exclu.*

Dans le cas H, il nous reste, si  $a_n=-\bar{\omega}$ ,  $b_n=1$ , trois variantes d'après ce qui précède :

$a_n=-\bar{\omega}$ ,  $b_n=1$ ;  $a_{n+1}=\omega$ ,  $b_{n+1}=1$ ;  $a_{n+2}=\omega$ ,  $b_{n+2}=2$  qu'on exclut.

$a_n=-\bar{\omega}$ ,  $b_n=1$ ;  $a_{n+1}=\omega+1$ ,  $b_{n+1}=2$  qu'on exclut.

$a_n=-\bar{\omega}$ ,  $b_n=1$ ;  $a_{n+1}=1$ ,  $b_{n+1}=1$ ;  $a_{n+2}=-\omega$ ,  $b_{n+2}=2$  et un cas H suivi de  $a_{n+3}=-\bar{\omega}$ ,  $b_{n+3}=1$ , donc ce cas se répète et est facilement exclu, entraînant l'exclusion de H dans le cas où  $a_n=-\bar{\omega}$ ,  $b_n=1$ .

Mais l'autre cas, on l'a vu (E' et G étant exclus) se ramène à celui-ci.

*Le cas H est donc exclu.*

Pour le cas I, son exclusion est maintenant évidente.

VII. 8. RETOUR AU CAS  $b_{n-1}=1$ ,  $b_n=1$ ,  $a_n=1$ . — B implique  $a_{n+1}=-\omega-1$ ,  $b_{n+1}=2$ ;  $a_{n+2}=2$ ,  $b_{n+2}=2$  et G; il est donc exclu.

C implique  $a_{n+1}=-\omega$ ,  $b_{n+1}=2$  et G, H ou I; il est donc exclu.

D implique  $a_{n+1}=\bar{\omega}$ ,  $b_{n+1}=1$ , qu'on exclut; ou bien  $a_{n+1}=\bar{\omega}$ ,  $b_{n+1}=2$ ;



puis  $a_{n+2} = \omega$ ,  $b_{n+2} = 1$ , ou bien  $a_{n+2} = -\bar{\omega} - 1$ ,  $b_{n+2} = 1$ ; dans les deux cas, ou bien il suit  $(1, 1)$ , et l'exclusion résulte de nos connaissances actuelles sur ce cas, ou bien l'exclusion s'obtient directement (raisonner jusqu'au rang  $n + 4$ ).

E est exclu, puisque E' l'est et que E'' l'est avec G.

Enfin A est facilement exclu au rang  $n - 1$ .

Ainsi nous avons obtenu l'exclusion totale du cas  $b_{n-1} = 1$ ,  $b_n = 1$ ,  $a_n = 1$ , achevant donc la première partie de la démonstration.

*Remarque.* — Il est maintenant aisé de lever les restrictions relatives à l'exclusion des cas J. On peut donc dire que tous les cas déjà envisagés sont exclus.

VII. 9. Introduisons de nouveaux cas analogues aux cas G, H, I. Ce sont les cas L et M où  $b_{n-1} = 2$ ,  $u_n = \{\bar{\omega}\}$  et  $x_n \in d\left(-\frac{1}{4}\right) \cap e(0) \cap e'(\bar{\omega}/2)$ , avec en plus :

$$\text{pour L : } y_n \in i(0) \cap i((-\omega - 1)/2) \cap e'\left(\frac{-1}{2}\right);$$

$$\text{pour M : } y_n \in g\left(-\frac{1}{4}\right) \cap e'((-\omega - 1)/2) \cap i\left(\frac{(-\omega - 1)/2}{3}\right).$$

Au cas L est assimilé le cas L' où  $b_{n-1} = 1$ ,  $x_n \in d\left(-\frac{1}{2}\right) \cap e'\left(\frac{-\bar{\omega}}{2}\right) \cap e(0)$  et  $y_n \in i(-1) \cap i\left(\frac{(-\bar{\omega})}{2}\right) \cap e'\left(\frac{(-\bar{\omega} - 1)}{2}\right)$ , où la position relative de  $x_n$  et  $y_n$  est la même, et où les développements ultérieurs sont les mêmes, à un changement de notation près pour  $(a_n, b_n)$ .

Désignons encore par K le cas où  $b_{n-1} = 2$ ,  $u_n = \{\omega\}$ , avec en plus  $x_n \in d\left(-\frac{1}{4}\right) \cap e(0) \cap e'((-\omega)/2)$  et  $y_n \in i(0) \cap g\left(-\frac{1}{4}\right) \cap i((-\omega)/2)$ . A ce cas est assimilé, pour les mêmes raisons que précédemment, le cas où  $b_{n-1} = 1$ ,  $x_n \in d(0) \cap e\left(\frac{\omega}{2}\right) \cap e(0)$  et  $y_n \in i\left(\frac{\omega}{2}\right) \cap g(0) \cap i(0)$ .

*Étude de K.* — On a  $(a_n, b_n) = (\omega, 1)$ ,  $(2, 2)$  ou  $(\bar{\omega} + 1, 1)$ ; mais on montre facilement que  $(2, 2)$  est exclu et que  $(\bar{\omega} + 1, 1)$  implique un cas G ou un cas H, donc est exclu; il reste  $(\omega, 1)$  qui implique un cas L' au rang suivant.

*Étude de L.* — On a  $(a_n, b_n) = (-\omega, 1)$ ,  $(2, 2)$  ou  $(\omega + 1, 1)$ , ce dernier étant facilement exclu.

Soit  $\varphi$  la variante où il suit  $(2, 2)$ ;  $\chi$  et  $\psi$  respectivement celles où  $(-\bar{\omega}, 1)$  est suivi de  $(\omega + 1, 2)$  ou  $(\omega, 1)$ , qu'on montre être les seules possibles.

*Variante  $\varphi$ .* — Si  $a_n = b_n = 2$ , il suit un cas K, d'où  $a_{n+1} = \bar{\omega}$ ,  $b_{n+1} = 1$  avec

un cas  $L'$  (où nous désignons encore par  $\varphi, \chi, \psi$  les trois variantes correspondantes); on montre l'exclusion (rang  $n$ ) s'il suit  $\chi$  ou  $\psi$ ; il reste donc seulement la suite périodique où  $b_{2k} = 1, b_{2k+1} = 2, a_{4k} = a_{4k+1} = \omega, a_{4k+2} = a_{4k+3} = \bar{\omega}$  (à un changement de notation près). Cette suite est exclue.

*Variante  $\psi$ .* — Si  $a_n = \bar{\omega}, b_n = 1$  avec  $a_{n+1} = \omega + 1, b_{n+1} = 2$ , on a deux cas possibles :

1°  $a_{n+2} = 2, b_{n+2} = 2$  avec  $a_{n+3} = \omega, b_{n+3} = 1$  et un cas  $L'$  où la variante  $\chi$  est exclue au rang  $n + 2$ , et la variante  $\psi$  au rang  $n + 1$ .

2°  $a_{n+2} = -\omega, b_{n+2} = 1$  et un cas  $K$ , d'où  $a_{n+3} = \bar{\omega}, b_{n+3} = 1$  et un cas  $L'$  où les deux variantes  $\chi$  et  $\psi$  sont exclues au rang  $n + 1$ .

*Variante  $\chi$ .* — Si  $a_n = -\bar{\omega}, b_n = 1$  avec  $a_{n+1} = \omega, b_{n+1} = 1$ , après l'exclusion facile du cas où  $a_{n+2} = \omega + 1, b_{n+2} = 1$ , il reste trois cas :

1°  $a_{n+2} = -\bar{\omega} - 1, b_{n+2} = 2$  : ce cas se traite comme la variante  $\psi$  (avec un rang de décalage).

2°  $a_{n+2} = \omega, b_{n+2} = 2$  : on a un cas  $K$ , d'où l'exclusion au rang  $n + 1$ .

3°  $a_{n+2} = -\bar{\omega}, b_{n+2} = 1$  : on a un cas  $J_2$ , déjà exclu.

Ainsi, les cas  $K$  et  $L$  sont exclus ( $L'$  aussi).

*Étude de  $M$ .* — Le couple  $(a_n, b_n)$  peut prendre les trois valeurs  $(-\bar{\omega}, 1), (2, 2), (\omega + 1, 1)$ .

Le premier entraîne un cas  $K$ .

Le second entraîne  $a_{n+2} = \bar{\omega}, b_{n+1} = 1$  et un cas  $L$ .

Le troisième entraîne facilement  $a_{n+1} = -\bar{\omega}, b_{n+1} = 2$ , avec, ou bien un cas  $L$  au rang suivant, ou bien l'exclusion au rang  $n - 1$ .

Donc le cas  $M$  est exclu.

VII. 10. Nous étudions maintenant tous les cas où  $b_{n-1} = 1, b_n = 2$  et  $\mathcal{J}(y_n) \geq 0$ . On peut supposer  $\mathcal{R}(x_n) \geq 0$ ; on a donc  $a_n = -\bar{\omega}, \omega, \omega + 1$  ou  $\omega + 2$ .

*Remarque.* — Quelques cas sont exclus indépendamment de VII. 9: Si  $x_n \in i(1)$ , ou bien encore si  $x_n \in i\frac{(\omega+1)}{3} \cap e'(1)$  avec, si  $a_n = \omega, x_n \in d\left(\frac{1}{2}\right)$ , on arrive, dans tous les cas, à des cas  $G$  ou  $H$ , ou bien à des cas tels que  $b_{k-1} = b_k = a_k = 1$ . L'exclusion résulte donc de VII. 7, 8.

Abordons maintenant l'étude systématique de tous les cas possibles.

$a_n = \omega + 2$ . — On montre d'abord l'exclusion si  $x_n \in e'(\omega + 1)$ ; le cas où  $x_n \in i(\omega + 1)$  se ramène à  $a_{n+1} = \bar{\omega}, b_{n+1} = 1$  avec un cas  $L'$ , ou bien à  $a_{n+1} = -\omega - 1, b_{n+1} = 1, a_{n+2} = b_{n+2} = 1$ ; ces deux cas sont déjà exclus.

$a_n = \omega + 1$ . — Il reste cinq cas (pour l'énoncé de chacun nous supposons les précédents non réalisés) :

1°  $x_n \in i(\omega)$  : se ramène à G, donc exclu.

*Remarque.* — Dans tous les autres cas, on a les cas G ou M au rang  $n + 1$ , lorsque  $y_n \in i\left(\frac{\omega}{2}\right)$ ; nous supposons donc désormais le contraire.

2°  $x_n \in i(\omega + 1)$  : exclusion au rang  $n$ .

3°  $x_n \in d(1)$  : exclusion aux rangs  $n, n - 1$ .

4°  $x_n \in i(\omega)$  : on montre que  $a_{n+1} = -\omega$ ,  $b_{n+1} = 1$ , et  $a_{n+2} = \bar{\omega}$ ,  $b_{n+2} = 1$ ; puis  $a_{n+3} = -\omega$ ,  $b_{n+3} = 1$  (sinon on aurait un cas G, ou bien l'exclusion au rang  $n$ ); enfin on a ou bien l'exclusion au rang  $n$ , ou bien un cas K ou un cas M.

5° Pour la région restante, on voit (rang  $n + 1$ ) que  $a_{n+1} = \bar{\omega} + 1$ ,  $b_{n+1} = 1$  et  $a_{n+2} = -\omega$ ,  $b_{n+2} = 1$ . Compte tenu des valeurs possibles de  $(a_{n+3}, b_{n+3})$ , on obtient l'exclusion au rang  $n - 1$ .

$a_n = -\bar{\omega}$ . — On voit facilement qu'il ne reste que  $a_{n+1} = -\omega$ ,  $b_{n+1} = 1$  et un cas G, ou bien  $a_{n+1} = 2$ ,  $b_{n+1} = 2$  et un cas K.

VII. 11. Avant d'étudier le dernier cas, où  $a_n = \omega$ , signalons une extension des résultats de VII. 5.

Désignons par  $J^*$  le cas où  $b_{n-1} = 1$ ;  $y_n \in i\left(\frac{\omega}{4}\right) \cup i\left(\frac{-\bar{\omega}}{4}\right)$  et  $x_n \in e'\left(\frac{-\bar{\omega}}{2}\right)$ .

L'exclusion en est immédiate si  $x_n \in d'\left(\frac{1}{2}\right)$ .

Supposons le contraire. Le couple  $(a_n, b_n)$  peut prendre les trois valeurs  $(\omega, 2)$ ,  $(\omega, 1)$  et  $(-\bar{\omega}, 1)$ .

Si  $a_n = \omega$ ,  $b_n = 2$ , on peut avoir  $a_{n+1} = \omega + 1$ ,  $b_{n+1} = 1$ ; ou bien  $a_{n+1} = \bar{\omega}$ ,  $b_{n+1} = 1$ .

Les deux cas s'excluent si  $y_n \in e'\left(\frac{-\bar{\omega}}{2}\right)$ ; dans le cas contraire, on a un cas K, déjà exclu.

Si  $b_n = 1$  avec  $a_n = \omega$  ou  $-\bar{\omega}$ , on se retrouve dans un cas  $J^*$  au rang suivant. Mais,  $a_n = a_{n+1} = \omega$ ,  $b_n = b_{n+1} = 1$  étant impossible, il ne peut suivre que la suite critique.

*Donc le cas  $J^*$  est exclu.*

Revenons au cas où  $b_{n-1} = 1$ ,  $b_n = 2$ ,  $a_n = \{\omega\}$ ,  $\mathcal{R}(x_n) \geq 0$ . L'exclusion est immédiate si  $x_n \in d'\left(\frac{1}{2}\right)$ . Distinguons, pour le reste, deux cas :

1°  $x_n \in e'\left(\frac{-\bar{\omega}}{2}\right)$ . — Le couple  $(a_{n+1}, b_{n+1})$  peut prendre les quatre valeurs  $(\bar{\omega}, 1)$ ,  $(\omega + 1, 1)$ ,  $(\bar{\omega} + 2, 1)$  et  $(4, 2)$ .

Si  $a_{n+1} = \omega$ ,  $b_{n+1} = 1$ , on a un cas  $J^*$  au rang suivant, d'où l'exclusion.

Dans les trois autres cas, l'exclusion s'obtient au rang  $n - 1$ , ou bien on a un cas  $K$ , déjà exclu.

$2^o$   $x_n \in i \frac{(-\bar{\omega})}{2}$ . — Le couple  $(a_{n+1}, b_{n+1})$  peut prendre les quatre valeurs  $(\bar{\omega}, 1)$ ,  $(-\omega - 1, 1)$ ,  $(-\bar{\omega} - 2, 1)$  et  $(-4, 2)$ .

Si  $a_{n+1} = \bar{\omega}$ ,  $b_{n+1} = 1$ , on a  $a_{n+2} = -1$ ,  $b_{n+2} = 1$ , d'où l'exclusion,

Si  $a_{n+1} = -\omega - 1$ ,  $b_{n+1} = 1$ , on a un cas  $J^*$  au rang suivant, d'où l'exclusion.

Si  $a_{n+1} = -\bar{\omega} - 2$ ,  $b_{n+1} = 1$ , on a  $a_{n+2} = \omega$ ,  $b_{n+2} = 2$ , d'où (d'après ce que nous savons maintenant sur ce cas)  $x_{n+1} \in i \frac{(-3)}{2}$ , conclusion qui est aussi valable si  $a_{n+2} = -4$ ,  $b_{n+2} = 2$ ; l'exclusion (aux rangs  $n + 1$  et  $n - 1$ ) s'en déduit.

VII. 12. Nous avons ainsi montré l'exclusion de tous les cas où  $b_{n-1} = 1$ ,  $b_n = 2$ ; il nous suffit donc d'examiner les cas où l'on a constamment  $b_k = 1$ , ou bien constamment  $b_k = 2$ .

Si  $b_k = 2$  constamment, on a  $a_k = \pm 2$  ou  $\pm 4$ ; mais tous les  $a_k$  doivent être de même signe (par exemple positif); les exclusions faciles des cas où  $a_n = 2$ ,  $a_{n+1} = 4$ , ou bien  $a_{n-1} = a_n = a_{n+1} = 2$ , ou encore  $a_{n-1} = a_n = a_{n+1} = 4$  montrent que le cas entier est à rejeter.

Si  $b_k = 1$  constamment, on prouve aisément l'exclusion de  $\omega + 1$ ; l'étude de  $J^*$  montre alors qu'il ne peut suivre que la suite critique.

Ainsi tous les cas possibles ont été exclus; la démonstration est terminée : on a  $C_{10} = 1$ .

*Remarque.* — Dans bien des occasions, la constante d'exclusion utilisée a été exactement 1. Il faudrait donc un examen plus approfondi pour décider si 1 est une valeur isolée du spectre de Markoff de  $R(\sqrt{-19})$ .