ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

PAUL JAFFARD

Extensions algébriques infinies de PF-corps

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 70, nº 2 (1953), p. 181-198

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1953_3_70_2_181_0>

EXTENSIONS ALGÉBRIQUES INFINIES
DE PF-CORPS

PAR PAUL JAFFARD.

Artin [1] (1) appelle PF-corps les deux catégories de corps suivantes :

1° Les extensions algébriques finies du corps des nombres rationnels (cas arithmétique);

2° Les extensions algébriques finies du corps des fonctions rationnelles d'une variable sur un corps de base k_0 (cas fonctionnel).

Artin et Whaples [2] ont montré que ces corps peuvent être caractérisés par un ensemble de valuations qui vérifie la formule du produit (il faut en outre que l'une au moins de ces valuations soit d'un type assez simple).

Nous étudions ici les extensions algébriques infinies de tels corps et nous montrons qu'on peut leur généraliser les résultats d'Artin et Whaples.

Soit Ω une telle extension. L'ensemble $\mathcal{M}_\Omega$ des valuations de Ω qui est à considérer doit alors être muni d'une topologie analogue à celle définie par Krull [5]. Ces valuations sont prises sous la forme additive. $\mathcal{M}_\Omega$ est localement compact et l'on peut définir sur cet espace une mesure de Radon telle que les fonctions liées aux éléments du corps Ω aient une mesure nulle. Ceci généralise la formule du produit. On montre que, réciproquement, si un corps Ω possède un ensemble localement compact mesuré de valuations $\mathcal{M}_\Omega$ tel que les fonctions numériques définies par les éléments de Ω aient une mesure nulle (et si cet ensemble contient au moins une valuation convenable), alors Ω est l'extension algébrique d'un PF-corps k. On montre de plus que l'espace $\mathcal{D}_\Omega$ des diviseurs de Ω qui correspond biunivoquement à $\mathcal{M}_\Omega$ est parfaitement défini par ces propriétés.

ξ étant une fonction numérique convenable définie sur Ω et S le sous-ensemble de Ω défini par :

$$x \in S \rightleftharpoons v(x) \geqq \xi(v) \qquad \text{pour tout } v \in \mathcal{M}_\Omega$$

(1) Les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie en fin de l'article.

on évalue à l'aide de la mesure de ξ une borne supérieure du nombre des éléments de S contenus dans une sous-extension K de Ω finie sur k (dans le cas fonctionnel on évalue une borne supérieure de la dimension de l'espace vectoriel S sur le corps des constantes).

1. Notations et rappel de résultats. — Les corps intervenant dans cette étude seront supposés commutatifs. Q désignera le corps des nombres rationnels, R celui des nombres réels et C celui des nombres complexes. Le mot *valuation* sera pris au sens restreint d'Ostrowski. C'est une application d'un corps Ω dans R^+ (ensemble des nombres réels positifs ou nuls) vérifiant :

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y), \tag{1}$$
$$\varphi(x+y) \leqq \varphi(x) + \varphi(y). \tag{2}$$

On posera $v(x) = -\operatorname{Log}\varphi(x)$. On dira que $\varphi(x)$ est la *forme multiplicative* et $v(x)$ la *forme additive* de la valuation.

Deux valuations φ et ψ d'un corps Ω seront dites *équivalentes* si pour tout $x \in \Omega$:

$$\varphi(x) \leqq 1 \rightleftharpoons \psi(x) \leqq 1.$$

Une classe d'équivalence de valuations de Ω sera appelée *diviseur premier* de Ω ou, plus simplement, *diviseur*. K étant un sous-corps de Ω et $\mathfrak{P}$ un diviseur de Ω, on désignera par $\mathfrak{P}_K$ le diviseur induit par $\mathfrak{P}$ sur K. Si $\mathfrak{p}$ est un diviseur de K, on dira que $\mathfrak{P}$ *divise* $\mathfrak{p}$ et l'on écrira $\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}$ si et seulement si $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_K$.

v étant une valuation de Ω et $\mathfrak{P}$ le diviseur premier qu'elle détermine, on désignera par $\overline{\Omega}_v$ (ou $\overline{\Omega}_{\mathfrak{P}}$) le corps résiduel correspondant et par $\hat{\Omega}_v$ (ou $\hat{\Omega}_{\mathfrak{P}}$) le corps complété.

Soit k un corps vérifiant l'axiome suivant :

Axiome 1. — *Il existe un ensemble $\mathfrak{M}_K = (\varphi_\iota)_{\iota \in I}$ de valuations non triviales inéquivalentes de k tel que pour tout élément x non nul de k on ait $\varphi_\iota(x) = 1$ pour toutes les valuations φ_ι sauf un nombre fini et tel que :*

$$\prod_\iota \varphi_\iota(x) = 1. \tag{3}$$

La formule (3) est dite *formule du produit d'Artin-Whaples.*

Si $\mathfrak{M}_k$ ne contient pas de valuation archimédienne, le sous-ensemble k_0 de k défini par :

$$x \in k_0 \rightleftharpoons \varphi_\iota(x) \leqq 1 \quad \text{pour tout } \iota \in I \tag{4}$$

forme un sous-corps de k qui est dit *corps des constantes.*

k_0 est algébriquement clos dans k et peut être considéré comme un sous-corps de chaque corps résiduel $\overline{k}_\varphi$. On supposera alors que k vérifie de plus :

AXIOME 2. — *Il existe au moins une valuation* $\varphi_\iota(\iota \in \mathrm{I})$ *qui est d'un des types suivants :*

1° φ_ι *est archimédienne;*

2° φ_ι *est discrète et* $\overline{k}_{\varphi_\iota}$ *est fini;*

3° φ_ι *est discrète et* $\overline{k}_{\varphi_\iota}$ *est une extension algébrique de degré fini de* k_0.

Une telle valuation sera dite *raisonnable* ainsi que le diviseur premier correspondant.

Un corps k vérifiant les axiomes 1 et 2 est appelé par Artin [1] un PF-*corps*. Soit $\mathcal{D}_k$ l'ensemble des diviseurs de k correspondant à l'ensemble des valuations $\mathfrak{M}_k$. Artin et Whaples ont montré [2] qu'un PF-corps est nécessairement de l'un des deux types suivants :

1° *Cas arithmétique.* — k est une extension algébrique finie de Q et $\mathcal{D}_k$ est formé par l'ensemble de tous les diviseurs premiers de k;

2° *Cas fonctionnel.* — $\mathcal{D}_k$ ne contient pas de diviseur archimédien. k_0 est alors un corps. Si $k \neq k_0$ et si t est un élément de k non contenu dans k_0, le corps $\mathcal{R} = k_0(t)$ est une extension purement transcendante de k_0 et k est une extension algébrique finie de $\mathcal{R}$. L'ensemble $\mathcal{D}_k$ est formé par tous les diviseurs de k qui induisent sur k_0 la valuation triviale (c'est-à-dire pour laquelle tout élément non nul a la valeur 1). En particulier, l'ensemble $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}$ des diviseurs de $\mathcal{R}$ induits par les diviseurs de $\mathcal{D}_k$ est bien connu.

Réciproquement on voit sans peine que toute extension algébrique finie de Q est un PF-corps sans corps de constantes et que toute extension algébrique finie d'un corps de fractions rationnelles $k_0(t)$ est un PF-corps, son corps des constantes étant la clôture algébrique de k_0 dans k.

k étant un PF-corps, on appelle *sous-corps rationnel* de k le sous-corps Q dans le cas arithmétique et un sous-corps quelconque (mais fixe) de la forme $k_0(t)$ dans le cas fonctionnel, k_0 étant le corps des constantes et t un élément de k non contenu dans k_0.

Soient k un PF-corps, $\mathcal{D}_k = (\mathfrak{p}_\iota)_{\iota \in \mathrm{I}}$ l'ensemble des diviseurs de k intervenant dans la formule du produit. Soit S un ensemble qui sera arbitraire si k_0 n'est pas un corps et qui, dans le cas contraire, sera un espace vectoriel sur k_0. On définit comme suit l'*ordre* de S :

1° Dans le cas arithmétique, ou si k_0 est un corps fini, l'ordre de S est le nombre des éléments de S;

2° Si k_0 est un corps infini, l'ordre de S est c^r où c est un nombre fixe strictement supérieur à 1 et r la dimension sur k_0 de l'espace vectoriel S.

$\mathfrak{p}$ étant un diviseur non archimédien raisonnable contenu dans $\mathcal{D}_k$, on appelle *norme* de $\mathfrak{p}$ l'ordre $\mathrm{N}\mathfrak{p}$ du corps résiduel $\overline{k}_{\mathfrak{p}}$. On définit alors une *valuation normale* $\nu_{\mathfrak{p}}$ de k :

1° Si $\mathfrak{p}$ est un diviseur archimédien et si $|x|$ est la valeur absolue ordinaire correspondante de x, on pose

$$\nu_{\mathfrak{p}}(x) = |x| \qquad \text{ou} \qquad \nu_{\mathfrak{p}}(x) = |x|^2$$

suivant que $\hat{k}_{\mathfrak{p}} = \mathrm{R}$ ou $\hat{k}_{\mathfrak{p}} = \mathrm{C}$.

2° Si $\mathfrak{p}$ est un diviseur discret, on pose :

$$(5) \qquad \nu_{\mathfrak{p}}(x) = (\mathrm{N}\mathfrak{p})^{-\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(x)}.$$

Si $\mathfrak{p}$ est un diviseur archimédien, on posera par convention $\mathrm{N}\mathfrak{p} = e$ (base des logarithmes népériens).

On peut énoncer (2) le :

THÉORÈME 1. — *Soient k un* PF-*corps et $\mathfrak{M}_k$ l'ensemble des valuations intervenant dans la formule du produit. Toutes les valuations de $\mathfrak{M}_k$ sont raisonnables. Écrites sous la forme multiplicative et élevées s'il le faut, à une puissance fixe, ce sont les valuations normales.*

2. EXTENSIONS FINIES D'UN PF-CORPS. — Soient k un PF-corps, K une extension algébrique de degré fini de k. Il résulte de ce qui précède que K est encore un PF-corps. Soit $\mathcal{D}_{\mathrm{K}}$ (resp. $\mathcal{D}_k$) l'ensemble des diviseurs de K (resp. de k) intervenant dans la formule du produit. Soit $\mathfrak{P} \in \mathcal{D}_{\mathrm{K}}$.

Si $\mathfrak{P}$ est un diviseur discret, on désignera par $e_{\mathfrak{P}}$ l'indice de ramification de $\mathfrak{P}$ sur k et par $f_{\mathfrak{P}}$ le degré d'inertie correspondant $\left[\bar{\mathrm{K}}_{\mathfrak{P}} : \bar{k}_{\mathfrak{P}_k}\right]$. Si $\mathfrak{P}$ est archimédien, on posera $f_{\mathfrak{P}} = 1$; on posera $e_{\mathfrak{P}} = 2$ si $\hat{\mathrm{K}}_{\mathfrak{P}} = \mathrm{C}$ et $\hat{k}_{\mathfrak{P}_k} = \mathrm{R}$, $e_{\mathfrak{P}} = 1$ dans les autres cas : on dira encore que $e_{\mathfrak{P}}$ et $f_{\mathfrak{P}}$ sont l'indice de ramification et le degré d'inertie de $\mathfrak{P}$ sur k.

Que $\mathfrak{P}$ soit archimédien ou non, si $n_{\mathfrak{P}} = \left[\hat{\mathrm{K}}_{\mathfrak{P}} : \hat{k}_{\mathfrak{P}_k}\right]$ est le degré local de $\mathfrak{P}$ sur k, on a :

$$(6) \qquad n_{\mathfrak{P}} = e_{\mathfrak{P}} f_{\mathfrak{P}} \quad (3).$$

THÉORÈME 2. — *Pour tout diviseur $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{D}_k$, on a :*

$$(7) \qquad [\mathrm{K} : k] = \sum_{\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}} n_{\mathfrak{P}},$$

la somme étant étendue à tous les diviseurs de $\mathcal{D}_{\mathrm{K}}$ qui divisent $\mathfrak{p}$.

Dans le cas fonctionnel, c'est le théorème 3 du chapitre XV de [1].

Dans le cas arithmétique, il existe un élément a de K tel que $\mathrm{K} = k(a)$. Soit alors $f(x) = 0$ l'équation irréductible sur k satisfaite par a. L'égalité (7) s'obtient en décomposant $f(x)$ en produit de polynomes à coefficients dans $\hat{k}_{\mathfrak{p}}$.

---

(2) *Voir* [2], théor. 3.

(3) *Voir*, par exemple, [1], chap. III, théor. 6.

LEMME 1. — *Dans le cas fonctionnel, le corps des constantes* K_0 *de* K *est une extension algébrique finie de* k_0.

On a vu au paragraphe 1 que c'était une extension algébrique. Montrons qu'elle est de degré fini. Le corps des rationnels $\mathcal{R} = k_0(t)$ est une extension transcendante pure de k_0, donc linéairement disjointe de K_0 qui est la clôture algébrique de k_0 dans K. Soient donc $a_1, a_2, \ldots, a_m \in K_0$. On a ([4])

$$[k_0(a_1, \ldots, a_m) : k_0] = [\mathcal{R}(a_1, \ldots, a_m) : \mathcal{R}] \leqq [K : \mathcal{R}].$$

Par suite

$$[K_0 : k_0] \leqq [K : \mathcal{R}] = [K : k] \times [k : \mathcal{R}].$$

Définissons pour chaque $\mathfrak{P} \in \mathcal{D}_K$ une valuation normale correspondante :

1° Si $\mathfrak{P}$ est archimédien ou si k_0 est fini, en vertu du lemme 1 et de ce qui a été vu au paragraphe 1, la valuation normale $\nu_{\mathfrak{P}}$ de K se trouve définie sans ambiguïté;

2° Si k_0 est un corps infini, on choisit une fois pour toutes (quel que soit K) une constante c_0 et l'on prend pour constante c définissant l'ordre d'un espace vectoriel sur K_0 : $c = c_0^{[K_0:k_0]}$, ce qui est possible en vertu du lemme 1. Ceci revient à définir :

$$N_{\mathfrak{P}} = c_0^{[K_0:k_0][\bar{K}:\bar{K}_0]} = c_0^{[\bar{K}:k_0]} \quad (^5). \tag{8}$$

On voit alors que pour tout diviseur $\mathfrak{P}$ (archimédien ou non) on a :

$$N\mathfrak{P} = [N\mathfrak{P}_K]^{[\bar{K}_{\mathfrak{P}}:\bar{k}_{\mathfrak{P}_K}]} = (N\mathfrak{P}_K)^{f\mathfrak{P}}. \tag{9}$$

Soit $\mathfrak{p} \in \mathcal{D}_k$. Si pour tout $x \in k$ on pose :

$$\varphi_{\mathfrak{p}}(x) = \prod_{\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}} \nu_{\mathfrak{P}}(x),$$

$\mathfrak{P}$ parcourant l'ensemble des éléments de $\mathcal{D}_K$ qui divisent $\mathfrak{p}$, on voit que $\varphi_{\mathfrak{p}}$ est

---

(4) *Voir*, par exemple, A. WEIL, *Foundations of algebraic Geometry*, I, prop. 6.

(5) La convention faite ici est différente de celle d'Artin ([1]. p. 282). Artin choisit en effet la même constante pour tous les corps. Notre convention permet de garder la première définition de la norme lorsque K_0 est un corps fini. Elle n'est possible ici que parce qu'on ne l'applique qu'à des extensions finies du corps des constantes (ce qui n'est pas toujours le cas dans l'étude d'Artin). Si l'on prend la convention d'Artin, la formule (10) se change légèrement et l'on trouve :

$$\prod_{\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}} \nu_{\mathfrak{P}}(x) = \nu_{\mathfrak{p}}(x)^{m(K/k)},$$

$m(K/k)$ étant une constante rationnelle de l'extension K/k qui est dite *degré effectif* de l'extension. Dans le cas où le degré $[K:k]$ est fini, on a :

$$m(K/k) = \frac{[K:k]}{[K_0:k_0]}.$$

une valuation de k qui définit le diviseur $\mathfrak{p}$. D'autre part, si $\mathfrak{p}$ parcourt $\mathcal{D}_k$, la famille $(\varphi_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}\in\mathcal{D}_k}$ vérifie la formule du produit. Il résulte donc du lemme 6 de [2] qu'il existe une certaine constante μ ne dépendant que de K et de k telle que :

$$\varphi_\mathfrak{p} = \nu_\mathfrak{p}^\mu \qquad \text{quel que soit } \mathfrak{p}\in\mathcal{D}_k.$$

Calculons μ :

$$\varphi_\mathfrak{p}(x) = \prod_{\mathfrak{P}\mid\mathfrak{p}} \nu_\mathfrak{P}(x) = \prod_{\mathfrak{P}\mid\mathfrak{p}} (\mathrm{N}\mathfrak{P})^{-\mathrm{ord}_\mathfrak{P}(x)} = \prod_{\mathfrak{P}\mid\mathfrak{p}} (\mathrm{N}\mathfrak{p})^{-f_\mathfrak{P}\mathrm{ord}_\mathfrak{P}(x)}$$

en vertu de la formule (9).

D'où, en tenant compte de l'égalité $\mathrm{ord}_\mathfrak{P}(x) = e_\mathfrak{P}\mathrm{ord}_\mathfrak{p}(x)$:

$$\varphi_\mathfrak{p}(x) = (\mathrm{N}\mathfrak{p})^{-\mathrm{ord}_\mathfrak{p}(x)\sum_{\mathfrak{p}\mid\mathfrak{P}} n_\mathfrak{P}} = (\mathrm{N}\mathfrak{p})^{-[\mathrm{K}:k]\mathrm{ord}_\mathfrak{p}(x)}$$

en vertu du théorème 2. On en déduit donc $\varphi_\mathfrak{p}(x) = [\mathrm{K}:k]$. D'où :

Théorème 3. — *Soit* K *une extension de degré fini* [K : k] *du* PF-*corps k et soit $\mathfrak{p}$ un diviseur de k intervenant dans la formule du produit pour k. On a :*

$$\prod_{\mathfrak{P}\mid\mathfrak{p}} \nu_\mathfrak{P}(x) = \nu_\mathfrak{p}(x)^{[\mathrm{K}:k]} \quad \textit{pour tout } x\in k, \tag{10}$$

$\nu_\mathfrak{p}$ et $\nu_\mathfrak{P}$ étant les valuations normales correspondant aux diviseurs $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{P}$; $\mathfrak{P}$ parcourant l'ensemble des diviseurs premiers de K *qui divisent $\mathfrak{p}$.*

3. L'espace $\mathcal{D}_\Omega$ et sa mesure. — Soit Ω une extension algébrique de degré non nécessairement fini du PF-corps k. Soit encore $\mathcal{D}_k$ l'ensemble des diviseurs de k qui interviennent dans la formule du produit pour k. Si K est un corps intermédiaire entre k et Ω, on désignera par $\mathcal{D}_\mathrm{K}$ l'ensemble des diviseurs de K qui induisent sur k un diviseur appartenant à $\mathcal{D}_k$. On définit sur $\mathcal{D}_\Omega$ une structure uniforme en faisant correspondre à tout surcorps K de degré fini sur k et contenu dans Ω l'entourage $\mathcal{E}_\mathrm{K}$ de $\mathcal{D}_\Omega$ défini par :

$$(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})\in\mathcal{E}_\mathrm{K} \rightleftharpoons \mathfrak{P}_\mathrm{K} = \mathfrak{Q}_\mathrm{K}. \tag{11}$$

On voit que l'on obtient la même structure uniforme sur $\mathcal{D}_\Omega$ si l'on remplace k par une sous-extension k' de Ω de degré fini sur k. On en déduit que l'on obtient encore la même structure uniforme sur $\mathcal{D}_\Omega$ si l'on remplace k par un sous-corps rationnel $\mathcal{R}$. Si K est une extension de k contenue dans Ω, mais de degré non nécessairement fini sur k et si $\mathfrak{P}$ appartient à $\mathcal{D}_\Omega$, on désignera par K($\mathfrak{P}$) le sous-ensemble de $\mathcal{D}_\Omega$ tel que :

$$\mathfrak{Q}\in\mathrm{K}(\mathfrak{P}) \rightleftharpoons \mathfrak{P}_\mathrm{K} = \mathfrak{Q}_\mathrm{K}.$$

Si $\mathfrak{P}$ est un élément de $\mathcal{D}_\Omega$ on lui associe une valuation additive v ainsi définie :

1° Si $\mathfrak{P}$ est archimédien, $\mathfrak{P}$ définit un isomorphisme σ de Ω dans C. On posera alors pour tout $x \in \Omega$:

$$v(x) = -\operatorname{Log} |\sigma(x)|.$$

2° Si $\mathfrak{P}$ n'est pas archimédien et si K est un surcorps fini de k qui contienne x et soit contenu dans Ω, on posera :

$$v(x) = \frac{1}{e_{\mathfrak{P}_K}} \operatorname{ord}_{\mathfrak{P}_K}(x).$$

Cette valeur $v(x)$ ne dépend évidemment pas du corps K choisi.

Soit $\mathcal{M}_\Omega$ l'ensemble de ces valuations, on voit que si v et w sont deux telles valuations équivalentes sur une extension K de k contenue dans Ω (mais non nécessairement finie), on a $v_K = w_K$.

On pourra exprimer une telle propriété en disant que $\mathcal{M}_\Omega$ forme un *ensemble de valuations de Ω cohérent sur k.*

$\mathcal{O}_\Omega$ et $\mathcal{M}_\Omega$ étant mis en correspondance biunivoque, $\mathcal{M}_\Omega$ se trouve muni d'une structure uniforme. Si $v \in \mathcal{M}_\Omega$ et si K est une extension de k contenue dans Ω, on définit $K(v)$ d'une manière évidente.

THÉORÈME 4. — *L'espace $\mathcal{O}_\Omega$ est complet.*

Il revient au même de montrer que $\mathcal{M}_\Omega$ est complet.

$\mathcal{M}_\Omega$ est séparé. En effet si v et w sont deux éléments distincts de $\mathcal{M}_\Omega$, ces valuations n'étant pas équivalentes il existe $x \in \Omega$ tel que $v(x) > 0$ et $w(x) \leqq 0$. Le corps $K = k(x)$ est une extension de degré fini de k telle que $(v, w) \notin \mathcal{E}_K$. L'espace $\mathcal{M}_\Omega$ est donc bien séparé.

Soit $\mathcal{F}$ un filtre de Cauchy sur $\mathcal{M}_\Omega$ et soit $a \in \Omega$. Il existe un élément de $\mathcal{F}$ qui est petit d'ordre $\mathcal{E}_{k(a)}$, soit A. Toutes les valuations contenues dans A induisent la même valuation sur $k(a)$ et prennent la même valeur sur a soit $v(a)$. L'application $a \to v(a)$ définit une valuation (additive) de Ω, donc un diviseur $\mathfrak{P}$ de Ω. Si $\mathfrak{Q}$ est un élément quelconque de A, les diviseurs $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ induisent le même diviseur sur k, donc $\mathfrak{P}_k \in \mathcal{O}_k$ et, par suite, $\mathfrak{P} \in \mathcal{O}_\Omega$. On voit que l'élément de $\mathcal{M}_\Omega$ correspondant à $\mathfrak{P}$ est précisément v. Soient maintenant $X \in \mathcal{F}$ et $\mathcal{V}$ un voisinage de v dans $\mathcal{M}_\Omega$. Montrons que $X \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$. Pour cela on peut supposer $\mathcal{V} = K(v)$, avec $\Omega \supset K \supset k$ et $[K : k] < \infty$. Soit Y un élément de $\mathcal{F}$ petit d'ordre $\mathcal{E}_K$. D'après la construction de v on a $Y \subset \mathcal{V}$ et $\mathcal{V} \cap X \neq \emptyset$. Donc v est adhérent au filtre $\mathcal{F}$. Par suite $\mathcal{F}$ converge vers v et $\mathcal{M}_\Omega$ est complet.

THÉORÈME 5. — *$\mathcal{O}_\Omega$ est localement compact.*

Soit $\mathfrak{P} \in \mathcal{O}_\Omega$. L'ensemble $k(\mathfrak{P})$ est ouvert ainsi que son complémentaire $\bigcup\limits_{\mathfrak{Q}_k \neq \mathfrak{P}_k} k(\mathfrak{Q})$. Donc $k(\mathfrak{P})$ est fermé et par suite complet. Pour montrer que $k(\mathfrak{P})$ est compact, il suffit de montrer (N. BOURBAKI, *Topologie générale*, chap. II, § 4, théor. 3) que pour tout entourage $\mathcal{E}_K$ il existe un recouvrement fini de $k(\mathfrak{P})$ qui soit petit d'ordre $\mathcal{E}_K$. Or $[K : k] < \infty$ entraîne qu'il n'y a qu'un nombre fini de diviseurs de K qui divisent $\mathfrak{P}_k$ soient $\mathfrak{P}_K^{(1)}, \ldots, \mathfrak{P}_K^{(m)}$. On a

$$k(\mathfrak{P}) = K(\mathfrak{P}^{(1)}) \cup \ldots \cup K(\mathfrak{P}^{(m)})$$

et tous les $K(\mathfrak{P}^{(i)})$ sont petits d'ordre $\mathcal{E}_K$. Donc $k(\mathfrak{P})$ est un voisinage compact de $\mathfrak{P}$.

Nous allons maintenant définir une mesure de Radon sur $\mathcal{D}_\Omega$.

Établissons d'abord le :

Lemme 2. — *Une fonction numérique f définie sur $\mathcal{D}_\Omega$ est à support compact si et seulement si elle est identiquement nulle sur tous les ensembles $k(\mathfrak{P})$ sauf un nombre fini.*

Soit S le support de f. Supposons S compact. Pour tout $\mathfrak{P} \in \mathcal{D}_\Omega$ posons $S(\mathfrak{P}) = S \cap k(\mathfrak{P})$. Comme $k(\mathfrak{P})$ est ouvert, $S(\mathfrak{P})$ est un sous-ensemble ouvert de S. Comme $S = \bigcup_{\mathfrak{P} \in \mathcal{D}_\Omega} S(\mathfrak{P})$, on en déduit qu'il existe un ensemble fini de diviseurs $\mathfrak{P}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{P}^{(m)}$ tels que

$$S \subset S(\mathfrak{P}^{(1)}) \cup \ldots \cup S(\mathfrak{P}^{(m)}) \subset k(\mathfrak{P}^{(1)}) \cup \ldots \cup k(\mathfrak{P}^{(m)})$$

et f s'annule sur presque tous les $k(\mathfrak{P})$. Réciproquement supposons que f s'annule sur presque tous les $k(\mathfrak{P})$ et soit $k(\mathfrak{P}^{(1)}), \ldots, k(\mathfrak{P}^{(m)})$ l'ensemble des $k(\mathfrak{P})$ sur lesquels f ne s'annule pas identiquement. Comme

$$A = k(\mathfrak{P}^{(1)}) \cup \ldots \cup k(\mathfrak{P}^{(m)})$$

est fermé, on a $S \subset A$ et puisque A est compact il en est de même de S.

Soit $\mathcal{K}$ l'ensemble des fonctions numériques continues à support compact définies sur $\mathcal{D}_\Omega$. Soit $\mathcal{K}'$ le sous-ensemble de $\mathcal{K}$ ainsi défini : Une fonction numérique f définie sur $\mathcal{D}_\Omega$ sera dite appartenir à $\mathcal{K}'$ si et seulement si il existe un surcorps de degré fini K de k contenu dans Ω et tel que f soit constante sur chaque ensemble $K(\mathfrak{P})$ et nulle sur presque tous les $K(\mathfrak{P})$ sauf un nombre fini. On voit immédiatement que $\mathcal{K}'$ forme un sous-espace vectoriel (sur R) de $\mathcal{K}$.

Lemme 3. — *$\mathcal{K}'$ est riche et positivement riche dans $\mathcal{K}$.*

Rappelons ([4], chap. III) que ceci signifie que, pour toute partie compacte A de $\mathcal{D}_\Omega$, il existe un voisinage compact U de A tel que toute fonction continue (resp. continue positive) à support contenu dans A puisse être approchée uniformément par des fonctions (resp. positives) appartenant à $\mathcal{K}'$ dont le support soit contenu dans U.

Soit A compact. On a vu que l'on pouvait trouver $\mathfrak{P}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{P}^{(m)} \in \mathcal{D}_\Omega$ tels que $A \subset k(\mathfrak{P}^{(1)}) \cup \ldots \cup k(\mathfrak{P}^{(m)})$. Comme ce dernier ensemble est ouvert on va poser $U = k(\mathfrak{P}^{(1)}) \cup \ldots \cup k(\mathfrak{P}^{(m)})$. Soit maintenant f une fonction continue dont le support est contenu dans A. Montrons que pour tout nombre $\varepsilon > 0$ il existe une fonction g contenue dans $\mathcal{K}'$ dont le support soit continu dans A, et telle que

$$\|f - g\| = \operatorname*{Sup}_{\mathfrak{P} \in \mathcal{O}_\Omega} (|f(\mathfrak{P}) - g(\mathfrak{P})|) \leqq \varepsilon.$$

f étant à support compact est uniformément continue et, par suite, il existe une extension finie K de k (contenue dans Ω) telle que $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) \in \mathcal{E}_K$ entraîne $|f(\mathfrak{P}) - f(\mathfrak{Q})| \leqq \varepsilon$. Soient $\mathfrak{P}_K^{(1)}, \ldots, \mathfrak{P}_K^{(s)}$ l'ensemble des diviseurs de K qui induisent sur k l'un des diviseurs $\mathfrak{P}_k^{(1)}, \ldots, \mathfrak{P}_k^{(m)}$. On a encore

$$U = K(\mathfrak{P}^{(1)}) \cup \ldots \cup K(\mathfrak{P}^{(s)}).$$

Soit g la fonction définie sur $\mathcal{O}_\Omega$ par $g(\mathfrak{P}) = 0$ si $\mathfrak{P} \notin U$ et $g(\mathfrak{P}) = f(\mathfrak{P}^{(i)})$ si $\mathfrak{P} \in K(\mathfrak{P}^{(i)})$. La fonction g remplit les conditions désirées. Il en résulte que $\mathcal{K}'$ est riche dans $\mathcal{K}$. D'autre part, si f est positive il en est de même de g et par suite $\mathcal{K}'$ est positivement riche dans $\mathcal{K}$. D'où le lemme.

On sait alors ([4], chap. III) que toute forme linéaire positive μ définie sur $\mathcal{K}'$ s'étend d'une manière et d'une seule en une mesure de Radon (positive) μ sur $\mathcal{O}_\Omega$.

Soit $\varphi \in \mathcal{K}'$ et K un surcorps fini de k (contenu dans Ω) tel que la fonction φ soit constante sur chaque $K(\mathfrak{P})$. On posera alors :

$$\mu(\varphi) = \frac{1}{[K:k]} \sum_{\mathfrak{P}_K} e_{\mathfrak{P}_K} \varphi(\mathfrak{P}) \operatorname{Log}(N\mathfrak{P}_K). \tag{12}$$

La somme $\sum$ étant étendue à tous les diviseurs de K contenus dans $\mathcal{O}_K$. Pour voir que $\mu(\varphi)$ est indépendant du corps K choisi, il suffit de le vérifier pour un surcorps fini K' de K (contenu dans Ω), ce qui se fait sans peine à partir de la formule (10).

On voit que μ est une forme linéaire positive définie sur $\mathcal{K}'$. On en déduit donc la mesure de Radon μ sur $\mathcal{O}_\Omega$.

On voit que si l'on avait pris pour corps de base, au lieu de k, un surcorps fini k' de k (contenu dans Ω), on aurait obtenu une nouvelle mesure μ' telle que $\mu' = [k':k]\mu$.

Soit x un élément non nul quelconque de Ω. Soient $\mathfrak{P}$ un élément de $\mathcal{O}_\Omega$ et v la valuation que nous lui avons associée au début de ce paragraphe. Si l'on pose $\tilde{x}(\mathfrak{P}) = v(x)$, on obtient une fonction numérique $\tilde{x}$ définie sur $\mathcal{O}_\Omega$. Si K est un surcorps fini de k contenant x et contenu dans Ω, $\tilde{x}$ est constante sur tous les ensembles $K(\mathfrak{P})$ et nulle sur presque tous. Par suite $\tilde{x} \in \mathcal{K}'$.

Quel que soit le diviseur $\mathfrak{P}$ contenu dans $\mathcal{O}_\Omega$ (archimédien ou non), on a alors :

$$e_{\mathfrak{P}_K} \tilde{x}(\mathfrak{P}) \operatorname{Log}(N\mathfrak{P}_K) = -\operatorname{Log} \nu_{\mathfrak{P}_K}(x).$$

Par suite :

$$\mu(\tilde{x}) = -\operatorname{Log} \prod_{\mathfrak{p}_K \in \mathcal{D}_K} v_{\mathfrak{p}_K}(x).$$

La formule d'Artin-Whaples montre donc que :

(13) $$\mu(\tilde{x}) = 0 \quad \text{pour tout } x \neq 0.$$

On a donc le :

THÉORÈME 6. — *Il existe un ensemble localement compact $\mathcal{M}_\Omega$ de valuations deux à deux non équivalentes de Ω (écrites additivement), muni d'une mesure de Radon ayant pour support $\mathcal{M}_\Omega$ telle que pour tout élément x non nul du corps Ω la fonction numérique $\tilde{x} : v \to v(x)$ définie sur $\mathcal{M}_\Omega$ soit continue à support compact et de mesure nulle.*

On vérifie, en effet, sans peine que le support de la mesure précédemment définie est identique à $\mathcal{M}_\Omega$.

4. CARACTÉRISATION DES EXTENSIONS ALGÉBRIQUES DES PF-CORPS. — Soit Ω un corps commutatif vérifiant :

AXIOME 1'. — *Il existe un ensemble localement compact $\mathcal{M}_\Omega$ de valuations (écrites additivement) non triviales inéquivalentes de Ω muni d'une mesure μ positive de support $\mathcal{M}_\Omega$. Pour tout élément x non nul de Ω la fonction numérique $\tilde{x} : v \to v(x)$ définie sur $\mathcal{M}_\Omega$ est continue à support compact et de mesure nulle.*

On désignera par $\mathcal{D}_\Omega$ l'ensemble des diviseurs de Ω définis par les valuations appartenant à $\mathcal{M}_\Omega$.

Désignons par k_0 le sous-ensemble de Ω formé par 0 et par les éléments x de Ω tels que $v(x) \geq 0$ pour tout $v \in \mathcal{M}_\Omega$.

Si $\mathcal{M}_\Omega$ contient une valuation archimédienne v, l'ensemble k_0 n'est pas un corps puisque $1 \in k_0$ et $v(2) < 0$ entraîne $2 \notin k_0$.

Si, par contre, $\mathcal{M}_\Omega$ ne contient pas de valuation archimédienne, alors k_0 est un corps. En effet $x, y \in k_0$ entraîne $x - y \in k_0$ et $xy \in k_0$.

Si $x \neq 0$, la fonction $\tilde{x}$ est positive. Comme $\mu(\tilde{x}) = 0$, on en déduit ([2], chap. III, § 3, prop. 9) que $\tilde{x}$ est nulle sur le support de μ, c'est-à-dire sur $\mathcal{M}_\Omega$. Par suite pour tout $v \in \mathcal{M}_\Omega$ on a $v(x) = 0$ et $1/x \in k_0$. Donc k_0 est un corps.

Le corps k_0 qui est algébriquement clos dans Ω sera dit *corps des constantes*.

K étant un sous-corps de Ω, les symboles v_K et $K(v)$ auront la même signification que précédemment.

On a les lemmes suivants :

LEMME 4. — *Pour tout sous-corps* K *de* Ω *et tout élément* v *de* $\mathcal{M}_\Omega$ *l'ensemble* $K(v)$ *est fermé.*

Supposons $w \in \mathfrak{M}_\Omega$ et $w \notin K(v)$. Par hypothèse, v_K n'est pas équivalente à w_K, donc $\exists x \in K$, avec $w(x) > 0$ et $v(x) < 0$. Comme la fonction $\tilde{x}$ est continue, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de w tel que pour tout $w' \in \mathcal{V}$ on ait $w'(x) > 0$. Puisque pour tout $v' \in K(v)$ on a $v'(x) \leqq 0$, on en déduit que $\mathcal{V} \cap K(v) = \emptyset$. Par suite w n'est pas contenu dans la fermeture de $K(v)$ et $K(v)$ est fermé.

LEMME 5. — *Si* K *est un sous-corps de* Ω *et* v *un élément de* $\mathfrak{M}_\Omega$ *tel que* v_K *ne soit pas la valuation triviale,* $K(v)$ *est compact.*

Soit $x \in K$ tel que $v(x) \neq 0$. L'ensemble $K(v)$ est contenu dans le support de $\tilde{x}$ qui est par hypothèse compact. Comme $K(v)$ est fermé, c'est donc un ensemble compact.

Si $\mathfrak{M}_\Omega$ contient une valuation archimédienne nous dirons que l'on est dans le *cas arithmétique* et sinon que l'on est dans le *cas fonctionnel.* On définit un *sous-corps rationnel* $\mathcal{R}$ de Ω de la façon suivante : Dans le cas arithmétique on prend $\mathcal{R} = \mathrm{Q}$ et dans le cas fonctionnel on prend $\mathcal{R} = k_0(t)$, où t est un élément quelconque de Ω non contenu dans k_0 (et par conséquent transcendant sur k_0). Si K est un sous-corps de Ω contenant k_0 et v une valuation appartenant à $\mathfrak{M}_\Omega$, on peut considérer k_0 comme un sous-corps de $\overline{K}_v$ et par suite la notion de valuation *raisonnable* peut s'étendre à v_K.

Nous aurons à considérer les axiomes suivants :

AXIOME 2′. — *Pour tout sous-corps* K *de* Ω *engendré sur* $\mathcal{R}$ *par un élément* [*soit* $K = \mathcal{R}(x)$], *il existe une valuation* v *de* $\mathfrak{M}_\Omega$ *telle que la valuation* v_K *induite sur* K *soit raisonnable.*

AXIOME 3. — *Pour tout sous-corps* K *de* Ω *engendré sur* $\mathcal{R}$ *par un élément, tout sous-ensemble de la forme* $K(v)$ *est ouvert.*

Nous aurons également à envisager les hypothèses suivantes :

HYPOTHÈSE A. — Ω *est une extension algébrique d'un* PF-*corps qui, dans le cas fonctionnel, admet* k_0 *pour corps des constantes.*

HYPOTHÈSE B. — $\mathcal{D}_\Omega$ *est l'ensemble de tous les diviseurs de* Ω *dans le cas arithmétique et l'ensemble des diviseurs de* Ω *qui induisent sur* k_0 *la valuation triviale dans le cas fonctionnel.*

HYPOTHÈSE C. — *La topologie de* $\mathfrak{M}_\Omega$ *est celle qui est obtenue en prenant pour système fondamental de voisinages de* v *les ensembles de la forme* $K(v)$, *où* K *est un sous-corps de* Ω *engendré sur* k_0 *par un nombre fini d'éléments.*

Il résulte du paragraphe 3 que l'hypothèse A entraîne les axiomes 1′, 2′ et 3. Nous allons montrer que, réciproquement, les axiomes 1′, 2′ et 3 impliquent que Ω vérifie l'hypothèse A. Nous montrerons ensuite que si Ω vérifie l'axiome 1′ et l'hypothèse A, il vérifie les hypothèses B et C.

THÉORÈME 7. — *Si le corps Ω vérifie les axiomes 1', 2' et 3', il vérifie l'hypothèse* A.

Soit Ω vérifiant les axiomes 1', 2' et 3. Il suffit de montrer que Ω est algébrique sur $\mathcal{R}$. Soient donc $a \in \Omega$ et $K = \mathcal{R}(a)$. Soit $v \in \mathfrak{M}_\Omega$. Si x est un élément non nul de K et $\varphi_{K(v)}$ la fonction caractéristique de l'ensemble $K(v)$, comme $\tilde{x}$ est continue et $K(v)$ à la fois ouvert et fermé, $\varphi_{K(v)}x$ est continue à support compact et, par suite, $\mu(\varphi_{K(v)}x) = \int_{K(v)} \tilde{x}\,d\mu = v'(x)$ a un sens. Soit $w \in K(v)$. Comme par définition w_K est équivalente à v_K, il existe un nombre $\lambda(w) > 0$ tel que pour tout élément x non nul de K on ait identiquement $w(x) = \lambda(w)v(x)$ ou $\tilde{x}(w) = \lambda(w)\tilde{x}(v)$. Comme $\tilde{x}$ est une fonction continue et que $x(v)$ ne dépend pas de w, on en déduit que $\lambda(w)$ est aussi une fonction continue de w sur $K(v)$. Par suite, $\lambda = \int_{K(v)} \lambda(w)\,d\mu$ a un sens. Comme $\lambda(v)$ est une fonction positive, que $K(v)$ est un ensemble ouvert non vide et que la mesure μ a pour support $\mathfrak{M}_\Omega$, on en déduit $\lambda > 0$.

On a alors :

$$v'(x) = \int_{K(v)} \tilde{x}\,d\mu = v(x)\int_{K(v)} \lambda(w)\,d\mu = \lambda v(x) = \lambda v_K(x).$$

Soit $(v_\iota)_{\iota \in I}$ un système de représentants des classes $K(v)$. Posons pour tout $\iota \in I$:

$$\int_{K(v_\iota)} \tilde{x}\,d\mu = \lambda_\iota v_\iota(x).$$

Comme x est à support compact et que chaque $K(v_\iota)$ est ouvert, il en résulte que, pour tout $x \neq 0$, on a $v_\iota(x) = 0$ pour tous les indices ι, sauf un nombre fini. L'axiome 1 montre donc que pour un tel x la somme $\sum_{\iota \in I} \lambda_\iota v_\iota(x)$ a un sens et est égale à 0. D'autre part, $(v_\iota)_{\iota \in I}$ ne peut contenir une infinité de valuations archimédiennes [car pour une telle valuation v_ι on a $v_\iota(2) < 0$]. Par suite, en multipliant au besoin tous les λ_ι par un même facteur, on peut supposer que $e^{-\lambda_\iota v_\iota(x)}$ soit une valuation φ_ι de K pour tout indice ι. Comme l'axiome 2' implique qu'il existe une valuation v_ι raisonnable sur K, il résulte des considérations d'Artin et Whaples que K est un PF-corps. On voit, d'autre part, que dans le cas fonctionnel son corps des constantes est k_0. On déduit de là que a est bien algébrique sur $\mathcal{R}$, d'où le théorème.

THÉORÈME 8. — *Si le corps Ω vérifie l'axiome 1' et l'hypothèse* A, *il vérifie les hypothèses* B *et* C.

Nous allons d'abord démontrer le :

LEMME 6. — *Soit Ω vérifiant l'axiome 1' et l'hypothèse* A. *Si* K *est un sous-corps* *de Ω engendré sur $\mathcal{R}$ par un nombre fini d'éléments, chaque ensemble de la forme* K (v) *est ouvert.*

Soit k le PF-corps défini par l'hypothèse A. Dans le cas arithmétique, on a nécessairement $k \supset \mathcal{R}$. Dans le cas fonctionnel, t est par hypothèse algébrique sur k et, par suite, dans tous les cas, le corps K′ engendré par la réunion de k et de K est de degré fini sur k. Comme chaque K(v) est réunion d'ensembles de la forme K′(w), il suffit de montrer que chaque K′(w) est ouvert. On peut donc supposer dans la démonstration du lemme que K est un surcorps de k. Comme K est alors une extension algébrique finie de k, c'est un PF-corps. Dans le cas fonctionnel, son corps des constantes K_0 est la clôture algébrique dans K du corps des constantes k_0 de k. Donc $K_0 = k_0$ puisque k_0 est algébriquement clos dans Ω.

Soit $(v_\iota)_{\iota \in I}$ un système de représentants des classes K(v). Une valuation v_ι ne peut s'annuler identiquement sur K, sans cela elle s'annulerait aussi identiquement sur Ω qui est algébrique sur K.

Comme v_ι s'annule identiquement sur k_0 dans le cas fonctionnel, on déduit de la structure des PF-corps que pour tout élément non nul x de K, tous les $v_\iota(x)$ sont nuls sauf un nombre fini.

Soit v un élément quelconque de $\mathcal{M}_\Omega$, v_α le représentant de la classe K(v) et x un élément de K tel que $v_\alpha(x) > 0$. Il existe des indices en nombre fini $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tels que $v_{\alpha_i}(x) > 0 \, (1 \leqq i \leqq n)$ et $w \notin \bigcup_{1 \leqq i \leqq n} K(v_{\alpha_i}) = A$ entraine $w(x) \leqq 0$. Comme $\tilde{x}$ est continue, A est un ensemble ouvert. On a $\alpha \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Par exemple $\alpha = \alpha_1$.

En vertu de l'indépendance sur K des valuations v_{α_i}, il existe un élément y de K tel que $v_\alpha(y) = v_{\alpha_1}(y) > 0$ et $v_{\alpha_i}(y) \leqq 0$ pour $2 \leqq i \leqq n$. Soient $\beta_1, \ldots, \beta_m$ les indices tels que $v_{\beta_j}(y) > 0 \, (1 \leqq j \leqq m)$ et $w(y) \leqq 0$ si $w \notin \bigcup_{1 \leqq j \leqq m} K(v_{\beta_j}) = B$. Comme y est continue, B est un ensemble ouvert. Donc $A \cap B = K(v_\alpha) = K(v)$ est aussi ouvert, d'où le lemme.

Il résulte du lemme 6 que si K est un sous-corps de Ω engendré sur $\mathcal{R}$ par un nombre fini d'éléments et si x est un élément de K différent de zéro, la mesure $\int_{K(v)} \tilde{x}\, d\mu = w(x)$ a un sens et l'on voit, comme dans la démonstration du théorème 8, que $w(x)$ est une valuation de K équivalente à v_K.

Si les $(v_\iota)_{\iota \in I}$ forment un système de représentants des classes K(v), on voit comme précédemment que l'on obtient une relation de la forme $\sum_\iota \lambda_\iota v_\iota(x) = 0$ pour tout $x \in K$. Comme K est un PF-corps et que dans le cas fonctionnel toutes les valuations considérées s'annulent sur le corps des constantes, il résulte du lemme 6 de [2] que toute valuation de K (s'annulant sur k_0 dans le cas fonctionnel) est équivalente à une des valuations $(\varphi_\iota)_K$. D'où :

Lemme 7. — *Si* Ω *vérifie l'axiome* 1′ *et l'hypothèse* A, *et si* K *est un sous-corps de* Ω *engendré sur* $\mathcal{R}$ *par un nombre fini d'éléments, l'ensemble* $\mathcal{D}_K$ *des diviseurs de* K *divisés par les éléments de* $\mathcal{D}_\Omega$ *est constitué par l'ensemble de tous les diviseurs de* K (*qui, dans le cas fonctionnel, définissent sur* k_0 *la valuation nulle*).

Ceci posé nous sommes en mesure de démontrer le théorème 8.

Désignons par $\mathcal{D}'_\Omega$ l'ensemble de tous les diviseurs de Ω (dans le cas fonctionnel : qui définissent sur k_0 la valuation nulle). Soit $\mathcal{T}'$ la topologie définie sur cet ensemble à partir du PF-corps k selon le procédé exposé au paragraphe 3. Soit $\mathcal{T}$ la topologie donnée sur $\mathcal{D}_\Omega$. Il faut montrer que $\mathcal{D}_\Omega = \mathcal{D}'_\Omega$ et $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$.

$\mathcal{D}_\Omega$ est un sous-ensemble de $\mathcal{D}'_\Omega$. Le lemme 6 montre que la topologie $\mathcal{T}$ est plus fine que la topologie induite sur $\mathcal{D}_\Omega$ par $\mathcal{T}'$. Soit K un sous-corps de Ω engendré sur k par un nombre fini d'éléments. Si $\mathfrak{P} \in \mathcal{D}_\Omega$, d'après le lemme 5 $k(\mathfrak{P})$ est compact pour la topologie $\mathcal{T}$. La topologie $\mathcal{T}'$ induisant sur $K(\mathfrak{P})$ une topologie séparée et moins fine induit la topologie identique (*Voir* N. Bourbaki, *Topologie générale*, chap. I, § 10).

Désignons par $K'(\mathfrak{P})$ l'ensemble des diviseurs appartenant à $\mathcal{D}'_\Omega$ et induisant sur K le diviseur $\mathfrak{P}_K$. Montrons que $K(\mathfrak{P})$ est dense dans $K'(\mathfrak{P})$ (pour la topologie $\mathcal{T}'$) : Soit $\mathfrak{Q} \in K'(\mathfrak{P})$ et un voisinage $\mathcal{V}$ de $\mathfrak{Q}$ (pour $\mathcal{T}'$). Ce voisinage contient un ensemble de la forme $K'_1(\mathfrak{Q})$, où K_1 est une extension de degré fini de K. En vertu du lemme 7 il existe $\mathfrak{P}' \in \mathcal{D}_\Omega \cap K'_1(\mathfrak{Q})$. Donc $\mathcal{V} \cap K(\mathfrak{P}) \neq \emptyset$. Par suite $K(\mathfrak{P})$ est dense dans $K'(\mathfrak{P})$. Mais $K(\mathfrak{P})$, étant compact, est fermé et

$$K(\mathfrak{P}) = K'(\mathfrak{P}).$$

Or $\mathcal{D}_\Omega$ est la somme topologique des espaces $K(\mathfrak{P})$ $(\mathfrak{P} \in \mathcal{D}_\Omega)$, $\mathcal{D}'_\Omega$ est la somme topologique des espaces $K'(\mathfrak{Q})$ $(\mathfrak{Q} \in \mathcal{D}'_\Omega)$. Comme, en vertu du lemme 7, tout ensemble $K'(\mathfrak{Q})$ $(\mathfrak{Q} \in \mathcal{D}'_\Omega)$ contient un ensemble de la forme $K(\mathfrak{P})$ $(\mathfrak{P} \in \mathcal{D}_\Omega)$, l'identité topologique de $K'(\mathfrak{P})$ et $K(\mathfrak{P})$ entraîne $\mathcal{D}_\Omega = \mathcal{D}'_\Omega$ et $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$. D'où le théorème.

Soit Ω une extension algébrique quelconque d'un PF-corps k (avec extension possible du corps des constantes dans le cas fonctionnel). Dans le cas arithmétique, le théorème 8 montre qu'il n'y a qu'un seul ensemble possible $\mathcal{D}_\Omega$ de diviseurs de Ω et une seule topologie possible sur cet ensemble correspondant à un ensemble de valuations vérifiant l'axiome 1′. Il en est de même dans le cas fonctionnel. En effet soit $\mathcal{D}_\Omega$ un tel espace de diviseurs, k_0 et Ω_0 les corps de constantes respectifs de k et Ω. Soit t un élément de k transcendant sur k_0. Le corps k, et par suite Ω, est algébrique sur $k_0(t)$. Puisque t est aussi transcendant sur Ω_0, le corps $\Omega_0(t)$ est aussi un PF-corps (avec corps des constantes Ω_0) qui contient $k_0(t)$. Donc Ω est une extension algébrique de $\Omega_0(t)$ et le théorème 8 montre alors que l'espace $\mathcal{D}_\Omega$ est bien déterminé. D'où :

COROLLAIRE. — *Ω étant une extension algébrique d'un* PF-*corps k et $\mathfrak{M}_\Omega$ un espace de valuations de Ω vérifiant l'axiome* 1′, *l'espace correspondant $\mathcal{D}_\Omega$ de diviseurs de Ω est parfaitement déterminé. Il est constitué par tous les diviseurs de Ω induisant sur k un des diviseurs intervenant dans la formule du produit, sa topologie étant celle décrite au paragraphe* 3.

Existe-t-il des corps qui vérifient les axiomes 1′ et 2′ sans vérifier l'hypothèse A ?

On peut aussi se demander si dans l'énoncé du théorème 7 on peut remplacer l'axiome 2′ par la condition suivante :

AXIOME 2″. — *Il existe une valuation v appartenant à $\mathfrak{M}_\Omega$ et vérifiant l'une des trois propriétés suivantes :*

1° *v est archimédienne;*

2° *v est rationnelle et $\overline{\Omega}_v$ est une extension algébrique de son corps premier qui a une caractéristique nulle;*

3° *v est rationnelle et $\overline{\Omega}_v$ est une extension algébrique du corps des constantes k_0.*

On peut même se demander si les axiomes 1′ et 2″ suffisent à entraîner l'hypothèse A.

Remarque. — Artin et Whaples [3] ont montré que pour caractériser un PF-corps on peut remplacer l'axiome 1 par l'axiome moins fort 1*.

AXIOME 1*. — *Il existe un ensemble $\mathfrak{M}_k = (\varphi_\iota)_{\iota \in I}$ de valuations non triviales inéquivalentes de k tel que pour tout élément x non nul de k le produit $\prod_\iota \varphi_\iota(x)$ converge absolument vers la limite* 1.

Parallèlement, et en se basant sur cette dernière caractérisation des PF-corps, on vérifie sans peine que l'on peut dans l'énoncé du théorème 7 remplacer l'axiome 1′ par l'axiome moins fort 1′* :

AXIOME 1′*. — *Il existe un ensemble localement compact de valuations (écrites additivement) non triviales inéquivalentes de Ω muni d'une mesure μ positive dont le support est identique à $\mathfrak{M}_\Omega$. Pour tout élément x non nul du corps Ω la fonction numérique*

$$\tilde{x} : v \to v(x)$$

définie sur $\mathfrak{M}_\Omega$ est continue, telle que l'intégrale $\int \tilde{x}\, d\mu$ ait un sens et soit nulle.

La démonstration du théorème qui généralise le théorème 7 montre alors que pour tout $x \in \mathfrak{M}_\Omega$ la fonction $\tilde{x}$ est à support compact.

5. Borne supérieure de l'ordre d'un sous-ensemble de Ω. — Soit k un PF-corps, Ω une extension algébrique de k (dans le cas fonctionnel on supposera qu'il n'y ait pas d'extension du corps des constantes), $\mathcal{M}_\Omega$ l'ensemble localement compact mesuré des valuations de Ω défini au paragraphe 3. Soit ξ une fonction numérique continue à support compact définie sur $\mathcal{M}_\Omega$ et S le sous-ensemble de Ω défini par :

$$x \in S \rightleftharpoons \{x = 0 \text{ ou } v(x) \geqq \xi(v) \quad \text{pour tout } v \in \mathcal{M}_\Omega\}$$

(en notation additive).

S n'est jamais vide puisque $0 \in S$. Dans le cas fonctionnel on voit que S est un espace vectoriel sur le corps k_0 des constantes. K étant une extension finie de k contenue dans Ω, on va donner dans ce qui suit une borne supérieure de l'ordre de $S \cap K$.

On posera

$$\mathcal{V}(\xi) = e^{-\int \xi \, d\mu}.$$

Théorème 9. — $\mathcal{V}(\xi) < 1$ *entraîne que* S *se compose du seul élément* 0.

En effet, si $S \ni x \neq 0$, on a $\tilde{x} \geqq \xi$ et, par suite,

$$0 = \int \tilde{x} \, d\mu \geqq \int \xi \, d\mu \quad \text{et} \quad \mathcal{V}(\xi) \geqq 1.$$

$\mathfrak{P}$ étant un élément de $\mathcal{O}_\Omega$ et $v_{\mathfrak{P}}$ la valuation correspondante de $\mathcal{M}_\Omega$, pour tout $x \in \Omega$ on posera

$$|x|_{\mathfrak{P}} = e^{-\log v_{\mathfrak{P}}(x)}.$$

Ceci posé, soit S′ un sous-ensemble de Ω qui soit d'ordre fini $M > 1$, c'est-à-dire composé d'un nombre fini d'éléments dans le cas arithmétique et qui soit un espace vectoriel de dimension finie sur k_0 dans le cas fonctionnel. On supposera de plus que pour tout $x \in S'$ on ait $\tilde{x} \geqq \xi$. On peut trouver une extension de degré fini K de k contenue dans Ω et contenant S′. Soit $\mathfrak{Q}$ un diviseur non archimédien arbitraire contenu dans $\mathcal{O}_\Omega$. Étant donné que pour $\mathfrak{P}$ contenu dans $K(\mathfrak{Q})$ et tout $x \in K$ on a $|x|_{\mathfrak{P}} = |x|_{\mathfrak{Q}}$, il résulte du paragraphe 3 de [2] qu'il existe un certain élément θ non nul qui est élément de S ou différence de deux éléments de S et tel que pour tout $\mathfrak{P} \in K(\mathfrak{Q})$ on ait :

$$|\theta|_{\mathfrak{P}} \leqq \frac{A_{\mathfrak{Q}_K} e^{-\operatorname{Log} \xi(\mathfrak{P})}}{M^{\rho(\mathfrak{Q}_K)}},$$

avec :

$$A_{\mathfrak{Q}_K} = (N_{\mathfrak{Q}_K})^{\rho(\mathfrak{Q}_K)} \quad \text{et} \quad \rho(\mathfrak{Q}_K) = \frac{\operatorname{Log} |\theta|_{\mathfrak{b}}}{\operatorname{Log} v_{\mathfrak{Q}_K}(\theta)}$$

Soit l la constante du corps k définie par $N\mathfrak{Q}_K = l^{f_{\mathfrak{Q}_K}}$, $f_{\mathfrak{Q}_K}$ étant le degré d'inertie $[\overline{K}_{\mathfrak{Q}} : \overline{k}_{\mathfrak{Q}}]$.

l est égal au nombre d'élément du corps résiduel $\bar{k}_{\mathfrak{Q}}$ si ce dernier est fini et à la constante arbitraire du corps (qui sert à définir la norme) élevée à la puissance $[\bar{k}_{\mathfrak{Q}}:\bar{k}_0]$ si k_0 est un corps infini. Pour tout $\mathfrak{P}\in K(\mathfrak{Q})$ on a

$$\tilde{\theta}(\mathfrak{P})=\tilde{\theta}(\mathfrak{Q})=\frac{1}{e_{\mathfrak{Q}_K}}\operatorname{ord}_{\mathfrak{Q}_K}\theta.$$

Or $\nu_{\mathfrak{Q}_K}(\theta)=(N\mathfrak{Q}_K)^{-\operatorname{ord}\mathfrak{Q}_K}$ entraîne

$$-\operatorname{Log}\nu_{\mathfrak{Q}_K}(\theta)=\operatorname{ord}_{\mathfrak{Q}_K}\theta f_{\mathfrak{Q}_K}\operatorname{Log} l,$$

d'où

$$\rho(\mathfrak{Q}_K)=\frac{1}{e_{\mathfrak{Q}_K}f_{\mathfrak{Q}_K}\operatorname{Log} l}.$$

En particulier :

$$A_{\mathfrak{Q}_K}=l^{\frac{1}{e_{\mathfrak{Q}_K}\operatorname{Log} l}}=e^{\frac{1}{e_{\mathfrak{Q}_K}}}.$$

Donc pour tout $\mathfrak{P}\in K(\mathfrak{Q})$:

$$\tilde{\theta}(\mathfrak{P})\geqq-\operatorname{Log}A_{\mathfrak{Q}_K}+\xi(\mathfrak{P})+\rho(\mathfrak{Q}_K)\operatorname{Log}M=-\frac{1}{e_{\mathfrak{Q}_K}}+\xi(\mathfrak{P})+\frac{\operatorname{Log}M}{e_{\mathfrak{Q}_K}f_{\mathfrak{Q}_K}\operatorname{Log} l}$$

et pour tout $\mathfrak{P}\notin K(\mathfrak{Q})$:

$$\tilde{\theta}(\mathfrak{P})\geqq\xi(\mathfrak{P}).$$

D'où, en tenant compte que $K(\mathfrak{Q})$ est un ensemble ouvert et fermé,

$$\int\tilde{\theta}(\mathfrak{P})\,d\mu\geqq\int\xi(\mathfrak{P})\,d\mu-\frac{1}{e_{\mathfrak{Q}_K}}\int_{K(\mathfrak{Q})}d\mu+\frac{\operatorname{Log}M}{e_{\mathfrak{Q}_K}f_{\mathfrak{Q}_K}\operatorname{Log} l}\int_{K(\mathfrak{Q})}d\mu.$$

Or, en vertu de la formule (12) :

$$\int_{K(\mathfrak{Q})}d\mu=\frac{1}{[K:k]}e_{\mathfrak{Q}_K}\operatorname{Log}(N_{\mathfrak{Q}_K})=\frac{1}{[K:k]}e_{\mathfrak{Q}_K}f_{\mathfrak{Q}_K}\operatorname{Log} l.$$

On en déduit en tenant compte de (13) :

$$0\geqq\int\xi(\mathfrak{P})\,d\mu-\frac{f_{\mathfrak{Q}_K}\operatorname{Log} l}{[K:k]}+\frac{\operatorname{Log}M}{[K:k]}$$

ou

$$1\leqq\left(\frac{N\mathfrak{Q}_K}{M}\right)^{\frac{1}{[K:k]}}\mathcal{V}(\xi).$$

C'est-à-dire :

$$M\leqq l^{f_{\mathfrak{Q}_K}}\mathcal{V}(\xi)^{[K:k]}$$

et, comme on a toujours $l>1$ et $f_{\mathfrak{Q}_K}\leqq[K:k]$:

$$M\leqq l^{[K:k]}\mathcal{V}(\xi)^{[K:k]}. \tag{14}$$

D'où :

THÉORÈME 10. — *Il existe une constante l du corps k telle que pour toute fonction* *numérique* ξ *continue à support compact définie sur* $\mathfrak{M}_\Omega$ *et toute extension de degré fini* K *de* k *contenu dans* Ω, *l'ordre* M *du sous-ensemble formé par tous les éléments* x *de* K *tel que* $\tilde{x} \geqq \xi$ *vérifie la formule* (14).

Remarque. — Dans la démonstration du théorème 10, l'hypothèse que la fonction ξ soit continue à support compact ne sert qu'à travers les résultats suivants :

1° $\int_E \xi\, d\mu$ est définie si E est un ensemble ouvert et, dans le cas où E est à la fois ouvert et fermé on a :

$$\int \xi\, d\mu = \int_E \xi\, d\mu + \int_{\complement E} \xi\, d\mu;$$

2° Si ψ est une fonction continue à support compact telle que $\psi \geqq \xi$, on a pour tout ouvert E :

$$\int_E \psi\, d\mu \geqq \int_E \xi\, d\mu.$$

Le théorème 10 restera donc valable pour toutes les fonctions vérifiant des deux propriétés. On pourra envisager en particulier des fonctions qui peuvent prendre la valeur $-\infty$ et des fonctions continues qui ne soient plus à support compact mais telles cependant que $\int \xi\, d\mu$ ait un sens.

Il serait intéressant de trouver une borne inférieure de M. Mais si, dans le cas de la borne supérieure, les calculs d'Artin et Whaples peuvent se généraliser à une extension infinie, il semble par contre très difficile de faire cette généralisation dans le cas de la borne inférieure.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] E. Artin, *Algebraic Numbers and algebraic Functions*, I [Notes miméographiées d'un Cours fait à l'Université de Princeton (1950-1951), New-York (1951)].

[2] E. Artin et G. Whaples, *Axiomatic characterization of fields by the product formula for valuations* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 51, 1945, p. 469-492).

[3] E. Artin et G. Whaples, *A note on axiomatic characterization of fields* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 52, 1946, p. 245-247).

[4] N. Bourbaki, *Intégration*, Paris, 1952.

[5] W. Krull, *Idealtheorie in unendlichen algebraischen Zahlkörpern*, II (*Math. Zeit.*, t. 31, 1950, p. 527-557).