Annales scientifiques de l'É.N.S.

Paul Lévy

Complément à l'étude des processus de Markoff

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 69 (1952), p. 203-212

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1952_3_69__203_0>

COMPLÉMENT A L'ÉTUDE

DES

PROCESSUS DE MARKOFF

PAR M. PAUL LÉVY.

1. Le présent travail est un complément à notre récent Mémoire sur le même sujet (¹). Rappelons qu'il s'agissait de l'étude de systèmes ayant une infinité d'états possibles $A_h (h = 0, 1, 2, \ldots)$, et soumis à une évolution markovienne et stationnaire. Nous avions distingué sept types de processus possibles. Les deux derniers sont caractérisés, l'un par l'intervention de probabilités de passage $P_{h,k}(t)$ non mesurables, l'autre par l'existence possible d'ensembles E_h non mesurables (E_h étant l'ensemble des instants t où l'état A_h est réalisé). Nous nous bornerons ici aux cinq premiers, dans l'étude desquels n'interviennent que des éléments mesurables, et nous nous intéresserons surtout au cinquième, caractérisé par l'existence d'au moins un état *instantané*, que nous supposerons être A_0, auquel corresponde un ensemble E_0 mesurable et de mesure presque sûrement positive (²).

Nous nous proposons d'étudier l'évolution du système en prenant comme

(¹) *Systèmes markoviens et stationnaires. Cas dénombrable* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, t. 68, 1951, p. 327-381).

Corrigeons ici une erreur de rédaction de la page 377. L'axiome de Zermelo y est appliqué au choix d'un point t' appartenant à un intervalle i et à l'ensemble aléatoire E_0. Il faut ensuite égaler $P_{h,k}(t)$, non à $P_{0,k}(t-t')$, mais à sa valeur probable. Plus exactement, pour éviter de se demander si t' a le caractère de mesurabilité d'une variable aléatoire, il faut remarquer que $P_{h,k}(t)$ a le caractère d'une moyenne, nécessairement comprise entre les valeurs extrêmes de $P_{0,k}(t-t')$ quand t' varie dans i. Cela suffit pour la conclusion énoncée.

(²) Si la mesure de E_0 était nulle, A_0 serait ce que nous appelons un état fictif. Tous les $P_{h,0}(t)$ étant identiquement nuls, il n'y aurait aucune raison de considérer cet état comme possible. Rappelons que l'état A_0 est dit *instantané* si E_0 ne peut comprendre aucun intervalle.

variable le temps τ passé dans l'état A_0. Le choix de cette variable implique évidemment l'exclusion des deux derniers types. Le temps $t-\tau=X(\tau)$ passé dans les autres états croît alors par sauts, chacun de ces sauts correspondant à une succession d'états autres que A_0. Nous commencerons par développer les conséquences d'une remarque bien simple : le temps $t_h=t_h(\tau)$ passé dans un état A_h peut s'étudier indépendamment des états autres que A_0 et A_h. Nous préciserons ensuite les propriétés de la fonction $X(\tau)$ dont le caractère de fonction aléatoire additive a déjà été indiqué dans notre précédent Mémoire. Il est bien évident que la définition de cette seule fonction ne suffit pas à définir le processus ; nous montrerons qu'elle donne tout de même des renseignements assez précis, concernant notamment les coefficients μ_k (μ_k est la durée probable de chaque séjour du système dans l'état A_k).

2. Désignons par τ le temps passé dans l'état A_0, pendant l'intervalle de temps (t_0, t). Nous supposerons qu'à l'instant initial t_0 le système soit dans l'état A_0. Il résulte évidemment de l'hypothèse que le processus soit markovien et stationnaire que, de t_0 à l'instant t où τ atteint une valeur donnée, le nombre probable des intervalles constituant le complément E'_0 de E_0, et au cours desquels un état $A_k (k\neq 0)$ est réalisé, est de la forme $\lambda_{0,k}\tau$. Leur nombre réel est une variable de Poisson, et la valeur τ_k de τ qui correspond à la première réalisation de l'état A_k est de la forme

$$\tau_k=\mu_{0,k}U, \tag{1}$$

U désignant une variable aléatoire du type défini par la formule

$$\Pr(U>u)=e^{-u} \qquad (u>0), \tag{2}$$

et $\mu_{0,k}$ désignant $\frac{1}{\lambda_{0,k}}$; quels que soient les indices, les lettres λ et μ désigneront toujours deux nombres inverses l'un de l'autre.

Il faut remarquer que $\lambda_{0,k}$ n'est nul que si le passage de A_0 à A_k n'est pas possible. Le cas $\lambda_{0,k}=\infty$ est exclu par suite des hypothèses faites au n° 1. Donc, si A_0 et A_k appartiennent à un même groupe, $\lambda_{0,k}$ et son inverse $\mu_{0,k}$ sont tous les deux positifs et finis.

Si l'état A_0 n'est pas instantané, on a

$$\lambda_{0,k}=\lambda_0\beta_{0,k}, \tag{3}$$

$\lambda_0\,dt$ étant, à $o(dt)$ près, la probabilité que le système quitte cet état en un temps dt, et $\beta_{0,k}$ désignant la probabilité que, s'il le quitte, il n'y revienne qu'après avoir pris au moins une fois l'état A_k. Alors τ_k est la longueur totale de N intervalles, appartenant à E_0, et dont chacun a une durée de la forme $\mu_0 U_\nu$ (U_ν dépend de la même loi que U); le nombre N est lui-même aléatoire et défini par la formule

$$\Pr(N=p)=\beta_{0,k}(1-\beta_{0,k})^{p-1} \qquad (p=1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Il est facile de retrouver la formule (1) en partant de cette décomposition de τ_k. Mais ce sur quoi il nous a paru utile d'attirer l'attention, c'est que cela n'est pas nécessaire et que le résultat subsiste si l'état A_0 est instantané.

3. Indiquons brièvement quelques conséquences de la formule (1), qui s'applique naturellement à n'importe quel état A_h aussi bien qu'à A_0, $\mu_{0,k}$ devant seulement être remplacé par $\mu_{h,k}$. Considérons deux états, par exemple A_0 et A_1, et désignons par τ et τ' les temps passés respectivement dans ces deux états. Nous supposerons essentiellement qu'ils appartiennent à un même *groupe ergodique*, c'est-à-dire que, presque sûrement, τ et τ' augmentent indéfiniment avec t.

Pour comparer les croissances de τ et τ', nous pouvons faire abstraction du temps passé dans les états autres que A_0 et A_1. Nous sommes ainsi ramenés à l'étude d'un processus auxiliaire dans lequel ces deux états alternent, les durées des séjours dans l'état A_0 étant de la forme $\mu_{0,1}U_1$, $\mu_{0,1}U_2$, ..., tandis que pour l'état A_1 on aura $\mu_{1,0}U'_1$, $\mu_{1,0}U'_2$, ... Par suite, après n alternances, les valeurs de τ et τ' seront comparables respectivement à $\mu_{0,1}n$ et $\mu_{1,0}n$, les écarts étant $O(\sqrt{n})$ en probabilité, et presque sûrement $O(\sqrt{n\log\log n})$. Il en résulte que : *presque sûrement, le rapport* $\frac{\tau'}{\tau}$ *tend, pour t infini, vers la limite*

$$\frac{\mu_{1,0}}{\mu_{0,1}}=\frac{\lambda_{0,1}}{\lambda_{1,0}}.$$

On voit ainsi que ce théorème, établi dans notre précédent Mémoire pour les systèmes sans états instantanés, c'est-à-dire pour les processus des quatre premiers types, s'applique d'une manière générale aux processus des cinq premiers types. Il en est de même des bornes supérieures presque sûres des écarts entre $\frac{\tau'}{\tau}$ et cette limite, que l'on déduit de la loi du logarithme itéré. Les remarques relatives à la distinction entre les processus faiblement et fortement ergodiques subsistent aussi.

4. Considérons maintenant un cas particulier important, celui d'un système qui, après chaque état A_h autre que A_0, revient nécessairement directement à l'état A_0. On a alors évidemment

$$\lambda_0=\Sigma\lambda_{0,k} \qquad (k\neq 0), \tag{5}$$

et l'on peut étudier indépendamment les uns des autres les points qui, sur l'échelle des τ, marquent les réalisations des différents états A_k. Les durées de ces réalisations dépendant des coefficients μ_k, le processus est bien défini par les coefficients $\lambda_{0,k}$ et μ_k, nécessairement tous positifs et finis. Si la série (5) est convergente, on a manifestement un processus du premier type

(type fini). Étudions le cas où elle est divergente; λ_0 est infini, et l'état A_0 est instantané. Puisque nous avons supposé E_0 de mesure presque sûrement positive, il faut que les événements qui doivent avoir lieu pendant que le système passe un temps τ dans l'état A_0 aient lieu en un temps presque sûrement fini. La valeur probable du temps passé dans l'état A_k étant $\lambda_{0,k}\mu_k\tau$, on voit qu'il suffit, pour que les μ_k soient acceptables, que la série $\Sigma\lambda_{0,k}\mu_h$ soit convergente.

Mais cela n'est pas nécessaire. S'il existe une suite partielle d'indices k_ν tels que la somme $\Sigma\lambda_{0,k_\nu}$ soit finie, les états correspondants ne seront presque sûrement, tous ensemble, réalisés qu'un nombre fini de fois (pour une valeur finie de τ), et les valeurs correspondantes des μ_k sont sans importance. On voit donc que : pour que, les $\lambda_{0,k}$ étant préalablement donnés et de somme infinie, les μ_k soient acceptables, il suffit que la somme

$$S = \Sigma\lambda_{0,k}\,\mathrm{Min}(1,\ \mu_k) \tag{6}$$

soit finie. Cette condition est aussi nécessaire, et l'on a, dans ces conditions, un exemple simple de processus du cinquième type.

Au lieu de la somme (6), on peut considérer la somme

$$S' = \Sigma\lambda_{0,k}\frac{\mu_k}{1+\mu_k}, \tag{6'}$$

qui est finie ou infinie en même temps que S.

Désignons maintenant par $t_k = t_k(\tau)$ le temps passé dans l'état A_k, et par

$$t-\tau = \sum_1^\infty t_k = X(\tau) \tag{7}$$

le temps total passé dans les états autres que A_0, pendant que le temps passé dans l'état A_0 est τ. $X(\tau)$ est une fonction additive, ne croissant que par sauts, et la probabilité d'un saut supérieur à $x\,(x > 0)$ pendant que τ varie de $d\tau$ est

$$\mathcal{F}(x)\,d\tau = d\tau\sum_1^\infty \lambda_{0,k}e^{-\lambda_k x}.$$

On sait que dans ces conditions la fonction additive $X(\tau)$ est bien définie par la formule

$$\log E[e^{izX(\tau)}] = \tau\int_0^\infty (e^{izx}-1)\,F(x)\,dx, \tag{8}$$

où

$$F(x) = -\mathcal{F}'(x) = \sum_1^\infty \lambda_k\lambda_{0,k}e^{-\lambda_k x}. \tag{9}$$

On remarque qu'en vertu des hypothèses faites sur les séries (5) et (6),

$F(x)$ et $\mathcal{F}(x)$ sont bien définis pour tout $x > 0$, mais augmentent indéfiniment quand $x \downarrow 0$.

Remarquons d'autre part que, la fonction $F(x)$ n'admettant qu'une représentation de la forme (8) : *la donnée de cette fonction, qui équivaut à celle de la fonction caractéristique de* $X(1)$, *suffit, si tous les* λ_k *sont distincts, à déterminer complètement la loi de l'évolution du système étudié.* On peut d'ailleurs toujours convenir de considérer comme indiscernables deux états qui auraient la même vie moyenne μ_k, de sorte que, grâce à cette convention (analogue à celle sur laquelle repose la statistique de Fermi), on peut toujours considérer le processus comme bien défini par la donnée de $F(x)$ (3).

Remarquons enfin que l'*image moyenne* de $X(\tau)$, obtenue en remplaçant chaque saut $\mu_k U$ par sa valeur probable μ_k, est aussi une fonction additive $N(\tau)$ définie par

$$\log E[e^{izN(\tau)}] = \tau \Sigma \lambda_{0,k}(e^{i\mu_k z} - 1). \tag{10}$$

Cette fonction une fois obtenue, on peut représenter $X(\tau)$ par la formule

$$X(\tau) = \int_0^\tau U(\theta)\, dN(\theta), \tag{11}$$

où les $U(\theta)$ sont des variables aléatoires du type (1), toutes indépendantes les unes des autres. La fonction $N(t)$ ne croissant que par sauts, il n'y a jamais à faire intervenir qu'une infinité dénombrable de valeurs de $U(t)$, et l'intégrale (11) est en réalité une série presque sûrement convergente.

5. Revenons maintenant au cas général, les seules hypothèses étant celles indiquées au n° 1. La fonction $X(\tau)$ sera toujours définie par la formule (7). C'est une fonction additive, ne croissant que par sauts, et comme la durée de chaque type de saut possible est une variable aléatoire absolument continue, elle est du type (8); mais l'expression (9) de la fonction $F(x)$ doit être modifiée, pour tenir compte des sauts pendant lesquels plusieurs états A_k, où même une infinité, sont réalisés.

Nous dirons que le *type* d'un saut est défini lorsqu'on connaît les nombres n_k des réalisations des différents états A_k; sa durée totale T dépend d'une loi bien définie par la suite des n_k, et par ceux des μ_k qui correspondent aux n_k positifs. La fonction caractéristique de T est le produit

$$\varphi(z) = \Pi(1 - i\mu_k z)^{-n_k} \quad (4). \tag{12}$$

(3) Cela n'empêche pas que la même fonction $F(x)$ peut, comme nous le verrons, être obtenue pour d'autres processus, mais qui ne sont pas du type étudié dans ce paragraphe.

(4) On remarque qu'en caractérisant chaque espèce de saut par la fonction $\varphi(z)$ qui lui est associée, on ne peut, ni distinguer deux états ayant la même durée probable μ_k, ni tenir compte de l'ordre dans lequel les différents états se succèdent. Remarquons toutefois que, si nous connaissons

Ce produit peut être fini ou infini; mais la condition pour qu'une suite d'exposants n_k soit acceptable est qu'il soit convergent; il faut et il suffit pour cela que la série $\Sigma n_k \mu_k$ soit convergente; sa somme est alors la durée probable du saut. La densité de probabilité correspondante est le produit de composition

$$(13) \qquad f(x) = \prod_k{}^{\star} \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \qquad (\lambda = \lambda_k,\ n = n_k).$$

Si $N = \Sigma n_k$ est fini, la décomposition de $\varphi(z)$ en éléments rationnels simples conduit aisément à une formule de la forme

$$(14) \qquad f(x) = \Sigma P_k(x)\, e^{-\lambda_k x},$$

où les $P_k(x)$ sont des polynomes. On voit bien ainsi la nature analytique de $f(x)$. Mais il faut remarquer qu'il peut y avoir des coefficients négatifs. Ainsi on a

$$(15) \qquad e^{-\lambda_1 x} \star e^{-\lambda_2 x} = \frac{e^{-\lambda_1 x} - e^{-\lambda_2 x}}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

6. Pour former $F(x)$, considérons d'abord le cas où il y a un nombre fini ou une infinité dénombrable de types de sauts possibles. Chacun d'eux étant désigné par un indice ν, et λ'_ν désignant le nombre probable de ses réalisations dans l'intervalle $0 < \tau < 1$, on a

$$(16) \qquad F(x) = \Sigma \lambda'_\nu f_\nu(x).$$

La condition pour que les données soient acceptables est d'ailleurs analogue à la condition $S < \infty$ du n° 4, mais au lieu des fréquences $\lambda_{0,k}$ des différents états, il faut considérer les fréquences λ'_ν des différents types de sauts, et au lieu des μ_k, il faut considérer les durées probables

$$l_\nu = \Sigma n_k \mu_k$$

de ces types. On peut alors écrire cette condition sous la forme

$$(17) \qquad \Sigma' \lambda'_\nu l_\nu + \Sigma'' \lambda'_\nu < \infty,$$

Σ' et Σ'' désignant respectivement des sommes étendues aux indices ν pour lesquels $l_\nu \leqq 1$ ou $l_\nu > 1$. D'ailleurs la condition nécessaire et suffisante pour que

---

toutes les fonctions $\varphi(z)$ qui interviennent dans l'étude du processus, cela peut permettre certaines conclusions. Ainsi, si l'état A_1 peut être réalisé deux fois, il peut aussi, quel que soit n, l'être n fois; si donc nous trouvons μ_1 associé à l'exposant 2, sans qu'il le soit jamais à un exposant plus élevé, c'est qu'il existe un autre état, A_2 par exemple, tel que $\mu_2 = \mu_1$. Alors en faisant abstraction des autres états, une et une seule des successions $A_1 A_2$ et $A_2 A_1$ est possible, mais nous ne savons pas laquelle des deux (si les deux l'étaient, le retour de A_1 à A_1 serait possible, sans retour intermédiaire à A_0, ce qui est exclu).

l'état A_0 soit instantané, et que par suite le processus soit du cinquième type, est $\Sigma\lambda' = \infty$, ce qui équivaut, compte tenu de (17), à $\Sigma'\lambda' = \infty$ ([5]).

La forme de ces conditions rend évidente leur extension au cas, que nous allons maintenant considérer, où l'on ne suppose pas que l'ensemble des types de sauts possibles, soit dénombrable. Le premier terme de la somme (17) est la durée totale probable des sauts pour lesquels $l \leqq 1$, le second est le nombre probable de ceux pour lesquels $l > 1$, pendant que τ augmente de l'unité.

7. Considérons donc le cas où il y a une infinité non dénombrable de types de sauts possibles. Il faut pour cela qu'il soit possible qu'une infinité dénombrable d'états se succèdent avant chaque retour à A_0 et qu'il y ait au cours de cette succession une infinité de choix; il suffit que cela soit sûr. Pour en donner un exemple simple, supposons que le passage direct de A_0 à A_h soit possible, quel que soit h, le nombre probable de ses réalisations étant $\rho_h\tau$. L'indice k ne pourra ensuite que croître, mais après chaque valeur h on aura le choix entre au moins deux valeurs, par exemple $h+1$ et $h+2$. Le retour à A_0 ne se produira ainsi qu'après la réalisation effective d'une infinité d'autres états. Si $\Sigma\mu_k$ est fini, il se produira au bout d'un temps presque sûrement fini. Si enfin

$$\Sigma\rho_k = \infty, \qquad \Sigma\rho_k m_k < \infty \qquad \left(m_k = \sum_{k+1}^{\infty} \mu_l\right),$$

on a un processus du cinquième type avec une infinité dénombrable de types de sauts possibles, pour $X(\tau)$ (sans la première condition, on aurait un processus du deuxième type, le type transfini).

Pour étudier les cas de ce genre, $X(\tau)$ étant la somme de la série presque sûrement convergente (7), nous pouvons d'abord considérer le processus auxiliaire obtenu en faisant abstraction des états d'indices $k > n$. Le retour à A_0 étant possible, la succession d'états qui le précède ne comprend alors presque sûrement qu'un nombre fini d'états (même si chaque état peut y figurer plusieurs fois), et il n'y a qu'un nombre fini de choix (non nécessairement borné), et par suite un nombre fini ou une infinité dénombrable de types de sauts possibles.

La fonction $\psi(z)$ relative à ce processus auxiliaire [en désignant l'expression (8) par $\tau\psi(z)$], est alors de la forme

$$\psi_n(z) = \int_0^{\infty} (e^{izx} - 1)\, \Sigma\lambda'_\nu f_\nu(x)\, dx = \Sigma\lambda'_\nu [\varphi_\nu(z) - 1]. \tag{18}$$

Si maintenant n augmente indéfiniment, $\psi_n(z)$ tend vers $\psi(z)$. D'après la

([5]) Si l'on fait encore intervenir les coefficients $\lambda_{0,k}$ et μ_k, on a, sauf dans le cas étudié au n° 4, $\lambda_0 < \Sigma\lambda_{0,k}$, de sorte que la condition $\Sigma\lambda_{0,k} = \infty$ est nécessaire, mais non suffisante, pour que l'état A_0 soit instantané. La condition $S < \infty$ est suffisante, mais non nécessaire, pour que le temps $t = \tau + X(\tau)$ soit presque sûrement fini (pour une valeur donnée de τ).

forme (12) des fonctions $\varphi_\nu(z)$, les différents termes de cette somme n'ont pas d'autres points singuliers que les points $z_k = -\lambda_k i$, qui sont des pôles simples ou multiples suivant que l'état A_k et éventuellement les autres états A_l tels que $\lambda_l = \lambda_k$ figurent une fois ou plusieurs fois dans la suite d'états qui définit le type de saut considéré. Ces pôles sont fixes, c'est-à-dire indépendants de n. Par suite, on est conduit à penser que *les points singuliers de* $\psi(z)$ *sont les points* $z_k = -\lambda_k i$ *et leurs points d'accumulation.*

Il semble exact que $\psi(z)$ soit toujours holomorphe en dehors des points ainsi définis. Rappelons seulement que, du seul fait que la fonction additive $X(\tau)$ soit une somme de sauts positifs, résulte que $\psi(z)$ est holomorphe dans le demi-plan supérieur. Le fait qu'elle soit aussi holomorphe dans le demi-plan inférieur en dehors de l'axe transverse est lié à la forme particulière de $F(x)$, mais subsiste si dans l'expression (12) des fonctions $\varphi_\nu(z)$ on introduit des exposants non entiers; $\psi(z)$ n'est alors uniforme que dans le plan coupé par l'axe $(0, -\infty i)$.

Remarquons aussi, en nous bornant au cas étudié au n° 4, que les conditions imposées aux sommes (5) et (6) n'empêchent pas que la suite des μ_k n'est soumise à aucune autre restriction que d'avoir zéro comme point d'accumulation. A une suite partielle de coefficients $\lambda_{0,k}$ dont la somme est finie on peut associer en effet des coefficients μ_k absolument quelconques. Il peut donc arriver en particulier que les points $z = -\lambda i$ (λ réel positif) soient tous des points singuliers de $\psi(z)$.

8. Montrons maintenant par des exemples simples que, si les points z_k sont en général des points singuliers de $\psi(z)$, il peut arriver que certains d'entre eux ne le soient pas. Pour réaliser cette circonstance, il suffit d'un système à trois états possibles, A_0, A_1, A_2 (de sorte que le processus est du premier type, ou type fini). Si le passage direct de A_2 à A_1 est impossible, il y a alors pour $X(\tau)$ trois sortes de sauts possibles qui correspondent à des chaînes constituées par l'état A_1 seul, ou A_2 seul, ou A_1 suivi de A_2. A ces trois types de sauts correspondent trois coefficients

$$\lambda'_1 = \lambda_0 p_{0,1} p_{1,0}, \qquad \lambda'_2 = \lambda_0 p_{0,2}, \qquad \lambda'_3 = \lambda_0 p_{0,1} p_{1,2},$$

qui sont trois nombres réels non négatifs, à cela près quelconques. Or on a

$$(19) \qquad \begin{aligned} \psi(z) &= \frac{\lambda'_1 iz}{\lambda_1 - iz} + \frac{\lambda'_2 iz}{\lambda_2 - iz} + \lambda'_3 \left[\frac{1}{(1-\mu_1 iz)(1-\mu_2 iz)} - 1 \right] \\ &= \left(\lambda'_1 + \frac{\lambda'_3 \mu_1}{\mu_1 - \mu_2} \right) \frac{iz}{\lambda_1 - iz} + \left(\lambda'_2 + \frac{\lambda'_3 \mu_2}{\mu_2 - \mu_1} \right) \frac{iz}{\lambda_2 - iz}. \end{aligned}$$

Supposons, pour fixer les idées $\mu_2 > \mu_1$. Il suffit alors que

$$\lambda'_3 = \frac{\lambda'_1(\mu_2 - \mu_1)}{\mu_1}$$

pour que $z_1 = -i\lambda_1$ ne soit pas un point singulier de $\psi(z)$.

Remarquons aussi que, λ_1 et λ_2 supposés connus, la donnée de $\psi(z)$, qui ne dépend que de deux coefficients, ne suffit pas à déterminer $\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3$. Si $\lambda_2 < \lambda_1$ (donc $\mu_2 > \mu_1$), la fonction

$$\psi(z) = \frac{iz}{\lambda_2 - iz},$$

par exemple, peut être obtenue, soit pour $\lambda'_2 = 1$, $\lambda'_1 = \lambda'_3 = 0$, soit pour

$$\lambda'_1 = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \qquad \lambda'_2 = 0, \qquad \lambda'_3 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2}, \tag{20}$$

soit par n'importe quelle moyenne entre ces deux solutions extrêmes.

Or cette équivalence, au point de vue du calcul de $\psi(z)$, entre le cas où la chaîne A_2 est seule possible et celui défini par les formules (20), subsiste, quels que soient, pour des processus plus généraux, les états autres que A_0 qui précèdent ou suivent A_2 dans la suite d'états qui correspond à un type de saut possible. On ne sera donc jamais sûr, $\psi(z)$ étant connu, qu'il n'y ait pas un état possible A_1 (ou plusieurs états possibles) dont l'existence ne puisse pas être déduite de la forme $\psi(z)$.

On peut d'ailleurs étudier directement, au même point de vue, le cas d'un système comprenant n états possibles autres que A_0. Contentons-nous de considérer le cas où, entre deux réalisations de A_0, l'indice k ne peut que croître. Il y a alors, en dehors de la chaîne vide, $2^n - 1$ chaînes possibles. Leurs probabilités dépendent de $\frac{n(n+1)}{2}$ coefficients, les n coefficients λ''_k tels que la probabilité d'un passage direct de A_0 à A_k pendant un intervalle $d\tau$ sur l'axe des τ, soit $\lambda''_k\, d\tau$, et les probabilités de passage $p_{h,k}(0 < h < k \leqq n)$, soumises aux seules inégalités

$$p_{h,h+1} + p_{h,h+2} + \ldots + p_{h,n} \leqq 1$$

(la différence $p_{h,0}$ des deux membres étant inconnue).

Or la décomposition de $\psi(z)$ en éléments simples n'introduit que n coefficients arbitraires. La donnée de cette fonction ne peut donc pas définir le processus.

9. Pour conclure, la donnée de $\psi(z)$ est loin de suffire à la définition du processus, et donne peu de renseignements sûrs. Nous croyons toutefois que cette fonction est toujours de la forme

$$\psi(z) = \Sigma\psi(z),$$

chaque $\psi_k(z)$ étant une fonction entière de $\frac{1}{z - z_k}$, et que la donnée de $\psi(z)$ définit tous les $\psi_k(z)$; les valeurs des $z_k = -\lambda_k i$ ainsi mis en évidence correspondent sûrement à des états possibles. Si z_k est un point singulier essentiel de $\psi_k(z)$, cela indique, soit que l'état A_k peut être réalisé plusieurs fois (donc il peut l'être un nombre arbitrairement grand de fois) sans retour à A_0, soit qu'un nombre arbitrairement grand d'états de durée probable μ_k peuvent se succéder sans retour à A_0. Si z_k est un pôle d'ordre $n > 1$ cela prouve l'existence de n états au moins de durée probable μ_k. Si z_k est un pôle simple, rien ne permet de savoir s'il y a un ou plusieurs états de durée probable μ_k. Mais, rappelons-le, on ne sera jamais sûr d'avoir obtenu tous les ψ_k correspondant à des états possibles.

L'étude de $\psi(z)$ nous a paru utile parce qu'elle donne une idée claire de certaines propriétés des processus du cinquième type. Mais la conclusion est qu'elle ne suffit jamais, si l'on n'a aucun autre renseignement, à définir un processus [6].

---

[6] Cela n'est pas en contradiction avec la conclusion du n° 4; pour appliquer cette conclusion, il faut savoir que le processus est du type étudié au dit n° 4.