Confluentes Mathematici, Vol. 3, No. 1 (2011) 1–119

DOI: 10.1142/S1793744211000278

RACINES CARRÉES D'OPÉRATEURS ELLIPTIQUES ET ESPACES DE HARDY

EMMANUEL RUSS

Université Paul Cézanne,
Faculté des Sciences et Techniques de Saint-Jérôme,
Case Cour A, Avenue Escadrille Normandie-Niemen,
13397 Marseille Cedex 20, France
emmanuel.russ@univ-cezanne.fr

Received 23 February 2011
Revised 4 March 2011

Il est bien connu que, pour tout $1 < p < +\infty$, il existe $C_p > 0$ tel que

$$\sum_{1\leq i\leq n} \|\partial_i f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \sim \|(-\Delta)^{1/2} f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{0.1}$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Lorsque $p = 1$, (0.1) est fausse pour $L^1(\mathbb{R}^n)$ mais devient

$$\sum_{1\leq i\leq n} \|\partial_i f\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \sim \|(-\Delta)^{1/2} f\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \tag{0.2}$$

où $H^1(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Hardy réel classique. Dans cette vue d'ensemble, nous rassemblons des résultats qui étendent (0.1) et (0.2) dans deux directions. D'une part, nous nous plaçons dans un ouvert fortement lipschitzien de $\mathbb{R}^n$, ou dans un cadre géométrique non euclidien (variété riemannienne complète ou graphe). D'autre part, nous remplaçons Δ par un opérateur elliptique d'ordre 2 plus général (opérateur sous forme divergence dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$, laplacien de Hodge dans une variété riemannienne, laplacien discret sur un graphe). Dans le cas des domaines fortement lipschitziens de $\mathbb{R}^n$, ces questions conduisent à introduire des espaces de Hardy–Sobolev et à en donner des propriétés analogues à celles des espaces de Sobolev usuels. Dans le cas des variétés riemanniennes, nous introduisons des espaces de Hardy de formes différentielles exactes. Ces espaces sont adaptés au laplacien de Hodge et possèdent des propriétés analogues à l'espace de Hardy $H^1(\mathbb{R}^n)$. Le laplacien de Hodge possède un calcul fonctionnel holomorphe sur ces espaces, et en particulier la transformée de Riesz est continue. Sous des hypothèses géométriques convenables, nous comparons ces espaces de Hardy aux espaces de Hardy usuels (dans le cas d'espaces de fonctions) ou aux espaces L^p. Enfin, sur un graphe vérifiant certaines propriétés géométriques, nous obtenons des versions discrètes de la plupart des résultats correspondants pour les transformées de Riesz et inégalités reliées obtenues dans des variétés riemanniennes.

Nous donnons également des résultats concernant les puissances fractionnaires d'opérateurs elliptiques d'ordre 2. Il s'agit de propriétés d'algèbre pour des espaces de Bessel fractionnaires sur des groupes de Lie unimodulaires, généralisant les résultats euclidiens. Nous utilisons également des estimations de la norme L^2 de puissances fractionnaires de certains opérateurs pour montrer une inégalité de Poincaré fractionnaire pour certaines mesures de probabilité dans $\mathbb{R}^n$ ou des groupes de Lie à croissance polynomiale.

Keywords: Opérateurs elliptiques d'ordre 2; espaces de Hardy; domaines lipschitziens de $\mathbb{R}^n$; variétés riemanniennes; groupes de Lie; graphes; espaces de Bessel; fonctionnelles quadratiques; fonctions maximales; décomposition atomique; transformées de Riesz; espaces de nature homogène; inégalités de Poincaré.

AMS Subject Classification: 42B20, 42B25, 42B30, 42B35, 43A15, 46E30, 46E35, 58J35, 60J10

Table des matières

1. Notations

On utilisera tout au long de ce texte les notations suivantes.

Si $n \geq 1$, on désigne par $M_n(\mathbb{C})$ l'espace des matrices carrées de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{C}$.

On notera aussi

$$\mathbb{R}^{n+1}_+ = \mathbb{R}^n \times]0, +\infty[.$$

Si $Q \subset \mathbb{R}^n$ est un cube, on désginera par $l(Q)$ la longueur du côté de Q. Si $c > 0$, cQ est le cube de même centre que Q et dont la longueur du côté est $cl(Q)$.

Si (X, d) est un espace métrique et B une boule de centre x et de rayon R dans X, on notera, pour tout $k > 0$, kB la boule de centre x et de rayon kR.

Si une fonction f varie dans un ensemble E et si $A(f)$ et $B(f)$ sont deux quantités dépendant de f, on écrira $A(f) \lesssim B(f)$ si, et seulement si, il existe $C > 0$ tel que, pour tout $f \in E$,

$$A(f) \leq CB(f)$$

et $A(f) \sim B(f)$ si, et seulement si, il existe $C > 0$ tel que, pour tout $f \in E$,

$$C^{-1}A(f) \leq B(f) \leq CA(f).$$

Si $E \subset \mathbb{R}^n$ est mesurable, on désigne par $|E|$ sa mesure de Lebesgue. Si $F : E \to \mathbb{R}^n$ est une fonction mesurable, on notera, pour tout $x \in E$, $|F(x)|$ la norme euclidienne de $F(x)$, et, pour tout $1 \leq p \leq +\infty$,

$$\|F\|_p := \||F|\|_p. \tag{1.1}$$

Ainsi, $F \in L^p(E)$ si, et seulement si, toutes les composantes de F appartiennent à $L^p(E)$.

Pour des fonctions définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on utilisera la notation ∂_{x_i} pour désigner les dérivées partielles de f (au sens classique ou au sens faible suivant le cas) par rapport à la variable x_i, $1 \leq i \leq n$. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert et $F : \Omega \to \mathbb{R}^k$ (avec $k \geq 1$) est différentiable, on notera $DF(x)$ la matrice jacobienne de F au point x pour tout $x \in \Omega$. Si $F = (F_1, \ldots, F_k)$, on notera, pour tout $p \in [1, +\infty]$,

$$\|DF\|_{L^p(\Omega)} := \sum_{1 \leq i \leq n,\, 1 \leq j \leq k} \|\partial_{x_i} F_j\|_{L^p(\Omega)}.$$

On appelle $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ dont le support est un compact inclus dans Ω.

2. Introduction

2.1. *Le cas du laplacien sur* $\mathbb{R}^n$

2.1.1. *Estimations* L^2

Nous commençons par présenter les problèmes de racines carrées et d'espaces de Hardy auxquels cet article est consacré dans le cas le plus simple: celui du laplacien sur $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$), c'est-à-dire l'opérateur

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}^2.$$

Comme $-\Delta$ est auto-adjoint sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, il possède un calcul fonctionnel de Borel, qui permet de définir sa racine carrée $(-\Delta)^{1/2}$ sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. Si $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, une intégration par parties montre que

$$\|(-\Delta)^{1/2} f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \langle -\Delta f, f \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \sum_{i=1}^{n} \|\partial_{x_i} f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2. \tag{2.1}$$

L'identité (2.1) signifie exactement que

$$\|(-\Delta)^{1/2} f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \tag{2.2}$$

en utilisant la notation (1.1). Cette dernière identité montre que le domaine de $(-\Delta)^{1/2}$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ est $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$. Elle permet d'étendre par densité $(-\Delta)^{1/2}$ en un opérateur continu de $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, et (2.2) reste valable pour toute $f \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$.

2.1.2. *Estimations L^p*

Que devient l'égalité (2.2) si on remplace la norme L^2 par la norme L^p pour $1 < p < +\infty$? La réponse est la suivante: pour tout $p \in]1, +\infty[$, pour toute $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$,

$$\|(-\Delta)^{1/2} f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|(-\Delta)^{1/2} f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.3}$$

La deuxième inégalité de (2.3) signifie exactement que les *transformées de Riesz*, c'est-à-dire ici les opérateurs

$$R_j = \partial_{x_j}(-\Delta)^{-1/2},$$

sont continues de $L^p(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même (ou plus précisément, se prolongent de manière unique en un opérateur continu de $L^p(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même), ou encore que la transformée de Riesz vectorielle $\nabla(-\Delta)^{-1/2}$ est continue de $L^p(\mathbb{R}^n)$ dans $L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n)$. Les opérateurs R_j apparaissent de manière naturelle dans le problème suivant. On note

$$\mathbb{R}_+^{n+1} := \{(x_1, \dots, x_n, t) \in \mathbb{R}^{n+1};\ t > 0\}.$$

Soit $u \in W^{2,2}(\mathbb{R}_+^{n+1})$ une fonction harmonique dans $\mathbb{R}_+^{n+1}$, c'est-à-dire vérifiant

$$\sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}^2 u + \partial_t^2 u = 0$$

dans $\mathbb{R}_+^{n+1}$. La fonction u et toutes ses dérivées partielles possèdent une trace sur $\mathbb{R}^n$, vu comme le bord de $\mathbb{R}_+^{n+1}$, et, pour tout $1 \leq j \leq n$, l'opérateur R_j appliqué à la trace de $-\partial_t u$ sur $\mathbb{R}^n$ donne la trace de $\partial_{x_j} u$ sur $\mathbb{R}^n$.

La preuve la plus courante de la continuité de R_j sur $L^p(\mathbb{R}^n)$ fait appel à la théorie des opérateurs de Calderón–Zygmund. Pour tout j, R_j est continu sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ par (2.2). De plus, le noyau de cet opérateur est

$$K_j(x, y) := c_n \frac{x_j - y_j}{|x - y|^{n+1}},$$

où la constante $c_n := \pi^{-\frac{n+1}{2}} \Gamma(\frac{n+1}{2})$ ne dépend que de n ([293], Chap. 3). Il vérifie les estimations suivantes: il existe $C > 0$ tel que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ et tout $1 \leq j \leq n$,

$$|K_j(x, y)| \leq \frac{C}{|x - y|^n},$$

$$|\partial_{x_j} K_j(x, y)| \leq \frac{C}{|x - y|^{n+1}},$$

$$|\partial_{y_j} K_j(x, y)| \leq \frac{C}{|x - y|^{n+1}}.$$

Ainsi, R_j est un opérateur de Calderón–Zygmund et est donc continu de $L^p(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même pour tout $p \in]1, +\infty[$ (voir [293], Chap. II, Théorème 1).

La première inégalité dans (2.3) résulte facilement de la deuxième par un argument de dualité, que l'on rappelle brièvement ici ([44, 99]). Soient $p \in]1, +\infty[$ et $p' \in]1, +\infty[$ défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. On suppose connue la continuité des transformées de Riesz sur $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$. Si $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on commence par écrire que

$$\|(-\Delta)^{1/2} f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \sup_{g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n); \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta)^{1/2} f(x) g(x) dx \right|.$$

Or l'espace $E := \{g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n);$ il existe $h \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ telle que $(-\Delta)^{1/2} h = g\}$ est dense dans $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ (voir par exemple [278], Lemme 1), de sorte que

$$\begin{aligned}
\|(-\Delta)^{1/2} f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= \sup_{g \in E; \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta)^{1/2} f(x) g(x) dx \right| \\
&= \sup_{h \in L^{p'}(\mathbb{R}^n); \|(-\Delta)^{1/2} h\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta)^{1/2} f(x) (-\Delta)^{1/2} h(x) dx \right| \\
&= \sup_{h \in L^{p'}(\mathbb{R}^n); \|(-\Delta)^{1/2} h\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \Delta h(x) dx \right| \\
&= \sup_{h \in L^{p'}(\mathbb{R}^n); \|(-\Delta)^{1/2} h\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \nabla f(x) \cdot \nabla h(x) dx \right| \\
&\leq \|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \sup_{h \in L^{p'}(\mathbb{R}^n); \|(-\Delta)^{1/2} h\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq 1} \|\nabla h\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq C \|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}$$

la dernière inégalité provenant de la continuité des transformées de Riesz de $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même.

Signalons ici que les inégalités (2.3) sont valables avec une constante implicite indépendante de la dimension n. Pour la continuité des transformées de Riesz, ce résultat remonte à ([295]). Ce fait peut aussi être vu comme conséquence d'une preuve de (2.3) due à Gundy et Varopoulos ([184]). D'autres preuves se trouvent dans [49, 128], ainsi que dans [275], où cette indépendance vis-à-vis de la dimension est obtenue par une méthode de transférence due à Coifman et Weiss ([95]). Le résultat est aussi prouvé pour le générateur du semi-groupe d'Ornstein–Uhlenbeck avec la mesure gaussienne, résultat déjà obtenu dans [258].

2.1.3. *Interprétation en termes d'espaces de Sobolev et de Bessel*

On peut interpréter (2.3) en termes d'espaces de Sobolev et de Bessel. On dispose d'une part des espaces de Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, formés des fonctions $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ telles que $|\nabla f| \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Par ailleurs, pour $1 < p < +\infty$ et $\alpha > 0$, l'espace de Bessel $L^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$ peut être défini comme l'espace des fonctions $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ telles que $(-\Delta)^{\alpha/2} f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ (les puissances de $-\Delta$ étant toujours définies via le calcul fonctionnel de Borel). L'estimation (2.3) signifie alors exactement que $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) = L^{1/2,p}(\mathbb{R}^n)$ (voir [69, 236]).

Un aspect remarquable de (2.3) est que l'opérateur ∇ est local (au sens où, si f est à support dans un ensemble A, ∇f est aussi à support dans A) alors que l'opérateur $(-\Delta)^{1/2}$ ne l'est pas.

Un autre point important est que (2.3) est valable pour tout $1 < p < +\infty$. Cela tient de manière essentielle au fait que l'on se place dans l'espace euclidien et qu'on considère le laplacien, c'est-à-dire un opérateur différentiel d'ordre 2 à coefficients réguliers (et même constants). Dans la suite, on sera amené à examiner la validité de (2.3) dans d'autres contextes géométriques et pour d'autres opérateurs que le laplacien. Il s'agira encore de comparer un espace de Sobolev “géométrique” et local, c'est-à-dire défini par un “gradient”, avec un espace de Sobolev “analytique”, défini au moyen des puissances fractionnaires d'un “laplacien”. On verra alors apparaître des restrictions sur les valeurs de p, provenant du cadre géométrique ou de l'irrégularité des coefficients de l'opérateur considéré.

2.1.4. *Estimations limite*

Les inégalités (2.3) sont fausses pour $p = 1$ et pour $p = +\infty$.

Plus précisément, l'espace des fonctions $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ pour lesquelles $\nabla(-\Delta)^{-1/2} f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ est exactement l'espace de Hardy $H^1(\mathbb{R}^n)$ introduit par Stein et Weiss dans [297]. Cet espace possède de nombreuses caractérisations sur lesquelles nous reviendrons dans la section 2.3, mais nous le définissons provisoirement comme l'espace des fonctions $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ pour lesquelles $\nabla(-\Delta)^{-1/2} f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Les opérateurs R_j sont non seulement continus de $H^1(\mathbb{R}^n)$ dans $L^1(\mathbb{R}^n)$, mais de $H^1(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même. La preuve de ce résultat fait à nouveau appel à la théorie des opérateurs de Calderón–Zygmund (voir [261], Théorème 3, p. 237) mais peut aussi se faire grâce à la description des espaces de Hardy par des systèmes de fonctions harmoniques conjuguées ([293], Chap. 7).

Si on convient de noter

$$\|\nabla f\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} := \sum_{i=1}^{n} \|\partial_{x_j} f\|_{H^1(\mathbb{R}^n)},$$

on peut reformuler ce qui précède en disant que $\nabla(-\Delta)^{-1/2}$ est continu de $H^1(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même. On peut même affirmer (voir par exemple [31], Chap. 4, Théorème 1) qu'il existe $C > 0$ tel que, pour toute fonction $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$,

$$\|(-\Delta)^{1/2} f\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \sim \|\nabla f\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.4}$$

Remarque 2.1. A la différence du cas des espaces L^p, la norme de ∇f dans $H^1(\mathbb{R}^n)$ n'est pas définie comme la norme dans $H^1(\mathbb{R}^n)$ de $|\nabla f|$. Cette dernière fonction, qui est positive ou nulle partout, ne peut appartenir à $H^1(\mathbb{R}^n)$ que si elle est identiquement nulle, car toute fonction de $H^1(\mathbb{R}^n)$ est d'intégrale nulle sur $\mathbb{R}^n$ (voir la section 2.3). Nous reviendrons sur la manière de définir l'appartenance d'une fonction vectorielle à un espace de Hardy dans la section 5.

Les opérateurs R_j ne sont pas continus de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même, mais de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans l'espace $BMO(\mathbb{R}^n)$ introduit par John et Nirenberg ([214]). On rappelle qu'une fonction f mesurable sur $\mathbb{R}^n$ et de carré localement intégrable appartient à $BMO(\mathbb{R}^n)$ si, et seulement si,

$$\|f\|_{BMO(\mathbb{R}^n)} := \sup_{Q\subset\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f_Q|^2 dx\right)^{1/2} < +\infty, \tag{2.5}$$

où la borne supérieure est prise sur tous les cubes $Q \subset \mathbb{R}^n$ et

$$f_Q := \frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)dx$$

est la moyenne de f sur Q. Le lemme de John et Nirenberg assure que l'exposant 2 dans (2.5) peut être remplacé par tout exposant $p \in [1, +\infty[$ ([214]).

La continuité des opérateurs R_j de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $BMO(\mathbb{R}^n)$, et même de $BMO(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même, peut être vue comme une conséquence de la théorie des opérateurs de Calderón–Zygmund ([261], Corollaire, p. 239, voir aussi [149]). On a même ([31], Chap. 4, Théorème 1):

$$\|(-\Delta)^{1/2} f\|_{BMO(\mathbb{R}^n)} \sim \|\nabla f\|_{BMO(\mathbb{R}^n)}, \tag{2.6}$$

avec

$$\|\nabla f\|_{BMO(\mathbb{R}^n)} := \sum_{i=1}^n \|\partial_{x_j} f\|_{BMO(\mathbb{R}^n)}.$$

Récapitulons: pour $p = 2$, (2.3) est simplement une intégration par parties (et est en fait une égalité). Pour $1 < p < +\infty$, (2.3) résulte de la théorie des opérateurs de Calderón–Zygmund. Pour $p = 1$ ou $p = +\infty$, (2.3) est fausse, mais on obtient une version limite de (2.3) en remplaçant L^1 par l'espace de Hardy H^1 et L^∞ par l'espace BMO. Rappelons dès à présent que BMO est le dual de H^1 (nous reviendrons sur ce point dans la section 2.3.4).

2.2. *Extension à d'autres contextes géométriques et d'autres opérateurs elliptiques d'ordre* 2

Les résultats des sections 2.1.2 et 2.1.4 ont été étendus dans de nombreuses directions. Nous décrivons brièvement ici celles qui seront présentées dans la suite.

2.2.1. *Le cas des opérateurs elliptiques d'ordre* 2 *sous forme divergence dans* $\mathbb{R}^n$

Que deviennent les résultats des sections précédentes si le laplacien est remplacé par des opérateurs elliptiques d'ordre 2 sous forme divergence à coefficients complexes?

On décrit plus précisément la classe d'opérateurs considérés (cette présentation est empruntée à [31], Chap. 1). Soit $A : \mathbb{R}^n \to M_n(\mathbb{C})$ une fonction mesurable bornée et uniformément elliptique, ce qui signifie qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $\xi \in \mathbb{C}^n$,

$$\langle A(x)\xi, \xi\rangle \geq \delta|\xi|^2. \tag{2.7}$$

Ici, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ désigne le produit hermitien usuel dans $\mathbb{C}^n$ et $|\xi|$ la norme euclidienne de ξ. On notera qu'on ne suppose aucune régularité sur les coefficients de A.

Il existe un unique opérateur maximal accrétif L sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ de domaine maximal $\mathcal{D}(L)$ tel que, pour toute $f \in \mathcal{D}(L)$ et toute $g \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$,

$$\langle Lf, g\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} A(x)\nabla f(x) \cdot \overline{\nabla g}(x)dx.$$

Cet opérateur L est formellement noté $L = -\mathrm{div}\,(A\nabla)$. Un tel opérateur engendre un semigroupe d'opérateurs $(e^{-tL})_{t>0}$ analytique et contractant sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. Il possède une unique racine carrée maximale accrétive $L^{1/2}$. Quand $A(x) = \mathrm{Id}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $L = -\Delta$.

Théorie L^2. Si on suit le déroulement de la section 2.1, récapitulé en fin de section 2.1.4, la première question qui se pose pour $L^{1/2}$ est la suivante: le domaine de $L^{1/2}$ est-il égal à $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ et a-t-on

$$\|L^{1/2}f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \sim \|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{2.8}$$

pour toute $f \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$?

Cette question remonte à Kato et est motivée à l'origine par des questions de perturbations pour des équations aux dérivées partielles hyperboliques (voir [218, 256]). Lorsque $A(x)$ est réelle symétrique pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, (2.8) s'obtient par un argument analogue à celui présenté dans la section 2.1.1. Cette observation conduit à la question suivante, posée par Kato: l'application $A \mapsto L^{1/2}$, définie de l'espace des matrices réelles symétriques uniformément elliptiques dans l'espace des opérateurs continus de $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, est-elle analytique? Si on sait prouver (2.8) lorsque la partie imaginaire de A est assez petite, on en déduit facilement cette analyticité en utilisant une version de la formule de Cauchy à valeurs dans les opérateurs continus de $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ ([308]). Cette remarque constitue une motivation pour considérer le cas des coefficients complexes.

On ne peut pas répondre en général à la question (2.8) par un calcul analogue à celui présenté dans la section 2.1.1. L'estimation (2.8), longtemps connue sous le nom de conjecture de Kato, a été prouvée en 2001 par Auscher, Hofmann, Lacey, McIntosh et Tchamitchian grâce à des méthodes d'analyse harmonique profondes ([20]). Revenant aux préoccupations initiales de Kato, on peut donner une application de ce résultat à un théorème d'existence pour un problème de Cauchy hyperbolique (voir [11]).

Remarque 2.2. Une version pondérée de l'estimation (2.8) a été prouvée récemment par Cruz-Uribe et Rios pour des opérateurs sous forme $w^{-1}\mathrm{div}(A\nabla)$, avec $w \in A_2$ et $w^{-1}A$ bornée et uniformément elliptique ([108]).

Théorie L^p. Soit maintenant $p \in]1, +\infty[$, $p \neq 2$. A-t-on

$$\|L^{1/2} f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \sim \|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{2.9}$$

pour toute f convenable?

Dans l'estimation (2.9), on distingue la domination au sens L^p de ∇f par $L^{1/2} f$:

$$\|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|L^{1/2} f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{2.10}$$

et la domination au sens L^p de $L^{1/2} f$ par ∇f:

$$\|L^{1/2} f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.11}$$

L'estimation (2.10), qui traduit donc la continuité sur $L^p(\mathbb{R}^n)$ des transformées de Riesz $\partial_{x_j} L^{-1/2}$ associées à L, est reliée à des problèmes de régularité pour des opérateurs elliptiques d'ordre 2 avec des conditions aux limites de type Dirichlet ou Neumann. Pour illustrer ces liens, on suppose que le semigroupe engendré par L est continu sur $L^p(\mathbb{R}^n)$, ce qui implique la même propriété pour $e^{-tL^{1/2}}$. Soit $u_0 \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, et considérons le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - Lu = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}_+^{n+1}, \\ \lim\limits_{t \to 0} u_t = u_0, \end{cases} \tag{2.12}$$

la limite étant prise au sens de $L^p(\mathbb{R}^n)$. Si (2.9) est satisfaite, alors la solution donnée par $u_t = e^{-tL^{1/2}} u_0$ vérifie la régularité suivante:

$$\sup_{t>0} (\|\partial_t u(t, \cdot)\|_p + \|\nabla_x u(t, \cdot)\|_p) \lesssim \|\nabla u_0\|_p.$$

Soit maintenant $v_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et considérons le problème de Neumann

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - Lu = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}_+^{n+1}, \\ \lim\limits_{t \to 0} \partial_t u_t = v_0, \end{cases} \tag{2.13}$$

la limite étant prise au sens de $L^p(\mathbb{R}^n)$. Si (2.9) est satisfaite, alors la solution donnée par $u_t = -e^{-tL^{1/2}} L^{-1/2} v_0$ vérifie

$$\sup_{t>0} (\|\partial_t u(t, \cdot)\|_p + \|\nabla_x u(t, \cdot)\|_p) \lesssim \|\nabla v_0\|_p.$$

Une version de ces problèmes avec des limites non-tangentielles au bord (dans la boule unité de $\mathbb{R}^{n+1}$) est considérée dans [221], où les auteurs prouvent que ces problèmes ont une solution pour tout $p \in]1, 2+\varepsilon[$ et que cette borne supérieure pour p est optimale.

Voici une autre connexion entre (2.10) et la solution d'une équation aux dérivées partielles elliptique. Si $p > 2$, alors on a (2.10) si, et seulement si, il existe

$C > 0$ vérifiant la propriété suivante: pour tout cube $Q \subset \mathbb{R}^n$ et toute fonction $u \in W^{1,2}(3Q)$ satisfaisant $Lu = 0$ dans $3Q$, on a l'inégalité de Hölder inverse suivante pour le gradient de u:

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |\nabla u(x)|^p\right)^{1/p} \leq C\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |\nabla u(x)|^2\right)^{1/2}. \tag{2.14}$$

Cette propriété a été découverte par Shen ([287]). Nous y reviendrons dans la section 6 car cette propriété s'étend au cas des graphes (ainsi qu'à celui des variétés riemanniennes (voir [15]).

Revenons au problème de la validité de (2.9). Mentionnons d'abord le fait que, par un argument de dualité semblable à celui présenté en fin de section 2.1.2, on montre que, pour $1 < p < +\infty$, la validité de (2.10) pour L et p entraîne celle de (2.11) pour L^* et p' avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. La réciproque est fausse, comme on le verra. La question de la validité de (2.9) est plus compliquée que dans le cas du Laplacien. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un opérateur $L = -\mathrm{div}\ (A\nabla)$ symétrique réel tel que l'inégalité

$$\|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|L^{1/2} f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

ne soit vérifiée pour aucun $p > 2+\varepsilon$ (ce résultat est cohérent avec ceux de [221]). Un contre-exemple, dû à Kenig, se trouve dans [31], p. 119. Cela montre, en particulier, que les transformées de Riesz associées à L, c'est-à-dire les opérateurs $\partial_{x_j} L^{-1/2}$, ne sont pas, en général, des opérateurs de Calderón–Zygmund, à la différence du cas où $L = -\Delta$ (voir la section 2.1).

La validité de (2.10) est trés liée aux propriétés de continuité sur certains espaces L^q du semigroupe e^{-tL} et de son gradient ∇e^{-tL}. Plus précisément ([13], Propositions 5.2 et 5.7):

Théorème 2.1.

1. *si* $1 < p < 2$, *alors* $\nabla L^{-1/2}$ *est continu de* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *dans* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *si, et seulement si,* e^{-tL} *est continu de* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *dans* $L^2(\mathbb{R}^n)$,
2. *si* $2 < p < +\infty$, *alors* $\nabla L^{-1/2}$ *est continu de* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *dans* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *si, et seulement si,* $t\nabla e^{-tL}$ *est uniformément borné* (*pour* $t > 0$) *de* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *dans* $L^p(\mathbb{R}^n)$.

En combinant le point 2. et le résultat de Shen, on voit donc que, pour $p > 2$, l'inégalité de Hölder inverse (2.14), qui est une propriété de régularité elliptique pour l'opérateur L, implique la continuité de $t\nabla e^{-tL}$ sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, qui est une propriété de régularité parabolique.

Ces résultat, et d'autres du même type, reposent de façon essentielle sur des estimations L^2 de type Gaffney sur e^{-tL}, qui sont satisfaites pour tout $L = -\mathrm{div}(A\nabla)$ uniformément elliptique à coefficients complexes (l'idée de ces estimations remontent à [157]). On peut énoncer ces estimations ainsi: il existe $C > 0$ tel que, pour tous sous-ensembles fermés disjoints $E, F \subset \mathbb{R}^n$ et toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ à support dans E,

$$\|e^{-tL}\|_{L^2(F)} \leq C \exp\left(-\frac{d^2}{t}\right) \|f\|_{L^2(E)}, \tag{2.15}$$

où $d := d(E,F) > 0$. Une propriété de ce type d'estimations est de s'étendre à des contextes géométriques très généraux. Nous reviendrons sur ces estimations de type Gaffney, qui jouent aussi un rôle essentiel dans la preuve de (2.8) dans [20], à propos des espaces de Hardy de formes différentielles sur des variétés riemanniennes (voir la section 5) et dans la section 7 à propos de [266].

Voici les résultats connus pour la validité de (2.10) et de (2.11) pour un opérateur $L = -\mathrm{div}(A\nabla)$ général ([13]):

1. (2.10) est vraie pour:

$$\begin{cases} 1 < p < +\infty & \text{si } n = 1, \\ 1 < p < 2 + \varepsilon & \text{si } n = 2, \\ \dfrac{2n}{n+2} - \varepsilon < p < 2 + \varepsilon & \text{si } n \geq 3, \end{cases}$$

2. (2.11) est vraie pour:

$$\begin{cases} 1 < p < +\infty & \text{si } n = 1 \text{ ou } n = 2, \\ 1 < p < \dfrac{2n}{n-2} + \varepsilon & \text{si } n = 3 \text{ ou } n = 4, \\ \dfrac{2n}{n+4} - \varepsilon < p < \dfrac{2n}{n-2} + \varepsilon & \text{si } n \geq 5. \end{cases}$$

On ajoute ici que, si $p_L < 2$ est tel que e^{-tL} est continu de $L^p(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ pout tout $p \in]p_L, 2[$, alors $\nabla L^{-1/2}$ est continue sur $L^p(\mathbb{R}^n)$ (Théorème 2.1) mais aussi sur $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ (voir [38], Théorème 4.12).

Lorsque le noyau du semi-groupe $(e^{-tL})_{t>0}$ vérifie des estimations ponctuelles en taille et en régularité hölderienne (ce qui est toujours le cas si A est à coefficients réels), alors (2.10) est vraie pour tout $1 < p < 2 + \varepsilon$ et (2.11) est vraie pour tout $1 < p < +\infty$ ([31], Chap. 4). Nous allons préciser ces estimations poinctuelles à propos des versions limites de (2.10) et de (2.11) dans les espaces de Hardy et dans BMO. On notera auparavant que, si A est à coefficients réels, on a bien (2.11) pour tout $p \in]1, +\infty[$ et L^*, alors qu'on n'a pas en général (2.10) pour tout $q \in]1, +\infty[$ et L. Cela illustre le fait que l'argument de dualité exposé en fin de section 2.1.2 n'admet pas de réciproque.

Le cas des espaces de Hardy et de BMO

Suivant toujours le plan de la section 2.1, on pose également les questions suivantes: a-t-on

$$\|L^{1/2} f\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \sim \|\nabla f\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \tag{2.16}$$

et

$$\|L^{1/2}f\|_{BMO(\mathbb{R}^n)} \sim \|\nabla f\|_{BMO(\mathbb{R}^n)}? \tag{2.17}$$

On a vu que la comparaison de ∇f et $L^{1/2}f$ dans L^p est reliée à la continuité du semigroupe e^{-tL} sur certains espaces L^q. La comparaison de ces quantités dans $H^1(\mathbb{R}^n)$ peut être établie sous une hypothèse plus forte, qui fait intervenir le noyau de e^{-tL}.

On dira que L vérifie (G_∞) si, et seulement si, le noyau de e^{-tL}, désigné par K_t, est une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, et s'il existe $C, c > 0$ et $\mu \in]0,1]$ tels que, pour presque tous $x, y, y' \in \mathbb{R}^n$ et tout $t \in]0, +\infty[$,

$$\begin{cases} |K_t(x,t)| \leq \dfrac{C}{t^{n/2}} e^{-c\frac{|x-y|^2}{t}}, \\ \\ |K_t(x,y) - K_t(x,y')| + |K_t(y,x) - K_t(y',x)| \leq \dfrac{C}{t^{n/2}} \left(\dfrac{|y-y'|}{t^{1/2}} \right)^{\mu}. \end{cases} \tag{G_∞}$$

On notera que la première inégalité dans (G_∞) est une hypothèse de taille sur $|K_t(x,y)|$, qui implique en particulier la continuité de e^{-tL} de $L^p(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même pour tout $p \in [1, +\infty]$, et que la deuxième inégalité dans (G_∞) signifie que $x \mapsto K_t(x,y)$ et $y \mapsto K_t(x,y)$ sont μ-hölderiennes pour tout $t > 0$.

Lorsque $L = -\Delta$, l'expression exacte de $K_t(x,y)$ est

$$K_t(x,y) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t} \right), \tag{2.18}$$

et (G_∞) est clairement satisfaite. Plus généralement, quand A est à coefficients réels, (G_∞) est toujours vérifiée ([7]). L'hypothèse (G_∞) est également vraie pour A à coefficients complexes si $n = 1$ ou $n = 2$. Pour tout $n \geq 3$, il existe A tel que l'opérateur L correspondant sur $\mathbb{R}^n$ ne vérifie pas (G_∞) et n'est en fait même pas borné sur L^∞ ([17, 154, 198, 254]). L'hypothèse (G_∞) est cependant encore satisfaite lorsque A est de classe C^1 ou que ses coefficients vérifient d'autres conditions de régularité. On peut ajouter que (G_∞), qui traduit la régularité parabolique de L, est en fait équivalente à une propriété de régularité elliptique pour L. On renvoie à [31], Chap. 1 pour une discussion détaillée à ce sujet, ainsi qu'au chapitre 6 de [273].

Voici un résultat concernant la validité de (2.16) et de (2.17) sous l'hypothèse (G_∞):

Théorème 2.2. *On suppose que l'opérateur L satisfait la condition (G_∞). Alors*:

1. $\|L^{1/2}f\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \sim \|\nabla f\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}$,
2. $\|L^{1/2}f\|_{BMO(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|A\nabla f\|_{BMO(\mathbb{R}^n)}$.

Par un argument analogue à celui présenté en fin de section 2.1.2, le point 2. résulte de

$$\|\nabla f\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|L^{1/2}f\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}$$

par dualité. On notera aussi que l'inégalité

$$\|\nabla f\|_{BMO(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|L^{1/2} f\|_{BMO(\mathbb{R}^n)}$$

est fausse en général, car, par interpolation avec (2.8), elle entraînerait la validité de (2.10) pour tout $2 < p < +\infty$, qui est fausse en général même sous l'hypothèse (G_∞), comme le montre le contre-exemple de Kenig (qui est à coefficients réels, [31], p. 119). On signale enfin que l'inégalité $\|L^{1/2} f\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|\nabla f\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}$ est prouvée dans [20] sous l'hypothèse que $(I + t^2 L)^{-1}$ est uniformément bornée (pour $t > 0$) sur $L^\rho(\mathbb{R}^n)$ pour un certain $\rho \in \left[1, \frac{n}{n-1}\right[$.

2.2.2. *Le cas des domaines fortement lipschitziens de* $\mathbb{R}^n$

On considère maintenant les questions précédentes (comparaisons de $L^{1/2} f$ et ∇f dans L^p, dans un espace de Hardy, dans BMO) dans un domaine fortement lipschitzien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, en mettant sur l'opérateur L la condition au bord de Dirichlet ou de Neumann (voir les définitions précises dans la section 3.1).

Théorie L^p. Pour $p = 2$, l'estimation donnée par (2.8) s'étend au cas des domaines fortement lipschitziens et se formule en général comme suit (aussi bien pour la condition de Dirichlet que pour celle de Neumann, voir [34]):

$$\|L^{1/2} f\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} \sim \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.19}$$

On notera que ce résultat est aussi valable dans le cas de conditions mixtes au bord ([36]).

Pour $p \in]1, +\infty[$, $p \neq 2$, il convient, comme dans le cas de $\mathbb{R}^n$, de distinguer entre la domination dans $L^p(\Omega)$ de ∇f par $L^{1/2} f$ et celle dans $L^p(\Omega)$ de $L^{1/2} f$ par ∇f. La domination de ∇f par $L^{1/2} f$ dans $L^p(\Omega)$ n'est en général pas vraie pour tout $p \in]1, +\infty[$, même dans le cas du Laplacien (à la différence du cas de $\mathbb{R}^n$ pour le laplacien). Plus précisément, on a

$$\|\nabla f\|_{L^p(\Omega)} \lesssim \|(-\Delta)^{1/2} f\|_{L^p(\Omega)} \tag{2.20}$$

pour tout $1 < p < 3 + \varepsilon$ pour les conditions Dirichlet et Neumann. En dimension $n = 2$, l'estimation (2.20) est vraie pour $1 < p < 4 + \varepsilon$. A chaque fois, les bornes sur p sont optimales. Si le domaine Ω est de classe C^1, (2.20) est valable pour tout $1 < p < +\infty$ (pour les conditions au bord Dirichlet et Neumann). Pour tous ces résultats, voir [210].

Auscher et Tchamitchian ont montré dans [33] que, si L vérifie une version de (G_∞) convenablement adaptée à la situation, qui sera notée (G_τ) dans la suite (voir la section 3 pour un énoncé exact), alors

$$\|L^{1/2} f\|_{L^p(\Omega)} \lesssim \|\nabla f\|_{L^p(\Omega)} + \|f\|_{L^p(\Omega)} \tag{2.21}$$

pour tout $1 < p < +\infty$ et toute f, et il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\|\nabla f\|_{L^p(\Omega)} \lesssim \|L^{1/2} f\|_{L^p(\Omega)} \tag{2.22}$$

pour tout $1 < p < 2 + \varepsilon$. Comme dans le cas de $\mathbb{R}^n$, la borne supérieure pour p dans (2.22) est optimale. Les inégalités (2.21) et (2.21) sont valables, pour des fonctions f appropriées, aussi bien sous la condition Dirichlet que sous la condition Neumann. Enfin, (2.22) est valable sous la seule hypothèse que K_t (le noyau de e^{-tL}) possède une majoration gaussienne ponctuelle, c'est-à-dire que la régularité hölderienne de K_t n'est pas nécessaire ([130]).

Estimations limite
Dans le cas limite $p = 1$, que deviennent les inégalités (2.21) et (2.22)? On a vu dans le Théorème 2.2 qu'on peut comparer $L^{1/2}f$ et ∇f dans l'espace de Hardy $H^1(\mathbb{R}^n)$. Quand on se place sur un domaine Ω, il est naturel de remplacer $H^1(\mathbb{R}^n)$ par des espaces de Hardy H^1 sur Ω. Une différence avec le cas $L^p(\Omega)$ est que plusieurs espaces de Hardy sur Ω peuvent intervenir. Ces espaces sont, par analogie avec les espaces de Sobolev, définis soit comme l'espace des restrictions à Ω des fonctions de $H^1(\mathbb{R}^n)$, soit comme celui des fonctions de $H^1(\mathbb{R}^n)$ à support dans $\overline{\Omega}$. Avec Auscher et Tchamitchian, nous avons prouvé des versions de (2.21) et (2.22) qui font intervenir ces deux espaces, et dépendent de manière essentielle des conditions au bord pour l'opérateur L sur Ω (voir la section 4).

La preuve de ces versions de (2.21) et (2.22) sur des domaines apparaîtra comme une conséquence d'une théorie générale des espaces de Hardy–Sobolev sur Ω, c'est-à-dire des espaces de fonctions dans $L^1(\Omega)$ dont les dérivées faibles appartiennent à un espace de Hardy sur Ω. Ces espaces de Hardy–Sobolev ont des propriétés analogues à celles des espaces de Sobolev usuels (propriétés d'extensions, de densité, de changement de variable...), qui reposent toutes sur une caractérisation de ces espaces de Hardy–Sobolev en termes de fonctions maximales adaptées. On décrira ces résultats dans la section 4.

Ces questions amènent naturellement à considérer de près les espaces de Hardy sur des domaines de $\mathbb{R}^n$, et à en donner des caractérisations analogues à celles des espaces de Hardy sur $\mathbb{R}^n$. Nous examinerons ces questions dans la section 3, avant de passer aux espaces de Hardy–Sobolev et revenir au problème des racines carrées dans la section 4.

2.2.3. *Le cas des variétés riemanniennes*

Les questions de racines carrées envisagées jusqu'ici peuvent être formulées dans le contexte d'une variété riemannienne M pour l'opérateur de Laplace–Beltrami Δ (que l'on supposera positif dans $L^2(M)$ par convention). On supposera M connexe et complète. On a de façon immédiate

$$\|\Delta^{1/2}f\|_{L^2} = \||\nabla f|\|_{L^2} = \|df\|_{L^2(\Lambda^1 T^* M)},$$

en raison du caractère auto-adjoint de Δ, en notant ∇ le gradient et d la différentielle extérieure. Les normes L^p sont calculées par rapport à la mesure riemannienne $d\mu$. La question de comparer les normes L^p de $\Delta^{1/2}f$ et de $|\nabla f|$ pour $p \neq 2$ a été posée par Strichartz en 1982 dans [301]. La théorie L^p a été développée par de nombreux auteurs (Auscher, Bakry, Coulhon, Duong, Hofmann, etc.) et fait intervenir certaines hypothèses géométriques sur M: croissance du volume des boules, inégalités de Poincaré, courbure de Ricci minorée. Comme dans la section 2.2.1, on distingue

$$\|df\|_{L^p(\Lambda^1 T^* M)} \lesssim \|\Delta^{1/2} f\|_{L^p(M)} \tag{2.23}$$

et

$$\|\Delta^{1/2} f\|_{L^p(M)} \lesssim \|df\|_{L^p(\Lambda^1 T^* M)}. \tag{2.24}$$

Par un argument de dualité semblable à celui présenté en fin de section 2.1.2, si $1 < p < +\infty$, (2.23) pour p entraîne (2.24) pour p' avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

On rappelle ici les résultats principaux de la théorie L^p. On notera ρ la distance riemannienne. Pour tout $x \in M$ et tout $r > 0$, on note $B(x, r)$ la boule géodésique de centre x et de rayon r et $V(x, r)$ sa mesure. On fera toujours l'hypothèse suivante sur $V(x, r)$: il existe $C > 0$ tel que, pour tout $x \in M$ et tout $r > 0$,

$$V(x, 2r) \leq CV(x, r), \tag{D}$$

où C ne dépend que de M. Cette hypothèse signifie que M, munie de la distance et de la mesure riemanniennes, est un espace de nature homogène, ce qui est le cadre "naturel" pour de nombreux résultats en analyse réelle (voir les commentaires sur cette hypothèse et des références pour des résultats sur les transformées de Riesz sans cette hypothèse dans la section 2.4).

On a souligné dans la section 2.2.1 le lien entre continuité des transformées de Riesz associées à un opérateur et continuité du semigroupe engendré par cet opérateur, et que la théorie est différente pour $p < 2$ et $p > 2$. On introduit ici le semigroupe engendré par Δ, $e^{-t\Delta}$, et son noyau p_t.

Transformées de Riesz: le cas $1 < p < 2$

On dira que (DUE) est satisfaite si, et seulement si, il existe $C > 0$ tel que, pour tout $t > 0$ et tout $x \in M$,

$$p_t(x, x) \leq \frac{C}{V(x, \sqrt{t})}. \tag{DUE}$$

Cette majoration "sur la diagonale" s'améliore en une majoration gaussienne: sous les hypothèses (D) et (DUE), il existe $C, c > 0$ tels que, pour tout $t > 0$ et tous $x, y \in M$,

$$p_t(x, y) \leq \frac{C}{V(x, \sqrt{t})} \exp\left(-c\frac{d^2(x, y)}{t}\right). \tag{GUE}$$

On notera que, dans le cas où $M = \mathbb{R}^n$, l'expression (2.18) montre que cette hypothèse est bien satisfaite. Plus généralement, (GUE) est vérifiée dès que la courbure de Ricci de M est positive ou nulle ([234]). De plus, la conjonction de (D) et de (DUE) est équivalente ([177]) à l'inégalité de Faber–Krahn suivante: il existe

$c, \nu > 0$ tel que, pour tout $x \in M$, tout $r > 0$ et tout domaine régulier $\Omega \subset B(x,r)$,

$$\lambda_1(\Omega) \geq \frac{c}{r^2} \left(\frac{V(x,r)}{\mu(\Omega)} \right)^{\frac{2}{\nu}}.$$

Voici alors un résultat de continuité des transformées de Riesz pour $1 < p \leq 2$ ([98]):

Théorème 2.3. *Sous les hypothèses* (D) *et* (GUE), *on a* (2.23) *pour tout* $1 < p \leq 2$, *et donc* (2.24) *pour tout* $2 < p < +\infty$.

Transformées de Riesz: le cas $2 < p < +\infty$.
L'exemple de la variété formée de deux copies de $\mathbb{R}^2$ reliées entre elles par un cylindre montre que, sous les hypothèses du Théorème (2.3), l'inégalité (2.23) peut être fausse pour tout $p > 2$ ([98]).

Si on rajoute à (GUE) une hypothèse de minoration analogue pour p_t, on obtient l'hypothèse suivante:

$$\frac{c}{V(x,\sqrt{t})} \exp\left(-C\frac{d^2(x,y)}{t}\right) \leq p_t(x,y) \leq \frac{C}{V(x,\sqrt{t})} \exp\left(-c\frac{d^2(x,y)}{t}\right) \qquad (LUE)$$

pour tout $t > 0$ et tous $x, y \in M$. L'hypothèse (LUE) est vérifiée quand M est à courbure de Ricci positive ou nulle ([234]) et est équivalente ([283]) à la conjonction de (D) et d'une inégalité de Poincaré L^2 sur les boules, qui s'énonce comme suit: il existe $C > 0$ tel que, pour toute boule $B \subset M$ et toute fonction $f \in C^\infty(B)$,

$$\int_B |f(x) - f_B|^2 dx \leq Cr^2 \int_B |\nabla f(x)|^2 dx, \qquad (P)$$

où f_B désigne la moyenne de f sur B et r le rayon de B.

Sous les seules hypothèses (D) et (P), on n'a pas en général (2.23) pour tout $p > 2$ ([102, 233]). Toutefois, en supposant toujours (D) et (P), on peut relier la continuité de $\nabla\Delta^{-1/2}$ sur L^p pour $p > 2$ à celle de $tde^{-t\Delta}$, à l'instar du Théorème 2.1. Plus précisément ([16], Théorème 1.2), si (D) et (P) sont satisfaites, et si $p_0 > 2$, la condition

$$\|de^{-t\Delta} f\|_{L^{p_0}} \leq \frac{C}{\sqrt{t}} \|f\|_{L^{p_0}} \qquad (2.25)$$

pour tout $t > 0$ entraîne la continuité de $\nabla\Delta^{-1/2}$ pour tout $p \in]2, p_0[$. En particulier, si on suppose la majoration suivante pour le gradient de p_t:

$$|\nabla_x p_t(x,y)| \leq \frac{C}{\sqrt{t} V(y,\sqrt{t})} \qquad (2.26)$$

pour tout $t > 0$ et tous $x, y \in M$, alors (2.23) est valable pour tout $2 < p < +\infty$, donc (2.24) est vraie pour tout $1 < p < 2$.

Ces résultats pour $p > 2$ couvrent la plupart des cas connus antérieurement: variétés à courbure de Ricci positive ou nulle ([45, 46], à ceci près que dans ces papiers, les constantes de continuité obtenues sont indépendantes de la dimension de la variété), groupes de Lie à croissance polynomiale munis d'un sous-laplacien

([4]), revêtements co-compacts dont le groupe est à croissance polynomiale ([125]), variétés coniques sans bord avec une base compacte ([233]).

Sous les hypothèses (D) et (P), Auscher et Coulhon ([15]) ont aussi prouvé un analogue du théorème de Shen ([287]) énoncé dans la section 2.2.1.

Supposons toujours (D) et (P). On a donc (2.23) pour tout $1 < p \leq 2$. De plus, en utilisant des arguments semblables à ceux de [164], on établit l'analogue de (2.14) pour $p = 2 + \varepsilon$ pour un $\varepsilon > 0$. En conséquence, (2.23) est aussi valable pour $2 < p < 2 + \varepsilon$, de sorte que (2.24) a lieu pour $p \in]2 - \eta, 2 + \eta[$ avec $\eta > 0$. Finalement, on obtient

$$\|df\|_{L^p(\Lambda^1 T^* M)} \sim \|\Delta^{1/2} f\|_{L^p(M)}$$

pour tout $p \in]2 - \eta, 2 + \eta[$, sous les hypothèses ($D$) et ($P$). On notera que, dans l'exemple des deux copies de $\mathbb{R}^2$ reliées entre elles par un cylindre, cette équivalence n'est vraie pour aucun $p > 2$, mais (P) n'est pas satisfaite.

On mentionne également qu'une théorie de la continuité des transformées de Riesz dans des espaces L^p à poids sur des variétés riemanniennes a été développée dans [22].

Il ressort de la description précédente que, alors que la continuité des transformées de Riesz sur L^p pour $1 < p < 2$ est vraie sous des hypothèses assez larges, cette continuité pour $p > 2$ est beaucoup plus clairement reliée à la géométrie de la variété. D'autres travaux éclairent ce phénomène en s'intéressant aux liens entre continuité de la transformée de Riesz et géométrie à l'infini de la variété. Ces travaux montrent en particulier que, sur la variété formée de deux copies de $\mathbb{R}^n$ reliées par un cylindre, $d\Delta^{-1/2}$ est bornée sur L^p si, et seulement si, $1 < p < n$ (voir [74, 75, 180, 181, 189]). On mentionne ici que ces travaux reposent sur une analyse fine de la résolvente du Laplacien ou de ses perturbations compactes, et qu'en retour, des résultats de continuité de la transformée de Riesz peuvent donner des informations sur la résolvente de perturbations compactes du laplacien ([61]). De nombreux autres travaux ont été consacrés aux transformées de Riesz associées à un opérateur de Schrödinger sur une variété riemannienne, parmi lesquels on peut citer [37, 45, 259, 288, 327].

L'inégalité inverse

En dehors des cas où (2.24) résulte de (2.23) par dualité, Auscher et Coulhon ont établi une condition suffisante de validité de (2.24). Cette condition fait intervenir une inégalité de Poincaré dans L^p sur les boules, qui s'énonce ainsi: il existe $C > 0$ tel que, pour toute boule $B \subset M$ de rayon r et toute fonction $f \in C^\infty(B)$,

$$\int_B |f(x) - f_B|^p dx \leq C r^p \int_B |\nabla f(x)|^p dx. \tag{2.27}$$

On a alors ([15]):

Théorème 2.4. *On suppose que (D) est satisfaite et qu'on a aussi (2.27) pour un certain $p \in [1, 2[$. Alors (2.24) est satisfaite pour tout $q \in]p, 2]$.*

On peut préciser davantage le lien entre (2.23) et (2.24) d'une part et les inégalités de Poincaré d'autre part. On a déjà mentionné que, sous (D) et (P), on n'a pas nécessairement (2.23) pour des valeurs de $p > 2$. On peut également avoir (2.23) exactement pour $1 < p \leq 2$ et (2.27) uniquement pour $p > 2$, comme dans le cas de deux copies de $\mathbb{R}^2$ reliées entre elles par un cylindre ([75]).

On peut ajouter que les liens entre continuité de la transformée de Riesz sur L^p et le noyau de la chaleur sur les 1-formes différentielles sont examinés en détail dans [99].

Dans la continuité de [99], on mentionne également le lien entre ces questions de transformées de Riesz et la cohomologie L^p pour les 1-formes différentielles. La cohomologie L^2 de de Rham ([119]) dit que

$$L^2(\Lambda^1 T^* M) = \overline{\mathcal{R}(d)} \oplus \overline{\mathcal{R}(\delta)} \oplus \mathcal{N}(\boldsymbol{\Delta}), \tag{2.28}$$

où δ est l'adjoint de d, $\mathcal{R}(d)$ (resp. $\mathcal{R}(\delta)$) désigne l'image de d (resp. de δ), $\boldsymbol{\Delta} = d\delta + \delta d$ est le laplacien de Hodge–de-Rham pour les 1-formes différentielles et $\mathcal{N}(\boldsymbol{\Delta})$ est son noyau. Les adhérences sont prises dans L^2. Cette décomposition est orthogonale.

On pose la question de savoir si on a une décomposition analogue dans L^p, c'est-à-dire si on a

$$L^p(\Lambda^1 T^* M) = \overline{\mathcal{R}(d)} \oplus \overline{\mathcal{R}(\delta)} \oplus \mathcal{N}(\boldsymbol{\Delta}), \tag{2.29}$$

les adhérences étant cette fois prises dans L^p. Cette question a été examinée dans le cas des variétés compactes orientées ([286]) et sur les domaines de telles variétés ([208]). Dans [301], Strichartz établit le lien entre cette question et les transformées de Riesz, et [241] donne des résultats de cohomologie dans le cas des formes de tout degré en supposant que le spectre L^2 du laplacien de Hodge est minoré par une constante strictement positive.

Voici des conséquences des théorèmes précédents sur les transformées de Riesz concernant (2.29). Le projecteur sur les 1-formes exactes est $d\Delta^{-1}\delta = (d\Delta^{-1/2})(d\Delta^{-1/2})^*$. On considère la propriété:

$$\|d\Delta^{-1}\delta\omega\|_{L^p(\Lambda^1 T^* M)} \lesssim \|\omega\|_{L^p(\Lambda^1 T^* M)} \tag{Π_p}$$

pour toute 1-forme ω.

On suppose (D) et (P). Si $p_0 > 2$ et si (2.25) est satisfaite, alors (Π_p) est vraie pour tout $p \in]q_0, p_0[$, avec $\frac{1}{q_0} + \frac{1}{p_0} = 1$ ([16]). On en déduit le résultat suivant ([16], Corollary 5.2):

Théorème 2.5. *On suppose* (D), (P) *et* (2.25) *pour un* $p_0 > 2$. *Soit* q_0 *défini par* $\frac{1}{q_0} + \frac{1}{p_0} = 1$. *Alors, si* $q_0 < p < p_0$, (2.29) *est une décomposition topologique dans* L^p *sous l'une des trois hypothèses suivantes*:

1. M *est une surface*,
2. *la seule* 1*-forme harmonique est nulle*,
3. *le semigroupe* $e^{-t\boldsymbol{\Delta}}$ *est borné sur* $L^p(\Lambda^1 T^* M)$.

Une conséquence de ces résultats est que, si M est à courbure de Ricci positive ou nulle, alors (2.29) est vraie pour tout $p \in]1,+\infty[$.

Ajoutons que, si $1 < p < +\infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, la conjonction de (2.24) pour p' et de (Π_p) pour p' entraîne (2.23) pour p ([15]).

On reviendra sur ces questions de cohomologie (en remplaçant L^p par des espaces de Hardy appropriés) dans la section 5.

Les preuves de ces résultats reposent l'extension de la théorie des opérateurs de Calderón–Zygmund à certains opérateurs "sans noyau". On renvoie à la section 6.7 pour un commentaire plus détaillé et des références.

Résultats locaux

Il est également possible de développer une théorie semblable pour les transformées de Riesz locales en supposant que les propriétés (D) et (P) ne sont vraies que localement. On dira que M est à croissance exponentielle du volume si, et seulement si, pour tout $r_0 > 0$, il existe $C, c > 0$ tels que, pour tout $x \in M$, tout $\theta > 1$ et tout $r > r_0$,

$$V(x, \theta r) \leq C e^{c\theta} V(x, r). \tag{2.30}$$

On dira que M vérifie une inégalité de Poincaré locale L^2 sur les boules si, et seulement si, pour tout $r_0 > 0$, il existe $C > 0$ tel que, pour toute boule $B \subset M$ de rayon $r \leq r_0$ et toute fonction $f \in C^\infty(B)$,

$$\int_B |f(x) - f_B|^2 dx \leq C r^2 \int_B |\nabla f(x)|^2 dx. \tag{P_{loc}}$$

Alors ([16], Théorème 1.6), sous les hypothèses (2.30) et (P_{loc}), si, pour un $p_0 > 2$ et un $\alpha \geq 0$, on a

$$\|de^{-t\Delta} f\|_{L^{p_0}} \leq C \frac{e^{\alpha t}}{\sqrt{t}} \|f\|_{L^{p_0}},$$

alors la transformée de Riesz locale $d(\Delta + a\mathrm{Id})^{-1/2}$ est bornée sur L^p pour tout $p \in]2, p_0[$ et tout $a > \alpha$. Cette conclusion signifie en fait que

$$\|df\|_p \lesssim \|\Delta^{1/2} f\|_p + \|f\|_p.$$

Si on sait de plus que le spectre de Δ dans L^2 est minoré par une constante strictement positive, on obtient que $\|f\|_p \lesssim \|\Delta^{1/2} f\|_p$, donc la conclusion devient à nouveau

$$\|df\|_p \lesssim \|\Delta^{1/2} f\|_p,$$

c'est-à-dire qu'on retrouve la continuité de la transformée de Riesz globale. On peut encore obtenir la même conclusion en supposant que le spectre de Δ appartient en fait à $\{0\} \cup [a, +\infty[$ pour un $a > 0$ ([211]).

On retrouve en particulier les résultats de ([45, 46]) quand la courbure de Ricci est minorée par une constante, et les résultats de [238, 240] sur certaines variétés de Cartan–Hadamard et certains groupes de Lie unimodulaires non moyennables.

Estimations limite
Qu'arrive-t-il si $p = 1$? L'exemple de $\mathbb{R}^n$ montre qu'on ne peut comparer les normes L^1 de $\Delta^{1/2}f$ et de ∇f et suggère de comparer leurs normes dans des espaces de Hardy. Une difficulté apparaît alors: ∇f et *df* ne sont pas des fonctions scalaires et il faut définir ce qu'on entend par "*df* appartient à un espace de Hardy". Dans $\mathbb{R}^n$, on ramène ce problème à l'appartenance à $H^1(\mathbb{R}^n)$ de toutes les dérivées partielles, mais ce point de vue n'a pas de sens dans le cas d'une variété riemannienne (voir la Remarque 2.1).

Pour résoudre ce problème, nous avons introduit, avec Auscher et McIntosh, des espaces de Hardy de formes différentielles sur les variété riemanniennes complètes ([23]) et nous avons notamment montré l'existence d'un calcul fonctionnel à la Kato pour le Laplacien de Hodge–de-Rham sur ces espaces. En particulier, cela implique la continuité H^1 des transformées de Riesz sous la seule hypothèse (D), mais l'espace H^1 ainsi construit est, en général, strictement contenu dans l'espace de Coifman–Weiss (voir la section 2.4.1 plus bas). En fait, on définit une échelle d'espaces de Hardy de formes différentielles H^p, $1 \leq p \leq +\infty$, sur lesquels le laplacien de Hodge–de-Rham possède un calcul fonctionnel (ce qui entraîne en particulier la continuité des transformées de Riesz sur ces espaces) et on sait comparer ces espaces à L^p dans certains cas. On renvoie à la section 5 pour une présentation des résultats obtenus.

2.2.4. *Le cas des graphes*

Sur un graphe Γ (ensemble de sommets reliés par des arêtes), on dispose d'un gradient discret et, en utilisant un noyau markovien convenable, il est possible de définir l'équivalent d'un laplacien discret L (voir [101, 115, 116]). En partie en collaboration avec N. Badr ([43, 278]), nous avons prouvé des résultats de comparaison entre $\|L^{1/2}f\|_{L^p(\Gamma)}$ et $\|\nabla f\|_{L^p(\Gamma)}$ dans ce contexte, en fonction des valeurs de p et d'hypothèses géométriques sur Γ. La théorie obtenue est parallèle à celle dans les variétés riemanniennes qu'on vient de décrire dans la section 2.2.3. On trouvera dans la section 6 une présentation de ces résultats.

Avant de détailler toutes ces extensions géométriques, nous présenterons rapidement les espaces de Hardy réels sur $\mathbb{R}^n$ et dans le cadre des espaces de nature homogène.

2.3. *Espaces de Hardy sur* $\mathbb{R}^n$

On rappelle ici brièvement quelques résultats de la théorie des espaces de Hardy réels sur $\mathbb{R}^n$.

2.3.1. *Premières définitions et propriétés*

Les premiers espaces de Hardy sont apparus dans les années 1910–1920 dans le cadre de l'analyse complexe en une variable et l'étude des séries de Fourier ([335], Chaps. 7 et 14). Il s'agissait principalement des espaces de Hardy de fonctions holomorphes $H^p(\mathbb{D})$, où $\mathbb{D}$ désigne le disque unité de $\mathbb{C}$ et $0 < p < +\infty$. Cette théorie a connu de nombreux développements au vingtième siècle, en une ([136, 160]) ou plusieurs variables ([299]). Ces espaces ont été généralisés dans [50] au cas de l'équation de Beltrami conjuguée.

Bien que provenant de l'analyse complexe, ces espaces jouent un rôle essentiel en analyse réelle. En 1960, Stein et Weiss ([297]) ont défini l'espace de Hardy $H^p(\mathbb{R}^n)$ ($n \geq 1$, $\frac{n}{n+1} < p < +\infty$) en introduisant la notion de système de fonctions harmoniques conjuguées, généralisant ainsi la notion de fonction analytique et les équations de Cauchy–Riemann. Ces espaces peuvent en réalité être définis par un procédé analogue pour tout $0 < p < +\infty$ ([149, 298]).

Un intérêt majeur de ces espaces de Hardy sur $\mathbb{R}^n$ est qu'ils se substituent aux espaces L^p pour de nombreuses questions d'analyse harmonique quand $p \leq 1$. Ainsi, comme on l'a vu dans la section 2.1.4, les opérateurs de Calderón–Zygmund classiques (dont un exemple fondamental est donné par les transformées de Riesz $\partial_{x_j}(-\Delta)^{-1/2}$) sont bornés de $H^1(\mathbb{R}^n)$ dans $L^1(\mathbb{R}^n)$, voire, sous certaines hypothèses, de $H^1(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même ([261, 296]). De plus, comme on l'a vu dans la section 2.1.4, $H^1(\mathbb{R}^n)$ est exactement l'espace des fonctions $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ telles que $\partial_{x_j}(-\Delta)^{-1/2} f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ pour tout $1 \leq j \leq n$ ([149]). A la différence de $L^1(\mathbb{R}^n)$, $H^1(\mathbb{R}^n)$ est un dual (c'est le dual de $VMO(\mathbb{R}^n)$, voir [96] et la section 2.3.4 plus loin) et possède une base inconditionnelle ([72, 253, 260]).

2.3.2. *Caractérisations par le noyau de Poisson*

Un autre aspect essentiel des espaces de Hardy est qu'ils possèdent des caractérisations variées. En particulier, on peut en donner plusieurs descriptions en termes de fonctions maximales. En voici un exemple important, présenté ici dans le cas de H^1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, notons

$$P(x) = \frac{c_n}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}},$$

où on fixe $c_n > 0$ de manière à avoir $\int_{\mathbb{R}^n} P(x)dx = 1$. Pour tout $t > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$P_t(x) = t^{-n} P\left(\frac{x}{t}\right),$$

de sorte que P_t est le noyau de Poisson, qui n'est autre que le noyau du semi-groupe engendré par $(-\Delta)^{1/2}$. Pour toute fonction f mesurable sur $\mathbb{R}^n$ et telle que $\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|(1+|y|)^{-n-1}dy < +\infty$, on définit, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f^*(x) = \sup_{|x-y|<t} |f * P_t(y)| = \sup_{|x-y|<t} |e^{-t(-\Delta)^{1/2}} f(y)|.$$

Alors $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$ si, et seulement si, $f^* \in L^1(\mathbb{R}^n)$, et on a alors $\|f\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \sim \|f^*\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$. Cette caractérisation maximale et d'autres versions se trouvent dans

[149]. On notera que la fonction maximale qu'on vient de décrire est non tangentielle, c'est-à-dire que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la borne supérieure est calculée sur un cône de sommet x dans $\mathbb{R}^n \times]0, +\infty[$. Nous reviendrons sur ce point dans la section 2.3.3.

En utilisant toujours le noyau de Poisson, on peut aussi représenter la norme d'une fonction de $H^1(\mathbb{R}^n)$ grâce à une fonctionnelle quadratique, l'intégrale d'aire de Lusin. Pour toute fonction f comme précédemment et tout $x \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$sf(x) = \left(\iint_{|y-x|<t} |t\partial_t e^{-t(-\Delta)^{1/2}} f(y)|^2 \frac{dydt}{t^{n+1}} \right)^{1/2},$$

$$\mathcal{S}f(x) = \left(\iint_{|y-x|<t} |t\overline{\nabla} e^{-t(-\Delta)^{1/2}} f(y)|^2 \frac{dydt}{t^{n+1}} \right)^{1/2},$$

avec

$$|\overline{\nabla} u(t,y)|^2 = |\partial_t u(t,y)|^2 + |\nabla_y u(t,y)|^2.$$

Alors, pour $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $f \in H^1(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow sf \in L^1(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \mathcal{S}f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $\|f\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \sim \|\mathcal{S}f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \sim \|sf\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ ([149]).

2.3.3. *Lien avec les espaces de tentes*

Ce dernier résultat peut se reformuler au moyen des espaces de tentes introduits par Coifman, Meyer et Stein ([93]). On rappelle ici quelques notations et résultats dont la preuve se trouve dans [93]. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $\alpha > 0$, le cône de sommet x et d'ouverture α est l'ensemble

$$\Gamma_\alpha(x) = \{(y,t) \in \mathbb{R}^{n+1}_+ ;\ |y-x| < \alpha t\}$$

(voir la section 1 pour la notation $\mathbb{R}^{n+1}_+$). Si $F : \mathbb{R}^{n+1}_+ \to \mathbb{C}$ est une fonction mesurable, on définit, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $\alpha > 0$,

$$\mathcal{S}_\alpha F(x) = \left(\iint_{\Gamma_\alpha(x)} |F(y,t)|^2 dy \frac{dt}{t^{n+1}} \right)^{1/2}.$$

Pour $\alpha = 1$, on notera $\Gamma(x)$ et $\mathcal{S}F(x)$ au lieu de $\Gamma_1(x)$ et $\mathcal{S}_1 F(x)$. On vérifie que, pour tous $\alpha, \beta > 0$ et tout $1 \leq p < +\infty$, $\|\mathcal{S}_\alpha F\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \sim \|\mathcal{S}_\beta F\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$. Pour $1 \leq p < +\infty$, on dira que $F \in T^{p,2}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ si, et seulement si,

$$\|F\|_{T^{p,2}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} := \|\mathcal{S}F\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < +\infty.$$

L'espace $T^{p,2}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ ainsi défini est un espace de Banach.

Le résultat sur l'intégrale d'aire rappelé dans la section 2.3.2 signifie donc que, pour $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$ si, et seulement si, la fonction $F(x,t) := t(-\Delta)^{1/2} e^{-t(-\Delta)^{1/2}} f$ appartient à $T^{1,2}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$. De plus, si $f \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, on peut écrire la formule "reproduisante" de Calderón:

$$f = 4 \int_0^{+\infty} t(-\Delta)^{1/2} e^{-t(-\Delta)^{1/2}} t(-\Delta)^{1/2} e^{-t(-\Delta)^{1/2}} f \frac{dt}{t} \tag{2.31}$$

(cette formule se vérifie ausitôt par théorie spectrale), et comme $F(x,t) := t(-\Delta)^{1/2} e^{-t(-\Delta)^{1/2}} f$ appartient à $T^{1,2}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, on voit que

$$f = 4 \int_0^{+\infty} t(-\Delta)^{1/2} e^{-t(-\Delta)^{1/2}} F \frac{dt}{t} \tag{2.32}$$

pour une fonction $F \in T^{1,2}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$. On exploitera ce lien essentiel entre espaces de Hardy et espaces de tentes à la section 5 pour définir des espaces de Hardy de formes différentielles sur des variétés riemanniennes.

2.3.4. *Dualité*

Une découverte essentielle, due à C. Fefferman ([147, 149]), est que l'espace dual de $H^1(\mathbb{R}^n)$ est exactement l'espace $BMO(\mathbb{R}^n)$ des fonctions d'oscillation moyenne bornée, introduit par John et Nirenberg ([214]) pour donner une preuve plus simple d'un théorème de Weiss et Zygmund ([323]). La définition de $BMO(\mathbb{R}^n)$ a été donnée dans la section 2.1.4. La formulation précise de cette dualité sera donnée dans la section 2.3.5.

L'espace $VMO(\mathbb{R}^n)$ est l'adhérence dans $BMO(\mathbb{R}^n)$ de l'espace des fonctions continues à support compact dans $\mathbb{R}^n$ et $H^1(\mathbb{R}^n)$ est le dual de $VMO(\mathbb{R}^n)$ ([96]). Cet espace $VMO(\mathbb{R}^n)$ est différent de celui défini par Sarason ([284]), qui est l'adhérence dans $BMO(\mathbb{R}^n)$ de l'espace des fonctions uniformément continues sur $\mathbb{R}^n$ qui appartiennent à $BMO(\mathbb{R}^n)$. Une présentation clarifiée de ces différents espaces se trouve dans [63]. La condition d'appartenance à VMO intervient notamment dans l'étude de certains problèmes elliptiques d'ordre 2 ([6, 25, 31, 207]).

2.3.5. *Décomposition atomique*

On peut donner une autre description importante de $H^1(\mathbb{R}^n)$ (et même de $H^p(\mathbb{R}^n)$ pour $0 < p < 1$, mais on s'en tient ici à $H^1(\mathbb{R}^n)$ pour simplifier cette présentation) au moyen de fonctions particulières, appelées atomes, qui permettra aussi de formuler la dualité de $H^1(\mathbb{R}^n)$ et $BMO(\mathbb{R}^n)$ en termes simples. Une fonction mesurable a sur $\mathbb{R}^n$ est appelée atome si, et seulement si, a est à support dans un cube $Q \subset \mathbb{R}^n$ et vérifie

$$\int a(x)dx = 0 \text{ et } \|a\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le |Q|^{-1/2}.$$

Alors $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$ si, et seulement si, il existe une suite $(\lambda_k)_{k\ge1} \in l^1$ et une suite d'atomes $(a_k)_{k\ge1}$ telles que

$$f = \sum_{k\ge1} \lambda_k a_k,$$

la convergence ayant lieu dans $L^1(\mathbb{R}^n)$. De plus, la norme de f dans $H^1(\mathbb{R}^n)$ est comparable à la borne inférieure des $\sum_{k\geq 1} |\lambda_k|$ prise sur toutes les décompositions possibles de f.

Cette "décomposition atomique" a été établie par Coifman pour $n = 1$ ([88]) puis étendue par Latter en toute dimension ([231]). Elle permet de formuler la dualité entre $H^1(\mathbb{R}^n)$ et $BMO(\mathbb{R}^n)$ de la manière suivante. Tout d'abord, ce résultat de décomposition atomique montre que l'espace E des combinaisons linéaires (finies) d'atomes est dense dans $H^1(\mathbb{R}^n)$. Si $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$, la forme linéaire

$$f \mapsto \mathcal{L}_b(f) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)b(x)dx,$$

d'abord définie pour toute $f \in E$, se prolonge de manière unique en une forme linéaire continue sur $H^1(\mathbb{R}^n)$, et on a

$$\|\mathcal{L}_b\| \lesssim \|b\|_{BMO(\mathbb{R}^n)}.$$

Réciproquement, pour toute forme linéaire continue $\mathcal{L}$ sur $H^1(\mathbb{R}^n)$, il existe une unique fonction $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ telle que $\mathcal{L} = \mathcal{L}_b$, avec

$$\|b\|_{BMO(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|\mathcal{L}\|.$$

On notera que, si $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$ et $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$, le produit fb n'appartient pas en général à $L^1(\mathbb{R}^n)$ (un contre-exemple est donné dans [296], Chap. 4, voir aussi [60] pour une description précise de l'ensemble de ces produits en lien avec les espaces d'Orlicz).

Un autre intérêt de la décomposition atomique est qu'elle permet de généraliser la notion d'espace de Hardy à des contextes très généraux (voir la section 2.4). Le lien entre espaces de Hardy et espaces de tentes fournit de nouvelles preuves de la dualité entre $H^1(\mathbb{R}^n)$ et $BMO(\mathbb{R}^n)$ et de la décomposition atomique de $H^1(\mathbb{R}^n)$ (ce dernier point résulte de la décomposition atomique pour $T^{1,2}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ [93]).

2.3.6. *Espaces locaux*

Une théorie des espaces de Hardy locaux a également été développée. Ces espaces $h^p(\mathbb{R}^n)$ (qui contiennent les espaces $H^p(\mathbb{R}^n)$ correspondants) ont été introduits par Goldberg ([170]). A la différence des espaces $H^p(\mathbb{R}^n)$, ils sont stables par multiplication par une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (voir d'autres résultats sur les multiplicateurs dans $h^1(\mathbb{R})$ dans [168]) et par tout difféomorphisme α de $\mathbb{R}^n$ tel que $\alpha(x) = x$ pour tout $|x| \geq 1$. Ils peuvent être caractérisés par des fonctions maximales ou des fonctionnelles quadratiques analogues à celles utilisées pour $H^p(\mathbb{R}^n)$ dans lesquelles on fait varier t dans $]0, 1[$ au lieu de $]0, +\infty[$. Ils possèdent aussi une décomposition atomique analogue à celle des espaces $H^p(\mathbb{R}^n)$, dans laquelle on n'impose aucune condition de moment nul pour les atomes à support dans des cubes Q tels que $l(Q) > 1$ (voir la section 1 pour la notation $l(Q)$).

Le dual de $h^1(\mathbb{R}^n)$ est l'espace $bmo(\mathbb{R}^n)$, défini ainsi: une fonction mesurable f sur $\mathbb{R}^n$ est dans $bmo(\mathbb{R}^n)$ si, et seulement si,

$$\|f\|_{bmo(\mathbb{R}^n)} := \left(\sup_{l(Q)<1} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q|^2 dx + \sup_{l(Q)\geq 1} |f_Q|^2 \right) < +\infty.$$

On ajoute que $h^1(\mathbb{R}^n)$ est lui-même le dual de l' espace $vmo(\mathbb{R}^n)$, qui est la version locale de $VMO(\mathbb{R}^n)$.

2.3.7. *Lemmes div-curl*

Les lemmes div-curl entrent dans la catégorie des résultats de compacité par compensation. Les premiers résultats de ce type remontent à Tartar ([306, 307]) et Murat ([268, 269]), et sont à rapprocher des travaux de Ball en élasticité non linéaire ([48]). Voici un exemple d'énoncé ([268]):

Théorème 2.6. *Soient $(v_k)_{k\geq 1}$ et $(w_k)_{k\geq 1}$ des suites de champs de vecteurs dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ telles que $v_k \rightharpoonup v$ et $w_k \rightharpoonup w$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. On suppose que div v_k et rot w_k sont uniformément bornés par rapport à k dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Alors $v_k \cdot w_k \rightharpoonup v \cdot w$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.*

Les résultats de compacité par compensation jouent un rôle essentiel dans l'étude de certaines équations aux dérivées partielles non linéaires (voir par exemple [9, 10, 65, 67, 68, 89, 90, 144, 145, 173, 193, 194, 263, 267]).

Ces résultats ont d'importantes connexions avec les espaces de Hardy, qui ont été mises en évidence pour la première fois dans [90]. Une formulation simple d'un lemme div-curl faisant intervenir un espace de Hardy est la suivante:

Théorème 2.7. *Soient $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ telle que $\nabla f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 < p < +\infty$ et $e \in L^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n)$ à divergence nulle, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors ([90, 123]) $e \cdot \nabla f \in H^1(\mathbb{R}^n)$ et*

$$\|e \cdot \nabla f\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|e\|_{L^q(\mathbb{R}^n)},$$

avec une constante implicite ne dépendant que de n et p.

L'appartenance de $e \cdot \nabla f$ à $L^1(\mathbb{R}^n)$ est immédiate, mais ce résultat constitue une amélioration notable, en particulier parce que $H^1(\mathbb{R}^n)$ est un dual alors que $L^1(\mathbb{R}^n)$ ne l'est pas. De nombreux autres énoncés du même type figurent dans [90].

Si on fait maintenant le produit d'un champ à divergence bornée dans L^p par un champ à rotationnel borné dans L^q, on arrive dans un espace de Hardy local. On parvient ainsi à une formulation du Théorème 2.6 en termes d'espaces de Hardy locaux ([110]):

Théorème 2.8. *Soient $(v_k)_{k\geq 1}$ et $(w_k)_{k\geq 1}$ des suites de champs de vecteurs dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ telles que $v_k \rightharpoonup v$ et $w_k \rightharpoonup w$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. On suppose que div v_k et rot w_k sont uniformément bornés par rapport à k dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Alors $v_k \cdot w_k \rightharpoonup v \cdot w$ dans $h^1(\mathbb{R}^n)$ pour la topologie faible-$*$.*

On notera que, du fait que $h^1(\mathbb{R}^n)$ est le dual de $vmo(\mathbb{R}^n)$ (voir la section 2.3.6), cet énoncé implique bien la conclusion du Théorème 2.6.

On peut aussi donner une version limite pour $p = +\infty$ du lemme div-curl précédent ([28]): si $e \in H^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n)$ est à divergence nulle sur $\mathbb{R}^n$, et si $F \in L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n)$ est tel que rot $F = 0$ dans $\mathbb{R}^n$, alors $e \cdot F \in H^1(\mathbb{R}^n)$ et

$$\|e \cdot F\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|e\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \|F\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

La preuve de ce résultat utilise la décomposition atomique pour l'espace de Hardy $H^1_\rho(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n)$ à divergence nulle ([167, 244]). On reviendra plus en détail sur cet espace dans la section 5.2.

2.3.8. *Interpolation*

On termine cette section en rappelant que, si $p_0 \in]1, +\infty[$, $0 < \theta < 1$ et $\frac{1}{p} = (1-\theta) + \frac{\theta}{p_0}$, $L^p(\mathbb{R}^n) = [H^1(\mathbb{R}^n), L^{p_0}(\mathbb{R}^n)]_\theta$. Une approche possible de cette interpolation et d'autres résultats plus généraux consiste à passer par les espaces de tentes ([93]). Ce point de vue sera repris à propos des espaces de Hardy de formes différentielles sur des variétés riemanniennes dans la section 5 de la partie I.

2.4. *Espaces de Hardy et BMO sur des espaces métriques*

2.4.1. *Espaces de nature homogène*

Un espace de nature homogène est un espace métrique mesuré (X, d, μ) vérifiant les propriétés suivantes: pour tout $x \in X$ et tout $r > 0$, si $B(x, r)$ désigne la boule ouverte de centre x et de rayon r, $\mu(B(x, r)) < +\infty$ et il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de (X, d, μ) telle que

$$\mu(B(x, 2r)) \leq C\mu(B(x, r)). \tag{2.33}$$

De très nombreuses théories en analyse harmonique ont été développées dans le cadre des espaces de nature homogène: opérateurs de Calderón–Zygmund, espaces de Hardy, calcul différentiel (voir notamment [81, 85, 94, 96, 112, 155, 247, 246, 250]). Un cas particulier de ces espaces est constitué par les espaces Ahlfors-David réguliers, c'est-à-dire ceux pour lesquels il existe $Q > 0$ tel que

$$\mu(B(x, r)) \sim r^Q$$

pour tout $x \in X$ et tout $r > 0$. Sur ces espaces a été notamment développée une théorie des applications quasi-conformes et quasi-symétriques ([186]).

Soit (X, d, μ) un espace de nature homogène. Coifman et Weiss ([96]) ont défini des espaces de Hardy "atomiques" sur X en s'appuyant sur la décomposition atomique de $H^p(\mathbb{R}^n)$. Rappelons ici la définition de $H^1(X)$. Un atome est une fonction $a \in L^2(X)$ à support dans une boule B et telle que

$$\int a(x) d\mu(x) = 0 \text{ et } \|a\|_2 \leq \mu(B)^{-1/2}. \tag{2.34}$$

Une fonction f mesurable sur X appartient à $H^1(X)$ si, et seulement si, il existe une suite $(\lambda_n)_{n\geq 1} \in l^1$ et une suite d'atomes $(a_n)_{n\geq 1}$ telles que

$$f = \sum_{n\geq 1} \lambda_n a_n,$$

la convergence ayant lieu dans $L^1(X)$. On définit alors $\|f\|_{H^1(X)}$ comme la borne inférieure des $\sum_{n\geq 1} |\lambda_n|$ prise sur toutes les décompositions possibles de f. Une conséquence de (2.33) est que si, dans la définition d'un atome, on remplace la norme L^2 par la norme L^p pour n'importe quel $p \in]1, +\infty]$, l'espace $H^1(X)$ obtenu est toujours le même (c'est plus précisément une conséquence de la décomposition de Calderón–Zygmund, voir [96]).

On définit aussi l'espace $BMO(X)$ comme l'espace des fonctions de carré localement intégrables sur X et telles que

$$\|f\|_{BMO(X)} := \sup_{B\subset X} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(x) - f_B|^2 < +\infty,$$

où la borne supérieure est prise sur toutes les boules $B \subset X$, avec

$$f_B = \frac{1}{\mu(B)} \int_B f(y) d\mu(y).$$

L'hypothèse (2.33) entraîne que, dans cette définition, l'exposant 2 peut être remplacé par n'importe quel exposant $p \in [1, +\infty[$. On a même dans ce cadre le lemme de John–Nirenberg, qui affirme qu'il existe $c > 0$ tel que, si $f \in BMO$, pour toute boule $B \subset X$,

$$\frac{1}{\mu(B)} \int_B e^{\mu|f(x)-f_B|} d\mu(x) \leq C(\mu, f)$$

pour tout $0 < \mu < c$.

Le dual de $H^1(X)$ est $BMO(X)$, et si on appelle $VMO(X)$ l'adhérence dans $BMO(X)$ de l'espace des fonctions continues sur X à support compact, $H^1(X)$ est le dual de $VMO(X)$.

2.4.2. *Autres espaces métriques*

Signalons que ce type d'analyse harmonique a aussi été développé dans le contexte d'espaces qui ne sont pas de nature homogène. Deux directions ont principalement été exploitées. La première direction est celle de $\mathbb{R}^n$ (ou d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$) muni d'une mesure μ vérifiant

$$\mu(B(x,r)) \leq Cr^n.$$

Noter que cette hypothèse est vérifiée notamment lorsque μ est la mesure de Lebesgue et qu'on se place sur un ouvert Ω quelconque de $\mathbb{R}^n$ (alors que μ ne vérifie pas nécessairement (2.33)). La théorie des espaces de Hardy et BMO est nettement plus délicate dans ce contexte. Ainsi, pour $p \neq 2$, définir des atomes en utilisant la norme L^p au lieu de la norme L^2 conduit à des espaces de Hardy différents. et les espaces BMO définis avec une norme L^p ne coïncident pas avec ceux définis par la norme L^2. De nombreux résultats d'analyse harmonique (opérateurs de Calderón–Zygmund, espaces de Hardy) ont toutefois été obtenus dans ce cadre (voir notamment [251, 271, 310, 309, 311, 320, 326]).

Une autre direction est celle d'espaces où la croissance du volume des boules est exponentielle en grand rayon. En supposant une version locale de (D) et des propriétés supplémentaires, Carbonaro, Mauceri et Meda, reprenant une idée de [205], ont développé dans [70] une théorie des espaces H^1 et BMO. Les atomes de H^1 sont à support dans des boules de petit rayon uniquement, la condition BMO porte seulement sur les boules de petit rayon. L'espace BMO est bien le dual de H^1. Des résultats d'interpolation sont obtenus et une théorie des opérateurs singulières est proposée. On trouve également une théorie des espaces de Hardy et des espaces BMO, ainsi que des résultats de continuité ou de non-continuité des transformées de Riesz sur les espaces L^p et les espaces de Hardy sur certains groupes de Lie à croissance exponentielle. Ces groupes de Lie sont, par exemple, des produits semi-directs de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}_+$ ([161–163, 169, 192, 289, 290, 317]) et les preuves reposent de manière essentielle sur cette structure de produit. On se reportera également aux références données dans la section 2.2.3.

3. Espaces de Hardy sur des Domaines Fortement Lipschitziens de $\mathbb{R}^n$ et Opérateurs Différentiels Elliptiques d'ordre 2 sous Forme Divergence

Dans [26, 27], nous avons donné des caractérisations des espaces de Hardy sur des domaines fortement lipschitziens de $\mathbb{R}^n$ en termes de fonctions maximales associées à certains opérateurs elliptiques d'ordre 2 sous forme divergence.

3.1. *Définitions*

Soient $n \geq 1$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine, c'est-à-dire un ouvert connexe. On dira que Ω est fortement lipschitzien si, et seulement si, $\partial\Omega$ est la réunion finie de portions de graphes de fonctions lipschitziennes (à rotation près), l'une au plus de ces portions étant non bornée. Dans cette classe de domaines, on trouve notamment les domaines spéciaux Lipschitz, c'est-à-dire ceux de la forme

$$\Omega = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ x_n > \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})\}$$

où $\varphi : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ est une fonction lipschitzienne. Font également partie de cette classe les domaines fortement lipschitziens bornés, et les domaines fortement lipschitziens extérieurs, c'est-à-dire ceux dont le complémentaire est compact.

Il existe une théorie des espaces de Hardy sur des domaines de $\mathbb{R}^n$, due notamment à Chang, Dafni, Jonsson, Krantz, Miyachi, Sjögren, Stein, Triebel, Wallin, Winkelvoss ([79, 80, 216, 264, 316]). Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un domaine, il est naturel, à l'instar de la théorie des espaces de Sobolev, de définir deux espaces de Hardy sur

Ω. Le premier, noté $H^1_r(\Omega)$, est formé des restrictions à Ω des fonctions de $H^1(\mathbb{R}^n)$, et est muni de la norme

$$\|f\|_{H^1_r(\Omega)} = \inf\{\|F\|_{H^1(\mathbb{R}^n)};\ F = f \text{ dans } \Omega\}.$$

Le deuxième, noté $H^1_z(\Omega)$, est formé des fonctions de $H^1(\mathbb{R}^n)$ à support dans $\overline{\Omega}$. On a évidemment $H^1_z(\Omega) \subset H^1_r(\Omega)$ et l'inclusion est stricte si $\Omega \neq \mathbb{R}^n$. En effet, on peut trouver un cube $Q \subset \Omega$ tel que χ_Q, la fonction indicatrice de Q, appartienne à $H^1_r(\Omega)$ (voir la décomposition atomique de $H^1_r(\Omega)$ dans la section 3.3.1), mais cette fonction n'appartient pas à $H^1_z(\Omega)$ car elle n'est pas d'intégrale nulle.

Avant de donner des caractérisations de ces espaces, citons un cas où ils sont très faciles à décrire. Il s'agit du cas où $\Omega = \mathbb{R}^n_+ := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ x_n > 0\}$. Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$Sx = (x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n).$$

Pour toute fonction f définie sur $\mathbb{R}^n_+$, son prolongement pair f_e est défini sur $\mathbb{R}^n$ par

$$f_e(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}^n_+, \\ f(Sx) & \text{si } x \in \mathbb{R}^n_-, \end{cases}$$

et son prolongement impair f_o est donné par

$$f_o(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}^n_+, \\ -f(Sx) & \text{si } x \in \mathbb{R}^n_-, \end{cases}$$

avec

$$\mathbb{R}^n_- = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ x_n < 0\}.$$

Alors $f \in H^1_r(\mathbb{R}^n_+)$ si, et seulement si, $f_o \in H^1(\mathbb{R}^n)$ et $f \in H^1_z(\mathbb{R}^n_+)$ si, et seulement si, $f_e \in H^1(\mathbb{R}^n)$ ([80], Corollaries 1.6 et 1.8). Il s'agit là d'un principe de réflexion pour $H^1_r(\mathbb{R}^n_+)$ et $H^1_z(\mathbb{R}^n_+)$.

Si Ω est un domaine fortement lipschitzien de $\mathbb{R}^n$, il est naturel de considérer un troisième espace de Hardy sur Ω. En effet, muni de la restriction de la distance euclidienne de $\mathbb{R}^n$ et de la mesure de Lebesgue, un domaine fortement lipschitzien de $\mathbb{R}^n$ est un espace de nature homogène. Il est donc possible de considérer aussi l'espace que l'on notera $H^1_{CW}(\Omega)$ et qui est l'espace de Hardy défini au sens de Coifman et Weiss (voir la section 2.4). Plus précisément, appelons atome de Coifman–Weiss toute fonction a à support dans $Q \cap \overline{\Omega}$, où Q est un cube centré dans Ω (mais non nécessairement inclus dans Ω) tel que $l(Q) \leq 2 \operatorname{diam}(\Omega)$, et vérifiant

$$\int a(x)dx = 0 \quad \text{et} \quad \|a\|_\infty \leq |Q \cap \Omega|^{-1}$$

(on rappelle que, dans la définition (2.34) d'un atome sur un espace de nature homogène, la norme L^2 peut être remplacée par toute norme L^p avec $p \in]1, +\infty]$). Comme précédemment, une fonction f appartient à $H^1_{CW}(\Omega)$ si, et seulement si, il existe une suite $(\lambda_n)_{n\geq 1} \in l^1$ et une suite d'atomes de Coifman–Weiss $(a_n)_{n\geq 1}$ telles que

$$f = \sum_{n\geq 1} \lambda_n a_n$$

avec convergence dans $L^1(\Omega)$. On définit alors $\|f\|_{H^1_{CW}(\Omega)}$ comme la borne inférieure des $\sum_{n\geq 1} |\lambda_n|$ prise sur toutes les décompositions possibles de f.

3.2. *Caractérisation par des opérateurs elliptiques d'ordre* 2

3.2.1. *Description des résultats pour les espaces globaux*

On a vu plus haut (section 2.3.2) que $H^1(\mathbb{R}^n)$ peut se caractériser en termes de fonctionnelles (fonctions maximales, fonctionnelles quadratiques) faisant intervenir le noyau de Poisson associé au Laplacien Δ. Peut-on caractériser de manière analogue les espaces $H^1_z(\Omega)$, $H^1_r(\Omega)$ et $H^1_{CW}(\Omega)$, si Ω est un domaine fortement lipschitzien de $\mathbb{R}^n$? Peut-on remplacer le laplacien par un opérateur elliptique d'ordre 2 sous forme divergence (cette dernière question vaut aussi pour $H^1(\mathbb{R}^n)$)?

L'objet de [27] est de répondre à ces questions. Pour présenter les résultats de ce travail, on décrit d'abord ici la classe d'opérateurs considérée.

Soit $A : \mathbb{R}^n \to M_n(\mathbb{C})$ une fonction mesurable bornée et uniformément elliptique, ce qui signifie que, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $\xi \in \mathbb{C}^n$,

$$\langle A(x)\xi, \xi\rangle \geq \delta|\xi|^2$$

(il s'agit de l'hypothèse (2.7)). Soit maintenant Ω un domaine fortement lipschitzien de $\mathbb{R}^n$. Si V est un sous-espace fermé de $W^{1,2}(\Omega)$ contenant $W^{1,2}_0(\Omega)$, il existe un unique opérateur maximal accrétif L sur $L^2(\Omega)$ de domaine maximal $\mathcal{D}(L)$ tel que, pour toute $f \in \mathcal{D}(L)$ et toute $g \in V$,

$$\langle Lf, g\rangle = \int_\Omega A(x)\nabla f(x) \cdot \overline{\nabla g}(x)dx.$$

Cet opérateur L est désigné par (Ω, A, V). Si $V = W^{1,2}_0(\Omega)$, on dira que L vérifie la condition au bord de Dirichlet (DBC), et si $V = W^{1,2}(\Omega)$, on dira que L vérifie la condition au bord de Neumann (NBC). Un tel opérateur engendre un semi-groupe d'opérateurs $(e^{-tL})_{t>0}$ analytique et contractant sur $L^2(\Omega)$. Il possède une unique racine carrée maximale accrétive $L^{1/2}$ et $-L^{1/2}$ engendre un semi-groupe d'opérateurs $(e^{-tL^{1/2}})_{t>0}$, lui aussi analytique et contractant sur $L^2(\Omega)$, et appelé semigroupe de Poisson de L.

Pour donner un sens aux énoncés qui suivent, on aura besoin que le semi-groupe de Poisson de L agisse sur $L^1(\Omega)$, ce qui n'est pas le cas en général (voir [254]). On introduit donc une condition sur le noyau du semigroupe e^{-tL}, semblable à la condition (G_∞) rencontrée dans la section 2.2.1.

Soit $\tau \in]0, +\infty]$. On dira que L vérifie (G_τ) si, et seulement si, le noyau de e^{-tL}, désigné par K_t, est une fonction mesurable sur $\Omega \times \Omega$, et s'il existe $C, c > 0$

et $\mu \in]0,1]$ tels que, pour presque tous $x, y, y' \in \Omega$ et tout $t \in]0, \tau[$,

$$\begin{cases} |K_t(x,t)| \leq \dfrac{C}{t^{n/2}} e^{-c\frac{|x-y|^2}{t}}, \\ \\ |K_t(x,y) - K_t(x,y')| + |K_t(y,x) - K_t(y',x)| \leq \dfrac{C}{t^{n/2}} \left(\dfrac{|y-y'|}{t^{1/2}} \right)^{\mu}. \end{cases} \qquad (G_\tau)$$

Si $\tau < +\infty$, on prendra $\tau = 1$. Quand A est à coefficients réels, (G_τ) est toujours vérifiée pour $\tau = +\infty$, sauf pour un domaine borné sous la condition Neumann, auquel cas $\tau = 1$ (voir [32]). On renvoie à la discussion suivant l'énoncé de (G_∞) (section 2.2.1 pour la validité de (G_τ) (voir aussi [32, 273]).

Si le semigroupe vérifie (G_∞), un calcul utilisant la formule de subordination

$$e^{-tL^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{-1/2} e^{-\frac{t^2}{4u}L} du \tag{3.1}$$

montre qu'il existe $C > 0$ et $\mu \in]0,1]$ tels que, pour tout $t > 0$ et presque tous $x, y \in \Omega$,

$$|p_t(x,y)| \leq \frac{C}{(t + |x-y|)^{n+1}} \tag{3.2}$$

et

$$|p_t(x,y) - p_t(x,y')| + |p_t(y,x) - p_t(y',x)| \leq \frac{C}{t^n} \left(\frac{|y-y'|}{t} \right)^{\mu}, \tag{3.3}$$

où p_t est le noyau de $P_t := e^{-tL^{1/2}}$, c'est-à-dire le noyau de Poisson de L. Sous l'hypothèse (G_1) et si Ω est borné, il existe $C > 0$ et $\mu \in]0,1]$ tels que, pour presque tous $x, y \in \Omega$, les mêmes estimations restent vraies pour $0 < t < 1$ et

$$|p_t(x,y)| \leq \frac{C}{t + |x-y|}$$

pour tout $t > 1$ et presque tous $x, y \in \Omega$. Les estimations de p_t sous l'hypothèse (G_1) résultent de (3.1) et d'une adaptation à ce contexte d'un principe du maximum intégral remontant à Grigor'yan ([178]). L'analyticité de $(P_t)_{t>0}$ implique que des estimations analogues sont vraies pour $t\partial_t p_t$.

On peut à présent définir les fonctionnelles qui serviront à caractériser les espaces de Hardy sur Ω. Si $x \in \Omega$, on note

$$\Gamma(x) = \{(y,t) \in \Omega \times]0, +\infty[;\ |y-x| < t\}$$

le cône de sommet x et d'ouverture 1.

On suppose (G_∞). Pour toute $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ telle que $y \mapsto |y|^{-n-1}|f(y)|$ soit intégrable sur Ω, on définit, pour tout $x \in \Omega$,

$$f^*_L(x) = \sup_{(y,t) \in \Gamma(x)} |P_t f(y)|. \tag{3.4}$$

Il s'agit d'une fonction maximale non tangentielle. On notera que cette définition dépend de la condition au bord pour L. On dira que $f \in H^1_{\max,L}(\Omega)$ si, et seulement si, $f_L^* \in L^1(\Omega)$ et on pose

$$\|f\|_{H^1_{\max,L}(\Omega)} := \|f_L^*\|_{L^1(\Omega)}.$$

Quand $n = 1$ et $\Omega = \mathbb{R}$, Auscher et Tchamitchian ont prouvé dans [30] que $H^1(\mathbb{R})$ coïncide avec $H^1_{\max,L}(\mathbb{R})$ (notons que, si $\Omega = \mathbb{R}^n$, alors $V = W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ et par conséquent L est unique). Dans [27], nous avons obtenu un résultat analogue en toute dimension et valable sur un domaine fortement lipschitzien. Cette fois, suivant la condition au bord sur L, on obtient un espace de Hardy différent sur Ω. En effet, de manière intuitive, si f est une fonction sur Ω et si on veut se ramener à la caractérisation maximale des espaces de Hardy sur $\mathbb{R}^n$, il faut pouvoir écrire

$$\int_\Omega p_t(x,y)f(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{p}_t(x,y)\widetilde{f}(y)dy \tag{3.5}$$

où $\widetilde{f}$ est un prolongement de f et $\widetilde{p}_t$ un prolongement de p_t vérifiant encore des hypothèses du type (3.2) et (3.3). Si $f \in H^1_r(\Omega)$, on sait seulement que f possède un prolongement à $H^1(\mathbb{R}^n)$, ce qui oblige, pour pouvoir écrire (3.5), à avoir $p_t(x,y) = 0$ dès que $y \notin \Omega$, donc à avoir DBC. Par contre, si $f \in H^1_z(\Omega)$, le prolongement de f par 0 hors de Ω est encore dans $H^1(\mathbb{R}^n)$, et on peut donc avoir NBC. Notre résultat précis est le suivant:

Théorème 3.1. ([27], *Théorème* 1) *Soient Ω un domaine fortement lipschitzien de $\mathbb{R}^n$ ou $\Omega = \mathbb{R}^n$ et $A : \mathbb{R}^n \to M_n(\mathbb{C})$ mesurable, bornée et uniformément elliptique. On suppose que $L = (\Omega, A, V)$ (avec $V = W^{1,2}(\Omega)$ ou $V = W_0^{1,2}(\Omega)$) vérifie (G_∞). Alors*:

(a) *Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, on a $H^1(\mathbb{R}^n) = H^1_{\max,L}(\mathbb{R}^n)$.*
(b) *Si L vérifie DBC et si $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$ n'est pas borné, alors $H^1_r(\Omega) = H^1_{\max,L}(\Omega)$.*
(c) *Si L vérifie NBC, alors $H^1_z(\Omega) = H^1_{\max,L}(\Omega)$.*

Un outil important de la preuve de ce théorème est la caractérisation des espaces $H^1_z(\Omega)$, $H^1_r(\Omega)$ et $H^1_{CW}(\Omega)$ au moyen de fonctionnelles quadratiques de type intégrale d'aire. Tout comme pour la fonctionnelle de Lusin (voir la section 2.3.2, on définit, pour tout $x \in \Omega$,

$$Sf(x) = \left(\iint_{\Gamma(x)} t^{-1-n} |t\overline{\nabla} P_t f(y)|^2 dydt \right)^{1/2}$$

et

$$sf(x) = \left(\iint_{\Gamma(x)} t^{-1-n} |t\partial_t P_t f(y)|^2 dydt \right)^{1/2},$$

où $|\overline{\nabla} P_t f(y)|^2 := |\nabla P_t f(y)|^2 + |\partial_t P_t f(y)|^2$, de sorte que $sf(x) \leq Sf(x)$ pour tout $x \in \Omega$. On a alors la proposition suivante:

Proposition 3.1. ([27], *Proposition* 5) *On reprend les notations et les hypothèses du Théorème 3.1. Soit $f \in L^1(\Omega)$. Alors*:

(a) *Si* $\Omega = \mathbb{R}^n$, *on a*

$$\|f\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|sf\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|Sf\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{H^1_{\max,L}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}.$$

(b) *Si* L *vérifie DBC et si* $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$ *n'est pas borné, on a*

$$\|f\|_{H^1_r(\Omega)} \lesssim \|sf\|_{L^1(\Omega)} \lesssim \|Sf\|_{L^1(\Omega)} \lesssim \|f\|_{H^1_{\max,L}(\Omega)} \lesssim \|f\|_{H^1_r(\Omega)}.$$

(c) *Si* L *vérifie NBC, on a*

$$\|f\|_{H^1_z(\Omega)} \lesssim \|f\|_{H^1_{CW}(\Omega)} \lesssim \|sf\|_{L^1(\Omega)} \lesssim \|Sf\|_{L^1(\Omega)} \lesssim \|f\|_{H^1_{\max,L}(\Omega)} \lesssim \|f\|_{H^1_z(\Omega)}.$$

Le Théorème 3.1 est clairement une conséquence de la Proposition 3.1.

Il faut noter que, dans les assertions (c) du Théorème 3.1 et de la Proposition 3.1, l'hypothèse (G_∞) oblige Ω à être non borné.

La condition que $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$ n'est pas borné dans (b) ne sert que pour $\|f\|_{H^1_r(\Omega)} \lesssim \|sf\|_{L^1(\Omega)}$. Cette inégalité est probablement fausse quand $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$ est borné, mais aucun contre-exemple ne semble connu.

Enfin, une conséquence de l'assertion (c) de la Proposition 3.1 est que, si Ω est un domaine fortement lipschitzien non borné, on a $H^1_z(\Omega) = H^1_{CW}(\Omega)$. En effet, dans ce cas, (G_∞) est satisfaite pour $L = -\Delta$, par exemple. Si Ω est spécial Lipschitz, cette égalité est implicite dans ([80]) et peut être obtenue comme conséquence de la décomposition atomique de $H^1_z(\Omega)$. Nous reviendrons sur cette comparaison d'espaces de Hardy dans la section 3.3.

3.2.2. *Schémas de preuves*

On décrit brièvement la preuve de la Proposition 3.1.

Pour les inégalités du type $\|f\|_{H^1_{\max,L}(\Omega)} \lesssim \|f\|_{H^1(\Omega)}$ dans (a) et (b), il suffit de traiter le cas où f est un atome dans $H^1(\mathbb{R}^n)$ ou dans $H^1_r(\Omega)$ (voir la section 3.3.1 plus loin) et de raisonner comme dans [159], Chap. 3, Théorème 3.4 en utilisant les estimations de taille et de régularité sur p_t. Dans le cas de $H^1_z(\Omega)$, au lieu d'utiliser la décomposition atomique, qui est plus délicate à obtenir (voir encore la section 3.3.1), on prolonge p_t en une fonction sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ vérifiant les mêmes estimations de taille et de régularité et on utilise la Remarque 3.5 pour raisonner avec des atomes de $H^1(\mathbb{R}^n)$.

La preuve des inégalités du type $\|Sf\|_{L^1(\Omega)} \lesssim \|f\|_{H^1_{\max,L}(\Omega)}$ suit les idées de [149], Théorème 8, de [93], Section 6 et de [30], Lemme II.10. Elle consiste essentiellement à établir une inégalité aux bons λ, avec les adaptations techniques nécessaires, dues notamment au fait qu'on travaille sur un domaine et avec un opérateur à coefficients irréguliers. En particulier, les preuves font appel à des inégalités de Caccioppoli jusqu'au bord ([33]), qui remplacent la propriété de valeur moyenne pour les fonctions harmoniques, utilisée dans [149] quand $L = -\Delta$.

Enfin, pour établir les inégalités du type $\|f\|_{H^1(\Omega)} \lesssim \|sf\|_{L^1(\Omega)}$, on commence par prouver:

$$\left|\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx\right| \lesssim \|sf\|_1\|\varphi\|_{BMO(\Omega)}. \tag{3.6}$$

Dans cette inégalité, $BMO(\Omega)$ est le dual de l'espace $H^1(\Omega)$ correspondant. Il est connu que le dual de $H^1(\mathbb{R}^n)$ est $BMO(\mathbb{R}^n)$ (section 2.3.4) et que le dual de $H^1_{CW}(\Omega)$ est $BMO_{CW}(\Omega)$ (section 2.4.1). On en déduit facilement que le dual de $H^1_r(\Omega)$ est $BMO_z(\Omega)$, c'est-à-dire l'espace des fonctions de $BMO(\mathbb{R}^n)$ à support dans $\overline{\Omega}$. Une fois (3.6) établie, on obtient l'appartenance de f à $H^1(\Omega)$ en utilisant le fait que $H^1(\Omega)$ est lui-même le dual d'un espace $VMO(\Omega)$ adapté, défini comme l'adhérence des fonctions continues à support compact dans Ω dans l'espace $BMO(\Omega)$ correspondant. On reviendra sur ces questions de dualité dans la section 3.3.2.

La preuve de (3.6) passe par les espaces de tentes ([93]) et les liens entre espaces BMO et mesures de Carleson, suivant des idées contenues dans [296], Chap. 4, sections 4.3 et 4.4.

Les arguments qui précèdent sont valables quand $f \in L^1(\Omega) \cap L^2(\Omega)$. Un passage à la limite permet de s'affranchir de l'hypothèse $f \in L^2(\Omega)$.

3.2.3. *Les résultats pour les espaces locaux*

On peut aussi donner une version locale du Théorème 3.1 et de la Proposition 3.1. En remplaçant $H^1(\mathbb{R}^n)$ par $h^1(\mathbb{R}^n)$, on définit les espaces $h^1_r(\Omega)$ et $h^1_z(\Omega)$. On définit aussi un atome local de Coifman et Weiss comme étant une fonction a à support dans $Q \cap \overline{\Omega}$, où Q est un cube centré dans Ω (mais non nécessairement inclus dans Ω) tel que $l(Q) \leq 2\text{diam}(\Omega)$, et vérifiant

$$\|a\|_\infty \leq |Q \cap \Omega|^{-1},$$

$$\int a(x)dx = 0 \quad \text{si } l(Q) \leq \delta.$$

Ici, $\delta > 0$ est une constante ne dépendant que de Ω à choisir. On notera que, si $l(Q) > \delta$, on n'impose aucune condition de moment nul pour a. On définit alors $h^1_{CW}(\Omega)$ comme $H^1_{CW}(\Omega)$, en remplaçant les atomes de Coifman et Weiss par les atomes locaux de Coifman et Weiss. L'espace $h^1_{CW}(\Omega)$ ainsi obtenu ne dépend pas du choix de $\delta > 0$, pourvu qu'il existe bien un atome local de Coifman–Weiss d'intégrale non nulle.

Soit $L = (\Omega, A, V)$ comme plus haut. On définit alors des versions locales des fonctions maximales non tangentielles associées à L comme suit: si $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ et $y \mapsto |f(y)||y|^{-n-1} \in L^1(\Omega)$, on définit, pour tout $x \in \Omega$,

$$f^*_{L,\text{loc}}(x) = \sup_{(y,t)\in\Omega\times\,]0,1[;\,|y-x|<t} |P_t f(y)|.$$

On dit que $f \in h^1_{\max,L}$ si, et seulement si, $f^*_{L,\mathrm{loc}} \in L^1(\Omega)$. On définit aussi les fonctionnelles S_{loc} et s_{loc} en remplaçant dans S et s les cônes par des cônes tronqués à $t < 1$. Alors:

Théorème 3.2. ([27], *Théorème* 2) *Soient* Ω *un domaine fortement lipschitzien de* $\mathbb{R}^n$ *ou* $\Omega = \mathbb{R}^n$ *et* $A : \mathbb{R}^n \to M_n(\mathbb{C})$ *mesurable, bornée et uniformément elliptique. On suppose que* $L = (\Omega, A, V)$ *(avec* $V = W^{1,2}(\Omega)$ *ou* $V = W^{1,2}_0(\Omega)$*) vérifie* (G_∞)*. Alors*:

(a) *Si* $\Omega = \mathbb{R}^n$, *on a* $h^1(\mathbb{R}^n) = h^1_{\max,L}(\mathbb{R}^n)$.
(b) *Si* L *vérifie DBC, alors* $h^1_r(\Omega) = h^1_{\max,L}(\Omega)$.
(c) *Si* L *vérifie NBC, alors* $h^1_z(\Omega) = h^1_{\max,L}(\Omega)$.

Si Ω *est borné, les conclusions de* (b) *et* (c) *restent vraies si on suppose seulement* (G_1).

Ce théorème est une conséquence de la proposition suivante, version locale de la Proposition 3.1:

Proposition 3.2. ([27], *Proposition* 19) *Soient* Ω *un domaine fortement lipschitzien de* $\mathbb{R}^n$ *ou* $\Omega = \mathbb{R}^n$ *et* $A : \mathbb{R}^n \to M_n(\mathbb{C})$ *mesurable, bornée et uniformément elliptique. On suppose que* $L = (\Omega, A, V)$ *(avec* $V = W^{1,2}(\Omega)$ *ou* $V = W^{1,2}_0(\Omega)$*) vérifie* (G_∞)*. Soit* $f \in L^1(\Omega)$*. Alors*:

(a) *Si* $\Omega = \mathbb{R}^n$, *on a*

$$\|f\|_{h^1(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|s_{\mathrm{loc}} f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|S_{\mathrm{loc}} f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{h^1_{\max,L}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{h^1(\mathbb{R}^n)}.$$

(b) *Si* L *vérifie DBC, on a*

$$\|f\|_{h^1_r(\Omega)} \lesssim \|s_{\mathrm{loc}} f\|_{L^1(\Omega)} \lesssim \|S_{\mathrm{loc}} f\|_{L^1(\Omega)} \lesssim \|f\|_{h^1_{\max,L}(\Omega)} \lesssim \|f\|_{h^1_r(\Omega)}.$$

(c) *Si* L *vérifie NBC, on a*

$$\|f\|_{h^1_z(\Omega)} \lesssim \|s_{\mathrm{loc}} f\|_{L^1(\Omega)} \lesssim \|S_{\mathrm{loc}} f\|_{L^1(\Omega)} \lesssim \|f\|_{h^1_{\max,L}(\Omega)} \lesssim \|f\|_{h^1_z(\Omega)}.$$

Si Ω *est borné, les conclusions de* (b) *et* (c) *restent vraies si on suppose seulement* (G_1).

Signalons enfin que, dans les résultats qui précèdent, la fonction maximale non tangentielle utilisée peut être remplacée par des fonctions maximales non tangentielles ou verticales associées au noyau de la chaleur engendré par L. Plus précisément, sous les hypothèses du Théorème 3.1, $f \in H^1_{\max,L}(\Omega)$ si, et seulement si,

$$\sup_{t>0} |e^{-tL} f(x)| \in L^1(\Omega),$$

ou encore si, et seulement si,

$$\sup_{(y,t)\in\Omega\times\,]0,+\infty[\,;\,|y-x|<\sqrt{t}} |e^{-tL}f(y)| \in L^1(\Omega).$$

On peut aussi énoncer une version locale de ce résultat, en remplaçant $H^1_{\max,L}(\Omega)$ par $h^1_{\max,L}(\Omega)$ et $t>0$ par $0<t<t_0$ pour un $t_0>0$ quelconque. Enfin, si Ω est borné, cet énoncé local reste valable sous l'hypothèse (G_1). Pour tous ces résultats, voir [27], Théorème 20.

3.3. *Comparaison avec d'autres résultats, perspectives*

3.3.1. *Décomposition atomique*

Dans toute cette section, Ω désigne un ouvert fortement lipschitzien de $\mathbb{R}^n$. Dans [26], nous avons complété des résultats concernant la décomposition atomique pour les espaces de Hardy sur Ω.

On précise d'abord quelques notations. Si $Q\subset\Omega$, on dira que Q est de type (a) si, et seulement si, $4Q\subset\Omega$ (voir la section 1 pour cette notation). On dira que Q est de type (b) si, et seulement si, $2Q\subset\Omega$ mais $4Q\cap\partial\Omega\neq\emptyset$.

Un atome de type (a) est une fonction $a\in L^2(\Omega)$ à support dans un cube Q de type (a) et vérifiant

$$\int a(x)dx = 0 \quad \text{et} \quad \|a\|_{L^2(Q)} \le |Q|^{-\frac{1}{2}}.$$

Un atome de type (b) est une fonction $a\in L^2(\Omega)$ à support dans un cube Q de type (b) et vérifiant

$$\|a\|_{L^2(Q)} \le |Q|^{-\frac{1}{2}}$$

(noter qu'on n'impose ici aucune condition de moment nul).

On appelle $H^1_{z,a}(\Omega)$ l'espace des fonctions f qui peuvent s'écrire

$$f=\sum_{\text{(a)}}\lambda_Q a_Q,$$

où les a_Q sont des atomes de type (a), $\sum_{\text{(a)}}|\lambda_Q|<+\infty$ et la série converge dans $L^1(\Omega)$. Ici et par la suite, la notation $\sum_{\text{(a)}}$ veut dire que les cubes sur lesquels porte la somme sont de type (a). On définit la norme de façon analogue à celle des espaces de Hardy atomiques déjà rencontrés.

On appelle $H^1_{r,a}(\Omega)$ l'espace des fonctions f qui peuvent s'écrire

$$f=\sum_{\text{(a)}}\lambda_Q a_Q+\sum_{\text{(b)}}\mu_Q b_Q,$$

où les a_Q sont des atomes de type (a), les b_Q des atomes de type (b), $\sum_{\text{(a)}}|\lambda_Q| + \sum_{\text{(b)}}|\mu_Q|<+\infty$ et la série converge dans $L^1(\Omega)$, aves la définition usuelle de la norme.

On a alors:

Théorème 3.3.

(a) $H^1_r(\Omega) \subset H^1_{r,a}(\Omega)$,
(b) *si* $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$ *est non borné, alors* $H^1_r(\Omega) = H^1_{r,a}(\Omega)$,
(c) $H^1_z(\Omega) = H^1_{z,a}(\Omega)$.

On donne quelques commentaires sur ce résultat. L'énoncé (a) dit que toute fonction de $H^1_r(\Omega)$ a une décomposition atomique avec des atomes de type (a) et (b), et l'assertion (b) dit que, si $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$ est non borné, $H^1_r(\Omega)$ est exactement l'espace des fonctions qui possèdent une telle décomposition. Ces résultats étaient déjà connus lorsque Ω est spécial Lipschitz ou borné ([80, 264]), et la conclusion de (b) est fausse si $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$ est borné ([26], Remarque 16).

L'assertion (c), qui est plus profonde, dit que toute fonction de $H^1(\mathbb{R}^n)$ à support dans $\overline{\Omega}$ peut se décomposer à l'aide d'atomes de type (a). Quand Ω est spécial Lipschitz (ou borné, en considérant alors l'espace de Hardy local), il est prouvé dans [80] que toute fonction de $H^1_z(\Omega)$ possède une décomposition atomique en atomes dont le support est un cube inclus dans Ω (mais non nécessairement de type (a), bien que cette amélioration soit implicite dans la preuve de [80], comme cela est remarqué dans [79]). Une autre façon d'obtenir une décomposition en atomes dont le support est un cube inclus dans Ω, utilisée dans [77], est de procéder par dualité en utilisant un théorème de Jones sur les domaines ayant la propriété d'extension pour BMO (nous reviendrons sur ce point plus bas). Il est également possible d'utiliser les résultats de [216].

L'argument que nous donnons dans [26], et qui fournit bien une décomposition atomique avec des atomes de type (a), est le suivant: on sait déjà que $H^1_z(\Omega) = H^1_{CW}(\Omega)$, et il suffit donc de prouver que $H^1_{CW}(\Omega) = H^1_{z,a}(\Omega)$. L'inclusion $H^1_{z,a}(\Omega) \subset H^1_{CW}(\Omega)$ est évidente. Pour l'inclusion réciproque, nous utilisons une idée qui nous a été communiquée par Lou et McIntosh: soit a un atome de $H^1_{CW}(\Omega)$. Comme Ω est Lipschitz, $a \in L^2(\Omega)$ et a est d'intégrale nulle, a peut s'écrire $a = \operatorname{div} b$ avec $b \in W^{1,2}_0(\Omega, \mathbb{C}^n)$ et $\|Db\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|a\|_{L^2(\Omega)}$ (voir par exemple [272], le Lemme 4.1 et la section 1 pour la notation utilisée). On écrit alors $b = \sum_k \chi_k b$ où $(\chi_k)_{k\geq 1}$ est une partition de l'unité adaptée à une partition de Ω en cubes de Whitney et on applique l'opérateur divergence à cette écriture, ce qui donne la décomposition atomique souhaitée pour a. Cette idée a été reprise par la suite dans un travail sur l'inversion de la divergence dans des domaines arbitraires ([135]). Elle donne en particulier une "décomposition atomique" pour les fonctions de $L^p(\Omega)$ d'intégrale nulle, $1 < p < +\infty$ (voir la Proposition 4.2 dans [135]).

3.3.2. *Dualité*

On précise ici la question de la dualité entre espaces de Hardy et espaces BMO sur Ω, également clarifiée dans [26]. On définit d'abord

$$BMO_z(\Omega) = \{f \in BMO(\mathbb{R}^n);\ \operatorname{supp} f \subset \overline{\Omega}\}$$

et

$$BMO_r(\Omega) = \{f \in BMO(\mathbb{R}^n);\ \text{il existe } F \in BMO(\mathbb{R}^n) \text{ tel que } F = f \text{ dans } \Omega\}.$$

On considère également les espaces BMO sur Ω définis par des conditions d'oscillation. Plus précisément, si $f \in L^2_{\text{loc}}(\Omega)$, on dira que $f \in BMO_{r,a}(\Omega)$ si, et seulement si,

$$\|f\|^2_{BMO_{z,a}(\Omega)} := \sup\left(\sup_{(a)} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|^2 dx,\ \sup_{(b)} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|^2 dx\right) < +\infty$$

(la notation $\sup\limits_{(a)}$ signifie que la borne supérieure est prise sur tous les cubes de type (a)) et que $f \in BMO_{r,a}(\Omega)$ si, et seulement si,

$$\|f\|^2_{BMO_{r,a}(\Omega)} := \sup_{(a)} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|^2 dx < +\infty.$$

Enfin, $f \in BMO_{CW}(\Omega)$ si, et seulement si,

$$\|f\|^2_{BMO_{CW}(\Omega)} := \sup \frac{1}{|Q \cap \Omega|}\int_{Q\cap\Omega} |f(x) - f_{Q\cap\Omega}|^2 dx < +\infty,$$

où la borne supérieure est prise sur tous les cubes Q centrés dans Ω.

On a alors:

Théorème 3.4.

1. *Le dual de* $H^1_{z,a}(\Omega)$ *est* $BMO_{r,a}(\Omega)$.
2. *Le dual de* $H^1_{r,a}(\Omega)$ *est* $BMO_{z,a}(\Omega)$.
3. *Le dual de* $H^1_r(\Omega)$ *est* $BMO_z(\Omega)$.
4. *Le dual de* $H^1_z(\Omega)$ *est* $BMO_r(\Omega)$.

De plus, on peut comparer les différents espaces BMO sur Ω:

Théorème 3.5.

1. $BMO_{z,a}(\Omega) \subset BMO_z(\Omega)$,
2. *si* $\mathbb{R}^n\backslash\Omega$ *est non borné, alors* $BMO_{z,a}(\Omega) = BMO_z(\Omega)$,
3. $BMO_r(\Omega) = BMO_{r,a}(\Omega) = BMO_{CW}(\Omega)$.

On donne également quelques commentaires sur ces résultats. Les assertions 3. et 4. du Théorème 3.4 résultent facilement de la dualité $H^1(\mathbb{R}^n) - BMO(\mathbb{R}^n)$ via le théorème de Hahn–Banach. L'assertion 2. s'obtient par un argument analogue à la preuve de la dualité $H^1(\mathbb{R}^n) - BMO(\mathbb{R}^n)$ présentée dans [296], Chap. 4, section 1.2.

L'assertion 1. est plus difficile. Nous procédons ainsi: on a par définition $BMO_{CW}(\Omega) \subset BMO_{r,a}(\Omega)$, et l'inclusion $BMO_{r,a}(\Omega) \subset (H^1_{z,a}(\Omega))'$ est immédiate. Or $H^1_{z,a}(\Omega) = H^1_{CW}(\Omega)$, donc $(H^1_{z,a}(\Omega))' = (H^1_{CW}(\Omega))' = BMO_{CW}(\Omega)$. Finalement, $BMO_{CW}(\Omega) = BMO_{r,a}(\Omega)$ et on en déduit, en utilisant [96], que le dual de $H^1_{z,a}(\Omega) = H^1_z(\Omega) = H^1_{CW}(\Omega)$ est $BMO_{CW}(\Omega) = BMO_{r,a}(\Omega)$. Ce résultat de dualité est déjà prouvé dans [77] pour des domaines bornés et les espaces de Hardy et BMO locaux, mais la preuve semble incomplète.

Les assertions 1 et 2. du Théorème 3.5 résultent facilement par dualité des assertions 1. et 2. du Théorème 3.3. La preuve de l'assertion 3. a déjà été expliquée.

On peut également comparer ce qui précède à des résultats d'extension pour les espaces BMO. On dira qu'une fonction $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ appartient à $BMO(\Omega)$ si, et seulement si,

$$\sup_{Q \subset \Omega} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q|^2 dx < +\infty.$$

Ici, la borne supérieure est calculée sur tous les cubes $Q \subset \Omega$, et pas seulement sur les cubes de type (a) comme dans la définition de $BMO_{r,a}(\Omega)$. Dans [215], Jones (dont nous reprenons ici la notation $BMO(\Omega)$) a donné une caractérisation géométrique des domaines Ω pour lesquels $BMO(\Omega) = BMO_r(\Omega)$. Les domaines ayant cette propriété sont appelés domaines uniformes, et la classe de ces domaines contient celle des domaines fortement lipschitziens.

On notera aussi $H^1_{at}(\Omega)$ l'espace des fonctions f qui peuvent se décomposer sous la forme

$$f = \sum_Q \lambda_Q a_Q$$

où chaque Q est un cube inclus dans Ω (non nécessairement de type (a)), a_Q est un atome de $H^1(\mathbb{R}^n)$ à support dans Q et $\sum_Q |\lambda_Q| < +\infty$, avec convergence de la série dans $L^1(\Omega)$.

Adolfsson et Jerison ont montré dans [3] que, pour tout domaine borné Ω (sans aucune autre hypothèse sur Ω), le dual de $H^1_{at}(\Omega)$ est $BMO(\Omega)$. Un corollaire de ce résultat est que

$$H^1_z(\Omega) = H^1_{at}(\Omega)$$

si, et seulement si, Ω est un domaine uniforme. En d'autres termes, on peut décomposer toute fonction de $H^1(\mathbb{R}^n)$ à support dans $\overline{\Omega}$ avec des atomes à support dans des cubes inclus dans Ω si, et seulement si, Ω est un domaine uniforme.

3.3.3. *Autres résultats*

Dans [197], Hofmann et Mayboroda considèrent des espaces de Hardy sur $\mathbb{R}^n$ associés à des opérateurs elliptiques du type $L = -\mathrm{div}(A\nabla)$ pour une matrice A uniformément elliptique et bornée et à valeurs complexes. Rappelons qu'en général, le noyau du semi-groupe engendré par L ne vérifie pas les estimations (G_∞) (voir le début de la section 3.2) et les résultats de [27] ne s'appliquent pas, même dans $\mathbb{R}^n$.

En général, l'espace de Hardy $H^1(\mathbb{R}^n)$ n'est pas "adapté" à l'opérateur L. Par exemple, les transformées de Riesz $\partial_{x_j} L^{-1/2}$ ne sont pas continues de $H^1(\mathbb{R}^n)$ dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ en général, car si elles l'étaient, elles seraient par interpolation continues de

$L^p(\mathbb{R}^n)$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour tout $1 < p < 2$, ce qui est faux pour certains opérateurs L (voir la section 2.2.1).

Hofmann et Mayboroda définissent l'espace $H^1_L(\mathbb{R}^n)$ en introduisant une notion de "molécule" adaptée à l'opérateur L. Dans l'espace $H^1(\mathbb{R}^n)$ ou, plus généralement, dans l'espace H^1 sur un espace de nature homogène, une notion de molécule a été définie (voir [96, 305]). Il s'agit d'une fonction $m \in L^2 \cap L^1$ d'intégrale nulle, qui n'est pas supposée à support dans une boule B mais à laquelle on peut associer une boule B telle que les normes L^2 de m sur $2B$ et sur $2^{j+1}B \backslash 2^j B$ pour tout $j \geq 1$ sont suffisamment décroissantes. Une telle fonction m appartient à H^1 avec une norme contrôlée par une constante ne dépendant que de l'espace ambiant.

Dans [197], les auteurs définissent une molécule comme une fonction $m \in L^2(\mathbb{R}^n)$ (l'exposant 2 pouvant être modifié dans un intervalle autour de 2) qui peut s'écrire $m = L^k m_k$ pour tout $1 \leq k \leq M$, où:

1. $M > \frac{n}{4}$ est fixé,
2. il existe un cube $Q \subset \mathbb{R}^n$ tel que la fonction m et chaque fonction m_k vérifient des estimations L^2 à l'échelle sur $2Q$ et sur $2^{j+1}Q \backslash 2^j Q$ pour tout $j \geq 1$ (voir [197] pour la définition exacte).

On notera que la condition $m = L^k m_k$ remplace la condition de moment nul pour m (cette condition de moment nul n'étant pas adaptée à l'opérateur L du point de vue, par exemple, des transformées de Riesz).

On définit alors $H^1_L(\mathbb{R}^n)$ comme l'espace des fonctions $f = \sum_i \lambda_i m_i$ où $\sum |\lambda_i| < +\infty$ et les m_i sont des molécules, avec convergence de la série dans $L^1(\mathbb{R}^n)$. La norme est définie de manière usuelle. Il apparaît que cet espace, dont la définition fait intervenir trois paramètres (dont M), est en fait indépendant du choix de ces paramètres pourvu qu'ils restent dans certains intervalles ne dépendant que de n et de l'opérateur L.

Les molécules ainsi définies sont en particulier des molécules de l'espace $H^1(\mathbb{R}^n)$ classique, de sorte que $H^1_L(\mathbb{R}^n) \subset H^1(\mathbb{R}^n)$, mais il n'y a pas égalité en général. En particulier, les transformées de Riesz $\partial_{x_j} L^{-1/2}$ sont continues de $H^1_L(\mathbb{R}^n)$ dans $L^1(\mathbb{R}^n)$, alors qu'elles ne le sont pas de $H^1(\mathbb{R}^n)$ dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ en général, comme nous l'avons vu.

L'espace $H^1_L(\mathbb{R}^n)$ peut aussi être caractérisé via la fonctionnelle d'aire de Lusin, et une fonction maximale appropriée, qui est une variante de (3.4) où la borne supérieure est remplacée par une moyenne L^2 (cette idée provient de [221]).

Les auteurs définissent également un espace $BMO_L(\mathbb{R}^n)$, où la moyenne sur un cube est "remplacée" par l'application du semigroupe e^{-tL} à la fonction, avec un choix adapté de $t > 0$. L'espace $BMO_L(\mathbb{R}^n)$ possède une caractérisation en termes de mesures de Carleson construites à partir de L. De plus, $BMO_{L^*}(\mathbb{R}^n)$ est le dual de $H^1_L(\mathbb{R}^n)$. Très récemment, Jiang et Yang ont défini un espace $VMO_L(\mathbb{R}^n)$ dont le dual est $H^1_{L^*}(\mathbb{R}^n)$ ([212]).

Les résultats de [27] montrent que, lorsque le semigroupe engendré par L satisfait (G_∞), l'espace $H^1_L(\mathbb{R}^n)$ coïncide avec $H^1(\mathbb{R}^n)$.

L'étude de cet espace $H^1_L(\mathbb{R}^n)$ a été étendue dans plusieurs directions dans [196, 198], nous y reviendrons à la fin de la section 5.

En même temps que s'élaborait [197], nous avons développé dans [23] une théorie des espaces de Hardy de formes différentielles sur des variétés riemanniennes. Les deux théories présentent de nombreuses similitudes. Les résultats de [23] seront présentés plus en détail dans la section 5.

Dans [129], les auteurs étendent les résultats de [27] au cas des espaces $h^p(\Omega)$ pour $0 < p \leq 1$, en se plaçant dans des domaines semiconvexes bornés Ω. Ils considèrent des espaces de Hardy $h^p_{\Delta_D}(\Omega)$ et $h^p_{\Delta_N}(\Omega)$ associés respectivement aux laplaciens Dirichlet et Neumann sur Ω et montrent que $h^p_r(\Omega) \subset h^p_{\Delta_D}(\Omega)$ pour tout $0 < p \leq 1$, cependant que $h^p_z(\Omega) = h^p_{\Delta_N}(\Omega)$ si Ω est convexe. Ils en déduisent la continuité de l'opérateur $f \mapsto \frac{\partial^2 \mathcal{G}_D f}{\partial x_i \partial x_j}$ de $h^p_r(\Omega)$ dans lui-même pour $\frac{n}{n+1} < p \leq 1$ et de l'opérateur $f \mapsto \frac{\partial^2 \mathcal{G}_N f}{\partial x_i \partial x_j}$ de $h^p_z(\Omega)$ dans $h^p_r(\Omega)$ pour $\frac{n}{n+1} < p \leq 1$, complétant ainsi des résultats de Chang, Dafni et Stein ([79]). Ici, $\mathcal{G}_D$ (resp. $\mathcal{G}_N$) désigne l'opérateur de Green associé au Laplacien Dirichlet (resp. Neumann) dans Ω.

On ajoutera que d'autres travaux ont été consacrés aux espaces de Hardy et aux espaces BMO associés à des opérateurs abstraits dans des espaces de nature homogène, avec des hypothèses d'estimations ponctuelles sur le noyau du semi-groupe engendré par l'opérateur ([117, 132, 133]). Une théorie du même ordre existe aussi pour les espaces H^1 et BMO produit ([118]). On peut également signaler des travaux sur les espaces de Hardy associés à des opérateurs de Schrödinger sur $\mathbb{R}^n$ ([137, 139, 140]) ou sur des domaines fortement lipschitziens de $\mathbb{R}^n$ ([202]). Des espaces de Orlicz–Hardy associés à des opérateurs vérifiant seulement des estimations de type Gaffney sont étudiés dans [213].

3.3.4. *Questions ouvertes et perspectives*

Question ouverte 3.1. Dans les assertions (b) du Théorème 3.1 et de la Proposition 3.1, peut-on trouver un contre-exemple si $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$ est borné?

Direction de recherche 3.1. Soit Ω un domaine fortement lipschitzien de $\mathbb{R}^n$ et $L = -\mathrm{div}(A\nabla)$ comme précédemment. Si on définit un espace $H^1_{L_N}(\Omega)$ associé à L_N en suivant la procédure de [197], cet espace est-il égal à l'espace des fonctions de $H^1_{L'}(\mathbb{R}^n)$ à support dans $\overline{\Omega}$, pour un certain $L' = -\mathrm{div}(A'\nabla)$? De même, l'espace $H^1_{L_D}(\Omega)$ associé à L_D est-il égal à l'espace des restrictions à Ω de l'espace fonctions de $H^1_{L'}(\mathbb{R}^n)$ pour un certain $L' = -\mathrm{div}(A'\nabla)$? De tels résultats étendraient les conclusions de [27] au cas des opérateurs satisfaisant seulement des estimations de type Gaffney.

Direction de recherche 3.2. Il est aussi possible de définir une famille d'espaces de Hardy H^p associés à L pour tout $1 \leq p < +\infty$. Cela a été fait sous des hypothèses de type (G_∞) et sur un espace de nature homogène dans [18] et sous des hypothèses de type Gaffney dans [23] (pour des espaces de formes différentielles sur une variété riemannienne) et dans [196] (pour des espaces de fonctions dans un cadre abstrait lorsque l'opérateur L est symétrique). Ces définitions peuvent aussi se transposer au cas des domaines fortement lipschitziens de $\mathbb{R}^n$. Sous l'hypothèse (G_∞), il est prouvé dans [18] que $H^p = L^p$ pour tout $1 < p < +\infty$. Sous des hypothèses Gaffney, on a $H^p \subset L^p$ pour $1 < p < 2$ ([23], Corollaire 6.3, [196], remarque après Definition 9.6) et l'inclusion réciproque pour $2 < p < +\infty$. Si on ne suppose plus (G_∞), sous quelles hypothèses sur l'opérateur L a-t-on l'égalité $H^p = L^p$? Les questions posées au paragraphe précédent peuvent aussi être formulées pour les espaces H^p.

4. Estimations Limites Pour la Racine Carrée d'opérateurs Elliptiques d'ordre 2 sous Forme Divergence

Cette section reprend les résultats de [28, 29].

4.1. *Introduction*

Dans toute cette section, Ω désigne un domaine fortement lipschitzien de $\mathbb{R}^n$. Soient $A : \mathbb{R}^n \to M_n(\mathbb{C})$ mesurable, bornée et uniformément elliptique, $V = W^{1,2}(\Omega)$ ou $V = W_0^{1,2}(\Omega)$ et $L = (A, \Omega, V)$ comme dans la section 3. Un tel opérateur possède une unique racine carrée maximale accrétive, $L^{1/2}$. On a rappelé dans la section 2.2.2 de la section 2 des résultats de comparaison de $L^{1/2}f$ et ∇f dans $L^p(\Omega)$ pour $1 < p < +\infty$, et on examine ici ce que deviennent ces estimations quand $p = 1$. On renvoie à la section 3 pour les définitions de $H^1_z(\Omega)$ et $H^1_r(\Omega)$.

Enonçons ces estimations limite, obtenues dans [29] pour $L^{1/2}$:

Théorème 4.1. *Soient Ω un domaine fortement lipschitzien de $\mathbb{R}^n$ ou $\Omega = \mathbb{R}^n$ et $A : \mathbb{R}^n \to M_n(\mathbb{C})$ mesurable, bornée et uniformément elliptique. On suppose que $L = (\Omega, A, V)$ (avec $V = W^{1,2}(\Omega)$ ou $V = W_0^{1,2}(\Omega)$) vérifie (G_∞) (ou (G_1) si Ω est borné). On suppose également que L vérifie une condition technique notée (T). Alors*:

(a) *si L vérifie DBC, pour toute $f \in \mathcal{D}(\Omega)$,*

$$\sum_{i=1}^n \|\partial_{x_i} f\|_{H^1_z(\Omega)} \lesssim \|L^{1/2} f\|_{H^1_r(\Omega)} \lesssim \sum_{i=1}^n \|\partial_{x_i} f\|_{H^1_z(\Omega)} + \|f\|_{L^1(\Omega)}, \tag{4.1}$$

(b) *si L vérifie NBC et si $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$ n'est pas borné, pour toute $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)|_\Omega$,*

$$\sum_{i=1}^n \|\partial_{x_i} f\|_{H^1_r(\Omega)} \lesssim \|L^{1/2} f\|_{H^1_z(\Omega)} \lesssim \sum_{i=1}^n \|\partial_{x_i} f\|_{H^1_r(\Omega)} + \|f\|_{L^1(\Omega)}. \tag{4.2}$$

Donnons quelques commentaires sur ce résultat:

1. La condition (T) est énoncée dans [29], section 6.1.3. Précisons que cette condition n'est requise que pour les inégalités de droite dans (4.1) et (4.2). Elle est inutile quand Ω est un domaine spécial Lipschitz. De plus, dans tous les cas où

on sait prouver (G_∞), cette condition (T) est vérifiée. L'apparition de cette condition est très probablement liée à la méthode utilisée pour la preuve, toutefois on ne sait pas s'il est possible de s'en passer en toute généralité.
2. Si Ω est spécial Lipschitz ou borné, on peut supprimer la norme L^1 de f dans le membre de droite de (4.1) et (4.2).
3. Dans (b), l'hypothèse $\mathbb{R}^n\backslash\Omega$ non borné n'est requise que pour l'inégalité de gauche dans (4.2).
4. Les hypothèses faites sur f dans (a) et (b) seront expliquées plus loin (section 4.2.7).

La preuve du Théorème 4.1 repose sur les propriétés des espaces constitués des fonctions de $L^1(\Omega)$ dont les dérivées partielles sont dans $H^1_z(\Omega)$ ou $H^1_r(\Omega)$. Ces espaces, que, suivant Strichartz ([302]), nous appelons espaces de Hardy–Sobolev, possèdent de nombreuses propriétés analogues aux espaces de Sobolev sur L^p, que nous avons établies dans [29], et que nous allons maintenant décrire, avant de revenir à la preuve du Théorème 4.1.

4.2. *Espaces de Hardy–Sobolev sur un domaine fortement lipschitzien de* $\mathbb{R}^n$

4.2.1. *Définitions*

Soit Ω un domaine fortement lipschitzien de $\mathbb{R}^n$ (ou $\Omega = \mathbb{R}^n$). Si $F = (F_1, \dots, F_n)$, où les fonctions $F_1, \dots, F_n$ vont de Ω dans $\mathbb{C}$, on dira que F appartient à $H^1_r(\Omega)$ (resp. $H^1_z(\Omega)$) si, et seulement si, pour tout $1 \le i \le n$, F_i appartient à $H^1_r(\Omega)$ (resp., pour tout $1 \le i \le n$, F_i appartient à $H^1_z(\Omega)$).

On définit

$$H^{1,1}_r(\Omega) := \{f \in L^1(\Omega);\ \nabla f \in H^1_r(\Omega)\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{H^{1,1}_r(\Omega)} := \|f\|_{L^1(\Omega)} + \|\nabla f\|_{H^1_r(\Omega)} := \|f\|_{L^1(\Omega)} + \sum_{1\le i\le n} \|\partial_{x_i} f\|_{H^1_r(\Omega)},$$

et

$$H^{1,1}_z(\Omega) = \{f \in L^1(\Omega);\ \nabla f \in H^1_z(\Omega)\},$$

muni de la norme correspondante.

Comme les espaces $H^{1,1}_r(\Omega)$ et $H^{1,1}_z(\Omega)$ sont clairement des sous-espaces de $W^{1,1}(\Omega)$, les fonctions de ces espaces ont une trace appartenant à $L^1(\partial\Omega)$. Suivant la théorie des espaces de Sobolev, on définit

$$H^{1,1}_{r,0}(\Omega) = \{f \in H^1_r(\Omega);\ \text{tr } f = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$$

et

$$H^{1,1}_{z,0}(\Omega) = \{f \in H^1_z(\Omega);\ \text{tr } f = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

On définit donc ainsi quatre espaces de Hardy–Sobolev, qui sont tous des espaces de Banach. On a clairement

$$H^{1,1}_{z,0}(\Omega) \subset H^{1,1}_z(\Omega) \subset H^{1,1}_r(\Omega) \quad \text{et} \quad H^{1,1}_{z,0}(\Omega) \subset H^{1,1}_{r,0}(\Omega) \subset H^{1,1}_r(\Omega),$$

et toutes ces inclusions sont strictes si $\Omega \neq \mathbb{R}^n$. En particulier, il existe $f \in H^{1,1}_{r,0}(\Omega)$ telle que $\nabla f \notin H^1_z(\Omega)$ ([29], Proposition 3). Il apparaîtra à plusieurs reprises que seuls $H^{1,1}_r(\Omega)$ et $H^{1,1}_{z,0}(\Omega)$ sont des espaces "naturels", c'est-à-dire possédant des propriétés analogues aux espaces de Sobolev sur L^p (extensions, changements de variable...) et adaptés au problème des racines carrées décrit dans la section 4.1.

Ces espaces possèdent aussi des versions homogènes. On pose d'abord

$$L^1_c(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{C}; \int_{K\cap\Omega} |f(x)|dx < +\infty \text{ pour tout compact } K \subset \mathbb{R}^n \right\}.$$

On définit ensuite

$$\dot{H}^{1,1}_r(\Omega) = \{ f \in L^1_c(\Omega);\ \nabla f \in H^1_r(\Omega)\}$$

muni de la semi-norme homogène

$$\|f\|_{\dot{H}^{1,1}_r(\Omega)} = \|\nabla f\|_{H^1_r(\Omega)}$$

et

$$\dot{H}^{1,1}_z(\Omega) = \{ f \in L^1_c(\Omega);\ \nabla f \in H^1_z(\Omega)\},$$

muni de la semi-norme homogène

$$\|f\|_{\dot{H}^{1,1}_z(\Omega)} = \|\nabla f\|_{H^1_z(\Omega)}.$$

Se référant à la théorie usuelle des espaces de Sobolev, on considère d'abord au cas où Ω est le demi-espace supérieur, qui sera la première étape dans la preuve des résultats d'extension pour les espaces de Hardy–Sobolev et du Théorème 4.1.

4.2.2. *Le cas du demi-espace*

Dans cette section, on prendra $\Omega = \mathbb{R}^n_+ := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ x_n > 0\}$. Comme conséquence du principe de réflexion pour les espaces $H^1_r(\mathbb{R}^n_+)$ et $H^1_z(\mathbb{R}^n_+)$ (voir la section 3.1), on a un principe de réflexion pour les espaces de Hardy–Sobolev:

Proposition 4.1. *Soit $f \in L^1_c(\mathbb{R}^n_+)$.*

(a) *On a $\nabla f \in H^1_r(\mathbb{R}^n_+)$ si, et seulement si, $\nabla f_e \in H^1(\mathbb{R}^n)$. De plus, $\|\nabla f\|_{H^1_r(\mathbb{R}^n_+)} \sim \|\nabla f_e\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}$.*

(b) *Si tr $f = 0$ sur $\partial\mathbb{R}^n_+$, alors $\nabla f \in H^1_z(\mathbb{R}^n_+)$ si, et seulement si, $\nabla f_o \in H^1(\mathbb{R}^n)$. De plus, $\|\nabla f\|_{H^1_z(\mathbb{R}^n_+)} \sim \|\nabla f_o\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}$.*

Ce principe montre déjà que les espaces $H^{1,1}_r(\mathbb{R}^n_+)$ et $H^{1,1}_{z,0}(\mathbb{R}^n_+)$ sont les plus naturels vis-à-vis de la propriété d'extension: $H^{1,1}_r(\mathbb{R}^n_+)$ est bien l'espace des fonctions qui ont un prolongement dans $H^{1,1}(\mathbb{R}^n)$, et $H^{1,1}_{z,0}(\mathbb{R}^n_+)$ est l'espace des fonctions dont le prolongement par 0 hors de $\mathbb{R}^n_+$ appartient à $H^{1,1}(\mathbb{R}^n)$.

La différence entre $H_r^{1,1}(\mathbb{R}_+^n)$ et $H_z^{1,1}(\mathbb{R}_+^n)$ apparaît aussi clairement sur les propriétés de traces de ces espaces.

On rappelle que, si $1 < p < +\infty$, $\mathrm{tr}(\dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)) = \dot{B}_p^{1-1/p,p}(\partial\mathbb{R}_+^n)$, et que $\dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$ est l'espace des restrictions à $\mathbb{R}_+^n$ des fonctions de $\dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Pour $p = 1$, on pourrait donc s'attendre à ce que la trace de $\dot{H}_r^{1,1}(\mathbb{R}_+^n)$ soit un espace de Besov, mais il n'en est rien, et c'est l'espace $\dot{H}_z^{1,1}(\mathbb{R}_+^n)$ qui possède cette propriété. Plus précisément, alors que

$$\mathrm{tr}(\dot{H}_r^{1,1}(\mathbb{R}_+^n)) = L^1(\partial\mathbb{R}_+^n)$$

(voir [153], Théorème 11.1), nous avons établi dans [29] que

$$\mathrm{tr}(\dot{H}_z^{1,1}(\mathbb{R}_+^n)) = \dot{B}_1^{0,1}(\partial\mathbb{R}_+^n).$$

4.2.3. *Caractérisation des espaces de Hardy–Sobolev par une fonction maximale*

On rappelle d'abord qu'on peut caractériser $H_r^1(\Omega)$ et $H_z^1(\Omega)$ au moyen de "grandes" fonctions maximales de la manière suivante.

Si $f \in L_c^1(\Omega)$ et $x \in \Omega$, on pose

$$M_z f(x) = \sup \left| \int_\Omega f(y)\varphi(y)dy \right|$$

où la borne supérieure est prise sur toutes les fonctions $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support dans un cube Q centré dans Ω et contenant x, et vérifiant $\|\varphi\|_\infty + l(Q)\|\nabla\varphi\|_\infty \leq |Q|^{-1}$. On définit également

$$M_r f(x) = \sup \left| \int_\Omega f(y)\varphi(y)dy \right|$$

où la borne supérieure est prise sur toutes les fonctions $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support dans un cube Q centré dans Ω et contenant x, vérifiant $\|\varphi\|_\infty + l(Q)\|\nabla\varphi\|_\infty \leq |Q|^{-1}$ et qui sont nulles sur $\partial\Omega$. On a alors ([79, 216])

$$\|f\|_{H_z^1(\Omega)} \sim \|M_z f\|_{L^1(\Omega)} \quad \text{et} \quad \|f\|_{H_r^1(\Omega)} \sim \|M_r f\|_{L^1(\Omega)}.$$

Cette caractérisation s'étend naturellement aux fonctions à valeurs vectorielles de la façon suivante: si $x \in \Omega$, soit $\widetilde{F}_x(\Omega)$ l'espace des fonctions $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n) \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n)$ à support dans un cube Q de $\mathbb{R}^n$ centré dans Ω et contenant x, avec

$$\|\Phi\|_\infty + l(Q)\|D\Phi\|_\infty \leq \frac{1}{|Q|}$$

(voir la section 1 pour la notation). On pose aussi

$$\widetilde{G}_x(\Omega) = \{\Phi \in \widetilde{F}_x(\Omega);\ \Phi = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

Pour toute fonction $F \in L^1_c(\Omega, \mathbb{C}^n)$, on définit

$$\widetilde{M}F(x) = \sup_{\Phi \in \widetilde{F}_x(\Omega)} |\langle F, \Phi \rangle|$$

et

$$\widetilde{N}F(x) = \sup_{\Phi \in \widetilde{G}_x(\Omega)} |\langle F, \Phi \rangle|,$$

où, pour des fonctions G_1 et G_2 dans $L^2(\Omega, \mathbb{C}^n)$, on note

$$\langle G_1, G_2 \rangle = \int_\Omega G_1(x) \cdot \overline{G_2(x)} dx.$$

On a alors

$$\|F\|_{H^1_r(\Omega)} \sim \|\widetilde{N}F\|_{L^1(\Omega)}$$

et

$$\|F\|_{H^1_z(\Omega)} \sim \|\widetilde{M}F\|_{L^1(\Omega)}.$$

Pour caractériser maintenant les espaces de Hardy–Sobolev en termes de fonctions maximales adaptées, il faut pouvoir exprimer le fait qu'une fonction vectorielle qui est le gradient d'une certaine fonction scalaire f a toutes ses composantes dans $H^1_r(\Omega)$ ou $H^1_z(\Omega)$. Il faut donc en particulier tenir compte de la structure différentielle de ce gradient. Une intégration par parties formelle

$$\langle \nabla f, \Phi \rangle = -\int_\Omega f(x) \operatorname{div} \Phi(x) dx \tag{4.3}$$

suggère de prendre des fonctions test Φ pour lesquelles on contrôle $\|\operatorname{div} \Phi\|_\infty$ au lieu de $\|D\Phi\|_\infty$, et d'utiliser la deuxième intégrale dans (4.3), si on ne sait pas au départ que f est différentiable.

Pour tout $x \in \Omega$, soit $F_x(\Omega)$ l'espace des fonctions $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_n) \in L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n)$, dont la divergence (au sens de $\mathcal{D}'(\Omega)$) est une fonction bornée sur $\mathbb{R}^n$, à support dans un cube $Q \subset \mathbb{R}^n$ centré dans Ω et contenant x et satisfaisant

$$\|\Phi\|_\infty + l(Q)\|\operatorname{div} \Phi\|_\infty \le \frac{1}{|Q|}.$$

Pour tout $x \in \Omega$, on pose

$$G_x(\Omega) = \{\Phi \in F_x(\Omega);\ \Phi \cdot \nu = 0 \text{ p.p. sur } \partial\Omega\},$$

où ν désigne le vecteur unité normal sortant. Comme Φ et $\operatorname{div} \Phi$ sont bornés, $\Phi \cdot \nu$ est bien définie dans $L^\infty(\partial\Omega)$.

Si $f \in L^1_c(\Omega)$, on définit, pour tout $x \in \Omega$,

$$M^{(1)} f(x) = \sup_{\Phi \in F_x(\Omega)} \left| \int_\Omega f(y) \operatorname{div} \Phi(y) dy \right|,$$

$$N^{(1)} f(x) = \sup_{\Phi \in G_x(\Omega)} \left| \int_\Omega f(y) \operatorname{div} \Phi(y) dy \right|.$$

Voici la caractérisation des espaces de Hardy–Sobolev en termes de fonctions maximales obtenue dans [29]:

Théorème 4.2. ([29], *Théorème* 6) *Soit* $f \in L^1_c(\Omega)$. *Alors,*

(a) $\nabla f \in H^1_r(\Omega)$ *si, et seulement si,* $N^{(1)}f \in L^1(\Omega)$. *De plus,*

$$\|\nabla f\|_{H^1_r(\Omega)} \sim \|N^{(1)}f\|_{L^1(\Omega)}.$$

(b) $\nabla f \in H^1_z(\Omega)$ *et* f *est de trace nulle sur* $\partial\Omega$ *si, et seulement si,* $M^{(1)}f \in L^1(\Omega)$. *De plus,*

$$\|\nabla f\|_{H^1_z(\Omega)} \sim \|M^{(1)}f\|_{L^1(\Omega)}.$$

On note que:

- on suppose seulement $f \in L^1_c(\Omega)$, et le théorème affirme en particulier que, si $M^{(1)}f$ ou $N^{(1)}f$ est intégrable sur Ω, alors ∇f, défini comme une distribution, est en fait une fonction de $H^1_z(\Omega)$ ou de $H^1_r(\Omega)$,
- seuls $\dot{H}^{1,1}_r(\Omega)$ et $\dot{H}^{1,1}_{z,0}(\Omega)$ possèdent une caractérisation en termes de fonctions maximales,
- ce théorème s'applique notamment au cas où $\Omega = \mathbb{R}^n$, et n'était pas connu avant [29] même dans ce cas.

Décrivons rapidement la preuve de ce théorème.

On suppose d'abord que $N^{(1)}f$ (resp. $M^{(1)}f$) est dans $L^1(\Omega)$ et on montre que $\nabla f \in H^1_r(\Omega)$ (resp. $\nabla f \in H^1_z(\Omega)$ et f est de trace nulle sur $\partial\Omega$). On vérifie d'abord, en utilisant des fonctions test, que ∇f est une fonction localement intégrable sur Ω (noter que c'est *a priori* seulement une distribution), puis que $\nabla f \in L^1(\Omega)$ et que, dans le cas où $M^{(1)}f \in L^1(\Omega)$, f est de trace nulle sur $\partial\Omega$. Ce dernier point résulte des inégalités suivantes: pour toute $f \in L^1_c(\Omega)$,

$$\left|\int_\Omega f(x)\ \mathrm{div}\ u(x)dx\right| \leq C\int_\Omega N^{(1)}f(x)|u(x)|dx \quad \text{pour toute } u \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{C}^n)$$

$$\left|\int_\Omega f(x)\ \mathrm{div}\ u(x)dx\right| \leq C\int_\Omega M^{(1)}f(x)|u(x)|dx \quad \text{pour toute } u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n).$$

Enfin, on déduit de la caractérisation de $H^1_r(\Omega)$ et $H^1_z(\Omega)$ en termes de "grande fonction maximale" rappelée plus haut que $\nabla f \in H^1_r(\Omega)$ ou $\nabla f \in H^1_z(\Omega)$.

Supposons réciproquement que $\nabla f \in H^1_r(\Omega)$ et montrons que $N^{(1)}f \in L^1(\Omega)$. On s'appuie pour cela sur le lemme suivant:

Lemme 4.1. *Soient* U *un domaine fortement lipschitzien de* $\mathbb{R}^n$ *et* $1 < p < +\infty$. *Si* $f \in L^p(U)$ *est d'intégrale nulle, il existe* $F \in W^{1,p}_0(U;\mathbb{C}^n)$ *telle que* $f = \mathrm{div}\, F$, *et* $\|DF\|_p \lesssim \|f\|_p$. *La constante implicite dans cette inégalité ne dépend que de* p *et des constantes de Lipschitz de* U.

Ce résultat a déjà été rencontré dans la section 3.3.1 pour $p = 2$. La preuve de ce lemme donnée dans [29] repose sur un argument d'analyse fonctionnelle inspiré de [272].

Une fois ce lemme établi, soit $\nabla f \in H^1_r(\Omega)$, $x \in \Omega$, $p > 2n$ et $\Phi \in G_x(\Omega)$. Le Lemme 4.1 fournit $\widetilde{\Phi} \in W^{1,p}_0(Q \cap \Omega)$ telle que div $\widetilde{\Phi} =$ div Φ et $\|D\widetilde{\Phi}\|_p \leq C\|\text{div } \Phi\|_p \leq Cl(Q)^{-1}|Q|^{-1/p'}$. L'inégalité de Poincaré donne alors une estimation de la norme L^p de $\widetilde{\Phi}$, et on conclut que $N^{(1)}f$ est contrôlé par $C\widetilde{N_p}(\nabla f)$, où, pour toute fonction vectorielle $F \in L^1_c(\Omega, \mathbb{C}^n)$ et tout $x \in \Omega$,

$$\widetilde{N_p}F(x) = \sup \left| \int_\Omega F(y) \cdot \Psi(y)dy \right|,$$

la borne supérieure étant prise sur toutes les fonctions $\Psi \in W^{1,p}_0(\Omega, \mathbb{C}^n)$ à support dans un cube Q contenant x et centré dans Ω, et vérifiant

$$\|\Psi\|_p + l(Q)\|D\Psi\|_p \leq |Q|^{-1/p'},$$

avec $1/p + 1/p' = 1$.

Il ne reste plus qu'à montrer que, si $F : \Omega \to \mathbb{C}^n$ est dans $H^1_r(\Omega)$, alors $\widetilde{N_p}F \in L^1(\Omega)$. Pour cela, on raisonne sur chaque composante de F, on est donc ramené au cas scalaire, et il suffit donc de faire la preuve pour un atome de $H^1_r(\Omega)$ (voir la section 3.3.1). C'est là qu'on utilise le fait que $p > 2n$.

On raisonne de manière analogue quand $\nabla f \in H^1_z(\Omega)$ et f est de trace nulle sur $\partial\Omega$. □

En remplaçant les espaces $H^1_r(\Omega)$ et $H^1_z(\Omega)$ par les espaces locaux correspondants ($h^1_r(\Omega)$ et $h^1_z(\Omega)$, voir la section 3.2.3), on peut aussi définir des espaces de Hardy–Sobolev locaux, et en donner une caractérisation analogue à celle du Théorème 4.2. Il suffit pour cela, dans les définitions des fonctions maximales, de forcer les cubes à avoir une longueur de côté inférieure à un certain $\delta > 0$ ne dépendant que de Ω, choisi de façon à ce que l'ensemble $F^{\text{loc}}_x(\Omega)$ correspondant ne soit pas vide.

4.2.4. *Versions limite des lemmes div-curl*

Le lemme div-curl énoncé dans le Théorème 2.7 de la section 2.3.7 possède une version sur des domaines fortement lipschitziens:

Proposition 4.2. *Soient* $1 < q, r < +\infty$ *avec* $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$. *Soient* $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *telle que* $\nabla f \in L^q(\Omega)$ *et* $e \in L^r(\Omega)$ *avec* $\text{div}\, e = 0$ *dans* Ω *et* $e \cdot \nu = 0$ *sur* $\partial\Omega$. *Alors* $e \cdot \nabla f \in H^1_z(\Omega)$ *et*

$$\|e \cdot \nabla f\|_{H^1_z(\Omega)} \lesssim \|e\|_{L^r(\Omega)} \|\nabla f\|_{L^q(\Omega)}.$$

Ce résultat est prouvé dans [199], mais on en donne dans [29] (Proposition 17) une preuve utilisant la "grande fonction maximale" pour $H^1_z(\Omega)$ (dans l'esprit des arguments de [90]).

Cette proposition devient fausse pour $q = 1$, mais on en donne une version correcte en supposant ∇f dans un espace de Hardy:

Théorème 4.3. *Soit $e \in L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n)$ un champ de vecteurs à divergence nulle tel que $e \cdot \nu = 0$ sur $\partial\Omega$. Si $f \in H_r^{1,1}(\Omega)$, alors $e \cdot \nabla f \in H_z^1(\Omega)$ et*

$$\|e \cdot \nabla f\|_{H_z^1(\Omega)} \lesssim \|e\|_\infty \|\nabla f\|_{H_r^1(\Omega)}.$$

Si on supprime dans ce théorème l'hypothèse $e \cdot \nu = 0$ sur $\partial\Omega$, on obtient une autre version de ce lemme div-curl:

Théorème 4.4. *Si $\nabla f \in H_r^1(\Omega)$ et $e \in L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n)$ est un champ de vecteurs à divergence nulle dans $\mathbb{R}^n$, on a $e \cdot \nabla f \in H_r^1(\Omega)$ et*

$$\|e \cdot \nabla f\|_{H_r^1(\Omega)} \lesssim \|e\|_\infty \|\nabla f\|_{H_r^1(\Omega)}.$$

En rajoutant une hypothèse sur f, on obtient une troisième version:

Théorème 4.5. *Si $f \in H_{z,0}^{1,1}(\Omega)$ et $e \in L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n)$ est un champ de vecteurs à divergence nulle dans $\mathbb{R}^n$, on a $e \cdot \nabla f \in H_z^1(\Omega)$ et*

$$\|e \cdot \nabla f\|_{H_z^1(\Omega)} \lesssim \|e\|_\infty \|\nabla f\|_{H_z^1(\Omega)}.$$

Les preuves de ces trois énoncés se font grâce au Théorème 4.2 et par intégration par parties. Signalons que ces énoncés sont, en particulier, valables pour $\Omega = \mathbb{R}^n$.

4.2.5. *Changement de variables*

Une conséquence du Théorème 4.2 est la suivante:

Théorème 4.6. *Soient Ω et Ω' des domaines fortement lipschitziens et $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction bi-lipschitzienne telle que $h(\Omega') = \Omega$. Soit $f \in L_c^1(\Omega)$. Alors $\nabla f \in H_r^1(\Omega)$ (resp. $\nabla f \in H_z^1(\Omega)$ et tr $f = 0$ sur $\partial\Omega$) si, et seulement si, $\nabla(f \circ h) \in H_r^1(\Omega')$ (resp. $\nabla(f \circ h) \in H_z^1(\Omega')$ et tr $(f \circ h) = 0$ sur $\partial\Omega'$). De plus,*

$$\|\nabla f\|_{H_r^1(\Omega)} \sim \|\nabla(f \circ h)\|_{H_r^1(\Omega')}$$

et

$$\|\nabla f\|_{H_z^1(\Omega)} \sim \|\nabla(f \circ h)\|_{H_z^1(\Omega')}.$$

Ce théorème signifie que les changements de variables bi-lipschitziens opèrent sur les espaces de Hardy–Sobolev $H_r^{1,1}(\Omega)$ et $H_{z,0}^{1,1}(\Omega)$. On remarque que ce n'est pas vrai pour les espaces de Hardy eux-mêmes (par exemple, ces changements de variables ne préservent pas la propriété d'intégrale nulle).

4.2.6. *Propriétés de restriction et d'extension*

On rappelle d'abord que l'espace de Triebel–Lizorkin homogène $\dot{F}_1^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ est défini par

$$\dot{F}_1^{1,2}(\mathbb{R}^n) = (-\Delta)^{-1/2}(H^1(\mathbb{R}^n)).$$

Dans [153, 313], cet espace est défini modulo les polynômes. Il est cependant possible de réaliser cet espace comme un espace de distributions, qui, par les plongements de Sobolev, sont des fonctions dans $L^{\frac{n}{n-1}}$ ([328, 329]). Ainsi, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\dot{F}_1^{1,2}(\mathbb{R}^n)$.

On définit

$$\dot{F}_{1,r}^{1,2}(\Omega) = \{f \in L_c^1(\Omega);\ \exists F \in \dot{F}_1^{1,2}(\mathbb{R}^n),\ F|_\Omega = f\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_{\dot{F}_{1,r}^{1,2}(\Omega)} = \inf \|F\|_{\dot{F}_1^{1,2}(\mathbb{R}^n)}$$

où la borne inférieure est prise sur toutes les fonctions $F \in \dot{F}_1^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ qui coïncident avec f sur Ω.

On définit aussi

$$\dot{F}_{1,z}^{1,2}(\Omega) = \{f \in \dot{F}_1^{1,2}(\mathbb{R}^n),\ \text{supp } f \subset \overline{\Omega}\}.$$

Ces espaces permettent alors d'énoncer les théorèmes de restriction et d'extension des espaces de Hardy–Sobolev comme suit:

Théorème 4.7. *Soit Ω un domaine fortement lipschitzien de $\mathbb{R}^n$:*

(a) $L^1(\Omega) \cap \dot{F}_{1,z}^{1,2}(\Omega) = H_{z,0}^{1,1}(\Omega)$.
(b) $L^1(\Omega) \cap \dot{F}_{1,r}^{1,2}(\Omega) = H_r^{1,1}(\Omega)$.

Si Ω est spécial Lipschitz, les égalités correspondantes pour les espaces homogènes (c'est-à-dire sans $L^1(\Omega)$) sont vraies.

Une conséquence de ce résultat est que, si $f \in L^1(\Omega)$ et F désigne le prolongement de f par 0 sur $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$, alors $F \in H^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ si, et seulement si, $f \in H_{z,0}^{1,1}(\Omega)$. En particulier, le prolongement par 0 hors de Ω d'une fonction de $H_{r,0}^{1,1}(\Omega)$ n'est pas, en général, dans $H^{1,1}(\mathbb{R}^n)$. On rappelle que l'inclusion $H_{z,0}^{1,1}(\Omega) \subset H_{r,0}^{1,1}(\Omega)$ est stricte (voir la section 4.2.1).

Le Théorème 4.7 montre aussi que

$$\{f \in \dot{F}_1^{1,2}(\mathbb{R}^n);\ f\mathbf{1}_\Omega \in \dot{F}_1^{1,2}(\mathbb{R}^n)\} = \dot{F}_{1,z}^{1,2}(\Omega) = \dot{H}_{z,0}^{1,1}(\Omega),$$

ce qui redonne une preuve du fait que $\mathbf{1}_\Omega$ n'est pas un multiplicateur de $\dot{F}_1^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ (voir [153], Corollaire 13.6 et [302]).

4.2.7. *Densité*

Théorème 4.8. *Soit Ω un domaine fortement lipschitzien. Alors*:

(a) $\mathcal{D}(\Omega)$ *est dense dans* $H^{1,1}_{z,0}(\Omega)$,
(b) *l'espace des restrictions à* Ω *des fonctions de* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *est dense dans* $H^{1,1}_r(\Omega)$.

4.2.8. *Dualité*

Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ appartient à $BMO_r^{-1}(\Omega)$ si, et seulement si, il existe $\varphi_0 \in L^\infty(\Omega)$ et $\Phi \in BMO_r(\Omega, \mathbb{C}^n)$ telles que, pour toute $f \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\langle T, f\rangle = \int_\Omega f(x)\varphi_0(x)dx + \int_\Omega \nabla f(x)\cdot\Phi(x)dx. \tag{4.4}$$

On pose alors

$$\|T\|_{BMO_r^{-1}(\Omega)} = \inf(\|\varphi_0\|_\infty + \|\Phi\|_{BMO_r(\Omega)}),$$

où la borne inférieure est prise sur toutes les fonctions $\varphi_0 \in L^\infty(\Omega)$ et $\Phi \in BMO_r(\Omega, \mathbb{C}^n)$ vérifiant (4.4). On note aussi $T = \varphi_0 - \operatorname{div}\Phi$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ où div est l'opérateur divergence dans Ω.

Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ appartient à $BMO_{z,0}^{-1}(\Omega)$ si, et seulement si, il existe $\varphi_0 \in L^\infty(\Omega)$, $\Phi \in BMO_z(\Omega, \mathbb{C}^n)$ et $h \in L^\infty(\partial\Omega, d\sigma)$ telles que, pour toute $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$,

$$\langle T, f\rangle = \int_\Omega f(x)\varphi_0(x)dx + \int_\Omega \nabla f(x)\cdot\Phi(x)dx + \int_{\partial\Omega} f(x)h(x)d\sigma(x). \tag{4.5}$$

On pose alors

$$\|T\|_{BMO_{z,0}^{-1}(\Omega)} = \inf(\|\varphi_0\|_\infty + \|\Phi\|_{BMO_z(\Omega)} + \|h\|_{L^\infty(d\sigma)}),$$

où la borne inférieure est prise sur toutes les fonctions $\varphi_0 \in L^\infty(\Omega)$, $\Phi \in BMO_z(\Omega, \mathbb{C}^n)$ et $h \in L^\infty(\partial\Omega, d\sigma)$ vérifiant (4.5). On note aussi $T = \varphi_0 - \operatorname{div}\Phi + hd\sigma$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, où φ_0 et Φ sont prolongées par 0 hors de Ω et div est l'opérateur divergence sur $\mathbb{R}^n$.

On peut alors décrire les espaces duaux des espaces de Hardy–Sobolev comme suit:

Proposition 4.3.

(a) *Le dual de* $H^{1,1}_{z,0}(\Omega)$ *est isomorphe à* $BMO_r^{-1}(\Omega)$. *Plus précisément, étant donné* $T = \varphi_0 - \operatorname{div}\Phi \in BMO_r^{-1}(\Omega)$, *la forme linéaire*

$$\mathcal{D}(\Omega) \ni f \mapsto \int_\Omega f\varphi_0 + \int_\Omega \nabla f\cdot\Phi = \langle T, f\rangle$$

se prolonge par densité en une forme linéaire continue L_T *sur* $H^{1,1}_{z,0}(\Omega)$. *Réciproquement, pour toute* $L \in (H^{1,1}_{z,0}(\Omega))'$, *il existe une unique* $T \in BMO_r^{-1}(\Omega)$ *telle que* $L = L_T$. *De plus* $\|L_T\| \sim \|T\|_{BMO_r^{-1}(\Omega)}$.

(b) *Le dual de* $H^{1,1}_r(\Omega)$ *est isomorphe à* $BMO^{-1}_{z,0}(\Omega)$. *Plus précisément, étant donné* $T = \varphi_0 - \text{ div } \Phi + hd\sigma \in BMO^{-1}_{z,0}(\Omega)$, *la forme linéaire*

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \ni f \mapsto \int_\Omega f\varphi_0 + \int_\Omega \nabla f \cdot \Phi + \int_{\partial\Omega} fhd\sigma = \langle T, f\rangle$$

se prolonge par densité en une forme linéaire continue L_T *sur* $H^{1,1}_r(\Omega)$. *Réciproquement, pour toute* $L \in (H^{1,1}_r(\Omega))'$, *il existe une unique* $T \in BMO^{-1}_{z,0}(\Omega)$ *telle que* $L = L_T$. *De plus* $\|L_T\| \sim \|T\|_{BMO^{-1}_{z,0}(\Omega)}$.

Cette description a été utilisée dans [56] pour caractériser les fonctions impaires dans $BMO(\mathbb{R})$ en termes de mesures de Carleson associées aux semigroupes de Poisson et de la chaleur pour des opérateurs de Bessel.

4.2.9. *Interpolation avec les espaces de Sobolev classiques*

Les fonctions maximales $M^{(1)}$ et $N^{(1)}$ permettent aussi de caractériser les espaces de Sobolev classiques:

Théorème 4.9. *Soient* $f \in L^q(\Omega), 1 < q \leq +\infty$.

(a) $f \in W^{1,q}(\Omega) \Leftrightarrow N^{(1)}f \in L^q(\Omega)$, *et* $\|\nabla f\|_q \sim \|N^{(1)}f\|_q$.
(b) $f \in W^{1,q}_0(\Omega) \Leftrightarrow M^{(1)}f \in L^q(\Omega)$, *et* $\|\nabla f\|_q \sim \|M^{(1)}f\|_q$.

On notera que:

- cette caractérisation est aussi valable pour $\Omega = \mathbb{R}^n$,
- dans l'assertion (b), l'appartenance de $M^{(1)}$ à $L^q(\Omega)$ entraîne en particulier le fait que f est de trace nulle sur $\partial\Omega$.

Des Théorèmes 4.2 et 4.9, on déduit un résultat d'interpolation complexe entre les espaces de Hardy–Sobolev et les espaces de Sobolev classiques:

Corollaire 4.1. *Soient* $1 < q \leq \infty$ *et* $0 < \theta < 1$ *tels que* $\frac{1}{p} = (1-\theta) + \frac{\theta}{q}$. *Alors, pour la méthode d'interpolation complexe,*

(a) $[H^{1,1}_r(\Omega), W^{1,q}(\Omega)]_\theta = W^{1,p}(\Omega)$.
(b) $[H^{1,1}_{z,0}(\Omega), W^{1,q}_0(\Omega)]_\theta = W^{1,p}_0(\Omega)$.

4.2.10. *Preuve du Théorème 4.1*

On décrit cette preuve sommairement. Commençons par les inégalités du type

$$\|L^{1/2}f\|_{H^1} \lesssim \|\nabla f\|_{H^1} + \|f\|_{L^1}.$$

Pour $\Omega = \mathbb{R}^n$ et sous l'hypothèse (G_∞), cette inégalité (sans le terme $\|f\|_{L^1}$) est prouvée dans [31], Chap. 4, Théorème 1. Quand $\Omega = \mathbb{R}^n_+$, on utilise ce résultat et le principe de réflexion (Proposition 4.1) et la norme L^1 de f n'apparaît pas. Quand Ω est spécial Lipschitz, on se ramène au cas $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ par un changement de variables bi-lipschitzien, et on utilise le Théorème 4.6. Là encore, la norme L^1 de f n'intervient pas. Enfin, si Ω est un domaine fortement lipschitzien quelconque, on utilise une partition de l'unité pour se ramener localement au cas spécial Lipschitz, et c'est là uniquement qu'intervient la condition technique (T) pour garantir que les opérateurs avec lesquels on travaille vérifient encore la condition (G_∞).

Pour les inégalités du type

$$\|\nabla f\|_{H^1} \lesssim \|L^{1/2} f\|_{H^1},$$

on prouve que les transformées de Riesz $\partial_{x_i} L^{-1/2}$ sont continues de H^1 dans H^1 (où, à chaque fois, H^1 est l'espace de Hardy sur Ω adapté). Pour cela, on utilise la décomposition atomique pour $H^1_z(\Omega)$ et $H^1_r(\Omega)$ (section 3.3) et des arguments de dualité (comme dans la preuve de la Proposition 3.1, voir la section 3.2). On renvoie à [29], section 6.2, pour des arguments complets.

Comme $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H^{1,1}_{z,0}(\Omega)$ et $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)|_\Omega$ est dense dans $H^{1,1}_r(\Omega)$ (Théorème 4.8), l'assertion (a) du Théorème 4.1 s'étend à $f \in H^{1,1}_{z,0}(\Omega)$, tandis que l'assertion (b) du Théorème 4.1 s'étend à $f \in H^{1,1}_r(\Omega)$.

En utilisant (2.19), le Théorème 4.1 et le Corollaire 4.1, on obtient que, si l'opérateur $L = (A, \Omega, V)$ vérifie (G_∞), ou (G_1) si Ω est borné, pour la condition de Dirichlet ou celle de Neumann, l'opérateur $\nabla L^{-1/2}$ est continu sur $L^p(\Omega)$ pour tout $1 < p < 2$. La même propriété est vraie si on remplace L par L^*, donc, par dualité, on obtient $\|L^{1/2} f\|_p \lesssim \|\nabla f\|_p + \|f\|_p$ pour $2 < p < +\infty$.

Ensuite, comme $\|L^{1/2} f\|_{H^1(\Omega)} \lesssim \|f\|_{H^{1,1}(\Omega)}$, on obtient, en interpolant avc $p = 2$, que $\|L^{1/2} f\|_p \lesssim \|\nabla f\|_p$ pour tout $1 < p < 2$. On retrouve donc la théorie obtenue dans [33], sauf la continuité des transformées de Riesz sur $L^p(\Omega)$ pour $2 < p < 2 + \varepsilon$.

4.3. *Compléments et perspectives sur les lemmes div-curl*

Direction de recherche 4.1. On a donné dans la section 4.2.4 une version limite d'un lemme div-curl, dans laquelle on suppose le champ e à divergence nulle et L^∞ et le champ F à rotationnel nul dans un espace de Hardy sur $\mathbb{R}^n$ ou sur un domaine, et la conclusion est que $e \cdot F$ appartient à un espace de Hardy. Si on suppose maintenant le champ e dans $bmo(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ (version locale de BMO, voir la section 2.3.6), et toujours F dans $H^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ à rotationnel nul, on peut encore donner un sens au produit $e \cdot F$, et ce produit appartient alors à un espace de Hardy–Orlicz sur $\mathbb{R}^n$ ([59]). Des versions plus générales de ce résultat pour des formes différentielles sont également données dans [59]. Donner des énoncés analogues sur des domaines de $\mathbb{R}^n$ est une question ouverte.

Dans [90], en complément du lemme div-curl rappelé dans le Théorème 2.7, les auteurs prouvent que, pour $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$,

$$\|b\|_{BMO(\mathbb{R}^n)} \sim \sup \int_{\mathbb{R}^n} b(x) E(x) \cdot F(x) dx, \tag{4.6}$$

la borne supérieure étant prise sur tous les champs $E \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ à divergence nulle vérifiant $\|E\|_2 \leq 1$ et tous les champs $F \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ à rotationnel nul vérifiant $\|F\|_2 \leq 1$.

Les auteurs en déduisent aussi que toute fonction $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$ peut s'écrire

$$f = \sum_j \lambda_j E_j \cdot F_j \tag{4.7}$$

avec $\sum |\lambda_j| < +\infty$, les champs E_j sont à divergence nulle et vérifient $\|E_j\|_2 \leq 1$, les champs F_j sont à rotationnel nul et vérifient $\|F_j\|_2 \leq 1$. Des analogues de ces différents résultats sur des domaines Ω fortement lipschitziens de $\mathbb{R}^n$, faisant intervenir les espaces $H^1_r(\Omega)$, $H^1_z(\Omega)$, $BMO_r(\Omega)$ et $BMO_z(\Omega)$, ont été obtenus dans [78, 242]. D'autres versions, dans $\mathbb{R}^n$ ou sur des domaines, faisant intervenir des espaces de Hardy de formes différentielles (dans le cas des domaines, ces formes sont à support dans le domaine, il s'agit donc d'une généralisation de $H^1_z(\Omega)$) et leurs espaces duaux, se trouvent dans [243, 244].

Question ouverte 4.1. Pour terminer, notons ([28]) qu'on peut aussi donner une version du lemme div-curl signalé à la fin de la section 2.3.7, en remplaçant l'hypothèse $e \in H^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n)$ à divergence nulle par $e \in H^1_z(\Omega, \mathbb{C}^n)$ à divergence nulle. On obtient alors que $e \cdot F \in H^1_z(\Omega)$ avec l'estimation usuelle. La preuve utilise cette fois la décomposition atomique pour les espaces de Hardy de formes exactes sur des domaines fortement lipschitziens de $\mathbb{R}^n$ ([243]). Le cas $e \in H^1_r(\Omega, \mathbb{C}^n)$ à divergence nulle reste ouvert.

4.4. *Compléments et perspectives sur les espaces de Hardy–Sobolev*

Question ouverte 4.2. D'autres caractérisations des espaces de Hardy–Sobolev sur $\mathbb{R}^n$ ou des domaines de $\mathbb{R}^n$ ont été établies. Une caractérisation via une fonction maximale est due à Miyachi ([265]). Dans [226], Koskela et Saksman montrent que, pour $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\nabla f \in H^1(\mathbb{R}^n)$ si, et seulement si, $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ et il existe une fonction $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|(g(x) + g(y))$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n \backslash E$ où E est négligeable (noter qu'une semblable caractérisation a été donnée pour des espaces de Triebel–Lizorkin dans [227]). Peut-on donner des caractérisations analogues dans un domaine fortement lipschitzien de $\mathbb{R}^n$?

Question ouverte 4.3. Un autre point de vue sur les espaces de Hardy–Sobolev consiste à les définir via une décomposition en atomes pour retrouver ensuite, en particulier, des résultats d'interpolation avec les espaces de Sobolev usuels. Ce point de vue se révèle fructueux, notamment, dans des contextes non euclidiens, nous y reviendrons dans la section 5.5.4. Des décompositions atomiques des espaces de Hardy–Sobolev sur $\mathbb{R}^n$ sont données dans [84, 188, 245, 302, 322] (noter qu'on en trouve également dans [172] pour les espaces de Hardy–Sobolev sur le produit

$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$). Dans [245], cette décomposition est utilisée pour donner une preuve des lemmes div-curl précédents sur $\mathbb{R}^n$. Quelles décompositions atomiques peut-on donner pour les espaces de Hardy–Sobolev sur des domaines fortement lipschitziens considérés dans [29]?

Question ouverte 4.4. Peut-on se passer de l'hypothèse technique (T) dans le Théorème 4.1? Dans l'assertion (b), peut-on trouver un contre-exemple lorsque $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$ est borné?

Direction de recherche 4.2. Que devient le Théorème 4.1 si on ne suppose plus de bornes gaussiennes pour le noyau de e^{-tL}?

(a) Comme on l'a déjà signalé dans la section 3.3.3, les transformées de Riesz $\nabla L^{-1/2}$ ne sont pas continues de l'espace H^1 classique dans L^1 en général, même sur $\mathbb{R}^n$. Peut-on donner un résultat de continuité des opérateurs $\nabla L_D^{-1/2}$ et $\nabla L_N^{-1/2}$ dans des analogues sur Ω des espaces H^1 de [197]? On rappelle que la continuité de ces transformées de Riesz de $H^1_L(\mathbb{R}^n)$ dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ est établie dans [197].

(b) On rappelle que l'inégalité $\|L^{1/2} f\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|\nabla f\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}$ est prouvée dans [20] sous l'hypothèse que $(I + t^2 L)^{-1}$ est uniformément bornée (pour $t > 0$) sur $L^\rho(\mathbb{R}^n)$ pour un certain $\rho \in [1, \frac{n}{n-1}[$ (voir la section 2.2.1). Peut-on donner une version de cette inégalité sur un domaine fortement lipschitzien Ω avec L_N ou L_D, en s'affranchissant de toute hypothèse de continuité de la résolvente de L, et en remplaçant l'espace de Hardy classique par une version de celui de [197] sur Ω? On rappelle que, si $L = -\mathrm{div}(A\nabla)$, on ne peut pas avoir, en toute généralité, $\|L^{1/2} f\|_{H^1(\Omega)} \lesssim \|\nabla f\|_{H^1(\Omega)}$ avec les espaces H^1 sur Ω considérés dans la section 3, car cela entraînerait par interpolation l'inégalité $\|L^{1/2} f\|_{L^p(\Omega)} \lesssim \|\nabla f\|_{L^p(\Omega)}$ pour tout $1 < p < 2$, qui est fausse en général (voir [13]).

Question ouverte 4.5. Dans toute cette section, comme dans la section 3, on a supposé Ω fortement lipschitzien. Que deviennent les résultats de [29] si on affaiblit cette régularité?

5. Racine Carrée du Laplacien sur des Variétés Riemanniennes

Cette section reprend les résultats de [23, 249].

5.1. *Introduction*

Soient M une variété riemannienne complète connexe, d la différentielle extérieure et Δ l'opérateur de Laplace Beltrami. On a rappelé dans la section 2.2.3 les principaux résultats connus concernant la comparaison de df et de $\Delta^{1/2} f$ dans les espaces L^p pour $1 < p < +\infty$. Comme le montre l'exemple de $\mathbb{R}^n$, il n'y a pas de comparaison possible dans L^1, et il et naturel de chercher à remplacer L^1 par un espace de Hardy sur M.

On rappelle ici quelques notations de la section 2.2.3: ρ est la distance riemannienne, μ la mesure riemannienne. Pour tout $x \in M$ et tout $r > 0$, on notera $B(x,r)$ la boule géodésique ouverte de centre x et de rayon r, et $V(x,r)$ sa mesure. On rappelle l'hypothèse (D):

$$V(x,2r) \leq CV(x,r). \tag{D}$$

Si on suppose (D) satisfaite, (M,ρ,μ) est un espace de nature homogène et on peut donc définir l'espace de Hardy $H^1_{CW}(M)$ au sens de Coifman et Weiss (voir la section 2.4.1). On a montré dans [279]:

Théorème 5.1. *On suppose (D) et (P). Alors la transformée de Riesz $d\Delta^{-1/2}$ est continue de $H^1_{CW}(M)$ dans $L^1(M)$.*

Ici, (P) est l'inégalité de Poincaré L^2 sur les boules:

$$\int_B |f(x) - f_B|^2 dx \leq Cr^2 \int_B |\nabla f(x)|^2 dx,$$

rencontrée dans la section 2.2.3. On a également donné une version de ce résultat pour un espace de Hardy local, en supposant des versions locales de (D) et (P). Ce dernier résultat a été étendu et développé dans [252].

Dire que $d\Delta^{-1/2}$ est continue de H^1 dans H^1 suppose de définir un espace de Hardy à valeurs dans les 1-formes différentielles. On a "contourné" cette difficulté dans [249] de la façon suivante: on fixe une fonction harmonique u sur M à croissance au plus linéaire, de sorte que $|du|$ est borné sur M. Alors, supposant toujours (D) et (P), on obtient que l'opérateur $f \mapsto d\Delta^{-1/2} f \cdot du$ est continu de $H^1_{CW}(M)$ dans $H^1_{CW}(M)$. Toutefois, cela ne permet en rien de donner un sens à un énoncé de continuité de $d\Delta^{-1/2}$ de H^1 dans H^1.

Une première difficulté pour définir un espace de Hardy de formes différentielles est de donner, pour une forme différentielle, un sens à la condition d'intégrale nulle qui apparaît dans la définition des atomes de H^1_{CW}. Un problème analogue se pose pour définir les atomes (molécules) de l'espace $H^1_L(\mathbb{R}^n)$ de [197] (voir la section 3.3.3). Dans cette dernière situation, bien qu'on se place dans le cadre euclidien et qu'on considère des espaces de fonctions, la condition d'intégrale nulle n'est pas adaptée à l'opérateur L, et on a souligné le fait que $\nabla L^{-1/2}$ n'est pas continue en général de l'espace $H^1(\mathbb{R}^n)$ usuel dans $L^1(\mathbb{R}^n)$. L'idée est de remplacer la condition de moment nul pour une molécule m par l'hypothèse que m est l'image par L (ou des puissances de L) d'une fonction g et que m et g vérifient des estimations L^2 convenables sur des couronnes dyadiques.

Dans le cas des variétés riemanniennes, on va remplacer la condition de moment nul pour une molécule m par le fait que m est une forme différentielle exacte, c'est-à-dire que $m = dg$ et m, g vérifient des estimations L^2 convenables sur des couronnes dyadiques. Cette idée trouve son origine dans les travaux de Lou et McIntosh sur les espaces de Hardy de formes différentielles dans $\mathbb{R}^n$ ou dans des ouverts lipschitziens de $\mathbb{R}^n$ ([243, 244]), que nous commençons par décrire rapidement.

5.2. *Espaces de Hardy de formes différentielles sur* $\mathbb{R}^n$ *ou des ouverts lipschitziens de* $\mathbb{R}^n$

5.2.1. *L'espace de Hardy à divergence nulle*

Si $f = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, on dira que $f \in H^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ si, et seulement si, $f_j \in H^1(\mathbb{R}^n)$ pour tout $1 \leq j \leq n$. On définit un sous-espace de $H^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ comme suit:

$$H^1_{\mathrm{div}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) := \{f \in H^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n);\ \mathrm{div}\ f = 0\}.$$

Les éléments de $H^1_{\mathrm{div}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ sont des champs de vecteurs de divergence nulle, qu'on peut aussi voir comme des $n-1$ formes différentielles f vérifiant $df = 0$, ce qui revient à dire que ce sont des formes exactes, c'est-à-dire qu'elles s'écrivent $f = dg$ où g est une $n-2$ forme.

L'espace $H^1_{\mathrm{div}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ possède une décomposition atomique, obtenue dans [167] grâce à une décomposition en ondelettes, et redémontrée dans [244] au moyen d'espaces de tentes. Les atomes correspondants sont des champs de vecteurs de divergence nulle, à support dans une boule, vérifiant la condition de norme L^2 usuelle, et dont toutes les composantes sont d'intégrale nulle.

5.2.2. *Les espaces de Hardy de formes différentielles*

Dans [244], Lou et McIntosh définissent plus généralement des espaces de Hardy de formes différentielles dans $\mathbb{R}^n$. On précise quelques notations. Soit $0 \leq l \leq n$. Pour tout $I = (i_1, \dots, i_l)$ avec $1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq n$, on note $e_I = e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_l}$. On dira qu'une l-forme différentielle

$$f = \sum f_I e_I$$

appartient à $H^1(\mathbb{R}^n, \Lambda^l)$ si, et seulement si, toutes les fonctions f_I appartiennent à $H^1(\mathbb{R}^n)$. La norme correspondante est

$$\|f\|_{H^1(\mathbb{R}^n, \Lambda^l)} := \sum_I \|f_I\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Si $1 \leq l \leq n$, on définit

$$H^1_d(\mathbb{R}^n, \Lambda^l) := \{f \in H^1(\mathbb{R}^n, \Lambda^l);\ \text{il existe } g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n, \Lambda^{l-1}) \text{ telle que } f = dg\}.$$

Un atome de $H^1_d(\mathbb{R}^n, \Lambda^l)$ est une l-forme différentielle $a \in L^2(\mathbb{R}^n, \Lambda^l)$ pour laquelle il existe une boule B de rayon r et une $l-1$ forme $b \in L^2(\mathbb{R}^n, \Lambda^{l-1})$ vérifiant:

- le support de b est inclus dans B et $a = db$,
- $\|a\|_2 \leq |B|^{-1/2}$ et $\|b\|_2 \leq r|B|^{-1/2}$.

Les auteurs montrent que $f \in H^1_d(\mathbb{R}^n, \Lambda^l)$ si, et seulement si, il existe $(\lambda_k) \in l^1$ et une suite $(a_k)_{k\geq 1}$ d'atomes de $H^1_d(\mathbb{R}^n, \Lambda^l)$ telles que

$$f = \sum_{k\geq 1} \lambda_k a_k.$$

De plus, $\|f\|_{H^1_d(\mathbb{R}^n,\Lambda^l)} \sim \inf \sum_k |\lambda_k|$, la borne inférieure étant prise sur toutes les décompositions possibles de f. La preuve consiste à exploiter le lien entre espaces de Hardy et espaces de tentes, et à utiliser la décomposition atomique dans les espaces de tentes pour revenir ensuite à celle des espaces de Hardy (voir la section 2.3.3).

Une application de cette décomposition atomique est l'identification du dual de $H^1_d(\mathbb{R}^n,\Lambda^l)$, qui est une version de BMO à valeurs dans les formes différentielles. Une version de (4.6) et de (4.7) (rencontrées dans la section 4) dans ce contexte de formes différentielles sont également données.

Les auteurs donnent également une application de ces résultats à l'homogénéisation d'un système intervenant en élasticité linéaire, à la suite de travaux de Geymonat, Müller, Triantafyllidis et Zhang ([166, 333]).

Tous ces résultats sont transposés au cas des domaines lipschitziens de $\mathbb{R}^n$ dans [243]. Si Ω est un tel domaine, les auteurs considèrent l'espace $H^1_{z,d}(\Omega,\Lambda^l)$ des formes de $H^1_d(\mathbb{R}^n,\Lambda^l)$ à support dans $\overline{\Omega}$ et prouvent pour cet espace l'analogue des résultats obtenus dans [244]. Il ne semble pas exister de théorie comparable pour l'espace $H^1_{r,d}(\Omega,\Lambda^l)$.

5.3. *Le cas riemannien*

5.3.1. *Le cadre géométrique*

On reprend les notations de la section 5.1. Pour tout $x \in M$, soit $\Lambda T^*_x M$ l'algèbre extérieure complexe sur l'espace cotangent $T^*_x M$. Soit $\Lambda T^* M = \oplus_{0\leq k\leq \dim M}\Lambda^k T^* M$ le fibré sur M dont la fibre en chaque $x \in M$ est donnée par $\Lambda T^*_x M$, et soit $L^2(\Lambda T^*M)$ l'espace des sections de ΛT^*M de carré intégrable.

On rappelle que d désigne la différentiation extérieure. Pour $0 \leq k \leq \dim M-1$, d envoie $C^\infty_0(\Lambda^k T^*M)$ dans $C^\infty_0(\Lambda^{k+1}T^*M)$ et vérifie $d^2 = 0$. Soit d^* l'adjoint de d sur $L^2(\Lambda T^*M)$. On notera aussi $D = d + d^*$ l'opérateur de *Hodge-Dirac* sur $L^2(\Lambda T^*M)$ et $\Delta = D^2 = dd^* + d^*d$ le Laplacien (de *Hodge–de Rham*). La décomposition de Hodge dans L^2, valable dans toute variété riemannienne complète, affirme que

$$L^2(\Lambda T^*M) = \overline{\mathcal{R}(d)} \oplus \overline{\mathcal{R}(d^*)} \oplus \mathcal{N}(\Delta),$$

où, pour tout opérateur T, $\mathcal{R}(T)$ (resp. $\mathcal{N}(T)$) est l'image (resp. le noyau) de T, et la décomposition est orthogonale (voir [119], Théorème 24, p. 165 et [73]).

Pour définir des espaces de Hardy de formes différentielles sur M, il est naturel de chercher à tirer parti dans ce cadre des différents points de vue exposés dans le cas euclidien dans la section 2.3 de la partie I. Dans [244], Lou et McIntosh utilisent le lien entre espaces de Hardy et espaces de tentes pour obtenir la décomposition atomique de $H^1_d(\mathbb{R}^n,\Lambda^l)$. Nous avons étendu ce point de vue au cas des formes différentielles sur M, prenant cette fois le lien avec les espaces de tentes comme point de départ pour définir les espaces de Hardy.

Pour pouvoir disposer d'une théorie satisfaisante des espaces de tentes (voir [93, 280]), et en particulier d'une décomposition atomique, on supposera toujours

(D). Ce sera la seule hypothèse géométrique sur M pour la plupart des résultats. On rappelle que (D) est vérifiée sur les groupes de Lie à croissance polynomiale, les variétés à courbure de Ricci positive ou nulle ([57]), les revêtements co-compacts dont le groupe est à croissance polynomiale ([106]).

Au vu des formules reliant espaces de Hardy et espaces tentes (voir les formules (2.31) et (2.32) dans la section 2.3.3), passer d'une décomposition atomique pour les espaces de tentes à une décomposition en atomes (ou en molécules) pour un espace de Hardy requiert des estimations sur le semigroupe engendré par Δ.

Comme on l'a rappelé dans la section 2.2.3, les estimations du noyau du semigroupe engendré par l'opérateur de Laplace–Beltrami (donc le laplacien sur les fonctions) et leurs relations avec la géométrie de M sont bien comprises (voir notamment [177, 234, 283]). En revanche, on ne dispose pas, la plupart du temps, d'estimations ponctuelles du noyau du semigroupe engendré par le laplacien de Hodge–de-Rham (voir [45, 107, 121, 241]).

On a vu (section 3.3.3) que, dans [197], pour établir différentes caractérisations des espaces $H^1_L(\mathbb{R}^n)$, Hofmann et Mayboroda utilisent les estimations L^2 de type Gaffney satisfaites par le semi-groupe e^{-tL}, alors même que le noyau de ce semigroupe ne vérifie pas, en général, d'estimations ponctuelles du type (G_∞). Sur toute variété riemannienne complète, le semigroupe engendré par le laplacien de Hodge vérifie des estimations L^2 de type Gaffney analogues, dont voici un exemple ([113, 114]):

Lemme 5.1. *Pour toute fonction $h \in L^\infty(M)$, on note M_h l'opérateur de multiplication par h. Soit $N \geq 0$. Il existe $\alpha > 0$ tels que, pour tous fermés disjoints $E, F \subset M$ et tout $t > 0$,*

$$\|M_{\chi_F}(t^2\Delta)^N e^{-t^2\Delta} M_{\chi_E}\|_{2,2} + \|M_{\chi_F} tD(t^2\Delta)^N e^{-t^2\Delta} M_{\chi_E}\|_{2,2} \lesssim e^{-\alpha\frac{\rho^2(E,F)}{t^2}}$$

avec

$$\rho(E, F) = \inf_{x\in E,\, y\in F} \rho(x, y).$$

Remarque 5.1. Dans cet énoncé, on a utilisé la notation suivante: si T est un opérateur de L^p dans L^q, on définit

$$\|T\|_{q,p} := \sup_{f\in L^p,\, \|f\|_p\leq 1} \|Tf\|_q.$$

Tout comme dans [197], nous avons pu développer une théorie des espaces de Hardy de formes différentielles en utilisant exclusivement des estimations semblables à celles du Lemme 5.1. De façon générale, les estimations que nous utilisons concernent des fonctions générales de D ou de Δ et seront appelées dans la suite "estimations L^2 hors diagonale". Ces estimations disent toutes que, si on applique $f(D)$ ou $f(\Delta)$ à une section h à support dans E, et si F est un fermé disjoint de E, alors la norme L^2 de $f(D)h$ sur F est contrôlée par celle de h à travers un facteur de décroissance qui fait intervenir la distance entre E et F (voir [23], section 3). A la différence de [197] (mais comme dans [196]), nous ne définissons pas seulement H^1 mais H^p pour tout $1 \leq p \leq +\infty$. Ces espaces de Hardy H^p, qui seront donc définis via des espaces de tentes, forment une famille d'espaces d'interpolation pour la méthode complexe, et peuvent être comparés aux espaces L^p. La transformée de Riesz $D\Delta^{-1/2}$ est continue sur ces espaces H^p. Plus généralement, l'opérateur D possède un calcul fonctionnel H^∞ sur ces espaces H^p. On obtiendra également une décomposition de Hodge pour ces espaces. L'espace H^1 possède aussi une caractérisation moléculaire et une caractérisation en termes de fonction maximale non tangentielle. On notera que, contrairement au point de vue adopté dans [197], on ne part pas du point de vue moléculaire pour définir les espaces de Hardy, ce qui nous obligerait à ne considérer que H^1.

Comme on l'a dit, pour les résultats qu'on vient de mentionner, on supposera seulement (D), on ne supposera donc pas d'inégalité de Poincaré, et on ne fera pas d'hypothèse sur la courbure de Ricci ou la courbure sectionnelle. En ajoutant certaines hypothèses géométriques, il sera possible, dans le cas des fonctions, c'est-à-dire des 0-formes, d'identifier les espaces $H^p(\Lambda T^*M)$ à l'espace $H^1_{CW}(M)$ ou des espaces L^p.

5.3.2. *Les espaces de tentes de formes différentielles sur M*

Soit M une variété riemannienne connexe complète. On supposera toujours que (D) est satisfaite (section 2.2.3). Comme on l'a rappelé à la section 2.4, cette hypothèse, qui signifie que (M, ρ, μ) est un espace de type homogène au sens de Coifman–Weiss, est naturelle pour développer une théorie des espaces de Hardy. Il est facile de vérifier que, sous l'hypothèse (D), il existe $C > 0$ et $\kappa > 0$ tels que, pour tout $x \in M$, tout $r > 0$ et tout $\theta > 1$,

$$V(x, \theta r) \leq C\theta^\kappa V(x, r). \tag{5.1}$$

On définit dans la suite trois types d'espaces de Hardy de formes différentielles sur M. Le premier est construit à partir des espaces de tentes, dans l'esprit de ce qui se passe dans le cadre euclidien (voir la section 2.3.3).

On définit donc d'abord ces espaces de tentes dans le contexte de M et des formes différentielles, reprenant les idées de [93]. Pour tout $x \in M$ et tout $\alpha > 0$, le cône d'ouverture α et de sommet x est défini par

$$\Gamma_\alpha(x) = \{(y, t) \in M \times]0, +\infty[;\ y \in B(x, \alpha t)\}.$$

Quand $\alpha = 1$, on notera $\Gamma(x)$ au lieu de $\Gamma_\alpha(x)$.

Pour tout sous-ensemble fermé $F \subset M$, soit $\mathcal{R}(F)$ l'union de tous les cônes d'ouverture 1 dont le sommet appartient à F. Enfin, si $O \subset M$ est ouvert et si $F = M \backslash O$, la tente au-dessus de O, que l'on notera $T(O)$, est le complémentaire de $\mathcal{R}(F)$ dans $M \times]0, +\infty[$.

Soit $F = (F_t)_{t>0}$ une famille de sections mesurables de ΛT^*M. On note $F(y, t) := F_t(y)$ pour tout $y \in M$ et tout $t > 0$ et on suppose F mesurable sur

$M\times]0,+\infty[$. Pour tout $x \in M$, on pose

$$\mathcal{S}F(x) = \left(\iint_{\Gamma(x)} |F(y,t)|^2 \frac{d\mu(y)}{V(x,t)} \frac{dt}{t} \right)^{1/2},$$

et, si $1 \leq p < +\infty$, on dira que $F \in T^{p,2}(\Lambda T^*M)$ si, et seulement si,

$$\|F\|_{T^{p,2}(\Lambda T^*M)} := \|\mathcal{S}F\|_{L^p(M)} < +\infty.$$

Pour le cas $p = +\infty$, on procède comme suit. Pour toute famille $(F_t)_{t>0}$ de sections mesurables de ΛT^*M et tout $x \in M$, on pose

$$\mathcal{C}F(x) = \sup_{B \ni x} \left(\frac{1}{V(B)} \iint_{T(B)} |F(y,t)|^2 d\mu(y) \frac{dt}{t} \right)^{1/2},$$

où la borne supérieure est prise sur toutes les boules B contenant x, et on dit que $F \in T^{\infty,2}(\Lambda T^*M)$ si, et seulement si,

$$\|F\|_{T^{\infty,2}(\Lambda T^*M)} := \|\mathcal{C}F\|_{L^\infty(M)} < +\infty.$$

Comme dans le cadre euclidien, le dual de $T^{p,2}(\Lambda T^*M)$ est $T^{p',2}(\Lambda T^*M)$ pour tout $1 \leq p < +\infty$, si $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. L'espace $T^{1,2}(\Lambda T^*M)$ possède une décomposition atomique (voir [280]) et les espaces $T^{p,2}(\Lambda T^*M)$ forment une famille d'espaces d'interpolation pour la méthode d'interpolation complexe.

5.3.3. *Définition des espaces de Hardy de formes différentielles sur M*

On définit ces espaces de Hardy à partir des espaces de tentes sur M par le biais d'opérateurs construits grâce au calcul fonctionnel de D et de Δ. Pour cela, on introduit les notations suivantes. Si $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on définit

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\theta+} &= \{z \in \mathbb{C}\backslash\{0\};\ |\arg z| \leq \theta\} \cup \{0\},\\
\Sigma^0_{\theta+} &= \{z \in \mathbb{C}\backslash\{0\};\ |\arg z| < \theta\},\\
\Sigma_\theta &= \Sigma_{\theta+} \cup (-\Sigma_{\theta+}),\\
\Sigma^0_\theta &= \Sigma^0_{\theta+} \cup (-\Sigma^0_{\theta+}),
\end{aligned}$$

et on note $H^\infty(\Sigma^0_\theta)$ l'algèbre des fonctions holomorphes bornées sur Σ^0_θ. Pour tous $\sigma, \tau > 0$, on appelle $\Psi_{\sigma,\tau}(\Sigma^0_\theta)$ l'ensemble des fonctions holomorphes $\psi \in H^\infty(\Sigma^0_\theta)$ pour lesquelles il existe $C > 0$ tel que, pour tout $z \in \Sigma^0_\theta$,

$$|\psi(z)| \leq C \inf\{|z|^\sigma, |z|^{-\tau}\}.$$

On pose alors $\Psi(\Sigma^0_\theta) = \cup_{\sigma,\tau>0} \Psi_{\sigma,\tau}(\Sigma^0_\theta)$.

Voici des exemples de fonctions dans ces différentes classes:

- si $\psi(z) = z^N(1 \pm iz)^{-\alpha}$ avec N, α entiers tels que $1 \leq N < \alpha$, alors $\psi \in \Psi_{N,\alpha-N}(\Sigma^0_\theta)$,

- si $\psi(z) = z^N(1+z^2)^{-\beta}$ pour des entiers N, β tels que $1 \leq N < 2\beta$, alors $\psi \in \Psi_{N,2\beta-N}(\Sigma_\theta^0)$,
- si $\psi(z) = z^N \exp(-z^2)$ pour un entier $N \geq 0$, alors $\psi \in \Psi_{N,\tau}(\Sigma_\theta^0)$ pour tout $\tau > 0$.

Soit $\psi \in \Psi(\Sigma_\theta^0)$ pour un $\theta > 0$. Pour tout $t > 0$, on pose $\psi_t(z) = \psi(tz)$ pour tout $z \in \Sigma_\theta^0$. On définit l'opétateur $\mathcal{S}_\psi : T^{2,2}(\Lambda T^*M) \to L^2(\Lambda T^*M)$ par

$$\mathcal{S}_\psi H = \int_0^{+\infty} \psi_t(D) H_t \frac{dt}{t}$$

et $\mathcal{Q}_\psi : L^2(\Lambda T^*M) \to T^{2,2}(\Lambda T^*M)$ par

$$(\mathcal{Q}_\psi h)_t = \psi_t(D) h$$

pour toute $h \in L^2(\Lambda T^*M)$ et tout $t > 0$. La continuité de $\mathcal{Q}_\psi : L^2(\Lambda T^*M) \to T^{2,2}(\Lambda T^*M)$ provient du théorème spectral, et celle de $\mathcal{S}_\psi : T^{2,2}(\Lambda T^*M) \to L^2(\Lambda T^*M)$ du fait que $\mathcal{S}_\psi = \mathcal{Q}_{\overline{\psi}}^*$.

Par analogie avec ce qui se passe dans le cas euclidien, on veut pouvoir dire que, si H est dans l'espace de tentes $T^{p,2}(\Lambda T^*M)$, alors $\mathcal{S}_\psi H$ est dans l'espace de Hardy H^p, et que si h est dans cet espace de Hardy H^p, alors $\mathcal{Q}_\psi h$ est dans l'espace de tentes $T^{p,2}(\Lambda T^*M)$. On définit donc un premier espace de la façon suivante:

Définition 5.1. Pour toute $\psi \in \Psi(\Sigma_\theta^0)$, on définit $E^p_{D,\psi}(\Lambda T^*M) = \mathcal{S}_\psi(T^{p,2}(\Lambda T^*M) \cap T^{2,2}(\Lambda T^*M))$, muni de la semi-norme

$$\begin{aligned} &\|h\|_{H^p_{D,\psi}(\Lambda T^*M)} \\ &\qquad = \inf\{\|H\|_{T^{p,2}(\Lambda T^*M)}; H \in T^{p,2}(\Lambda T^*M) \cap T^{2,2}(\Lambda T^*M), \mathcal{S}_\psi H = h\}. \end{aligned}$$

Supposons dans un premier temps que $p = 2$. On observe d'abord que, comme D est auto-adjoint sur $L^2(\Lambda T^*M)$,

$$L^2(\Lambda T^*M) = \overline{\mathcal{R}(D)} \oplus \mathcal{N}(D), \tag{5.2}$$

la somme étant directe et orthogonale (l'adhérence est prise pour la topologie forte de $L^2(\Lambda T^*M)$).

Si $h \in E^2_{D,\psi}(\Lambda T^*M)$, alors $h \in \overline{\mathcal{R}(D)}$ (l'adhérence ayant le même sens que dans (5.2)) et, par théorie spectrale,

$$\|\mathcal{Q}_\psi h\|_{T^{2,2}(\Lambda T^*M)} \sim \|h\|_2. \tag{5.3}$$

Fixons une fonction $\widetilde{\psi} \in \Psi(\Sigma_\theta^0)$ telle que $\int_0^{+\infty} \psi(\pm t)\widetilde{\psi}(\pm t)\frac{dt}{t} = 1$. On peut écrire une version de la formule reproduisante de Calderón (voir (2.31)): pour tout $h \in \overline{\mathcal{R}(D)}$,

$$h = \mathcal{S}_{\widetilde{\psi}} \mathcal{Q}_\psi h,$$

ce qui montre que $h \in E^2_{D,\psi}(\Lambda T^*M)$ et, par (5.3),

$$\|h\|_{E^2_{D,\psi}(\Lambda T^*M)} \sim \|\mathcal{Q}_\psi h\|_{T^{p,2}(\Lambda T^*M)}. \tag{5.4}$$

Ainsi, $E^2_{D,\psi}(\Lambda T^*M) = \overline{\mathcal{R}(D)}$, ce qui montre en particulier que $E^2_{D,\psi}(\Lambda T^*M)$ ne dépend pas du choix de $\psi \in \Psi(\Sigma^0_\theta)$.

On examine maintenant ce qui deviennent ces propriétés, et en particulier (5.4), quand $p \neq 2$, en distinguant $1 \leq p < 2$ et $2 < p < +\infty$. On est amené à restreindre la classe des fonctions ψ utilisables.

Le cas $1 \leq p < 2$: soit $\beta = E(\frac{\kappa}{2}) + 1$ (E désignant la partie entière, on rappelle que κ est donnée par (5.1)). Alors, pour $\psi \in \Psi_{\beta,2}(\Sigma^0_\theta)$, $E^p_{D,\psi}(\Lambda T^*M)$ ne dépend pas du choix de ψ, et peut être décrit grâce à l'opérateur $\mathcal{Q}_{\widetilde{\widetilde{\psi}}}$ si $\widetilde{\widetilde{\psi}} \in \Psi_{1,\beta+1}(\Sigma^0_\theta)$. Plus précisément:

Lemme 5.2. *Si $\psi, \widetilde{\psi} \in \Psi_{\beta,2}(\Sigma^0_\theta)$ et $\widetilde{\widetilde{\psi}} \in \Psi_{1,\beta+1}(\Sigma^0_\theta)$, alors*

$$E^p_{D,\psi}(\Lambda T^*M) = E^p_{D,\widetilde{\psi}}(\Lambda T^*M) = \{h \in \overline{\mathcal{R}(D)};\ \|\mathcal{Q}_{\widetilde{\widetilde{\psi}}} h\|_{T^{p,2}(\Lambda T^*M)} < +\infty\}$$

et la semi-norme dans $E^p_{D,\psi}(\Lambda T^*M)$ est en fait une norme et vérifie

$$\|h\|_{H^p_{D,\psi}(\Lambda T^*M)} \sim \|h\|_{H^p_{D,\widetilde{\psi}}(\Lambda T^*M)} \sim \|\mathcal{Q}_{\widetilde{\widetilde{\psi}}} h\|_{T^{p,2}(\Lambda T^*M)}.$$

Dans ce lemme, $\overline{\mathcal{R}(D)}$ a toujours le même sens que dans (5.2).

Proposition 5.1. *Avec les mêmes notations que pour le Lemme 5.2, $\{h \in \mathcal{R}(D); \|\mathcal{Q}_{\widetilde{\widetilde{\psi}}} h\|_{T^{p,2}(\Lambda T^*M)} < +\infty\}$ est dense dans $E^p_{D,\psi}(\Lambda T^*M)$ pour toute $\widetilde{\widetilde{\psi}} \in \Psi_{1,\beta+1}(\Sigma^0_\theta)$.*

Les preuves de ces résultats reposent sur le fait que, si $\varphi \in \Psi_{1,\beta+1}(\Sigma^0_\theta)$ et $\psi \in \Psi_{\beta,2}(\Sigma^0_\theta)$, $\mathcal{Q}_\varphi \mathcal{S}_\psi$, qui est clairement un opérateur continu sur $T^{2,2}(\Lambda T^*M)$, se prolonge en un opérateur continu sur $T^{p,2}(\Lambda T^*M)$. Comme les espaces de tentes forment une famille d'espaces d'interpolation pour la méthode complexe, il suffit de prouver cette continuité sur $T^{1,2}(\Lambda T^*M)$. Cette continuité provient essentiellement de la décomposition atomique pour $T^{1,2}(\Lambda T^*M)$ et des estimations de type Gaffney pour des opérateurs construits à partir de D. C'est dans cette preuve qu'apparaissent les restrictions sur la fonction ψ dans les énoncés du Lemme 5.2 et de la Proposition 5.1. On renvoie à [23], sections 4 et 5, pour des preuves complètes.

On peut à présent définir les espaces de Hardy associés à D pour $1 \leq p \leq 2$.

Définition 5.2. Soit $1 \leq p \leq 2$. On définit $H^p_D(\Lambda T^*M)$ comme le complété de $E^p_{D,\psi}(\Lambda T^*M)$ pour la norme $\|h\|_{H^p_{D,\psi}(\Lambda T^*M)}$ pour toute $\psi \in \Psi_{\beta,2}(\Sigma^0_\theta)$. Cette norme sera simplement notée $\|h\|_{H^p_D(\Lambda T^*M)}$.

On a donc

$$H^p_D(\Lambda T^*M) = \overline{\{h \in \mathcal{R}(D); \|\mathcal{Q}_\psi h\|_{T^{p,2}(\Lambda T^*M)} < +\infty\}}$$

muni de la norme $\|\mathcal{Q}_\psi h\|_{T^{p,2}(\Lambda T^*M)}$ pour toute $\psi \in \Psi_{1,\beta+1}(\Sigma^0_\theta)$. Par exemple,

$$\begin{aligned}\|h\|_{H^p_D(\Lambda T^*M)} &\sim \|tDe^{-t\sqrt{\Delta}}h\|_{T^{p,2}(\Lambda T^*M)}\\ &\sim \|t^2\Delta e^{-t^2\Delta}h\|_{T^{p,2}(\Lambda T^*M)}\\ &\sim \|tD(I+t^2\Delta)^{-N}h\|_{T^{p,2}(\Lambda T^*M)}\end{aligned}$$

si $N \geq \frac{\beta}{2} + 1$.

Il résulte de la discussion du cas $p = 2$ que $H^2(\Lambda T^*M) = \overline{\mathcal{R}(D)}$.

Le cas $2 < p < +\infty$: on a des propriétés analogues, en permutant les rôles de $\Psi_{\beta,2}(\Sigma^0_\theta)$ et $\Psi_{1,\beta+1}(\Sigma^0_\theta)$.

Définition 5.3. On suppose que $2 < p < +\infty$ et on pose toujours $\beta = E(\frac{\kappa}{2}) + 1$. On définit $H^p_D(\Lambda T^*M)$ comme le complété de $E^p_{D,\psi}(\Lambda T^*M)$ pour la norme $\|h\|_{H^p_{D,\psi}(\Lambda T^*M)}$ avec $\psi \in \Psi_{1,\beta+1}(\Sigma^0_\theta)$. Cette norme sera notée $\|h\|_{H^p_D(\Lambda T^*M)}$. Cet espace est indépendant du choix de $\psi \in \Psi_{1,\beta+1}(\Sigma^0_\theta)$.

En particulier,

$$H^p_D(\Lambda T^*M) = \overline{\{h \in \mathcal{R}(D); \|\mathcal{Q}_\psi h\|_{T^{p,2}(\Lambda T^*M)} < +\infty\}}$$

pour la norme $\|\mathcal{Q}_\psi h\|_{T^{p,2}(\Lambda T^*M)}$ pour toute $\psi \in \Psi_{\beta,2}(\Sigma^0_\theta)$. Par exemple,

$$\begin{aligned}\|h\|_{H^p_D(\Lambda T^*M)} &\sim \|(tD)^\beta e^{-t\sqrt{\Delta}}h\|_{T^{p,2}(\Lambda T^*M)}\\ &\sim \|(t^2\Delta)^M e^{-t^2\Delta}h\|_{T^{p,2}(\Lambda T^*M)}\\ &\sim \|(tD)^\beta(I+t^2\Delta)^{-N}h\|_{T^{p,2}(\Lambda T^*M)}\end{aligned}$$

avec $M \geq \frac{\beta}{2}$ et $N \geq \frac{\beta}{2} + 1$.

Les deux définitions coïncident bien pour $p = 2$ et donnent $H^2(\Lambda T^*M) = \overline{\mathcal{R}(D)}$.

On peut également définir, pour tout $1 \leq p < +\infty$, des espaces de Hardy $H^p_\Delta(\Lambda T^*M)$ associés au Laplacien $\Delta = D^2$, et, en choisissant les fonctions ψ dans les constructions précédentes comme des fonctions paires, on voit facilement que l'espace $H^p_\Delta(\Lambda T^*M)$ coïncide avec $H^p_D(\Lambda T^*M)$ pour tout $1 < p < +\infty$. Cet espace sera désormais noté $H^p(\Lambda T^*M)$.

Enfin, on définit $H^\infty(\Lambda T^*M)$ comme le dual de $H^1(\Lambda T^*M)$, muni de la norme usuelle du dual. On peut décrire cet espace de la manière suivante: si $G \in T^{\infty,2}(\Lambda T^*M)$, on définit:

$$T_G(f) := \iint (\mathcal{Q}_\psi f)_t(x) G(x,t) d\mu(x) \frac{dt}{t}$$

pour toute $f \in E_D^1(\Lambda T^*M)$. Alors T_G s'étend de manière unique en une forme linéaire continue sur $H^1(\Lambda T^*M)$. Réciproquement, si U est une forme linéaire continue sur $H^1(\Lambda T^*M)$, il existe $G \in T^{\infty,2}(\Lambda T^*M)$ tel que $U = T_G$. On a également

$$\|U\|_{H^\infty(\Lambda T^*M)} \sim \inf \|G\|_{T^{\infty,2}(\Lambda T^*M)},$$

la borne inférieure étant prise sur toutes les $G \in T^{\infty,2}(\Lambda T^*M)$ telles que $U = T_G$.

Cet espace dual de $H^1(\Lambda T^*M)$ est en fait de type BMO si on se réfère à la dualité usuelle entre H^1 et BMO, mais on conserve l'écriture $H^\infty(\Lambda T^*M)$ de manière à unifier les notations. Contrairement à ce qui se passe dans [197], on ne donne pas de définition de cet espace BMO faisant directement intervenir D, et on n'obtient pas de caractérisation de cet espace BMO en termes de mesures de Carleson, ni de lemme de John–Nirenberg.

Les propriétés de dualité et d'interpolation des espaces de tentes se transmettent aux espaces de Hardy:

Théorème 5.2. *Pour tout $p \in]1,+\infty[$, si $1/p + 1/p' = 1$, le dual de $H^p(\Lambda T^*M)$ est $H^{p'}(\Lambda T^*M)$. La dualité est donnée par $\langle g, h\rangle \mapsto \int_M \langle g(x), h(x)\rangle dx$. De plus, par définition, le dual de $H^1(\Lambda T^*M)$ est $H^\infty(\Lambda T^*M)$.*

Théorème 5.3. *Soient $1 \le p_0 < p < p_1 \le +\infty$ et $\theta \in]0,1[$ tels que $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$. Alors $[H^{p_0}(\Lambda T^*M), H^{p_1}(\Lambda T^*M)]_\theta = H^p(\Lambda T^*M)$.*

5.3.4. *Transformée de Riesz et espaces de Hardy*

Théorème 5.4.

1. *Pour tout $1 \le p \le +\infty$, la transformée de Riesz $D\Delta^{-1/2}$, définie initialement sur $\mathcal{R}(D)$, se prolonge en un opérateur continu sur $H^p(\Lambda T^*M)$. On a $\|D\Delta^{-1/2}h\|_{H^p(\Lambda T^*M)} \sim \|h\|_{H^p(\Lambda T^*M)}$.*
2. *Plus généralement, $f(D)$ est continu sur $H^p(\Lambda T^*M)$ pour toute $f \in H^\infty(\Sigma_\theta^0)$ et on a $\|f(D)h\|_{H^p(\Lambda T^*M)} \lesssim \|f\|_\infty \|h\|_{H^p(\Lambda T^*M)}$.*

Ce résultat est une conséquence très simple des définitions des espaces $H^p(\Lambda T^*M)$ (voir [23], Théorèmes 5.11 et 5.12).

On peut préciser le Théorème 5.4 en considérant des espaces de Hardy de formes différentielles de degré fixé. Soit n la dimension de M. En écrivant $\Lambda T^*M = \oplus_{0\le k\le n} \Lambda^k T^*M$, on définit de façon naturelle $H^p(\Lambda^k T^*M)$ pour tout $0 \le k \le n$ (d'abord pour $1 \le p < +\infty$, puis pour $p = +\infty$ par dualité). Le Théorème 5.4 appliqué aux k-formes montre que, si $0 \le k \le n-1$, $d\Delta^{-1/2}$ est continu de $H^p(\Lambda^k T^*M)$ dans $H^p(\Lambda^{k+1}T^*M)$, et que, pour tout $1 \le k \le n$, $d^*\Delta^{-1/2}$ est continu de $H^p(\Lambda^k T^*M)$ dans $H^p(\Lambda^{k-1}T^*M)$. Finalement,

Théorème 5.5. *Pour tout $1 \le p \le +\infty$, $d\Delta^{-1/2}$ et $d^*\Delta^{-1/2}$ sont continus sur $H^p(\Lambda T^*M)$.*

5.3.5. *Décomposition de Hodge*

On peut également définir de façon naturelle des espaces de Hardy associés aux opérateurs d et d^*. Pour $1 \leq p < +\infty$, on pose

$$H_d^p(\Lambda T^*M) = \overline{\mathcal{R}(d) \cap H^p(\Lambda T^*M)}, \quad H_{d^*}^p(\Lambda T^*M) = \overline{\mathcal{R}(d^*) \cap H^p(\Lambda T^*M)}$$

l'adhérence étant prise pour la topologie de $H^p(\Lambda T^*M)$. On obtient alors une décomposition de Hodge pour $H^p(\Lambda T^*M)$:

Théorème 5.6. *Pour tout* $1 \leq p < +\infty$, $H^p(\Lambda T^*M) = H_d^p(\Lambda T^*M) \oplus H_{d^*}^p(\Lambda T^*M)$, *et cette décomposition est topologique.*

C'est une conséquence du Théorème 5.4.

Si $1 < p < +\infty$, le dual de $H_d^p(\Lambda T^*M)$ est isomorphe à $H_d^{p'}(\Lambda T^*M)$, avec $1/p + 1/p' = 1$. On définit $H_d^\infty(\Lambda T^*M)$ (resp. $H_{d^*}^\infty(\Lambda T^*M)$) comme le dual de $H_d^1(\Lambda T^*M)$ (resp. $H_{d^*}^1(\Lambda T^*M)$).

On peut donner l'énoncé suivant à propos des transformées de Riesz sur les espaces $H_d^p(\Lambda T^*M)$ et $H_{d^*}^p(\Lambda T^*M)$:

Théorème 5.7. *Soit* $1 \leq p \leq +\infty$. *L'opérateur* $d\Delta^{-1/2}$ *se prolonge en un isomorphisme continu de* $H_{d^*}^p(\Lambda T^*M)$ *sur* $H_d^p(\Lambda T^*M)$ *et* $d^*\Delta^{-1/2}$ *en un isomorphisme continu de* $H_d^p(\Lambda T^*M)$ *sur* $H_{d^*}^p(\Lambda T^*M)$. *Ces opérateurs sont inverses l'un de l'autre.*

En fixant le degré des formes considérées, on définit aussi $H_d^p(\Lambda^k T^*M)$ pour tout $1 \leq k \leq n$ et $H_{d^*}^p(\Lambda^k T^*M)$ pour tout $0 \leq k \leq n-1$, et on déduit du Théorème 5.7:

Théorème 5.8. *Soit* $1 \leq p \leq +\infty$.

(a) *Pour tout* $0 \leq k \leq n-1$, $d\Delta^{-1/2}$ *est un isomorphisme continu de* $H_{d^*}^p(\Lambda^k T^*M)$ *sur* $H_d^p(\Lambda^{k+1} T^*M)$.
(b) *Pour tout* $1 \leq k \leq n$, $d^*\Delta^{-1/2}$ *est un isomorphisme continu de* $H_d^p(\Lambda^k T^*M)$ *sur* $H_{d^*}^p(\Lambda^{k-1} T^*M)$.

5.3.6. *La décomposition moléculaire*

Dans [243, 244], Lou et McIntosh ont obtenu une décomposition atomique pour les espaces $H_d^1(\mathbb{R}^n, \Lambda^l)$ et $H_{z,d}^1(\Omega, \Lambda^l)$ (voir la section 5.2). On rappelle que la condition de moment nul pour un atome usuel est remplacée par la condition que cet atome a est une forme différentielle exacte db, avec des estimations L^2 appropriées pour a et b.

On adapte cette notion d'atome au cas des formes différentielles sur M. Comme dans [197], le manque de décroissance de $e^{-t\Delta}$ (dont on ne sait pas, en général, estimer ponctuellement le noyau) a pour conséquence qu'on n'obtient pas des atomes à support compact, mais des molécules, qui ne sont pas à support compact en général (voir toutefois la section 5.5.1 plus loin) mais possèdent une bonne décroissance L^2 sur des couronnes dyadiques. De plus, une molécule a sera l'image par D^N d'une section $b \in L^2(\Lambda T^*M)$, où $N \geq 1$ est un entier assez grand, pour compenser le manque de régularité de $e^{-t\Delta}$.

Voici la définition précise d'une molécule. Soit $C > 0$. Pour toute boule $B \subset M$ de rayon r, si $(\chi_k)_{k\geq 0}$ est une suite de fonctions de classe C^∞ sur M à support compact, on dira que $(\chi_k)_{k\geq 0}$ est adaptée à B si, et seulement si:

- χ_0 est à support dans $4B$ (voir la section 1 pour cette notation),
- pour tout $k \geq 1$, χ_k est à support dans $2^{k+2}B \backslash 2^{k-1}B$,
-

$$\sum_{k\geq 0} \chi_k = 1 \text{ sur } M \quad \text{et} \quad \||\nabla \chi_k|\|_\infty \leq \frac{C}{2^k r}. \tag{5.5}$$

Si $C > 0$ est assez grand, pour toute boule B, il existe une suite adaptée à B.

Soit $N \geq 1$ un entier. Si $a \in L^2(\Lambda T^*M)$, on dit que a est une N-*molécule* si, et seulement si, il existe une boule $B \subset M$ de rayon r, $b \in L^2(\Lambda T^*M)$ telle que $a = D^N b$, et une suite $(\chi_k)_{k\geq 0}$ adaptée à B telle que, pour tout $k \geq 0$,

$$\|\chi_k a\|_{L^2(\Lambda T^*M)} \leq 2^{-k} V^{-1/2}(2^k B) \quad \text{et} \quad \|\chi_k b\|_{L^2(\Lambda T^*M)} \leq 2^{-k} r^N V^{-1/2}(2^k B). \tag{5.6}$$

On remarque que les estimations (5.6) entraînent

$$\|a\|_{L^2(\Lambda T^*M)} \leq 2V^{-1/2}(B) \quad \text{et} \quad \|b\|_{L^2(\Lambda T^*M)} \leq 2r^N V^{-1/2}(B). \tag{5.7}$$

Ainsi, $a \in \mathcal{R}(D) \subset H^2(\Lambda T^*M)$. De plus, toute N-molécule a appartient à $L^1(\Lambda T^*M)$ et

$$\|a\|_{L^1(\Lambda T^*M)} \leq 2C \tag{5.8}$$

où C est la constante apparaissant dans (D).

Définition 5.4. Une section f appartient à $H^1_{\mathrm{mol},N}(\Lambda T^*M)$ si, et seulement si, il existe une suite $(\lambda_j)_{j\geq 1} \in l^1$ et une suite de N-molécules $(a_j)_{j\geq 1}$ telles que

$$f = \sum_{j\geq 1} \lambda_j a_j,$$

avec convergence dans $L^1(\Lambda T^*M)$, et on définit $\|f\|_{H^1_{\mathrm{mol},N}(\Lambda T^*M)}$ comme la borne inférieure de $\sum |\lambda_j|$ prise sur toutes les décompositions.

On vérifie facilement que $H^1_{\mathrm{mol},N}(\Lambda T^*M)$ est un espace de Banach. Si N est assez grand, il coïncide avec $H^1(\Lambda T^*M)$:

Théorème 5.9. *Pour tout entier $N > \frac{\kappa}{2} + 1$ (on rappelle que κ apparaît dans (5.1)), $H^1_{\mathrm{mol},N}(\Lambda T^*M) = H^1(\Lambda T^*M)$. En particulier, $H^1_{\mathrm{mol},N}(\Lambda T^*M)$ est indépendant de N du moment que $N > \frac{\kappa}{2} + 1$.*

La preuve de ce théorème passe par la décomposition atomique pour les espaces de tentes et les estimations L^2 de type Gaffney pour D.

La décomposition moléculaire de $H^1(\Lambda T^*M)$ montre en particulier que cet espace est inclus dans $L^1(\Lambda T^*M)$, ce que la définition de $H^1(\Lambda T^*M)$ ne permet pas d'obtenir de façon immédiate. Plus généralement:

Corollaire 5.1.

(a) *Pour* $1 \leq p \leq 2$, $H^p(\Lambda T^*M) \subset \overline{\mathcal{R}(D) \cap L^p(\Lambda T^*M)}^{L^p(\Lambda T^*M)}$.

(b) *Pour* $2 \leq p < +\infty$, $\overline{\mathcal{R}(D) \cap L^p(\Lambda T^*M)}^{L^p(\Lambda T^*M)} \subset H^p(\Lambda T^*M)$.

Remarque 5.2. L'assertion (b) du Corollaire 5.1 montre que, pour toute $\psi \in \Psi_{\beta,2}(\Sigma_0^\theta)$ et tout $2 \leq p < +\infty$, pour toute $f \in \mathcal{R}(D) \cap L^p(\Lambda T^*M)$, $\mathcal{Q}_\psi f \in T^{p,2}(\Lambda T^*M)$ et

$$\|\mathcal{Q}_\psi f\|_{T^{p,2}(\Lambda T^*M)} \lesssim \|f\|_{L^p(\Lambda T^*M)}. \tag{5.9}$$

Dans le cadre euclidien et pour le laplacien usuel sur les fonctions, cette inégalité traduit exactement la continuité L^p de l'intégrale d'aire de Lusin (voir [293], p. 91). Sur un espace de nature homogène, la continuité sur L^p (pour tout $1 < p < +\infty$) de l'intégrale d'aire associée à un opérateur L est établie dans [18] sous les hypothèses suivantes: L engendre un semigroupe holomorphe sur L^2, dont le noyau vérifie des estimations gaussiennes supérieures, et L a un calcul holomorphe borné sur L^2. On rappelle que, dans ce travail sur les espaces de Hardy de formes différentielles, on ne suppose aucune borne supérieure sur le noyau du semigroupe du laplacien de Hodge pour prouver (5.9) pour $p \geq 2$. Cette remarque signifie aussi que notre construction d'espaces de Hardy permet, pour $p > 2$, de prouver la continuité L^p d'une généralisation appropriée de l'intégrale d'aire de Lusin. Un tel point de vue constitue une des motivations de [204], voir la section 5.5.3 ci-dessous.

Remarque 5.3. Comme $\Delta = D^2$, on peut également définir un espace $H^1_{\mathrm{mol},N}$ associé à Δ, qui coïncide aussi avec $H^1(\Lambda T^*M)$ si N est assez grand.

5.3.7. *Caractérisation de $H^1(\Lambda T^*M)$ par des fonctions maximales*

On a vu (section 2.3.2 dans $\mathbb{R}^n$ et la section 3 dans des domaines fortement lipschitziens de $\mathbb{R}^n$) que, dans le cadre euclidien, l'appartenance d'une fonction f à un espace de Hardy H^1 peut être caractérisée par l'appartenance à L^1 de la fonction maximale non tangentielle associée à $P_t f$, où P_t est le semigroupe de Poisson engendré par un opérateur elliptique d'ordre 2, si on suppose que le noyau de ce semigroupe vérifie des hypothèses de taille et de régularité appropriées. On va donner une caractérisation maximale analogue de $H^1(\Lambda T^*M)$. Deux différences importantes apparaissent: comme dans [197], l'absence d'estimations ponctuelles (et en particulier de régularité) pour le semigroupe engendré par le laplacien de Hodge oblige à remplacer l'évaluation ponctuelle de $|P_t f(y)|$ par une moyenne L^2

sur une boule par rapport à y et t (cette idée provient de [221]), et le semigroupe de Poisson est trop peu décroissant, et est remplacé par le semigroupe de la chaleur.

Pour formuler précisément le résultat, pour tout $x \in M$ et $0 < r < t$, on notera $B((x,t),r) = B(x,r) \times (t-r, t+r)$.

Soit $\alpha > 0$. On choisit $c > 0$ tel que, pour tout $x \in M$, dès que $(y,t) \in \Gamma_\alpha(x)$, $B((y,t),ct) \subset \Gamma_{2\alpha}(x)$ (c'est le cas pour $c \le \alpha/(1+2\alpha)$). Pour toute $f \in L^2(\Lambda T^*M)$ et tout $x \in M$, on pose

$$f^*_{\alpha,c}(x) = \sup_{(y,t)\in\Gamma_\alpha(x)} \left(\frac{1}{tV(y,t)} \iint_{B((y,t),ct)} |e^{-s^2\Delta} f(z)|^2 dz ds \right)^{1/2}.$$

On définit alors $H^1_{\max}(\Lambda T^*M)$ comme le complété de $\{f \in \mathcal{R}(D); \|f^*_{\alpha,c}\|_{L^1(M)} < +\infty\}$ pour cette norme et on note

$$\|f\|_{H^1_{\max}(\Lambda T^*M)} = \|f^*_{\alpha,c}\|_{L^1(M)}.$$

On peut vérifier que l'espace $H^1_{\max}(\Lambda T^*M)$ ne dépend pas du choix de α et c vérifiant les conditions précédentes. On a alors:

Théorème 5.10. *Sous l'hypothèse (D), $H^1(\Lambda T^*M) = H^1_{\max}(\Lambda T^*M)$.*

5.3.8. *Comparaison avec $H^1_{CW}(M)$ et $L^p(\Lambda T^*M)$, précisions sur la décomposition moléculaire*

En renforçant les hypothèses géométriques sur M, on peut préciser certains des résultats précédents.

Comparaison de $H^1(\Lambda T^*M)$ avec l'espace de Hardy de Coifman–Weiss
L'espace $H^1_{d^*}(\Lambda^0 T^*M) = H^1_D(\Lambda^0 T^*M) = H^1_\Delta(\Lambda^0 T^*M)$ est un espace de Hardy de 0-formes, c'est-à-dire de fonctions. Sous l'hypothèse (D), il est naturel de chercher à le comparer à l'espace $H^1_{CW}(M)$.

Sous l'hypothèse (D), on a toujours $H^1_{d^*}(\Lambda^0 T^*M) \subset H^1_{CW}(M)$. L'inclusion est stricte en général. Ainsi, si M est la variété formée de deux copies de $\mathbb{R}^n$ reliées par un cylindre, la propriété (D) est satisfaite, de sorte que la transformée de Riesz $d\Delta^{-1/2}$ est continue de $H^1_{d^*}(\Lambda^0 T^*M)$ dans $H^1_d(\Lambda^1 T^*M)$ d'après le Théorème 5.4, alors que cette même transformée de Riesz n'est pas continue de $H^1_{CW}(M)$ dans $L^1(M)$, ce que l'on peut voir en utilisant les méthodes de [75].

En revanche:

Théorème 5.11. *Si on suppose (D) et (P), alors $H^1_{d^*}(\Lambda^0 T^*M) = H^1_{CW}(M)$.*

Une conséquence de ce résultat et de la continuité des transformées de Riesz sur les espaces de Hardy est le Théorème 5.1, déjà obtenu dans [279]. On peut également, en utilisant la continuité des transformées de Riesz sur les espaces de Hardy de formes différentielles, retrouver le résultat de continuité des transformées de Riesz "scalaires" prouvé dans [249] et cité dans la section 5.1.

Précisions sur la décomposition moléculaire de $H^1(\Lambda T^*M)$

On peut améliorer la décomposition moléculaire des formes dans $H^1(\Lambda T^*M)$ en supposant certaines estimations gaussiennes sur le semigroupe engendré par le Laplacien de Hodge.

On note toujours n la dimension de M. Pour tout $0 \leq k \leq n$, soit p_t^k le noyau de $e^{-t\Delta_k}$, où Δ_k est le Laplacien de Hodge–de Rham restreint aux k-formes. On dira que la condition (G_k) est satisfaite si, et seulement si, il existe $C, c > 0$ tels que, pour tout $t > 0$ et tous $x, y \in M$,

$$|p_t^k(x,y)| \leq \frac{C}{V(x,\sqrt{t})} e^{-cd^2(x,y)/t}. \tag{G_k}$$

On dira que la condition (G) est satisfaite si, et seulement si, (G_k) est satisfaite pour tout $0 \leq k \leq n$.

En supposant que certaines estimations gaussiennes sont vérifiées, on peut améliorer la décomposition moléculaire de l'espace $H^1(\Lambda T^*M)$:

Théorème 5.12. *On suppose toujours (D).*

(a) *Si la condition (G) est vérifiée, alors $H^1(\Lambda T^*M) = H^1_{\mathrm{mol},1}(\Lambda T^*M)$.*
(b) *Si $1 \leq k \leq n$ et (G_{k-1}) est vérifiée, alors $H^1_d(\Lambda^k T^*M) = H^1_{d,\mathrm{mol},1}(\Lambda^k T^*M)$.*
(c) *Si $0 \leq k \leq n-1$ et (G_{k+1}) est vérifiée, alors $H^1_{d^*}(\Lambda^k T^*M) = H^1_{d^*,\mathrm{mol},1}(\Lambda^k T^*M)$.*

Dans ce théorème, on définit $H^1_{d,\mathrm{mol},1}(\Lambda^k T^*M)$ et $H^1_{d^*,\mathrm{mol},1}(\Lambda^k T^*M)$ de façon analogue à $H^1_{\mathrm{mol},1}(\Lambda T^*M)$ en utilisant les opérateurs d ou d^* au lieu de D et en spécialisant aux k-formes.

En complément au Théorème 5.12, on peut observer que les sections de $H^1_{\mathrm{mol},1}(\Lambda T^*M)$ possèdent en fait une décomposition *atomique*. Appelons atome toute section $a \in L^2(\Lambda T^*M)$ pour laquelle il existe une boule $B \subset M$ de rayon r et une section $b \in L^2(\Lambda T^*M)$ à support dans B, telle que $a = Db$ et

$$\|a\|_{L^2(\Lambda T^*M)} \leq V^{-1/2}(B) \quad \text{et} \quad \|b\|_{L^2(\Lambda T^*M)} \leq rV^{-1/2}(B) \tag{5.10}$$

(cette définition est donc similaire à celle des atomes de $H^1_d(\mathbb{R}^n, \Lambda^l)$ introduite dans [244]). On définit alors $H^1_{at}(\Lambda T^*M)$ comme l'espace des sections f pour lesquelles il existe une suite $(\lambda_j)_{j\geq 1} \in l^1$ et une suite $(a_j)_{j\geq 1}$ d'atomes tels que $f = \sum_j \lambda_j a_j$, muni de la norme usuelle. On a alors $H^1_{\mathrm{mol},1}(\Lambda T^*M) = H^1_{at}(\Lambda T^*M)$. En utilisant cette remarque, on voit que, quand $M = \mathbb{R}^n$ et $k = 0$, l'assertion (c) du Théorème 5.12 est exactement la décomposition atomique usuelle pour $H^1(\mathbb{R}^n)$.

On définit de façon semblable $H^1_{d,at}(\Lambda T^*M)$, et cet espace coïncide avec $H^1_{d,\mathrm{mol},1}(\Lambda T^*M)$. Une conséquence de ce fait et du Théorème 5.12 est que, lorsque $M = \mathbb{R}^n$, $H^1_d(\Lambda^k T^*\mathbb{R}^n)$ est égal à l'espace $H^1_d(\mathbb{R}^n, \Lambda^k)$ introduit dans [244].

Comparaison de $H^p(\Lambda T^*M)$ avec $L^p(\Lambda T^*M)$

Sous la condition (G) (toujours satisfaite lorsque $M = \mathbb{R}^n$), on peut comparer exactement $H^p(\Lambda T^*M)$ et $L^p(\Lambda T^*M)$ pour $1 < p \leq 2$:

Théorème 5.13. *On suppose* (D). *Soit* $1 < p < 2$.

(a) *On suppose* (G). *Alors,*

$$H^p(\Lambda T^*M) = \overline{\mathcal{R}(D) \cap L^p(\Lambda T^*M)}^{L^p(\Lambda T^*M)},$$

$$H^p_d(\Lambda T^*M) = \overline{\mathcal{R}(d) \cap L^p(\Lambda T^*M)}^{L^p(\Lambda T^*M)} \quad \text{et}$$

$$H^p_{d^*}(\Lambda T^*M) = \overline{\mathcal{R}(d^*) \cap L^p(\Lambda T^*M)}^{L^p(\Lambda T^*M)}$$

(b) *On suppose* (G_k) *pour un* $0 \leq k \leq n$. *Alors*

$$H^p(\Lambda^k T^*M) = \overline{\mathcal{R}(D) \cap L^p(\Lambda^k T^*M)}^{L^p(\Lambda^k T^*M)},$$

et on a aussi les égalités correspondantes pour $H^p_d(\Lambda^k T^*M)$ *et* $H^p_{d^*}(\Lambda^k T^*M)$.

Remarque 5.4. On ne sait pas si l'égalité

$$H^p(\Lambda^0 T^*M) = \overline{\mathcal{R}(D) \cap L^p(\Lambda^0 T^*M)}^{L^p(\Lambda^0 T^*M)} \quad \text{pour } 1 < p < 2$$

reste vraie sans une hypothèse de type (G) (notons que cette question concerne des espaces de fonctions). Pour $p > 2$, on a vu que $\overline{\mathcal{R}(D) \cap L^p(\Lambda T^*M)}^{L^p(\Lambda T^*M)} \subset H^p(\Lambda T^*M)$, et l'inclusion réciproque est fausse en général, même sous des hypothèses de type (G) ou inégalité de Poincaré, car elle entraînerait la continuité des transformées de Riesz sur les espaces L^p de fonctions, qui, même avec ces hypothèses, peut ne pas être vraie, comme on l'a vu dans la section 2.2.3.

Un corollaire du Théorème 5.13 et de la continuité des transformées de Riesz sur les espaces de Hardy est l'énoncé suivant:

Corollaire 5.2. *On suppose* (D) *et* (G_0). *Alors, pour tout* $1 < p \leq 2$, *la transformée de Riesz (pour les fonctions)* $d\Delta^{-1/2}$ *est continue de* $L^p(\Lambda^0 T^*M)$ *dans* $L^p(\Lambda^1 T^*M)$.

On notera que l'hypothèse (G_0) est exactement l'hypothèse (*GUE*). Ce résultat, ainsi que la continuité de $L^1(\Lambda^0 T^*M)$ dans $L^{1,\infty}(\Lambda^1 T^*M)$ sous les mêmes hypothèses, ont été obtenus dans [98]. Il faut noter que les résultats sur les espaces de Hardy de formes différentielles ne permettent pas de retrouver la continuité de $L^1(\Lambda^0 T^*M)$ dans $L^{1,\infty}(\Lambda^1 T^*M)$. Par ailleurs, la question de savoir si le Corollaire 5.2 reste vrai sous la seule hypothèse (D) est ouverte.

5.4. *Une version locale*

Une version locale des résultats de [23] est donnée dans [71]. Si M est une variété à croissance du volume des boules au plus exponentielle, les auteurs définissent les espaces de Hardy locaux $h^p_D(\Lambda T^*M)$ pour $1 \leq p \leq +\infty$. Les transformées de Riesz "locales" $D(\Delta + a\mathrm{Id})^{-1/2}$ sont continues sur $h^p_D(\Lambda T^*M)$ pour tout $a > 0$ et tout $1 \leq p \leq +\infty$. Une décomposition moléculaire de $h^1(\Lambda T^*M)$ est également obtenue. Pour cela, de nouveaux espaces tentes "localisés" sont introduits.

5.5. *Construction d'espaces de Hardy et de Hardy–Sobolev associés à des opérateurs*

Plusieurs constructions d'espaces de Hardy associés à des opérateurs dans des cadres généraux ont été développées. Certaines d'entre elles (comme celle de [197], généralisée dans [198]), déjà rencontrée dans les sections 3 et 4) sont parallèles à celle de [23]. Nous décrivons ci-après certains développements récents.

5.5.1. *Espaces de Hardy associés à des opérateurs auto-adjoints positifs*

Dans [196], les auteurs développent une théorie des espaces de Hardy H^p $(1 \leq p < +\infty)$ et BMO sur un espace X de nature homogène, associés à un opérateur auto-adjoint positif sur $L^2(X)$, vérifiant des estimation de type Gaffney. Cette théorie étend les résultats de [23] (mais aussi de [197], à ceci près que L n'est pas supposé auto-adjoint dans [197]) dans le cas des fonctions (0-formes) et en améliore certains. En particulier, l'espace H^1 ainsi construit possède une décomposition *atomique*, ce qui s'applique en particulier à $H^1(\Lambda T^*M)$ dans [23]. Un point crucial des preuves (qui oblige L à être auto-adjoint) est l'équivalence qu'établissent les auteurs entre les estimations "à la Gaffney" pour L et la propriété de propagation à vitesse finie de l'équation des ondes associée à L. En revanche, les auteurs n'obtiennent pas de caractérisation maximale de H^1 en général, mais seulement l'inclusion de H^1 dans un espace défini par une fonction maximale verticale ou non tangentielle (une telle *caractérisation* est toutefois obtenue dans le cas particulier des espaces de Hardy associés à un opérateur de Schrödinger, situation pour laquelle les auteurs montrent aussi des résultats de continuité des transformées de Riesz de H^1 dans L^1). Le dual de l'espace H^1 ainsi construit est un espace BMO associé à L^*. Enfin, en suivant une construction analogue à celle de [23], les auteurs construisent aussi des espaces H^p_L qui forment une famille d'espaces d'interpolation pour la méthode complexe. Un théorème d'interpolation réelle de type Marcinkiewicz est également prouvé.

5.5.2. *Espaces de Hardy associés à des opérateurs sous forme divergence*

Dans [198], les résultats de [197] et [196] sont étendus dans plusieurs directions. Si $L = -\mathrm{div}(A\nabla)$ est un opérateur elliptique d'ordre 2 à coefficients complexes sur $\mathbb{R}^n$, les auteurs considèrent les espaces de Hardy, de Lipschitz, les espaces L^p et les espaces de Sobolev associés à L. Ils prouvent que, pour tout $p \notin [\frac{2n}{n+2}, \frac{2n}{n-2}]$, il existe L tel que le semigroupe e^{-tL} n'est pas borné sur $L^p(\mathbb{R}^n)$. Ils décrivent tous les espaces de Sobolev dans lesquels L possède un calcul fonctionnel holomorphe. Les espaces de Hardy et de Lipschitz sont caractérisés en termes de fonctions maximales et de transformées de Riesz. Les auteurs prouvent aussi des décompositions moléculaires et des résultats de dualité pour les espaces de Hardy.

5.5.3. *Espaces de Hardy de fonctions à valeurs dans des espaces de Banach*

La théorie des semigroupes Markoviens développée dans [294] montre que, pour $1 < p < +\infty$, pour toute fonction $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$,

$$\|f\|_p \sim \|g_1(f)\|_p, \tag{5.11}$$

où

$$g_1(f)(x) := \left(\int_0^{+\infty} |t\sqrt{-\Delta} e^{-t\sqrt{-\Delta}} f(x)|^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On a une inégalité comparable pour l'intégrale d'aire de Lusin. Si

$$sf(x) = \left(\iint_{|y-x|<t} |t\partial_t e^{-t(-\Delta)^{1/2}} f(y)|^2 \frac{dydt}{t^{n+1}} \right)^{1/2},$$

alors, pour tout $1 < p < +\infty$,

$$\|f\|_p \sim \|sf\|_p. \tag{5.12}$$

Des inégalités analogues à (5.11) lorsque f est à valeurs dans un espace de Banach possédant la propriété UMD (la définition de l'intégrale intervenant dans $g_1(f)(x)$ faisant alors intervenir des variables aléatoires) ont été établies dans [64, 203].

Que devient l'inégalité (5.12) lorsque f est à valeurs dans un espace UMD? Restons pour l'instant dans le cas de fonctions scalaires. Dans ce cas, (5.12) signifie que

$$\|f\|_p \sim \|\partial_t e^{-t(-\Delta)^{1/2}} f\|_{T^{p,2}(\mathbb{R}^{n+1}_+)}, \tag{5.13}$$

et si on interprète le second membre de (5.13) comme la norme de f dans l'espace de Hardy $H^p(\mathbb{R}^n)$, on voit que (5.12) revient à dire que, pour tout $1 < p < +\infty$, $H^p(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$.

Une telle observation se transpose à des contextes plus généraux. Comme on l'a souligné dans la Remarque 5.2, on obtient, dans [23], comme conséquence de la construction des espaces de Hardy $H^p(\Lambda T^* M)$, une inégalité qui généralise (5.12) pour $p > 2$.

Il est donc naturel, pour donner une version de (5.12) pour des fonctions à valeurs dans un espace UMD, de construire des espaces de Hardy adaptés à cette situation. Hytönen, Van Neerven et Portal ont formulé, dans [204], un analogue de (5.12) pour les fonctions à valeurs dans un espace UMD, suivant une démarche inspirée de [23], et leurs résultats peuvent être comparés à ceux de [23]. Etant donnés un espace de Banach X ayant la propriété UMD et un espace de Hilbert H et un opérateur A sur $L^2(\mathbb{R}^n, H)$, bisectoriel et vérifiant des estimations L^2 hors diagonale appropriées, les auteurs définissent une famille d'espaces de Hardy de fonctions $H^p_A(H,X)$, $1 \leq p < +\infty$, sur lesquels A possède un calcul fonctionnel H^∞. La construction est analogue à celle faite dans [23] avec l'opérateur D, utilisant des espaces de tentes adaptés et des fonctions ψ qui peuvent être prises dans des classes $\Psi_{\sigma,\tau}(\Sigma^0_\theta)$ plus larges que celles considérées dans [23], grâce à des arguments de type et de cotype.

5.5.4. *Espaces de Hardy et de Hardy–Sobolev abstraits définis par une famille d'opérateurs*

Dans [55] (voir aussi [54] pour de nouveaux développements), Bernicot et Zhao construisent des espaces de Hardy H^1 abstraits adaptés à une *famille* d'opérateurs sur un espace de nature homogène (et non un opérateur fixé comme dans [23, 196, 197]), par une construction moléculaire. Cette construction englobe, dans un certain sens, les espaces de Hardy rencontrés dans certains cadres géométriques. Ces espaces sont en général inclus (strictement) dans les espaces de Hardy connus, mais sont quand même assez "gros" pour qu'il soit possible d'interpoler entre H^1 et L^2.

Plus précisément, soit (X, ρ, μ) un espace de nature homogène. On note $\mathcal{Q}$ la famille de toutes les boules ouvertes de X. A chaque boule $Q \in \mathcal{Q}$, on associe un opérateur B_Q continu sur $L^2(X)$, et on suppose qu'il existe $C > 0$ tel que, pour toute boule $Q \in \mathcal{Q}$ et toute $f \in L^2(X)$,

$$\|B_Q f\|_2 \leq C\|f\|_2.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Une ε-molécule est une fonction $m \in L^1_{\mathrm{loc}}(X)$ telle qu'il existe une boule $Q \in \mathcal{Q}$ et une fonction $f_Q \in L^2(X)$ avec les propriétés suivantes:

- $m = B_Q(f_Q)$,
- $\|f_Q\|_{L^2(Q)} \leq \mu(Q)^{-1/2}$,
- pour tout $j \geq 1$, $\|f_Q\|_{L^2(2^{j+1}Q \setminus 2^j Q)} \leq \mu(2^j Q)^{-1/2} 2^{-\varepsilon j}$.

Si, de plus, le support de f_Q est inclus dans Q, m s'appelle un atome. On définit alors l'espace $H^1_{\varepsilon,\mathrm{mol}}$ comme l'espace des fonctions mesurables f qui s'écrivent

$$f = \sum_j \lambda_j m_j \tag{5.14}$$

où $\sum |\lambda_j| < +\infty$ et, pour tout j, m_j est une molécule. On définit de même l'espace H^1_{at} en remplaçant les molécules par des atomes. Les normes de ces espaces sont définies de manière usuelle. De façon générale, une molécule n'appartient pas forcément à $L^1(X)$, de sorte que la série (5.14) ne converge que presque partout mais pas nécessairement dans $L^1(X)$. Pour la même raison, il n'est pas certain que l'espace $H^1_{\varepsilon,\mathrm{mol}}$ soit complet en général. Les auteurs donnent toutefois des conditions suffisantes sur les opérateurs B_Q pour garantir l'inclusion de $H^1_{\varepsilon,\mathrm{mol}}$ dans L^1 et la complétude de $H^1_{\varepsilon,\mathrm{mol}}$ (voir la section 7 de [55]).

Si on choisit

$$B_Q f(x) := f(x)\mathbf{1}_Q(x) - \frac{1}{\mu(Q)}\left(\int_Q f(y)d\mu(y)\right)\mathbf{1}_Q(x)$$

pour tout $Q \in \mathcal{Q}$, alors pour tout ε, l'espace $H^1_{\varepsilon,\mathrm{mol}}$ ainsi obtenu est l'espace $H^1_{CW}(X)$.

Les espaces de Hardy sur $\mathbb{R}^n$ associés à des opérateurs de Schrödinger ([137, 138, 141]) peuvent aussi être réalisés comme des espaces $H^1_{\varepsilon,\mathrm{mol}}$ pour un choix approprié d'opérateurs B_Q.

Pour un choix adéquat d'opérateurs B_Q, les espaces $H^1_{\varepsilon,\mathrm{mol}}$ sont inclus dans l'espace $H^1_L(\mathbb{R}^n)$ de [197], et dans l'espace $H^1(\Lambda T^*M)$ de [23] (si on adapte la construction de [55] au cas des formes différentielles).

Les auteurs donnent des conditions suffisantes de continuité de certains opérateurs de $H^1_{\varepsilon,\mathrm{mol}}$ dans L^1. Plus précisément, si T est un opérateur continu sur $L^2(X)$ qui vérifie des estimations L^2 hors-diagonale adaptées aux opérateurs B_Q, alors T est continu de $H^1_{\varepsilon,\mathrm{mol}}$ dans L^1 ([55], Théorèmes 4.1 et 4.2). Ces théorèmes, qui sont dans l'esprit de ceux de [13], généralisent le fait qu'un opérateur de Calderón–Zygmund classique est continu de H^1_{CW} dans L^1.

De plus, sous une condition supplémentaire sur les opérateurs B_Q, un opérateur T borné sur H^1_{at} et sur L^2 est borné sur L^p pour tout $p_0 < p \le 2$ pour un certain $p_0 \in]1, 2[$ ([55], Théorème 5.3). Ainsi, les espaces de Hardy construits dans ce cadre, même s'ils sont en général plus petits que les espaces de Hardy qui apparaissent dans différents contextes géométriques, sont assez "gros" pour qu'il soit possible d'interpoler entre H^1 et L^2.

Si $L = -\mathrm{div}(A\nabla)$ est un opérateur uniformément elliptique d'ordre 2 sur $\mathbb{R}^n$ à coefficients complexes bornés, on montre ([55], section 5), en utilisant les estimations de [197], que la transformée de Riesz $\nabla L^{-1/2}$ est continue de $H^1_{\varepsilon,\mathrm{mol}}$ dans L^1, et on retrouve par interpolation la continuité de $\nabla L^{-1/2}$ sur L^p pour l'intervalle de p déjà obtenu dans [13] et qui est optimal (voir la section 2.2.1).

Les auteurs obtiennent aussi une description partielle du dual de H^1, qui est un espace de type BMO. Des applications de cette théorie à des problèmes de régularité maximale sont également données.

Il existe aussi une construction moléculaire analogue pour des espaces de Hardy–Sobolev sur une variété riemannienne ([38]), qui englobe notamment les espaces $H^1_{\mathrm{mol},N}(\Lambda T^*M)$ de [23]. Très récemment, Badr et Dafni ([40]) ont montré que, sous les hypothèses (D) et (P_1), l'espace de Hardy–Sobolev homogène $\dot{H}S^1_{at}$ construit dans [38] coïncide avec l'espace $\dot{M}^1_1$ ([185, 223]) construit grâce à la fonctionnelle

$$Nf(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{r(B)} \frac{1}{V(B)} \int_B |f(y) - f_B| d\mu(y),$$

la borne supérieure étant prise sur toutes les boules contenant x. Ces résultats complètent ceux de [41].

Ajoutons que les méthodes inspirées de [23] sont utilisées dans [24] pour prouver des résultats de régularité maximale dans des espaces tentes.

5.6. *Perspectives*

Question ouverte 5.1. Dans [243], Lou et McIntosh ne considèrent que l'espace $H^1_{z,d}(\Omega, \Lambda^k)$. Peut-on développer une théorie semblable pour l'espace $H^1_{r,d}(\Omega, \Lambda^k)$? Plus généralement, pourrait-on étendre les résultats de [23] aux espaces de Hardy sur des domaines de M? Cela pourrait permettre, notamment, d'obtenir (sous des hypothèses géométriques convenables) des résultats sur les transformées de Riesz dans les espaces L^p sur des domaines de M.

Question ouverte 5.2. L'espace $H^\infty(\Lambda T^*M)$ est de type BMO, et est défini comme le dual de $H^1(\Lambda T^*M)$. Existe-t-il une définition directe de cet espace semblable à celle de $BMO_{L^*}(\mathbb{R}^n)$ dans [197], ou à celle de l'espace $BMO_d(\mathbb{R}^n, \Lambda^k)$ de [244]? Peut-on prouver un lemme de John-Nirenberg pour cet espace?

Direction de recherche 5.1. Sous la seule hypothèse (*D*), la transformée de Riesz est continue de $H^p(\Lambda T^*M)$ dans lui-même pour tout $1 \leq p \leq +\infty$. Ce résultat permet en particulier d'obtenir des théorèmes de continuité de la transformée de Riesz sur L^p lorsqu'on sait identifier H^p et L^p. Toutefois, on ne sait, par le biais de cette observation, que retrouver le résultat principal de [98]. Peut-on, grâce aux résultats de [23], prouver la continuité de $d\Delta^{-1/2}$ sur $L^p(M)$ pour tout $p \in]1, 2]$ sous la seule hypothèse (*D*), c'est-à-dire sans faire d'hypothèse de taille gaussienne sur le noyau de la chaleur associé à l'opérateur de Laplace–Beltrami? La question de cette continuité semble ouverte. Notons que, dans [99], il est conjecturé que $d\Delta^{-1/2}$ est continue sur $L^p(M)$ pour tout $1 < p < 2$, pour *toute* variété riemannienne complète. Sur une variété riemannienne complète quelconque, seule l'inégalité plus faible

$$\||df|\|_{L^p} \lesssim \sqrt{\|f\|_p \|\Delta f\|_p}$$

est établie pour tout $p \in]1, 2[$ dans [99]. De même, les résultats de [16] peuvent-ils être améliorés grâce à ceux de [23]?

Direction de recherche 5.2. La théorie des espaces de Hardy développée dans [23] ne fait pas d'autre hypothèse que (*D*), sauf pour identifier H^p et L^p pour certaines valeurs de p. Il conviendrait de comprendre en profondeur les liens entre ces espaces de Hardy et la géométrie à l'infini de M, ce qui apporterait en particulier un nouvel éclairage sur les travaux cités à la fin de la section 2.2.3.

Question ouverte 5.3. Une autre question ouverte est celle-ci: l'espace $H^1(\Lambda T^*M)$ est-il exactement l'espace des formes dans $\overline{L^1(\Lambda T^*M) \cap \mathcal{R}(D)}^{L^1(\Lambda T^*M)}$

dont la transformée de Riesz appartient à $L^1(\Lambda T^*M)$? Une réponse positive à cette question confirmerait le caractère optimal de l'espace $H^1(\Lambda T^*M)$ vis-à-vis de la transformée de Riesz.

6. Racine Carrée de Certains Opérateurs Elliptiques sur des Graphes

Cette section reprend les résultats de [43, 278].

6.1. *Introduction*

Dans les sections 4 et 5, nous avons examiné le problème de la comparaison entre la racine carrée du laplacien (ce terme prenant un sens différent suivant le contexte) et le gradient dans des espaces L^p et des espaces de Hardy, dans des contextes géométriques "continus" (espace euclidien, variété riemannienne). On s'intéresse ici à une version "discrète" de ces questions.

On se place pour cela sur un graphe Γ (ensemble de sommets reliés par des arêtes), que l'on suppose muni d'une métrique d, d'une mesure m, d'un "laplacien" Δ et d'un "gradient" ∇ (des définitions précises seront données dans la section qui vient), et on pose la question suivante; si $1 < p < +\infty$, peut-on comparer $\|(-\Delta)^{1/2}f\|_{L^p(\Gamma,m)}$ et $\||\nabla f|\|_{L^p(\Gamma,m)}$? Rappelons que cette question revient à comparer des espaces de Sobolev définis par un gradient (opérateur local) avec des espaces de type Bessel définis par une puissance fractionnaire d'un laplacien (voir la section 2.1.3). Plus précisément, a-t-on

$$\||\nabla f|\|_{L^p(\Gamma,m)} \lesssim \|(-\Delta)^{1/2}f\|_{L^p(\Gamma,m)} \tag{6.1}$$

et

$$\|(-\Delta)^{1/2}f\|_{L^p(\Gamma,m)} \lesssim \||\nabla f|\|_{L^p(\Gamma,m)}? \tag{6.2}$$

Un fait général (déjà rencontré dans les autres situations géométriques (voir l'idée dans la section 2.1.2) est que la validité de (6.1) pour un $p \in]1,+\infty[$ entraîne celle de (6.2) pour p' si $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. Par ailleurs, le caractère auto-adjoint de Δ sur $L^2(\Gamma,m)$ fait que l'on a

$$\|(-\Delta)^{1/2}f\|_{L^2(\Gamma,m)} = \||\nabla f|\|_{L^2(\Gamma,m)}.$$

On est de ce fait amené à distinguer quatre questions: validité de (6.1) pour $1 < p < 2$, validité de (6.1) pour $2 < p < +\infty$, validité de (6.2) pour $1 < p < 2$, validité de (6.2) pour $2 < p < +\infty$.

L'estimation (6.1) pour $1 < p < 2$ (donc aussi (6.2) pour $2 < p < +\infty$) est valable sous des hypothèses minimales sur Γ, qui correspondent dans ce contexte à la conjonction des propriétés (D) et (DUE) de la section 2.2.3.

Sous ces seules hypothèses, (6.1) n'est pas valable pour $p > 2$. Toutefois, on obtient une condition suffisante de validité de (6.1) pour $p \in]2,p_0[$ (où $p_0 > 2$ dépend des hypothèses faites sur le graphe) en supposant une inégalité de Poincaré

L^2 sur les boules, ainsi qu'une estimation convenable sur le gradient d'une version discrète du noyau de la chaleur associé à Δ.

On montre aussi l'équivalence entre la validité de (6.1) pour tout $p \in]2, p_0[$ et des inégalités de Hölder inverses pour les fonctions harmoniques dans des boules, dans l'esprit de [287]. Utilisant cette équivalence, on obtient que, sous (D) et l'inégalité de Poincaré L^2 sur les boules, on a

$$\|(-\Delta)^{1/2} f\|_{L^p(\Gamma,m)} \sim \||\nabla f|\|_{L^p(\Gamma,m)}$$

pour tout $p \in]2-\varepsilon, 2+\varepsilon[$ avec un $\varepsilon > 0$ ne dépendant que de Γ.

En supposant toujours (D) et une version L^q de l'inégalité de Poincaré sur les boules ($q < 2$), on obtient aussi la validité de (6.2) pour $q < p < 2$. La preuve de ce résultat repose, notamment, sur la continuité L^p d'une version discrète de la fonctionnelle g de Littlewood–Paley–Stein (voir [294] et la section 5.5.3), ainsi que sur des résultats d'interpolation réelle pour les espaces de Sobolev sur Γ.

On obtient ainsi le pendant discret des résultats correspondants connus dans le cadre des variétés riemanniennes obtenus dans [15, 16] et présentés dans la section 2.2.3.

6.2. *Le cadre géométrique discret*

On donne ici les définitions précises des objets discrets que l'on considère, suivant la présentation de [116]. Soient Γ un ensemble infini et $\mu_{xy} = \mu_{yx} \geq 0$ un poids symétrique sur $\Gamma \times \Gamma$ (de sorte que Γ, ou plus précisément (Γ, μ), est un graphe à poids). Si $x, y \in \Gamma$, on dit que x et y sont voisins (et on note $x \sim y$) si, et seulement si, $\mu_{xy} > 0$. Soit E l'ensemble des arêtes de Γ, i.e.

$$E = \{(x,y) \in \Gamma \times \Gamma;\ x \sim y\}.$$

La symétrie de μ signifie que $(x,y) \in E$ si, et seulement si, $(y,x) \in E$.

Si $x, y \in \Gamma$, un chemin joignant x et y est une suite finie de sommets $x_0 = x, \dots, x_N = y$ tels que, pour tout $0 \leq i \leq N-1$, $x_i \sim x_{i+1}$. La longueur de ce chemin est N. On supposera toujours Γ *connexe*, ce qui signifie que, pour tous $x, y \in \Gamma$, il existe un chemin joignant x et y. Pour tous $x, y \in \Gamma$, la distance de x à y, notée $d(x,y)$, est la longueur minimale d'un chemin joignant x et y. Pour tout $x \in \Gamma$ et tout $r \geq 0$, on définit $B(x,r) = \{y \in \Gamma,\ d(y,x) \leq r\}$. On supposera toujours Γ localement uniformément fini, ce qui signifie qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $x \in \Gamma$, $\sharp B(x,1) \leq N$. Si $B = B(x,r)$ est une boule, on notera $\alpha B = B(x, \alpha r)$ pour tout $\alpha > 0$, $C_1(B) = 4B$ et $C_j(B) = 2^{j+1}B \backslash 2^j B$ pour tout entier $j \geq 2$ (voir les notations de la section 1).

Pour toute partie $A \subset \Gamma$, on définit

$$\partial A = \{x \in A;\ \exists\, y \sim x,\ y \notin A\}.$$

Pour tout $x \in \Gamma$, on pose $m(x) = \sum_{y \sim x} \mu_{xy}$. On supposera toujours que $m(x) > 0$ pour tout $x \in \Gamma$. Pour toute partie $A \subset \Gamma$, soit $m(A) = \sum_{x \in A} m(x)$. Pour tout

$x \in \Gamma$ et tout $r > 0$, on notera $V(x,r)$ plutôt que $m(B(x,r))$ et, pour toute boule B, $V(B)$ plutôt que $m(B)$.

Soit $1 \leq p < +\infty$. Une fonction $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ appartient à $L^p(\Gamma, m)$ (ou $L^p(\Gamma)$) si, et seulement si,

$$\|f\|_p := \left(\sum_{x \in \Gamma} |f(x)|^p m(x) \right)^{1/p} < +\infty,$$

tandis que $f \in L^\infty(\Gamma, m)$ (ou $L^\infty(\Gamma)$) si, et seulement si,

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in \Gamma} |f(x)| < +\infty.$$

On pose

$$p(x,y) = \mu_{xy}/m(x) \tag{6.3}$$

pour tous $x, y \in \Gamma$. Par définition de la distance sur le graphe, $p(x,y) = 0$ dès que $d(x,y) \geq 2$. On définit aussi

$$p_0(x,y) = \delta(x,y)$$

et, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tous $x, y \in \Gamma$,

$$p_{k+1}(x,y) = \sum_{z \in \Gamma} p(x,z) p_k(z,y).$$

Les p_k sont les itérées de p. En raison du caractère localement uniformément fini du graphe, pour tout $x \in \Gamma$, il y a au plus N termes non nuls dans cette somme. On a aussi, pour tout $x \in \Gamma$,

$$\sum_{y \in \Gamma} p(x,y) = 1 \tag{6.4}$$

(un tel noyau p définit donc une marche aléatoire sur Γ) et, pour tous $x, y \in \Gamma$,

$$p(x,y)m(x) = p(y,x)m(y). \tag{6.5}$$

Pour toute fonction $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ et tout $x \in \Gamma$, on définit

$$Pf(x) = \sum_{y \in \Gamma} p(x,y) f(y)$$

(il y a au plus N termes non nuls dans cette somme). Comme $p(x,y) \geq 0$ pour tous $x, y \in \Gamma$ et en raison de (6.4), on a, pour tout $p \in [1, +\infty]$ et toute $f \in L^p(\Gamma)$,

$$\|Pf\|_{L^p(\Gamma)} \leq \|f\|_{L^p(\Gamma)}. \tag{6.6}$$

On définit un "laplacien" sur Γ en utilisant l'opérateur P. Soit $f \in L^2(\Gamma)$. Par (6.6), $(I - P)f \in L^2(\Gamma)$ et

$$\begin{aligned} \langle (I-P)f, f \rangle_{L^2(\Gamma)} &= \sum_{x,y} p(x,y)(f(x) - f(y)) f(x) m(x) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{x,y} p(x,y) |f(x) - f(y)|^2 m(x), \end{aligned} \tag{6.7}$$

la première égalité étant due à (6.4) et la deuxième à (6.5). Suivant [101], définissons maintenant l'opérateur "longueur du gradient" par

$$\nabla f(x) = \left(\frac{1}{2} \sum_{y \in \Gamma} p(x,y) |f(y) - f(x)|^2 \right)^{1/2}$$

pour toute fonction $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ et tout $x \in \Gamma$. L'identité (6.7) correspond à une intégration par parties, puisqu'elle s'écrit

$$\langle (I-P)f, f \rangle_{L^2(\Gamma)} = \|\nabla f\|^2_{L^2(\Gamma)}. \tag{6.8}$$

On considèrera donc $I - P$ comme un laplacien discret. Comme, en raison de (6.5), l'opérateur P est auto-adjoint sur $L^2(\Gamma)$, $I - P$ est un opérateur positif et auto-adjoint sur $L^2(\Gamma)$. On peut alors définir sa racine carrée $(I-P)^{1/2}$ par théorie spectrale. L'identité (6.8) signifie exactement que

$$\|(I-P)^{1/2} f\|_{L^2(\Gamma)} = \|\nabla f\|_{L^2(\Gamma)}. \tag{6.9}$$

On peut interpréter cette dernière identité en termes d'espaces de Sobolev définis par ∇ (voir aussi la section 2.1.3). Plus précisément, si $1 \leq p \leq +\infty$, on dira qu'une fonction $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ appartient à $W^{1,p}(\Gamma)$ (voir aussi les définitions données dans [171, 274]) si, et seulement si,

$$\|f\|_{W^{1,p}(\Gamma)} := \|f\|_{L^p(\Gamma)} + \|\nabla f\|_{L^p(\Gamma)} < +\infty.$$

On considère aussi les versions homogènes de ces espaces. Si $1 \leq p \leq +\infty$, on définit $\dot{E}^{1,p}(\Gamma)$ comme l'espace des fonctions $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ telles que $\nabla f \in L^p(\Gamma)$, muni de la semi-norme

$$\|f\|_{\dot{E}^{1,p}(\Gamma)} := \|\nabla f\|_{L^p(\Gamma)}.$$

On définit ensuite $\dot{W}^{1,p}(\Gamma)$ comme l'espace quotient $\dot{E}^{1,p}(\Gamma)/\mathbb{R}$ muni de la norme quotient. Il est facile de vérifier que ces espaces de Sobolev sont des espaces de Banach.

L'identité (6.9) signifie que $\|(I-P)^{1/2} f\|_{L^2(\Gamma)} = \|f\|_{\dot{E}^{1,2}(\Gamma)}$. En d'autres termes, pour $p = 2$, $W^{1,2}(\Gamma)$ coïncide avec l'espace (de type Bessel, voir la section 2.1.3) des $f \in L^2(\Gamma)$ telles que $(I-P)^{1/2} f \in L^2(\Gamma)$. On examine dans la suite le problème de la coïncidence de ces espaces pour $p \neq 2$.

On examine donc la validité de

$$\|\nabla f\|_p \lesssim \|(I-P)^{1/2} f\|_p \tag{R_p}$$

et de

$$\|(I-P)^{1/2} f\|_p \lesssim \|\nabla f\|_p. \tag{RR_p}$$

Rappelons que (R_p) et (RR_p) sont toujours vraies pour $p = 2$ (c'est l'identité (6.9)), et que si $1 < p < +\infty$, (R_p) pour p entraîne $RR_{p'}$ pour $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ (la preuve dans cette situation est détaillée dans [278]). L'estimation (R_p) traduit la continuité sur L^p de la transformée de Riesz, qui est ici l'opérateur sous-linéaire $\nabla(I-P)^{-1/2}$.

Avant de passer à la description des résultats obtenus, signalons un cas particulier de graphe entrant dans le cadre que nous venons de décrire (voir [97]): il s'agit du graphe de Cayley d'un groupe G (noté multiplicativement) engendré par un ensemble fini S symétrique (au sens où, pour tout $g \in S$, $g^{-1} \in S$). On définit des sommets voisins par $x \sim y \Leftrightarrow x^{-1}y \in S$, de sorte que la mesure d'une boule est indépendante de son centre.

6.3. *Continuité de la transformée de Riesz sur L^p*

6.3.1. *Le cas* $1 < p < 2$

On présente des hypothèses sur Γ qui interviendront dans les résultats qui suivent, et qui sont les analogues dans ce cadre discret des hypothèses présentées dans la section 2.2.3. La première est la version discrète de (D), qui s'écrit ici: il existe $C > 0$ tel que, pour tout $x \in \Gamma$ et tout $r > 0$,

$$V(x, 2r) \leq CV(x, r). \tag{D}$$

Cette hypothèse entraîne l'existence de $C, D > 0$ tels que, pour tout $x \in \Gamma$, tout $r > 0$ et tout $\theta > 1$,

$$V(x, \theta r) \leq C\theta^D V(x, r). \tag{6.10}$$

La deuxième hypothèse est une borne inférieure uniforme sur $p(x, y)$ pour $x \sim y$. Si $\alpha > 0$, on dira que (Γ, μ) vérifie la condition $\Delta(\alpha)$ si, et seulement si, pour tous $x, y \in \Gamma$,

$$(x \sim y \Longleftrightarrow \mu_{xy} \geq \alpha m(x)) \quad \text{et } x \sim x. \tag{$\Delta(\alpha)$}$$

Cette hypothèse, qui signifie que $p(x, y) \geq \alpha$ pour tous $x \sim y$ et que x est toujours voisin de x, implique, en particulier, que, pour tout $x \in \Gamma$, il existe une arête joignant x à x. Elle n'est pas vérifiée, par exemple, pour la marche aléatoire standard sur $\mathbb{Z}$, puisque dans ce cas, $p(x, x) = 0$. Toutefois, sous l'hypothèse (D), on montre facilement que p_2 satisfait ($\Delta(\alpha)$) pour un certain $\alpha > 0$ (voir [101]). L'hypothèse ($\Delta(\alpha)$) assure que, pour tout $k \geq 1$ et tous $x, y \in \Gamma$ tels que $d(x, y) \leq k$, $p_k(x, y) > 0$. On fera aussi intervenir des majorations ponctuelles de $p_k(x, y)$. On dira que (Γ, μ) vérifie (DUE) (majoration sur la diagonale) si, et seulement si, il existe $C > 0$ tel que, pour tout $x \in \Gamma$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$p_k(x, x) \leq \frac{Cm(x)}{V(x, \sqrt{k})}. \tag{DUE}$$

On dira que (Γ, μ) vérifie (UE) (majoration ponctuelle) si, et seulement si, il existe $C, c > 0$ tels que, pour tous $x, y \in \Gamma$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$p_k(x, y) \leq \frac{Cm(x)}{V(x, \sqrt{k})} e^{-c\frac{d^2(x,y)}{k}}. \tag{UE}$$

On rappelle que, sous l'hypothèse (D), la majoration (UE) est équivalente à

$$p_k(x,y) \leq \frac{Cm(x)}{V(y,\sqrt{k})} e^{-c\frac{d^2(x,y)}{k}}. \tag{6.11}$$

Sous l'hypothèse (D), les estimations (DUE) et (UE) sont équivalentes (et la conjonction de (D) et (DUE) est aussi équivalente à une inégalité de Faber–Krahn pour la première valeur propre de $I-P$ sur des domaines bornés avec condition de Dirichlet, voir [101], Théorème 1.1).

On a alors le théorème suivant pour la continuité des transformées de Riesz sur L^p pour $1<p<2$:

Théorème 6.1. ([278]) *On suppose* (D), $(\Delta(\alpha))$ *et* (DUE). *Alors,* (R_p) *est satisfaite pour tout* $1<p\leq 2$. *La transformée de Riesz est de type faible* $(1,1)$, *c'est-à-dire qu'il existe* $C>0$ *tel que, pour tout* $\lambda>0$ *et toute fonction* $f\in L^1(\Gamma)$,

$$m(\{x\in\Gamma;\, \nabla(I-P)^{-1/2}f(x)>\lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda}\|f\|_1.$$

Sous les mêmes hypothèses, on a aussi (RR_p) *pour tout* $2\leq p<+\infty$.

Dans le cas où Γ est le graphe de Cayley d'un groupe à croissance polynomiale, ce théorème avait été établi dans [191].

6.3.2. *Le cas* $p>2$

Pour $p>2$, sous les hypothèses du Théorème 6.1, (R_p) n'est pas, en général, satisfaite pour $p>2$ (voir pour cela l'exemple de deux copies de $\mathbb{Z}^2$ reliées par une arête dans [278], section 4). Plus précisément, dans cet exemple, (R_p) pour $p>2$ entraînerait une inégalité de Poincaré L^2 sur les boules, qui n'est pas vraie.

Une telle inégalité de Poincaré joue un rôle central dans les résultats que nous allons énoncer à présent. On dira que (Γ,μ) vérifie une inégalité de Poincaré L^2 sur les boules (inégalité que l'on notera (P_2)) si, et seulement si, il existe $C>0$ tel que, pour tout $x\in\Gamma$, tout $r>0$ et toute fonction f sur Γ,

$$\sum_{y\in B(x,r)} |f(y)-f_B|^2 m(y) \leq Cr^2 \sum_{y\in B(x,r)} |\nabla f(y)|^2 m(y), \tag{P_2}$$

où

$$f_B = \frac{1}{V(B)}\sum_{x\in B} f(x)m(x)$$

est la moyenne de f sur B. Sous les hypothèses (D), (P_2) et $(\Delta(\alpha))$, on a toujours (UE), et de plus les itérées de p vérifient aussi une *minoration* gaussienne ponctuelle: il existe $c_1,C_1,c_2,C_2>0$ tels que, pour tout $n\geq 1$ et tous $x,y\in\Gamma$ vérifiant

$d(x,y) \leq n$,

$$\frac{c_1 m(x)}{V(x,\sqrt{n})} e^{-C_1 \frac{d^2(x,y)}{n}} \leq p_n(x,y) \leq \frac{C_2 m(x)}{V(x,\sqrt{n})} e^{-c_2 \frac{d^2(x,y)}{n}}. \qquad (LUE)$$

Mieux encore, (LUE) est équivalente à la conjonction de (D), (P_2) et ($\Delta(\alpha)$), ainsi qu'à une version discrète de l'inégalité de Harnack parabolique (voir [116] et aussi [14] pour une autre approche).

On suppose maintenant (R_p) pour un $p > 2$. Si $f \in L^p(\Gamma)$ et $n \geq 1$,

$$\|\nabla P^n f\|_p \lesssim \frac{1}{\sqrt{n}} \|f\|_p. \qquad (G_p)$$

En effet, d'après (R_p),

$$\|\nabla P^n f\|_p \lesssim \|(I-P)^{1/2} P^n f\|_p.$$

De plus, l'hypothèse $\Delta(\alpha)$ entraîne que -1 n'appartient pas au spectre de P sur $L^2(\Gamma)$ (cette remarque se trouve dans [278]), de sorte que P est analytique sur $L^2(\Gamma)$ (voir [104], Proposition 3), et comme P est sous-markovien, on en déduit que P est aussi analytique sur $L^p(\Gamma)$ ([104], p. 426). Cette analyticité de P sur $L^p(\Gamma)$ montre que (cf. Proposition 2 dans [104])

$$\|(I-P)^{1/2} P^n f\|_p \lesssim \frac{1}{\sqrt{n}} \|f\|_p.$$

On obtient donc bien la condition (G_p), qui est donc nécessaire pour avoir (R_p).

Dans [43], nous montrons que, sous les hypothèses (D), (P_2) et ($\Delta(\alpha)$), pour tout $q > 2$, la condition (G_q) suffit à entraîner (R_p) pour tout $2 < p < q$:

Théorème 6.2. *Soit $p_0 \in]2, +\infty]$. On suppose que (Γ, μ) vérifie (D), (P_2), ($\Delta(\alpha)$) et (G_{p_0}). Alors, pour tout $2 \leq p < p_0$, on a (R_p). Si p_0' est tel que $1/p_0 + 1/p_0' = 1$, on a aussi (RR_p) pour tout $p_0' < p \leq 2$.*

On déduit du Théorème 6.2:

Théorème 6.3. *On suppose que (Γ, μ) vérifie (D), (P_2) et ($\Delta(\alpha)$). Soit $p_0 \in]2, +\infty]$. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) *pour tout $p \in]2, p_0[$, on a (G_p),*
(ii) *pour tout $p \in]2, p_0[$, on a (R_p).*

Quand Γ est le graphe de Cayley d'un groupe finiment engendré à croissance polynomiale, l'hypothèse (G_{p_0}) est satisfaite pour $p_0 = +\infty$ ([191]), et le Théorème 6.2 montre que les transformées de Riesz sont continues sur L^p pour tout $2 < p < +\infty$. Le Théorème 6.1 assure également leur continuité sur L^p pour $1 < p \leq 2$, de sorte qu'elles sont continues sur L^p pour tout $1 < p < +\infty$. Ce résultat avait déjà été obtenu par Alexopoulos ([5]). La question des transformées de Riesz d'ordre supérieur dans ce contexte est examinée dans [126].

Pour un graphe qui est un revêtement nilpotent d'un graphe fini, Ishiwata a montré la continuité des transformées de Riesz sur L^p pour tout $1 < p < +\infty$ ([206]).

Remarque 6.1. Dans [127], sous la seule hypothèse d'une propriété de type (D) locale, Dungey établit (G_p) pour tout $p \in]1,2]$.

6.3.3. *Transformées de Riesz et fonctions harmoniques*

On caractérise aussi la validité de (R_p) pour $p > 2$ au moyen d'*inégalités de Hölder inverses pour le gradient des fonctions harmoniques dans des boules*, suivant en cela un résultat de [287] (dans $\mathbb{R}^n$ pour des opérateurs $-\mathrm{div}(A\nabla)$, voir la section 2.2.1) et de [15] (pour l'opérateur de Laplace Beltrami sur une variété riemannienne, voir la section 2.2.3). Si B est une boule dans Γ et $u : B \to \mathbb{R}$, on dira que u est harmonique dans B si, et seulement si, pour tout $x \in B \backslash \partial B$,

$$(I-P)u(x) = 0. \tag{6.12}$$

Le résultat s'énonce alors comme suit:

Théorème 6.4. *On suppose* (D), $(\Delta(\alpha))$ *et* (P_2). *Il existe* $p_0 \in]2,+\infty]$ *tel que, pour tout* $q \in]2,p_0[$, *les conditions suivantes sont équivalentes*:

(a) *on a* (R_p) *pour tout* $p \in]2,q[$,
(b) *pour tout* $p \in]2,q[$, *pour toute boule* $B \subset \Gamma$ *et toute fonction* u *harmonique dans* $32B$,

$$\left(\frac{1}{V(B)}\sum_{x\in B}|\nabla u(x)|^p m(x)\right)^{\frac{1}{p}} \lesssim \left(\frac{1}{V(16B)}\sum_{x\in 16B}|\nabla u(x)|^2 m(x)\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{RH_p}$$

La condition (b) signifie que le gradient de toute fonction u harmonique dans $32B$ vérifie une inégalité de Hölder inverse. Si $B \subset \mathbb{R}^n$, de telles inégalités sont vraies pour toute solution $u \in H^1(B)$ de $\mathrm{div}(A\nabla u) = 0$ avec A bornée et uniformément elliptique (voir [262]). Ces inégalités ont aussi lieu dans le contexte des graphes:

Proposition 6.1. *On suppose* (D), $(\Delta(\alpha))$ *et* (P_2). *Il existe* $p_0 > 2$ *tel que* (RH_p) *ait lieu pour tout* $p \in]2,p_0[$. *Il s'ensuit que* (R_p) *est vraie pour tout* $p \in]2,p_0[$.

En conséquence du Théorème 6.1 et de la Proposition 6.1, on obtient la comparabilité suivante pour les normes L^p de ∇f et de $(I-P)^{1/2}f$:

Corollaire 6.1. *On suppose* (D), $(\Delta(\alpha))$ *et* (P_2). *Il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que, pour tout* $2-\varepsilon < p < 2+\varepsilon$, $\|\nabla f\|_p \sim \|(I-P)^{1/2}f\|_p$.

6.4. *L'inégalité inverse*

On considère maintenant la validité de (RR_p). On donne plus précisément une condition suffisante de validité de cette inégalité pour tout $p\in]q_0,2[$ (pour un $q_0 < 2$). Cette condition fait intervenir l'inégalité de Poincaré sur les boules dans L^p pour $p<2$.

Si $1\le p<+\infty$, on dira que (Γ,μ) vérifie une inégalité de Poincaré L^p sur les boules (notée (P_p)) si, et seulement si, il existe $C>0$ tel que, pour tout $x\in\Gamma$, tout $r>0$ et toute fonction f sur Γ,

$$\sum_{y\in B(x,r)} |f(y)-f_B|^p m(y) \le Cr^p \sum_{y\in B(x,r)} |\nabla f(y)|^p m(y). \tag{P_p}$$

Si $1\le p<q<+\infty$, alors (P_p) entraîne (P_q) (un tel énoncé est valable sur tout espace de nature homogène muni d'une notion convenable de gradient, voir [186]). La réciproque est fausse, mais les inégalités de Poincaré s'auto-améliorent dans le sens suivant:

Proposition 6.2. *On suppose que (Γ,μ) vérifie (D). Alors, pour tout $p\in]1,+\infty[$, si (P_p) est satisfaite, il existe $\varepsilon>0$ tel que $(P_{p-\varepsilon})$ soit aussi satisfaite.*

Il s'agit d'un résultat très profond, valable aussi dans le contexte des espaces de nature homogène, voir [220]. Rappelons que, pour tout $\varepsilon>0$, il existe un graphe vérifiant (P_2) mais pas $(P_{2-\varepsilon})$ ([186]).

Supposant (P_q) pour un certain $q<2$, on montre (RR_p) pour $q<p<2$:

Théorème 6.5. *Soit $1\le q<2$. On suppose (D), $(\Delta(\alpha))$ et (P_q). Alors, pour tout $q<p<2$, on a (RR_p). De plus, il existe $C>0$ tel que, pour tout $\lambda>0$,*

$$m(\{x\in\Gamma;\ |(I-P)^{1/2}f(x)|>\lambda\}) \le \frac{C}{\lambda^q}\|\nabla f\|_q^q. \tag{6.13}$$

Une conséquence du Théorème 6.1, de la Proposition 6.2 et du Théorème 6.5 est l'énoncé suivant:

Corollaire 6.2. *On suppose (D), $(\Delta(\alpha))$ et (P_p) pour un certain $p\in]1,2[$. Il existe $\varepsilon>0$ tel que, pour tout $p-\varepsilon<q<+\infty$, on a (RR_q) (et en particulier, on a (RR_p)).*

6.5. *Interpolation réelle des espaces de Sobolev*

Les espaces de Sobolev homogènes sur Γ s'interpolent par la méthode réelle. Plus précisément:

Théorème 6.6. *Soit $q\in[1,+\infty[$. On suppose (D), (P_q) et $(\Delta(\alpha))$. Alors, pour tous $q<p<+\infty$, $\dot W^{1,p}(\Gamma)=(\dot W^{1,q}(\Gamma),\dot W^{1,\infty}(\Gamma))_{1-\frac{q}{p},p}$.*

On obtient en conséquence le théorème de réitération suivant:

Corollaire 6.3. *On suppose* (*D*), (P_q) *pour un certain* $1 \leq q < +\infty$ *et* $(\Delta(\alpha))$. *On pose* $q_0 = \inf\{q \in [1, +\infty[: (P_q)$ *est vraie*$\}$. *Pour* $q_0 < p_1 < p < p_2 \leq +\infty$, *si* $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_1} + \frac{\theta}{p_2}$, *alors* $\dot{W}^{1,p}(\Gamma) = (\dot{W}^{1,p_1}(\Gamma), \dot{W}^{1,p_2}(\Gamma))_{\theta,p}$.

La preuve du Théorème 6.6 repose sur une décomposition de Calderón–Zygmund dans les espaces de Sobolev, qui est la transposition à ce contexte discret de la Proposition 1.1 de [15] (voir aussi [12] dans $\mathbb{R}^n$ et [21], Proposition 9.1, pour l'extension au cas de la mesure de Lebesgue avec un poids, voir aussi d'autres généralisations dans [39]):

Proposition 6.3. *On suppose* (*D*) *et* (P_q) *pour un* $q \in [1, +\infty[$ *et soit* $p \in [q, +\infty[$. *Soient aussi* $f \in \dot{E}^{1,p}(\Gamma)$ *et* $\lambda > 0$. *Il existe une famille de boules* $(B_i)_{i \in I}$, *de fonctions* $(b_i)_{i \in I} \in \dot{E}^{1,q}(\Gamma)$ *et une fonction* $g \in \dot{E}^{1,\infty}$ *vérifiant les propriétés suivantes*:

$$f = g + \sum_{i \in I} b_i, \tag{6.14}$$

$$\|\nabla g\|_\infty \leq C\lambda, \tag{6.15}$$

$$\text{supp } b_i \subset B_i, \sum_{x \in 2B_i} |\nabla b_i|^q(x) m(x) \leq C\lambda^q V(B_i), \tag{6.16}$$

$$\sum_{i \in I} V(B_i) \leq C\lambda^{-p} \sum_{x \in \Gamma} |\nabla f|^p(x) m(x), \tag{6.17}$$

$$\sum_{i \in I} \chi_{B_i} \leq N, \tag{6.18}$$

où C *et* N *ne dépendent que de* q, p *et des constantes dans* (*D*) *et* (P_q).

6.6. *Continuité d'une fonctionnelle de Littlewood–Paley discrète*

La preuve du Théorème 6.5 utilise la continuité sur L^q (pour $q > 2$) d'une version discrète de la fonctionnelle g de Littlewood–Paley–Stein (voir [294] et aussi la section 5.5.3). Pour toute fonction $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ et tout $x \in \Gamma$, on pose

$$g(f)(x) = \left(\sum_{l \geq 1} l |(I - P)P^l f(x)|^2 \right)^{1/2}.$$

Il s'agit bien d'un analogue discret de la fonctionnelle g_1, si on considère $(I - P)P^l = P^l - P^{l+1}$ comme une dérivée en temps discret de P^l et on se rappelle que P est un opérateur markovien.

On vérifie facilement que, sous l'hypothèse $(\Delta(\alpha))$, g est un opérateur sous-linéaire borné sur $L^2(\Gamma)$ (cela résulte du fait que le spectre de P dans $L^2(\Gamma)$ est inclus dans $[a,1]$ pour un $a > -1$, comme on l'a rappelé dans la section 6.3.1). On montre en fait que g est bornée sur $L^p(\Gamma)$ pour tout $1 < p < +\infty$:

Théorème 6.7. *On suppose* (D), (DUE) *et* ($\Delta(\alpha)$)*. Soit* $1 < p < +\infty$*. Pour toute* $f \in L^p(\Gamma)$,

$$\|g(f)\|_p \lesssim \|f\|_p.$$

La continuité sur L^p de la version en temps continu de la fonctionnelle g pour des semigroupes markoviens est due à Stein ([294]). Ce résultat a connu de nombreuses extensions, dans $\mathbb{R}^n$ avec le semigroupe engendré par $L = -\mathrm{div}(A\nabla)$ ([13]) et dans des variétés riemanniennes, pour la fonctionnelle g mais aussi une version faisant intervenir le gradient en espace au lieu de la dérivée en temps ([100, 82, 239, 240]). Dans le cas des graphes, en supposant un doublement local pour le volume des boules, Dungey établit dans [127] la continuité L^p, pour tout $1 < p \leq 2$, d'une autre version de la fonctionnelle g de Littlewood–Paley–Stein, qui fait intervenir le gradient en espace au lieu de la dérivée discrète en temps, ainsi que le semigroupe (en temps continu) engendré par $I - P$.

6.7. *Une brève description des preuves*

On donne ici un aperçu des preuves des résultats précédents.

Commençons par les énoncés sur les transfomées de Riesz. On écrit l'opérateur $T = \nabla(I-P)^{-1/2}$ comme une série:

$$T = \nabla\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k P^k\right), \tag{6.19}$$

où les a_k sont donnés par

$$(1-x)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \tag{6.20}$$

pour $-1 < x < 1$. Le noyau de T est donné par

$$\nabla_x\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k p_k(x,y)\right). \tag{6.21}$$

Pour prouver la continuité L^p de la transformée de Riesz, il est naturel de faire appel à la théorie des opérateurs de Calderón–Zygmund, comme dans le cadre continu (euclidien ou riemannien). Cependant, montrer que T est un opérateur de Calderón–Zygmund au sens classique supposerait déjà, au vu de (6.21), de disposer au moins d'estimations ponctuelles pour le gradient de p_k pour estimer la taille de ce noyau, voire d'estimations d'un gradient d'ordre 2. Même sous les hypothèses (D) et (P_2), les estimations les plus précises que l'on connaisse sur la régularité de p_k ne vont en général pas au-delà de la régularité hölderienne ([116], ce n'est que dans le cas du graphe de Cayley d'un groupe qu'on dispose d'une majoration ponctuelle du gradient de p_k, voir [191]).

Les preuves des théorèmes précédents sur les transformées de Riesz et les inégalités inverses reposent sur des résultats de continuité L^p pour des opérateurs “sans noyau”. Ces résultats donnent des conditions suffisantes pour qu'un opérateur T borné sur L^2 le soit sur L^p, soit pour $p_0 < p < 2$, soit pour $2 < p < p_0$. Ces conditions ne font jamais intervenir le noyau de T, mais seulement la façon dont T agit sur certaines fonctions L^p. Elles sont de ce fait beaucoup moins restrictives que les hypothèse usuelles des opérateurs de Calderón–Zygmund, mais l'absence d'estimations du noyau a pour conséquence que la continuité L^p obtenue n'est valable que pour p variant dans un intervalle du type $]p_0, 2[$ ou $]2, p_0[$. On notera que ces théorèmes sont également utilisés dans [15, 16] pour prouver les résultats correspondants dans la cadre riemannien.

On énonce ici, dans le contexte des graphes, les théorèmes généraux que nous appliquons, renvoyant à [13] et [21] pour une bibliographie sur le sujet (voir aussi une version pour la continuité sur certains espaces de Hardy dans [55]):

Théorème 6.8. *Soit $p_0 \in [1, 2[$. On suppose que Γ vérifie (D). Soit T un opérateur sous-linéaire continu sur $L^2(\Gamma)$. Pour toute boule B, soit A_B un opérateur linéaire agissant sur $L^2(\Gamma)$. On suppose que, pour tout $j \geq 1$, il existe $g(j) > 0$ tel que, pour toute boule $B \subset \Gamma$ et toute fonction f à support dans B,*

$$\frac{1}{V^{1/2}(2^{j+1}B)} \|T(I - A_B)f\|_{L^2(C_j(B))} \leq g(j) \frac{1}{V^{1/p_0}(B)} \|f\|_{L^{p_0}} \tag{6.22}$$

pour tout $j \geq 2$ et

$$\frac{1}{V^{1/2}(2^{j+1}B)} \|A_B f\|_{L^2(C_j(B))} \leq g(j) \frac{1}{V^{1/p_0}(B)} \|f\|_{L^{p_0}} \tag{6.23}$$

pour tout $j \geq 1$. Si $\sum_{j \geq 1} g(j) 2^{Dj} < +\infty$, avec D donné par (6.10), alors T est continu de $L^{p_0}(\Gamma)$ dans $L^{p_0,\infty}(\Gamma)$ et de $L^p(\Gamma)$ dans $L^p(\Gamma)$ pour tout $p_0 < p < 2$.

Dire que T est continu de $L^{p_0}(\Gamma)$ dans $L^{p_0,\infty}(\Gamma)$ signifie qu'il existe $C > 0$ tel que, pour tout $\lambda > 0$,

$$m(\{x \in \Gamma; |Tf(x)| > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda^{p_0}} \|f\|_{L^{p_0}}^{p_0}.$$

Théorème 6.9. *Soit $p_0 \in]2, +\infty]$. On suppose que Γ vérifie (D). Soit T un opérateur sous-linéaire envoyant un sous-espace dense de $L^2(\Gamma)$ dans $L^2(\Gamma)$. Pour toute boule B, soit A_B un opérateur linéaire agissant sur $L^2(\Gamma)$. On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que, pour toute $f \in L^2(\Gamma)$, tout $x \in \Gamma$ et toute boule $B \ni x$,*

$$\frac{1}{V^{1/2}(B)} \|T(I - A_B)f\|_{L^2(B)} \leq C(\mathcal{M}(|f|^2))^{1/2}(x) \tag{6.24}$$

et

$$\frac{1}{V^{1/p_0}(B)}\|TA_B f\|_{L^{p_0}(B)} \leq C(\mathcal{M}(|Tf|^2))^{1/2}(x). \tag{6.25}$$

Si $2 < p < p_0$, *pour toute* $f \in L^2(\Gamma) \cap L^p(\Gamma)$,

$$\|Tf\|_{L^p(\Gamma)} \lesssim \|f\|_{L^p(\Gamma)}.$$

Dans ce théorème, on désigne par $\mathcal{M}$ la fonction maximale de Hardy–Littlewood, définie comme suit: pour toute fonction f sur Γ et tout $x \in \Gamma$,

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{V(B)} \sum_{y \in B} |f(y)|m(y),$$

la borne supérieure étant prise sur toutes les boules B contenant x. On rappelle que, sous l'hypothèse (D), $\mathcal{M}$ est continue de $L^1(\Gamma)$ dans $L^{1,\infty}(\Gamma)$ et de $L^p(\Gamma)$ dans $L^p(\Gamma)$ pour tout $p \in]1, +\infty]$.

La preuve du Théorème 6.1 donnée dans [278] n'utilise pas le Théorème 6.8 qui est postérieur à la parution de [278]. Dans [278], on utilise une version antérieure du Théorème 6.8, qui se trouve dans [131] (Théorème 1), et ne nécessite, pour être appliquée, que la connaissance d'une majoration ponctuelle du noyau p_k (et non de son gradient). Cette estimation est en effet suffisante pour obtenir des estimations de la norme L^2 du gradient de p_k sur des couronnes (section 2 de [278]) et appliquer le Théorème 1 de [131]. On peut toutefois aussi prouver le Théorème 6.1 en appliquant le Théorème 6.8 avec $A_B = I - (I - P^{k^2})^n$ où k est le rayon de B et n un entier qui ne dépend que de la constante D dans (6.10). Les calculs sont analogues à ceux de [278].

On prouve le Théorème 6.2 en appliquant le Théorème 6.9 avec le même opérateur A_B que précédemment (suivant des méthodes de [16]). On établit le Théorème 6.7 en appliquant à nouveau les Théorèmes 6.8 et 6.9, en s'inspirant de [13].

Pour le Théorème 6.5, suivant [15], on montre d'abord (6.13). La preuve utilise la décomposition de Calderón–Zygmund pour les fonctions Sobolev (Proposition 6.3). Un autre ingrédient est la continuité L^q de la fonctionnelle g pour $q > 2$ (Théorème 6.7). On conclut la preuve du Théorème 6.5 par interpolation, grâce au Théorème 6.6 et au Corollaire 6.3.

Pour la preuve du Théorème 6.4, on définit une *différentielle* discrète et une *divergence* discrète, que l'on présente rapidement ici.

On définit d'abord une métrique sur E, l'ensemble des arêtes de Γ. Pour tous $\gamma = (x, y), \gamma' = (x', y') \in E$, on pose

$$d(\gamma, \gamma') = \max(d(x, x'), d(y, y')).$$

On définit également une mesure sur les parties de E. Pour tout $A \subset E$, soit

$$\mu(A) = \sum_{(x,y) \in A} \mu_{xy}.$$

On vérifie facilement que E, muni de la distance d et de la mesure μ, est un espace de nature homogène.

On définit alors des espaces L^p sur E. Pour $1 \leq p < +\infty$, une fonction $F : E \to \mathbb{R}$ appartient à $L^p(E)$ si, et seulement si, F est antisymétrique ($F(x,y) = -F(y,x)$ pour tout $(x,y) \in E$) et

$$\|F\|_{L^p(E)}^p := \frac{1}{2} \sum_{(x,y)\in E} |F(x,y)|^p \mu_{xy} < +\infty.$$

La norme $L^2(E)$ provient du produit scalaire

$$\langle F, G\rangle_{L^2(E)} = \frac{1}{2} \sum_{x,y\in\Gamma} F(x,y)G(x,y)\mu_{xy}.$$

Enfin, $F \in L^\infty(E)$ si, et seulement si, F est antisymétrique et

$$\|F\|_{L^\infty(E)} := \frac{1}{2} \sup_{(x,y)\in E} |F(x,y)| < +\infty.$$

Pour toute fonction $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ et tout $\gamma = (x,y) \in E$, on pose

$$df(\gamma) = f(y) - f(x).$$

La fonction df est antisymétrique sur E et s'appelle la différentielle de f. Elle est reliée à la longueur du gradient ∇f de la manière suivante: sous ($\Delta(\alpha)$), pour tout $p \in [1, +\infty]$ et toute fonction $f : \Gamma \to \mathbb{R}$,

$$\|df\|_{L^p(E)} \sim \|\nabla f\|_{L^p(\Gamma)}.$$

On considère aussi l'adjoint de d sur L^2 pour définir la divergence. Il est facile de vérifier que, si $df \in L^2(E)$ et si G est une fonction quelconque de $L^2(E)$ telle que $x \mapsto \sum_y p(x,y)G(x,y)$ appartient à $L^2(\Gamma)$, on a

$$\langle df, G\rangle_{L^2(E)} = -\sum_{x\in\Gamma} f(x) \left(\sum_{y\in\Gamma} p(x,y)G(x,y)\right) m(x).$$

Si on définit alors

$$\delta G(x) = \sum_y p(x,y)G(x,y)$$

pour tout $x \in \Gamma$, on a donc

$$\langle df, G\rangle_{L^2(E)} = -\langle f, \delta G\rangle_{L^2(\Gamma)}$$

pour toute $f \in L^2(\Gamma)$ telle que $df \in L^2(E)$ et toute $G \in L^2(E)$ telle que $\delta G \in L^2(\Gamma)$. On a aussi $I - P = -\delta d$, ce qui est bien la version discrète de $-\Delta = -\operatorname{div} \nabla$.

On décrit alors les étapes de la preuve du Théorème 6.4, qui s'inspire de [15]. On introduit une propriété qui équivaut, dans ce cadre discret, à la continuité du projecteur de $L^p(\Lambda^1 T^* M)$ sur les formes exactes (voir la section 2.2.3). Pour tout $1 \leq p < +\infty$, on dit que (Π_p) est vérifiée si, et seulement si, pour toute $F \in L^p(E) \cap L^2(E)$,

$$\|d(I-P)^{-1}\delta F\|_{L^p(E)} \lesssim \|F\|_{L^p(E)}. \tag{Π_p}$$

Si cette condition est vérifiée, comme $L^2(E) \cap L^p(E)$ est dense dans $L^p(E)$, l'opérateur $d(I-P)^{-1}\delta$ se prolonge en un opérateur continu de $L^p(E)$ dans lui-même.

Soient $p_0 > 2$ et $q \in]2, p_0[$. On désigne par (b') la propriété suivante:

$$\text{pour tout } p \in]2, q[, (\Pi_p) \text{ est vérifiée.} \tag{b'}$$

On prouve alors l'existence de $p_0 > 2$ tel que, si $q \in]2, p_0[$, alors (b) $\Rightarrow$ (b′) $\Rightarrow$ (a) $\Rightarrow$ (b).

Pour (b) $\Rightarrow$ (b′), on montre que l'opérateur $TF = |d(I-P)^{-1}\delta|$ est continu sur $L^p(E)$ en appliquant le Théorème 2.3 de [15]. La vérification des hypothèses de ce théorème utilise (b).

La preuve de (b′) $\Rightarrow$ (a) utilise le fait que, par le Théorème 6.5 et la Proposition 6.2, il existe $\varepsilon > 0$ tel qu'on ait (RR_q) pour tout $q \in]2-\varepsilon, 2[$. Il suffit alors de montrer que la conjonction de (Π_p) et de $(RR_{p'})$ entraîne (R_p) pour $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Enfin, pour (a) $\Rightarrow$ (b), on estime $\sum_{x \in B} |\nabla(u\varphi)(x)|^p m(x)$ où φ est une fonction cut-off adaptée, suivant la méthode développée dans [15].

Enfin, la preuve de la Proposition 6.1 est semblable à celle de la Proposition 2.2 de [15], via une inégalité de Caccioppoli elliptique, la Proposition 6.2 et l'auto-amélioration "à la Gehring" des inégalités de Hölder inverses ([164]).

Ajoutons que les résultats de [43] ont été étendus dans [42] au cas des espaces L^p à poids (dans le cas des poids de Muckenhoupt).

6.8. *Perspectives*

Question ouverte 6.1. Qu'en est-il de la continuité L^p de versions de la fonctionnelle g faisant intervenir le gradient spatial ∇? De telles fonctionnelles n'ont pas été considérées dans [43].

Question ouverte 6.2. Les travaux décrits dans cette section établissent, dans un cadre discret, l'équivalent de la plupart des résultats correspondants dans le cadre des variétés riemanniennes contenus dans [15, 16, 98]. D'autres questions concernant la comparaison des normes L^p de ∇f et de $(I-P)^{1/2}f$ restent toutefois ouvertes. En particulier, peut-on trouver un graphe sur lequel (D) et (P_2) sont vérifiées mais la transformée de Riesz n'est pas continue sur L^p pour $p > 2$? On rappelle qu'un tel exemple dans le cadre continu se trouve dans [102, 233]. A l'inverse, est-il vrai que, sur le graphe formé de deux copies de $\mathbb{Z}^n$ reliées par une arête, la transformée de Riesz est continue sur L^p pour tout $1 < p < n$? Ce résultat serait la version discrète de l'un des théorèmes de [75] et fournirait un exemple de graphe ne vérifiant pas (P_2) mais sur lequel la transformée de Riesz est quand même continue pour certaines valeurs de $p > 2$.

Direction de recherche 6.1. Plus généralement, il serait intéressant de comprendre les liens entre les questions de transformées de Riesz et la géométrie à l'infini du graphe, comme cela a été fait dans le cadre continu (voir [74, 75, 180, 181, 189]).

Direction de recherche 6.2. Nous avons prouvé dans [279] que, sous (D) et (P_2), la transformée de Riesz est continue de $H^1_{CW}(\Gamma)$ dans $L^1(\Gamma)$. Pour toute fonction f sur Γ, la fonction $\nabla(I-P)^{-1/2}f$ est positive ou nulle et ne peut donc appartenir à $H^1_{CW}(\Gamma)$ à moins d'être identiquement nulle. Suivant la démarche de [23], peut-on, dans ce contexte discret, développer une théorie des espaces de Hardy de 1-formes différentielles et obtenir des énoncés de continuité de $d(I-P)^{-1/2}$ d'un espace H^1 de fonctions dans l'espace H^1 de formes?

Direction de recherche 6.3. On a obtenu dans [43] des résultats d'interpolation réelle pour les espaces de Sobolev. En les combinant à des théorèmes généraux d'interpolation contenus dans [109], on peut en déduire des résultats d'interpolation complexe pour ces espaces. Cette observation peut être le point de départ d'une application de [43] en analyse numérique, que nous décrivons brièvement ici. Soit Ω un domaine polyédral de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) et $L = -\mathrm{div}(A\nabla)$ un opérateur uniformément elliptique dans Ω sous forme divergence, à coefficients mesurables bornés, avec condition de Dirichlet sur $\partial\Omega$ (comme dans la section 3). Etant donnée $f \in L^2(\Omega)$ (ou dans un espace de fonctions plus régulières), on cherche à résoudre numériquement le problème suivant:

$$\begin{cases} Lu = f & \text{dans } \Omega, \\ \mathrm{tr}\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Des théorèmes classiques en analyse numérique ([66, 87, 134]) affirment que, si on approche L par des opérateurs discrets $(L_h)_{h>0}$ avec une famille de triangulations de Ω de taille h en utilisant une méthode de Galerkin ou d'éléments finis, la solution u_h du problème approché $L_h u_h = f_h$ converge vers u quand $h \to 0$ dans des espaces de Sobolev convenables. On sait en revanche très peu de choses à propos de la convergence de u_h vers u dans des espaces de Hölder. Une approche possible de ce problème consiste à établir des estimations sur la régularité hölderienne du noyau du semigroupe engendré par L_h, avec des constantes indépendantes du paramètre h.

Ce problème est relié à l'analyse d'opérateurs elliptiques sur les graphes. On peut en effet considérer les sommets de la triangulation comme les sommets d'un graphe dont les arêtes sont celles de la triangulation. Une différence essentielle entre cette situation et celle considérée dans [43] est que l'hypothèse ($\Delta(\alpha)$), constamment faite dans [43] et la littérature afférente sur les graphes (qui traite le cas des marches aléatoires, [14, 116]), qui signifie que les coefficients de l'opérateur elliptique avec lequel on travaille sont tous minorés par une constante strictement positive, n'est en général pas satisfaite pour L_h dans la situation issue de l'analyse numérique qu'on vient de décrire. Même si $L = -\Delta$, on peut construire une triangulation telle que les coefficients de L_h ne soient pas de signe constant. Les opérateurs L_h restent cependant elliptiques au sens où

$$\langle L_h f_h, f_h\rangle \geq c\|\nabla f_h\|_2^2$$

pour un $c > 0$. L'absence de ($\Delta(\alpha)$) interdit d'utiliser, comme dans [116], des méthodes comme l'itération de Moser ou le principe du maximum pour obtenir des estimations sur l'opérateur L_h.

Dans [276], Rey a établi des estimations hölderiennes indépendantes de h pour le noyau du semigroupe engendré par L_h en dimension $n = 2$. Un théorème d'interpolation complexe pour les espaces de Sobolev sur des graphes devrait donner une preuve nettement simplifiée de ce résultat. L'idée est d'appliquer un théorème abstrait de Sneiberg ([291]) et raisonner comme dans [31], Chapter I, Proposition 22. Le problème reste ouvert en dimension $n \geq 3$.

Direction de recherche 6.4. Comme on vient de le voir, le contexte des travaux décrits dans cette section est celui des marches aléatoires sur un graphe, au sens où le noyau p, défini par (6.3), vérifie $p(x, y) \geq \alpha > 0$ pour tous x, y voisins (c'est l'hypothèse ($\Delta(\alpha)$)). Cette hypothèse implique l'ellipticité de $I - P$ sur $L^2(\Gamma)$, au sens où

$$\langle (I - P)f, f\rangle \geq \alpha\|\nabla f\|_{L^2(\Gamma)}^2. \tag{6.26}$$

Que deviennent les résultats de la présente section si on suppose seulement (6.26) au lieu de ($\Delta(\alpha)$)? Toutes les preuves utilisent de façon notable les estimations (*UE*) ou (*LUE*), qui ne sont plus valables sans ($\Delta(\alpha)$). Existe-t-il, pour de tels opérateurs, une théorie semblable à celle obtenue dans [13] pour les opérateurs $-\mathrm{div}(A\nabla)$ dans $\mathbb{R}^n$?

7. Puissances Fractionnaires d'opérateurs Elliptiques

Cette section reprend les résultats de [103, 266, 281].

7.1. *Le cadre euclidien*

On rappelle ici quelques résultats connus sur les espaces de Sobolev fractionnaires dans $\mathbb{R}^n$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq p \leq +\infty$ et $\alpha > 0$. L'espace $L^p_\alpha(\mathbb{R}^n)$, introduit par Aronszajn et Smith ([8]) et par Calderón ([69]), est défini par

$$L^p_\alpha(\mathbb{R}^n) := \{f = G_\alpha * g;\, g \in L^p(\mathbb{R}^n)\}$$

où le potentiel de Bessel G_α est donné par sa transformée de Fourier:

$$\widehat{G_\alpha}(x) = (1 + |x|^2)^{-\frac{\alpha}{2}}.$$

Si $f = G_\alpha * g \in L^p_\alpha(\mathbb{R}^n)$, la fonction g est unique et la norme de f dans $L^p_\alpha(\mathbb{R}^n)$ est définie par

$$\|f\|_{\alpha,p} := \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Cela revient à dire que

$$L^p_\alpha(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^p(\mathbb{R}^n);\ (-\Delta)^{\alpha/2} f \in L^p(\mathbb{R}^n)\}.$$

Quand $\alpha = k \in \mathbb{N}^*$, cet espace coïncide avec l'espace de Sobolev $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$. Cette identification est prouvée en détail dans ([293], Chap. 5, Théorème 3).

L'espace $L^p_\alpha(\mathbb{R}^n)$ possède plusieurs caractérisations intégrales. Si $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$c_\alpha(-\Delta)^{\alpha/2} f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y|>\varepsilon} \frac{f(x+y)-f(x)}{|y|^{n+\alpha}} dy := \lim_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon(x)$$

avec

$$c_\alpha^{-1} := (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} 2^{\frac{\alpha}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-\alpha+1}{2}\right).$$

On en déduit une caractérisation intégrale de $L^p_\alpha(\mathbb{R}^n)$ pour $0 < \alpha < 2$ ([292, 324]): $f \in L^p_\alpha(\mathbb{R}^n)$ si, et seulement si, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et

(1) si $1 \leq p < +\infty$, I_ε converge dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$,
(2) si $p = +\infty$, I_ε reste borné dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

On peut donner des représentations de la norme $\|\cdot\|_{\alpha,p}$ en termes de fonctionnelles quadratiques. Pour $\alpha \in]0,1[$, on définit

$$D_\alpha f(x) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x+y)-f(x)|^2}{|y|^{n+2\alpha}} dy\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Alors, si $\frac{2n}{n+2\alpha} < p < +\infty$, $f \in L^p_\alpha(\mathbb{R}^n)$ si, et seulement si, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $D_\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, et

$$\|f\|_{\alpha,p} \sim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|D_\alpha f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Si on remplace D_α par une variante faisant intervenir une différence itérée de f:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x+y)+f(x-y)-2f(x)|^2}{|y|^{n+2\alpha}} dy\right)^{\frac{1}{2}},$$

alors le résultat correspondant est vrai pour tout $\alpha \in]0,2[$ et toujours $\frac{2n}{n+2\alpha} < p < +\infty$. Cette caractérisation est due à Stein ([292]). On peut consulter aussi [195, 248, 334] pour le cas de la dimension 1. La borne inférieure pour p est optimale (voir [146] pour le cas critique $p = \frac{2n}{n+2\alpha}$).

Une variante de D_α, qui permet de caractériser $L^p_\alpha(\mathbb{R}^n)$ sans la contrainte $\frac{2n}{n+2\alpha} < p < +\infty$, est la fonctionnelle S_α due à Strichartz:

$$S_\alpha f(x) = \left(\int_0^{+\infty} \left(\int_B |f(x+ry)-f(x)| dy\right)^2 \frac{dr}{r^{1+2\alpha}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

où B est la boule unité de $\mathbb{R}^n$. On a alors ([300]), pour tout $p \in]1, +\infty[$ et tout $\alpha \in]0, 1[$, $f \in L^p_\alpha(\mathbb{R}^n)$ si, et seulement si, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $S_\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et

$$\|f\|_{\alpha,p} \sim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|S_\alpha f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

En utilisant notamment cette caractérisation, Strichartz montre dans ([300]) que, pour tout $1 < p < +\infty$, si $\alpha p > n$, $L^p_\alpha(\mathbb{R}^n)$ est une algèbre pour le produit ponctuel. Pour $0 < \alpha < 1$, cela résulte immédiatement de la caractérisation de $L^p_\alpha(\mathbb{R}^n)$ au moyen de S_α. Lorsque $\alpha = k$ est un entier, comme $L^p_\alpha(\mathbb{R}^n) = W^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$, cette propriété est montrée grâce à la règle de Leibniz et aux injections de Sobolev. Enfin, le cas général est obtenu par un argument d'interpolation.

Si $\alpha p \leq n$, $L^p_\alpha(\mathbb{R}^n)$ n'est plus une algèbre pour le produit ponctuel ([300]). Kato et Ponce ([219]) ont montré en 1988 que, pour tout $p \in]1, +\infty[$ et tout $\alpha > 0$, $L^p_\alpha(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ est une algèbre pour le produit ponctuel (ce qui généralise bien le résultat de Strichartz, puisque $L^p_\alpha(\mathbb{R}^n) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$ lorsque $\alpha p > n$). La preuve repose sur un résultat d'analyse de Fourier dû à Coifman et Meyer ([91], p. 144, Proposition 2, [92]). En utilisant encore ce résultat, Gulisashvili et Kon ([183]) ont prouvé en 1996 une règle de Leibniz pour les puissances fractionnaires du laplacien, qui permet de retrouver le fait que $L^p_\alpha(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ est une algèbre pour le produit ponctuel pour tout $\alpha > 0$ et tout $p \in]1, +\infty[$.

7.2. *Le cas des groupes de Lie*

7.2.1. *Présentation des résultats*

Dans [103], nous avons étendu ces différents résultats au cadre des groupes de Lie unimodulaires. On présente ici les principaux résultats de ce travail.

Soit G un groupe de Lie unimodulaire connexe, dont on note dx la mesure, qui est donc invariante à gauche et à droite. On note $\mathcal{L}$ l'algèbre de Lie de G. Soit $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$ un système de champs de vecteurs invariants à gauche, ce qui veut dire que, pour tout $1 \leq i \leq k$, toute fonction $f \in C^\infty(G)$ et tout $g \in G$,

$$(X_i f)_g = X_i(f_g),$$

où, pour toute fonction $h \in C^\infty(G)$, la fonction h_g est définie par $h_g(x) = h(gx)$. On suppose que l'algèbre de Lie engendrée par $X_1, \dots, X_k$ est $\mathcal{L}$, ce que l'on traduit en disant que $X_1, \dots, X_k$ vérifient la condition de Hörmander.

On définit une distance (de Carnot–Carathéodory) sur G associée aux champs $X_1, \dots, X_k$ de la manière suivante. Un chemin absolument continu $l : [0, 1] \to G$ est dit admissible si, et seulement si, il existe des fonctions $a_1, \dots, a_k : [0, 1] \to \mathbb{C}$ telles que, pour presque tout $t \in [0, 1]$,

$$l'(t) = \sum_{i=1}^{k} a_i(t) X_i(l(t)).$$

La longueur d'un chemin admissible l est définie par

$$|l| = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{k} a_i^2(t) \right)^{\frac{1}{2}} dt.$$

Si $x, y \in G$, il existe, grâce à la condition de Hörmander, un chemin admissible joignant x et y, et on définit $d(x, y)$ comme étant la borne inférieure de l'ensemble des longueurs de tous les chemins admissibles joignant x et y. Cette distance d est invariante à gauche en raison de l'invariance à gauche des champs X_i. Pour tout $x \in G$, on note $|x| = d(e, x)$ où e désigne l'élément neutre de G, de sorte que, pour tous $x, y \in G$, $d(x, y) = |y^{-1}x|$.

Pour tout $x \in G$ et tout $r > 0$, on note $B(x, r) = \{y \in G;\, d(y, x) < r\}$ la boule ouverte de centre x et de rayon r et par $V(r)$ sa mesure, qui ne dépend pas de x. Le comportement de $V(r)$ joue un rôle important dans l'analyse qui va suivre. La description de ce comportement conduit à séparer les cas $r < 1$ et $r > 1$.

Nagel, Stein et Wainger ([270]) ont montré qu'il existe $d \in \mathbb{N}^*$, appelé dimension locale de $(G, \mathbf{X})$, tel que, pour tout $r \in]0, 1[$,

$$V(r) \sim r^d.$$

Le comportement de $V(r)$ quand $r > 1$ a été décrit par Y. Guivarc'h ([182]), et seules deux situations peuvent se produire. La première est celle où il existe $D \in \mathbb{N}^*$, appelé dimension de G à l'infini, tel que, pour tout $r > 1$,

$$V(r) \sim r^D.$$

On dit alors que G est à croissance polynomiale. Dans ce cas, contrairement à d, l'entier D ne dépend pas du choix des X_i. Parmi les groupes à croissance polynomiale figurent les groupes nilpotents ([182]), qui contiennent eux-mêmes la classe des groupes stratifiés ([152]).

La deuxième situation possible est celle où il existe $c, C > 0$ tels que, pour tout $r > 1$,

$$e^{cr} \lesssim V(r) \lesssim e^{Cr}.$$

On dit alors que G est à croisssance exponentielle. C'est le cas notamment des espaces symétriques (d'autres exemples de groupes unimodulaires résolubles à croissance exponentielle se trouvent dans [86, 190]). On notera que, contrairement à la situation discrète (voir [174–176]), aucune croissance intermédiaire du volume n'est possible.

On travaille avec le sous-laplacien Δ donné par

$$\Delta = -\sum_{i=1}^{k} X_i^2.$$

Pour tout $1 \leq p < +\infty$, soit Δ_p la plus petite extension fermée de $\Delta|_{C_0^\infty(G)}$ à $L^p(G)$. On peut alors définir les puissances Δ_p^α pour tout $\alpha \geq 0$, comme dans [151, 224]. On notera par la suite Δ^α au lieu de Δ_p^α s'il n'y a pas de risque de confusion.

Pour tout $p \in [1, +\infty[$ et tout $\alpha \geq 0$, on définit

$$L^p_\alpha(G) = \{f \in L^p(G);\ \Delta^{\alpha/2} f \in L^p(G)\},$$

et on munit cet espace de la norme

$$\|f\|_{\alpha,p} := \|f\|_{L^p(G)} + \|\Delta^{\alpha/2} f\|_{L^p(G)}.$$

Il s'agit d'un espace de Sobolev (ou de Bessel) inhomogène, qui généralise bien celui de $\mathbb{R}^n$. On peut en donner une version homogène, en définissant $\dot{L}^p_\alpha(G)$ comme le complété de

$$\{f \in C_0^\infty(G);\ \Delta^{\alpha/2} f \in L^p(G)\}$$

pour la norme $\|\Delta^{\alpha/2} f\|_{L^p(G)}$. C'est un espace de distributions ([62]) mais on s'intéressera par la suite à l'espace de fonctions $\dot{L}^p_\alpha(G) \cap L^\infty(G)$.

Nous avons montré dans [103] que $L^p_\alpha(G)$ est une algèbre pour le produit ponctuel dès que $\alpha p > d$:

Théorème 7.1. *Soit d la dimension locale de $(G, \mathbf{X})$. Pour tout $\alpha > 0$ et tout $p \in]1, +\infty[$ tels que $\alpha p > d$, l'espace $L^p_\alpha(G)$ est une algèbre pour le produit ponctuel. Pour toutes $f, g \in L^p_\alpha(G)$, $fg \in L^p_\alpha(G)$ et*

$$\|fg\|_{\alpha,p} \lesssim \|f\|_{\alpha,p} \|g\|_{\alpha,p}.$$

En raison de l'injection $L^p_\alpha(G) \subset L^\infty(G)$ si $\alpha p > d$ ([105, 319]), ce résultat est une conséquence du théorème suivant:

Théorème 7.2. *Pour tout $\alpha \geq 0$ et tout $p \in]1, +\infty[$, $L^p_\alpha(G) \cap L^\infty(G)$ est une algèbre pour le produit ponctuel. Pour toutes $f, g \in L^p_\alpha(G) \cap L^\infty(G)$, $fg \in L^p_\alpha(G) \cap L^\infty(G)$ et*

$$\|fg\|_{\alpha,p} \lesssim \|f\|_{\alpha,p} \|g\|_\infty + \|g\|_{\alpha,p} \|f\|_\infty.$$

Le Théorème 7.2 ne fait aucune hypothèse sur la croissance du volume des boules et est "local", au sens où il porte sur les espaces de Sobolev non homogènes. A condition de supposer G à croissance polynomiale, on peut en donner une version "globale", portant sur les espaces de Sobolev homogènes:

Théorème 7.3. *On suppose G à croissance polynomiale. Alors, pour tout $\alpha \in [0, 1]$ et tout $p \in]1, +\infty[$, $\dot{L}^p_\alpha(G) \cap L^\infty(G)$ est une algèbre pour le produit ponctuel. Pour toutes $f, g \in \dot{L}^p_\alpha(G) \cap L^\infty(G)$, $fg \in \dot{L}^p_\alpha(G) \cap L^\infty(G)$ et*

$$\|\Delta^{\alpha/2}(fg)\|_p \lesssim \|\Delta^{\alpha/2} f\|_p \|g\|_\infty + \|\Delta^{\alpha/2} g\|_p \|f\|_\infty.$$

Si G est nilpotent, ce résultat est vrai pour tout $\alpha \geq 0$.

Les Théorèmes 7.2 et 7.3 sont des cas particuliers de la règle de Leibniz suivante:

Théorème 7.4.

1. *Soient $\alpha \geq 0$, $p_1, q_2 \in]1, +\infty]$ et $r, p_2, q_1 \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i}$ pour $i = 1, 2$. Pour toute $f \in L^{p_1}(G) \cap L^{p_2}_\alpha(G)$ et toute $g \in L^{q_2}(G) \cap L^{q_1}_\alpha(G)$, $fg \in L^r_\alpha(G)$*

et

$$\|fg\|_{\alpha,r} \lesssim \|f\|_{p_1}\|g\|_{\alpha,q_1} + \|f\|_{\alpha,p_2}\|g\|_{q_2}.$$

2. *On suppose G à croissance polynomiale. Soient $\alpha \in [0,1]$, $p_1, q_2 \in]1,+\infty]$ et $r, p_2, q_1 \in]1,+\infty[$ tels que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i}$ pour $i = 1,2$. Pour toute $f \in L^{p_1}(G) \cap \dot{L}^{p_2}_\alpha(G)$ et toute $g \in L^{q_2}(G) \cap \dot{L}^{p_1}_\alpha(G)$, $fg \in \dot{L}^r_\alpha(G)$ et*
$$\|\Delta^{\alpha/2}(fg)\|_r \lesssim \|f\|_{p_1}\|\Delta^{\alpha/2}g\|_{q_1} + \|\Delta^{\alpha/2}f\|_{p_2}\|g\|_{q_2}.$$
3. *Si G est nilpotent, la conclusion de* (3) *est valable pour tout $\alpha \geq 0$.*

On ajoute qu'on obtient aussi des règles de composition pour les espaces $L^p_\alpha(G)$ ([103], Théorèmes 12, 13 et 22).

Avant la publication de [103], le seul résultat concernant la propriété d'algèbre pour le produit ponctuel dans les espaces de Sobolev fractionnaires sur un groupe de Lie était le Théorème 7.1, qui avait été établi, uniquement dans le cas où G est stratifié et $X_1, \ldots, X_k$ engendrent la première tranche de l'algèbre de Lie de G, par Bohnke dans [58]. Le Théorème 7.1 est beaucoup plus général, puisqu'aucune hypothèse sur la croissance du volume des boules de G n'est faite. Les Théorèmes 7.2, 7.3 et 7.4 n'apparaissent pas dans [58] même lorsque G est stratifié.

7.2.2. *Schémas de preuves*

Le cas $0 < \alpha < 1$

On commence par prouver les Théorèmes 7.2, 7.3 et 7.4 pour $0 < \alpha < 1$. Ces preuves passent par une représentation des normes de Sobolev fractionnaires au moyen de la fonctionnelle suivante, qui généralise celle de Strichartz dans [300]:

$$S_\alpha f(x) = \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{r^\alpha V(r)} \left(\int_{|y|<r} |f(xy) - f(x)|dy\right)^2 \frac{dr}{r}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Plus précisément, on montre que, si G est à croissance polynomiale, $\|S_\alpha f\|_p \sim \|\Delta^{\alpha/2} f\|_p$ pour tout $1 < p < +\infty$ et tout $0 < \alpha < 1$. Cette preuve repose notamment sur des estimations du semigroupe engendré par $-\Delta$. Plus précisément, le semigroupe $T_t = e^{-t\Delta}$ engendré par Δ est hypoanalytique et possède un noyau p_t tel que, pour toute $f \in L^1(G)$, tout $t > 0$ et tout $x \in G$,

$$T_t f(x) = \int_G p_t(y^{-1}x) f(y) dy.$$

Le noyau p_t possède les estimations suivantes ([282, 318]): il existe $c, C > 0$ tels que, pour tout $x \in G$, tout $t > 0$ et tout $i \in \{1, \ldots, k\}$,

$$\frac{1}{V(\sqrt{t})} \exp\left(-C\frac{|x|^2}{t}\right) \lesssim p_t(x) \lesssim \frac{1}{V(\sqrt{t})} \exp\left(-c\frac{|x|^2}{t}\right),$$

$$|\partial_t p_t(x)| \lesssim \frac{1}{tV(\sqrt{t})} \exp\left(-c\frac{|x|^2}{t}\right),$$

$$|X_i p_t(x)| \lesssim \frac{1}{\sqrt{t}V(\sqrt{t})} \exp\left(-c\frac{|x|^2}{t}\right).$$

Si G n'est plus supposé à croissance polynomiale, ces estimations sont valables pour $t \in]0,1[$ ([319]).

La preuve de $\|\Delta^{\alpha/2} f\|_p \leq C\|S_\alpha f\|_p$ repose sur la théorie de Littlewood–Paley–Stein pour les semigroupes markoviens ([257, 294]) et les estimations de p_t ([103], section 2.1.1). Celle de $\|S_\alpha f\|_p \leq C\|\Delta^{\alpha/2} f\|_p$ ([103], section 2.1.2) utilise ces mêmes outils, ainsi que la continuité L^p de la version vectorielle de la fonction maximale de Hardy–Littlewood ([148]), suivant un argument analogue dans le cas euclidien dû à Adams et Hedberg ([2], Théorème 3.5.6).

Si G n'est plus supposé à croissance polynomiale, on remplace S_α par une version locale, S_α^{loc}, et on montre par des arguments analogues et au prix de difficultés techniques supplémentaires que $\|f\|_p + \|\Delta^{\alpha/2} f\|_p \sim \|f\|_p + \|S_\alpha^{\mathrm{loc}} f\|_p$ (voir [103], sections 2.1.3 et 2.1.4).

Cette caractérisation de la norme de Sobolev (ou de sa version homogène) par la fonctionnelle S_α ou sa version locale donne immédiatement les Théorèmes 7.2 et 7.3 pour $0 < \alpha < 1$. Pour prouver le Théorème 7.4 pour $0 < \alpha < 1$, on introduit un analogue de la fonctionnelle D_α de Stein:

$$D_\alpha f(x) = \left(\int_G \frac{f(xy) - f(x)}{|y|^{2\alpha} V(|y|)} dy\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On prouve alors que, si G est à croissance polynomiale et si $p > \max(\frac{2d}{d+2\alpha}, \frac{2D}{D+2\alpha})$ où D est la dimension à l'infini de G, alors $\|\Delta^{\alpha/2} f\|_p \sim \|D_\alpha f\|_p$ pour tout $1 < p < +\infty$ et tout $0 < \alpha < 1$. On donne également une version locale de ce résultat quand G n'est pas supposé à croissance polynomiale (ce résultat est à rapprocher de [312], Théorème 3 et [313], p. 342, mais les résultats ne concernent pas les mêmes valeurs de α). La preuve utilise d'autres fonctionnelles quadratiques analogues à celles introduites par Dorronsoro dans [124]. Utilisant les fonctionnelles S_α et D_α ainsi que leurs versions locales, on obtient le cas $0 < \alpha < 1$ du Théorème 7.4.

Le cas $\alpha \geq 1$

Passons maintenant au cas $\alpha \geq 1$. Dans le cas inhomogène, on utilise une caractérisation récursive de $L^p_\alpha(G)$: $f \in L^p_{\alpha+1}(G)$ si, et seulement si, $f \in L^p_\alpha(G)$ et $X_i f \in L^p_\alpha(G)$ pour tout $1 \leq i \leq k$. Cette caractérisation repose principalement sur la continuité sur $L^p_\alpha(G)$ des transformées de Riesz "locales" $X_i(\Delta + \mathrm{Id})^{-1/2}$, qui provient de leur continuité L^p et d'un argument d'interpolation ([277], Théorème 5.14, [225]). On notera que, dans le cas où $\alpha = m$ est entier, cette caractérisation récursive signifie exactement que

$$L^p_m(G) = \{f \in L^p(G);\ X_I f \in L^p(G) \text{ pour tout } I \in \{1,\dots,k\}^l \text{ tel que } |I| \leq m\},$$

où, pour tout $I = (i_1, \ldots, i_l) \in \{1, \ldots, k\}^l$, on pose $l = |I|$ et $X_I = X_{i_1} \cdots X_{i_l}$. Ainsi, $L^p_m(G)$ est bien l'espace de Sobolev usuel.

On termine alors la preuve du cas non homogène du Théorème 7.4 en utilisant cette caractérisation récursive pour montrer que, si la règle de Leibniz est vraie pour une valeur de α et toutes les valeurs de p_1, p_2, q_1, q_2, alors elle est aussi vraie pour $\alpha + 1$ et toutes les valeurs de p_1, p_2, q_1, q_2.

Pour le cas des espaces de Sobolev homogènes, lorsque G est nilpotent, on raisonne de manière analogue, en utilisant la continuité sur $L^p(G)$, pour tout $1 < p < +\infty$, des itérées des transformées de Riesz, c'est-à-dire des opérateurs $X_I \Delta^{-l/2}$ où $|I| = l$ ([142]). Dans ce cas, pour $\alpha = m$ entier, on a, pour tout $1 < p < +\infty$,

$$\|\Delta^{m/2} f\|_p \sim \sum_{|I|=m} \|X_I f\|_p. \tag{7.1}$$

Si G est seulement à croissance polynomiale, les transformées de Riesz $X_i \Delta^{-1/2}$ sont bornées sur $L^p(G)$ pour tout $1 < p < +\infty$. Ce résultat, d'abord dû à Alexpoulos ([4]), se déduit en fait de la théorie développée dans [16] et rappelée dans la section 2.2.3. Les transformées de Riesz itérées ne sont pas, en général, continues sur $L^p(G)$, même quand $p = 2$ ([4]). C'est ce qui limite α dans $[0, 1]$ dans le Théorème 7.3 et l'assertion 2 du Théorème 7.4. En particulier, (7.1) n'est vraie que si $m = 1$.

On a souligné dans la section 2.1.3 que la continuité sur $L^p(G)$ des transformées de Riesz revenait à identifier un espace de Sobolev local, défini par un gradient, c'est-à-dire des champs de vecteurs, avec un espace de Sobolev fractionnaire, défini par l'opérateur non local $\Delta^{1/2}$. Si, dans [103], on s'en tenait aux espaces de Sobolev définis par les champs de vecteurs $X_1, \ldots, X_k$, montrer que ces espaces forment une algèbre pour le produit ponctuel (pour des valeurs convenables des exposants) consisterait simplement à appliquer une règle de Leibniz pour la dérivée d'un produit. En fait, on prouve une propriété d'algèbre analogue pour toute l'échelle des espaces de Sobolev fractionnaires $L^p_\alpha(G)$, mais pour pouvoir prendre $\alpha \geq 1$, il faut pouvoir, quand α est entier, identifier l'espace de Sobolev fractionnaire $L^p_\alpha(G)$ avec l'espace de Sobolev défini par les champs $X_1, \ldots, X_k$. Cela est possible pour tout α quand G est nilpotent, mais seulement pour $\alpha = 1$ quand G est à croissance polynomiale.

On obtient aussi des résultats analogues aux Théorèmes 7.1–7.4 sur des variétés riemanniennes sous des hypothèses de minoration ou de positivité de la courbure de Ricci et de stricte positivité du rayon d'injectivité. On renvoie à [103] pour les énoncés exacts et les preuves détaillées.

Ajoutons que, dans [158], les auteurs montrent que, sur un groupe de Lie G à croissance polynomiale, $B^s_{p,q}(G) \cap L^\infty(G)$ est une algèbre pour le produit ponctuel pour tout $0 < s \leq 1$ et $1 \leq p, q, \leq +\infty$ (ici, $B^s_{p,q}(G)$ est l'espace de Besov défini par une décomposition de Littlewood–Paley adaptée). Si G est nilpotent, ce résultat reste valable pour $s > 1$ et $1 < p, q + \infty$.

7.3. *Inégalités de Poincaré fractionnaires*

Que deviennent les résultats de [103] si on ne dispose pas de majoration gaussienne ponctuelle pour le noyau de la chaleur engendré par le laplacien, mais seulement d'estimations "à la Gaffney", déjà rencontrées dans les sections précédentes? Des travaux récents ([266, 281]) montrent qu'il reste possible de majorer la norme L^2_α de f par la norme L^2 d'une fonctionnelle de type $D_\alpha f$. Plus précisément, soit $M \in L^1(\mathbb{R}^n)$ un poids strictement positif de classe C^2. Soit L l'unique opérateur maximal accrétif de domaine dense dans $L^2(\mathbb{R}^n, M)$ (l'espace L^2 sur $\mathbb{R}^n$ pour la mesure $M(x)dx$) tel que, pour toutes $f \in \mathcal{D}(L)$ et $g \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n, M)$ (l'espace des fonctions $f \in L^2(\mathbb{R}^n, M)$ telles que $\nabla f \in L^2(\mathbb{R}^n, M)$),

$$\int_{\mathbb{R}^n} Lf(x)g(x)M(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla f(x) \cdot \nabla g(x)\, M(x)\, dx.$$

Cet opérateur est symétrique sur $L^2(\mathbb{R}^n, M)$ et on peut donc définir L^β pour tout $\beta > 0$ par théorie spectrale. Dans [266], nous avons établi l'inégalité suivante, valable pour tout $\alpha \in]0,1[$:

$$\|L^{\alpha/2} f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n,M)} \leq C \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x-y|^{n+2\alpha}}\, M(x)\, dx\, dy. \tag{7.2}$$

Cette inégalité peut être considérée comme une version de $\|L^{\alpha/2} f\|_{L^2(\mathbb{R}^n,M)} \leq C\|D_\alpha f\|_{L^2(\mathbb{R}^n,M)}$ dans ce contexte. On notera que (7.2) est vraie pour une mesure M très générale. La preuve consiste d'abord à montrer que le semigroupe engendré par L (ou la résolvente de L) vérifie des estimations de type Gaffney, puis à majorer le membre de gauche de (7.2) en utilisant uniquement ces estimations. Il suffit plus précisément d'écrire

$$\|L^{\alpha/2} f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n,M)} \lesssim \int_0^{+\infty} t^{-1-\alpha} \|t\, L\, (\mathrm{I} + t\, L)^{-1} f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n,M)}\, dt$$

et d'estimer la dernière intégrale en recouvrant $\mathbb{R}^n$ par des cubes convenablement choisis.

Comme conséquence de (7.2), on prouve une inégalité de Poincaré fractionnaire. Plus précisément, on suppose que la mesure $M(x)dx$ vérifie l'inégalité de Poincaré suivante: il existe $\lambda(M) > 0$ tel que, pour toute $f \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n, M)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(y)|^2\, M(y)\, dy \geq \lambda(M) \int_{\mathbb{R}^n} \left| f(y) - \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, M(x) dx \right|^2 M(y)\, dy. \tag{7.3}$$

On supposera également qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\lim_{|x| \to +\infty} (1-\varepsilon)|\nabla \ln M(x)|^2 + 2\Delta \ln M(x) = +\infty. \tag{7.4}$$

Cette hypothèse, ainsi que (7.3), sont satisfaites si $M = (2\pi)^{-n/2} e^{-|x|^2/2}$ est la mesure gaussienne standard (voir par exemple [232]). Plus généralement, (7.3) est vérifiée s'il existe $a \in (0,1)$, $c > 0$ et $R > 0$ tels que

$$\forall\, |x| \geq R, \quad a\, |\nabla \ln M(x)|^2 + \Delta \ln M(x) \geq c, \tag{7.5}$$

voir [47] ou [321], Appendix A.19, Théorème 1.2, voir aussi [122], Preuve du Théorème 6.2.21 pour des critères reliés.

On prouve alors:

Théorème 7.5. *On suppose que la mesure $M(x)dx$ vérifie (7.3) et (7.4). Soit $\alpha \in]0,1[$. Il existe alors $\mu(M) > 0$ tel que, pour toute fonction $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, M(x)\, dx = 0$,*

$$\iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x-y|^{n+2\alpha}}\, M(x)\, dx\, dy$$
$$\geq \mu(M) \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 (1 + |\nabla \ln M(x)|^\alpha)\, M(x)\, dx. \tag{7.6}$$

Le schéma de la preuve consiste à remarquer que l'inégalité (7.3) s'auto-améliore en

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|^2\, M(x)\, dx \geq \lambda'(M) \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 (1 + |\nabla \ln M(x)|^2)\, M(x)\, dx \tag{7.7}$$

pour toute $f \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n, M)$ telle que $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) M(x) dx = 0$. Par des arguments de calcul fonctionnel, on en déduit que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 (1 + |\nabla \ln M(x)|^\alpha)\, M(x)\, dx \leq C \| L^{\alpha/2} f \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n, M)}$$

et il suffit d'utiliser (7.2) pour conclure.

On peut voir (7.6) comme une généralisation de (7.3) où, dans le membre de droite, la semi-norme $W^{1,2}$ est remplacée par une expression non locale dans l'esprit des semi-normes de Gagliardo dans $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ ([1]).

Il existe de nombreuses inégalités de Poincaré pour des opérateurs de Lévy (ou des inégalités d'entropie de façon plus générale). Par exemple, Wu ([325]) et Chafaï ([76]) ont établi que

$$\mathrm{Ent}^\Phi_\mu(f) \leq \int \Phi''(f) \sigma \nabla f \cdot \nabla f\, d\mu + \iint D_\Phi(f(x), f(x+z))\, d\nu_\mu(z)\, d\mu(x) \tag{7.8}$$

avec

$$\mathrm{Ent}^\Phi_\mu(f) = \int \Phi(f)\, d\mu - \Phi\left(\int f\, d\mu \right)$$

et D_Φ est la distance de Bregman associée à Φ:

$$D_\Phi(a,b) = \Phi(a) - \Phi(b) - \Phi'(b)\,(a-b),$$

où Φ est une fonction vérifiant des propriétés de convexité, σ la matrice du processus de diffusion, μ une mesure et ν_μ la mesure de Lévy (singulière) associée à μ. Pour $\Phi(x) = x^2$ et $\sigma = 0$, (7.8) donne une inégalité de Poincaré pour les mesures (μ, ν_μ).

L'approche développée dans [266] a l'avantage de n'imposer, dans le membre de gauche de (7.6), aucun lien entre la mesure M qui apparaît dans l'intégration en x et la mesure singulière $|z|^{-n-\alpha}$ en $z = x - y$. Une telle décorrélation entre les mesures en x et en y semble nouvelle pour ce type d'inégalités. Notons que l'inégalité (7.6) est motivée entre autres par la conjecture de Cercignani (voir [120]).

Dans [281], les résultats de [266] ont été étendus au cas des groupes de Lie à croissance polynomiale. Nous avons également donné une version de la condition (7.5) pour avoir l'inégalité de Poincaré L^2 pour une mesure de probabilités.

7.4. *Perspectives*

Question ouverte 7.1. Le Théorème 7.3 n'est prouvé que pour $\alpha \in [0,1]$, comme on vient de le voir. Si G est à croissance polynomiale, l'espace $L^p_k(G)$ pour k entier, $k \geq 2$, ne coïncide pas, en général, avec l'espace de Sobolev des fonctions $f \in L^p(G)$ telles que $X_I f \in L^p(G)$ pour tout multi-indice I de longueur k. Peut-on trouver explicitement un groupe G à croissance polynomiale pour lequel la conclusion du Théorème 7.3 est fausse si $\alpha > 1$?

Direction de recherche 7.1. Un aspect fondamental de [103] est le lien entre les espaces de Sobolev fractionnaires définis à l'aide d'un sous-laplacien (qui sont en fait des espaces de Bessel) et le noyau de la chaleur associé à ce sous-laplacien. De tels liens ont été mis en évidence dans le cadre euclidien dès [293], et on montre dans [103] que la situation dans un groupe de Lie unimodulaire est similaire au contexte euclidien. Une situation géométrique où ces liens sont étudiés, mais où des phénomènes très différents de la situation euclidienne se produisent, est celle des espaces métriques fractals. De nombreux travaux ont été consacrés aux estimations "sous-gaussiennes" du noyau de la chaleur sur des fractals ([51, 52, 150, 187, 229]). Des espaces de Sobolev sur des fractals ont été introduits de manière directe (en utilisant le laplacien comme dans [103]) dans [217, 303, 313–315], et des estimations pour le noyau de la chaleur associé aux formes de Dirichlet correspondantes peuvent être déduites des propriétés de ces espaces ([83, 228, 331]). La démarche inverse, consistant à déduire les propriétés des espaces de Sobolev en partant d'estimations du noyau de la chaleur est développée dans [201, 330, 332]. Sur certains fractals, il peut arriver qu'une fonction f bornée appartienne au domaine du laplacien sans que ce soit le cas pour f^2 ([53]), et de façon générale, beaucoup de propriétés du laplacien euclidien ou riemannien ne se retrouvent pas ([111, 156, 222, 230, 303, 304]), ce qui montre que les propriétés d'algèbre de Sobolev ne se transposent pas directement au cadre fractal. Il serait intéressant de comprendre les conditions géométriques qui autorisent ou non à avoir des propriétés d'algèbre pour les espaces de Sobolev fractionnaires. Cela pourrait permettre en particulier de construire des contre-exemples aux propriétés d'algèbres de Sobolev dans différents cadres géométriques.

Question ouverte 7.2. Peut-on donner une version L^p des résultats de [266, 281] en utilisant toujours les estimations L^2 de type Gaffney? Peut-on prouver des estimations de la norme L^2 ou L^p de $L^{\alpha/2}f$ par des fonctionnelles quadratiques dans d'autres contextes géométriques en utilisant seulement les estimations L^2 de type Gaffney?

Question ouverte 7.3. Les inégalités de Poincaré fractionnaires de [281] restent-elles valables sur un groupe à croissance exponentielle?

Direction de recherche 7.2. Les résultats de [76, 325] ont été utilisés dans [165] pour estimer la vitesse de convergence vers un état d'équilibre pour l'équation de Lévy–Fokker–Planck. Peut-on obtenir des résultats analogues pour d'autres équations d'évolution en partant de l'inégalité (7.6)?

8. Conclusion

La plupart de résultats décrits dans cette vue d'ensemble étendent des estimations pour des puissances du laplacien dans $\mathbb{R}^n$ à des opérateurs elliptiques d'ordre 2 plus généraux et à des contextes géométriques continus (variétés) ou discrets (graphes). On récapitule ici les principaux aspects de ces résultats.

Dans $\mathbb{R}^n$, les espaces de Bessel peuvent être décrits au moyen de la transformée de Fourier. Les méthodes de [103] montrent que certaines propriétés de ces espaces (propriétés d'algèbre, expression de la norme au moyen d'une fonctionnelle quadratique) peuvent être étendues au cas des groupes de Lie muni d'un sous-laplacien Δ. Les preuves reposent de manière essentielle sur les estimations ponctuelles du noyau de $e^{-t\Delta}$ (et de son gradient). Il est également possible d'obtenir des majorations de la norme L^2 de $L^{\alpha}f$ par des fonctionnelles quadratiques pour des opérateurs L pour lesquels on dispose seulement d'estimations de type Davies–Gaffney (2.15), comme le montrent les résultats de [266, 281].

De nombreux résultats précédemment décrits portent sur les liens entre espaces de Hardy et opérateurs elliptiques d'ordre 2. La théorie classique des espaces de Hardy dans $\mathbb{R}^n$ ([149]) affirme que l'espace $H^1(\mathbb{R}^n)$ peut se caractériser au moyen de diverses fonctionnelles faisant intervenir le laplacien. Les résultats de [27] montrent notamment que le laplacien peut être remplacé par un opérateur $L = -\mathrm{div}(A\nabla)$ avec A uniformément elliptique et bornée, pourvu que L vérifie une propriété de régularité parabolique (exprimée au moyen du noyau de e^{-tL}, voir (G_∞)).

Lorsque la régularité parabolique n'est plus satisfaite, l'espace de Hardy associé à L, noté $H^1_L(\mathbb{R}^n)$, est, en général, strictement inclus dans $H^1(\mathbb{R}^n)$. Il reste possible de développer une théorie de $H^1_L(\mathbb{R}^n)$, qui peut être décrit en termes de fonctionnelles quadratiques, de fonctions maximales, et de décomposition moléculaire et atomique ([197]). Plus généralement, on peut construire les espaces $H^p_L(\mathbb{R}^n)$ pour $1 \leq p \leq +\infty$, qui forment une famille d'interpolation complexe et sur lesquels la transformée de Riesz $\nabla L^{-1/2}$ est continue pour certaines valeurs de p ([198]). La théorie analogue développée dans [23] (et présentée dans un cadre abstrait dans [196]) montre que ce qui est requis pour cette construction est l'hypothèse (D) et les estimations de type Davies–Gaffney sur L (voir (2.15)). Une idée essentielle est d'exploiter le lien entre espaces de Hardy et espaces de tentes.

Les espaces H^p ainsi construits peuvent être comparés à L^p pour certaines valeurs de p et peuvent parfois coïncider avec L^p. Dans le cas des espaces de formes différentielles sur une variété riemannienne, on connaît encore assez mal les conditions géométriques qui garantissent l'identification de H^p et de L^p (voir la section 5.3.8). Une motivation pour la compréhension de ces conditions est que les espaces H^p possèdent toujours une décomposition de Hodge (voir le Théorème 5.6) et que l'identification entre H^p et L^p donne alors une décomposition de Hodge pour L^p.

Dans le contexte des graphes munis d'un laplacien L et d'un gradient ∇, on a obtenu ([43]) la version discrète de la plupart des résultats de comparaison entre $\|\nabla f\|_{L^p}$ et $\|L^{1/2} f\|_{L^p}$ connus pour des variétés riemanniennes. On a en particulier prouvé la continuité de la transformée de Riesz $\nabla L^{-1/2}$ sur L^p pour certaines valeurs de p. Le manque de régularité du laplacien sur le graphe oblige à utiliser pour cela des théorèmes sur les opérateurs de Calderón–Zygmund "sans noyau" (voir la section 6.7). Des résultats dans le cas $p = 1$ restent à obtenir, ce qui supposerait de construire dans un cadre discret des espaces de Hardy de formes semblables à ceux de [23].

Bibliographie

1. R. Adams et J. Fournier, *Sobolev Spaces*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 140 (Elsevier/Academic Press, 2003).
2. D. R. Adams et L. I. Hedberg, *Function Spaces and Potential Theory*, Grundlehren Math. Wiss., Vol. 314 (Springer, 1996).
3. V. Adolfsson et D. Jerison, L^p-integrability of the second order derivatives for the Neumann problem in convex domains, *Indiana Univ. Math. J.* **43** (1993) 1123–1138.
4. G. Alexopoulos, An application of homogenization theory to harmonic analysis: Harnack inequalities and Riesz transforms on Lie groups with polynomial volume growth, *Can. J. Math.* **44** (1992) 691–727.
5. G. Alexopoulos, Random walks on discrete groups of polynomial volume growth, *Ann. Probab.* **30** (2002) 723–801.
6. J. M. Angeletti, S. Mazet et P. Tchamitchian, Analysis of second order elliptic operators without boundary conditions and with VMO or Hölderian coefficients, in *Multiscale Wavelet Methods for PDE's*, eds. W. Dahmen, A. J. Kurdila et P. Oswald (Academic Press, 1997), pp. 495–539.
7. D. Aronson, Bounds for fundamental solutions of a parabolic equation, *Bull. Amer. Math. Soc.* **73** (1967) 890–896.
8. N. Aronszajn et K. T. Smith, Theory of Bessel potentials I, *Ann. Inst. Fourier* **11** (1961) 385–475.
9. G. Auchmuty et J. Alexander, L^2 well-posedness of planar div-curl systems, *Arch. Rational Mech. Anal.* **160** (2001) 91–134.
10. G. Auchmuty et J. Alexander, L^2-well-posedness of $3d$ div-curl boundary value problems, *Quart. Appl. Math.* **63** (2005) 479–508.

11. P. Auscher, Extrapolation pour les mesures de Carleson et conjecture de Kato, in *Séminaire*: *Equations aux Dérivées Partielles, 2000-2001*, Exp. No. I (Sémin. Equ. Dériv. Partielles, Ecole Polytech., Palaiseau, 2001).
12. P. Auscher, On L^p estimates for square roots of second order elliptic operators on $\mathbb{R}^n$, *Publ. Mat.* **48** (2004) 159–186.
13. P. Auscher, *On Necessary and Sufficient Conditions for L^p Estimates of Riesz Transforms Associated to Elliptic Operators on $\mathbb{R}^n$ and Related Estimates*, Mem. Amer. Math. Soc., Vol. 186 (Amer. Math. Soc., 2007).
14. P. Auscher et T. Coulhon, Gaussian lower bounds for random walks from elliptic regularity, *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **35** (1999) 605–630.
15. P. Auscher et T. Coulhon, Riesz transforms on manifolds and Poincaré inequalities, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.* (5) **4** (2005) 531–555.
16. P. Auscher, T. Coulhon, X. T. Duong et S. Hofmann, Riesz transforms on manifolds and heat kernel regularity, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **37** (2004) 911–957.
17. P. Auscher, T. Coulhon et P. Tchamitchian, Absence de principe du maximum pour certaines équations paraboliques complexes, *Coll. Math.* **171** (1996) 87–95.
18. P. Auscher, X. T. Duong et A. McIntosh, Boundedness of Banach space valued singular integral operators and applications to Hardy spaces, unpublished manuscript.
19. P. Auscher, S. Hofmann, M. Lacey, J. Lewis, A. McIntosh et P. Tchamitchian, The solution of Kato's conjectures, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I Math.* **332** (2001) 601–606.
20. P. Auscher, S. Hofmann, M. Lacey, A. McIntosh et P. Tchamitchian, The solution of the Kato square root problem for second order elliptic operators on $\mathbb{R}^n$, *Ann. Math.* **156** (2002) 633–654.
21. P. Auscher et J.-M. Martell, Weighted norm inequalities, off-diagonal estimates and elliptic operators. Part I: General operator theory and weights, *Adv. Math.* **212** (2007) 225–276.
22. P. Auscher et J.-M. Martell, Weighted norm inequalities, off-diagonal estimates and elliptic operators: Part IV: Riesz transforms on manifolds and weights, *Math. Z.* **260** (2008) 527–539.
23. P. Auscher, A. McIntosh et E. Russ, Hardy spaces of differential forms on Riemannian manifolds, *J. Geom. Anal.* **18** (2008) 192–248.
24. P. Auscher, S. Monniaux et P Portal, The maximal regularity operator on tent spaces, arXiv:1011.1748.
25. P. Auscher et M. Qafsaoui, Observations on $W^{1,p}$ estimates for divergence elliptic equations with VMO coefficients, *Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B*, *Artic. Ric. Mat.* **8** (2002) 487–509.
26. P. Auscher et E. Russ, Hardy spaces and divergence operators on strongly Lipschitz domains of $\mathbb{R}^n$, arXiv:math/0201301v1.
27. P. Auscher et E. Russ, Hardy spaces and divergence operators on strongly Lipschitz domains of $\mathbb{R}^n$, *J. Funct. Anal.* **201** (2003) 148–184.
28. P. Auscher, E. Russ et P. Tchamitchian, Une note sur les lemmes div-curl, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér I Math.* **337** (2003) 511–516.
29. P. Auscher, E. Russ et P. Tchamitchian, Hardy Sobolev spaces on strongly Lipschitz domains of $\mathbb{R}^n$, *J. Funct. Anal.* **218** (2005) 54–109.
30. P. Auscher et P. Tchamitchian, Calcul fonctionnel précisé pour des opérateurs elliptiques complexes en dimension un (et applications à certaines équations elliptiques complexes en dimension deux), *Ann. Inst. Fourier* **45** (1995) 721–778.

31. P. Auscher et P. Tchamitchian, *Square Root Problem for Divergence Operators and Related Topics*, Astérisque, Vol. 249 (Soc. Math. France, 1998).
32. P. Auscher et P. Tchamitchian, Gaussian estimates for second order elliptic divergence operators on Lipschitz and C^1 domains, in *Evolution Equations and their Applications in Physical and Life Sciences*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Vol. 215, eds. G. Lumer et L. Weis (Marcel Dekker, 2001), pp. 15–32.
33. P. Auscher et P. Tchamitchian, Square roots of elliptic second order divergence operators on strongly Lipschitz domains: L^p theory, *Math. Ann.* **320** (2001) 577–623.
34. P. Auscher et P. Tchamitchian, Square roots of second order elliptic divergence operators on strongly Lipschitz domains: L^2 theory, *J. Anal. Math.* **90** (2003) 1–12.
35. A. Axelsson, S. Keith et A. McIntosh, Quadratic estimates and functional calculi of perturbed Dirac operators, *Invent. Math.* **163** (2006) 455–497.
36. A. Axelsson, S. Keith et A. McIntosh, The Kato square root problem for mixed boundary value problems, *J. London Math. Soc.* (2) **74** (2006) 113–130.
37. N. Badr et B. Ben Ali, L^p boundedness of Riesz transform related to Schrödinger operators on a manifold, *Ann. Scuola. Norm. Sup. di Pisa* **8** (2009) 725–765.
38. N. Badr et F. Bernicot, Abstract Hardy–Sobolev spaces and interpolation, *J. Funct. Anal.* **259** (2010) 1169–1208.
39. N. Badr et F. Bernicot, A new Calderón–Zygmund decompositions for Sobolev spaces, *Coll. Math.* **121** (2010) 153–177.
40. N. Badr et G. Dafni, An atomic decomposition of the Hajlasz–Sobolev space M_1^1 on manifolds, *J. Funct. Anal.* **259** (2010) 1380–1420.
41. N. Badr et G. Dafni, Maximal characterization of Hardy–Sobolev spaces on manifolds, to appear in *Proc. Int. Workshop at Boca Raton*.
42. N. Badr et J.-M. Martell, Weighted norm inequalities on graphs, preprint.
43. N. Badr et E. Russ, Interpolation of Sobolev spaces, Littlewood–Paley inequalities and Riesz transforms on graphs, *Publ. Mat.* **53** (2009) 273–328.
44. D. Bakry, Transformations de Riesz pour les semi-groupes symétriques, Seconde partie: étude sous la condition $\Gamma_2 \geq 0$, in *Séminaire de Probabilités XIX*, Lect. Notes, Vol. 1123 (Springer, 1985), pp. 145–174.
45. D. Bakry, Etude des transformations de Riesz dans les variétés riemanniennes à courbure de Ricci minorée, in *Séminaire de Probabilités, XXI*, Lect. Notes in Math., Vol. 1247 (Springer, 1987), pp. 137–172.
46. D. Bakry, The Riesz transforms associated with second order differential operators, in *Seminar on Stochastic Processes*, Vol. 88 (Birkhäuser, 1989).
47. D. Bakry, F. Barthe, P. Cattiaux et A. Guillin, A simple proof of the Poincaré inequality for a large class of probability measures including the log-concave case, *Electron. Commun. Probab.* **13** (2008) 60–66.
48. J. M. Ball, Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity, *Arch. Rational Mech. Anal.* **63** (1976) 337–403.
49. R. Banuelos, Martingale transforms and related singular integrals, *Trans. Amer. Math. Soc.* **293** (1986) 547–564.
50. L. Baratchart, J. Leblond, S. Rigat et E. Russ, Hardy spaces of the conjugate Beltrami equation, *J. Funct. Anal.* **259** (2010) 384–427.
51. M. T. Barlow et R. F. Bass, Brownian motion and harmonic analysis on Sierpinski carpets, *Canad. J. Math.* **51** (1999) 673–744.
52. M. T. Barlow et E. A. Perkins, Brownian motion on the Sierpinski gasket, *Probab. Theor. Relat. Fields* **79** (1988) 543–623.

53. O. Ben-Bassat, R. Strichartz et A. Teplyaev, What is not in the domain of the Laplacian on Sierpinski gasket type fractals, *J. Funct. Anal.* **166** (1999) 197–217.
54. F. Bernicot, Use of abstract Hardy spaces, real interpolation and applications to bilinear operators, *Math. Z.* **265** (2010) 365–400.
55. F. Bernicot et J. Zhao, New abstract Hardy spaces, *J. Funct. Anal.* **255** (2008) 1761–1796.
56. J. J. Betancor, A. Chicco Ruiz, J. C. Farina et L. Rodriguez-Mesa, Odd $BMO(\mathbb{R})$ functions and Carleson measures in the Bessel setting, *Int. Eq. Op. Theory* **66** (2010) 463–494.
57. R. Bishop et R. Crittenden, *Geometry of Manifolds* (Academic Press, 1964).
58. G. Bohnke, Algèbres de Sobolev sur certains groupes nilpotents, *J. Funct. Anal.* **63** (1985) 322–343.
59. A. Bonami, J. Feuto et S. Grellier, Endpoint for the div-curl lemma in Hardy spaces, *Publ. Mat.* **54** (2010) 341–358.
60. A. Bonami, T. Iwaniec, P. Jones et M. Zinsmeister, On the product of functions in BMO and H^1, *Ann. Inst. Fourier* **57** (2007) 1405–1439.
61. J.-M. Bouclet, Low frequency estimates for long range perturbations in divergence form, arXiv:0806.3377.
62. G. Bourdaud, Réalisation des espaces de Besov homogènes, *Ark. Mat.* **26** (1988) 41–54.
63. G. Bourdaud, Remarques sur certains sous-espaces de $BMO(\mathbb{R}^n)$ et de $bmo(\mathbb{R}^n)$, *Ann. Inst. Fourier* **52** (2002) 1187–1218.
64. J. Bourgain, Vector-valued singular integrals and the $H^1 - BMO$ duality, in *Probability Theory and Harmonic Analysis*, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., Vol. 98 (Dekker, 1986) (Cleveland, Ohio, 1983), pp. 1–19.
65. J. Bourgain et H. Brezis, New estimates for the Laplacian, the div-curl, and related Hodge systems, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **338** (2004) 539–543.
66. S. C. Brenner et L. R. Scott, *The Mathematical Theory of Finite Elements Methods* (Springer, 1994).
67. M. Briane et J. Casado-Diaz, Two-Dimensional Div-Curl Results: Application to the Lack of Nonlocal Effects in Homogenization, *Comm. Partial Diff. Eqn.* **32** (2007) 935–969.
68. M. Briane, J. Casado-Diaz et F. Murat, The div-curl lemma "trente ans après", an extension and an application to the G-convergence of unbounded monotone operators, *J. Math. Pures Appl.* **91** (2009) 476–494.
69. A. P. Calderón, Lebesgue spaces of differentiable functions and distributions, *Proc. Sympos. Pure Math.* **4** (1961) 33–49.
70. G. Carbonaro, G. Mauceri et S. Meda, H^1 and BMO for certain nondoubling metric measure spaces, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa* **8** (2009) 543–582.
71. A. Carbonaro, A. McIntosh et A. Morris, Local Hardy spaces of differential forms on Riemannian manifolds, arXiv:1004.0018.
72. L. Carleson, An explicit unconditional basis in H^1, *Bull. Sci. Math.* **104** (1980) 405–416.
73. G. Carron, Formes harmoniques L^2 sur les variétés non-compactes, *Rend. Mat. Appl.* **7** (2001) 87–119.
74. G. Carron, Riesz transforms on connected sums, *Ann. Inst. Fourier* **57** (2007) 2329–2344.
75. G. Carron, T. Coulhon et A. Hassell, Riesz transform and L^p cohomology for manifolds with Euclidean ends, *Duke Math. J.* **133** (2006) 59–93.

76. D. Chafaï, Entropies, convexity, and functional inequalities: on Φ-entropies and Φ-Sobolev inequalities, *J. Math. Kyoto Univ.* **44** (2004) 325–363.
77. D.-C. Chang, The dual of Hardy spaces on a bounded domain in $\mathbb{R}^n$, *Forum Math.* **6** (1994) 65–81.
78. D.-C. Chang, G. Dafni et C. Sadosky, A div-curl lemma in BMO on a domain, in *Harmonic Analysis, Signal Processing and Complexity*, Progress in Math., Vol. 238 (Birkhäuser, 2005), pp. 55–65.
79. D.-C. Chang, G. Dafni et E. M. Stein, Hardy spaces, BMO and boundary value problems for the Laplacian on a smooth domain in $\mathbb{R}^N$, *Trans. Amer. Math. Soc.* **351** (1999) 1605–1661.
80. D.-C. Chang, S. G. Krantz et E. M. Stein, H^p theory on a smooth domain in $\mathbb{R}^N$ and elliptic boundary value problems, *J. Funct. Anal.* **114** (1993) 286–347.
81. J. Cheeger, Differentiability of Lipschitz functions on metric measure spaces, *Geom. Funct. Anal.* **9** (1999) 428–517.
82. J.-C. Chen, Heat kernels on positively curved manifolds and applications, Ph.D. Thesis (Hangzhou University, 1987).
83. Z. Q. Chen et T. Kumagai, Heat kernel estimates for stable-like processes on d-sets, *Stoch. Process. Appl.* **108** (2003) 27–62.
84. Y. K. Cho et J. Kim, Atomic decomposition on Hardy–Sobolev spaces, *Studia Math.* **177** (2006) 25–42.
85. M. Christ, A $T(b)$ theorem with remarks on analytic capacity and the Cauchy integral, *Colloq. Math.* **60/61** (1990) 601–628.
86. M. Christ et D. Müller, On l^p spectral multipliers for a solvable Lie group, *Geom. Funct. Anal.* **6** (1996) 860–876.
87. P. G. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems* (North-Holland, 1978).
88. R. Coifman, A real-variable characterization of H^p, *Studia Math.* **51** (1974) 269–274.
89. R. Coifman et L. Grafakos, Hardy space estimates for multilinear operators I, *Rev. Mat. Iber.* **8** (1992) 45–67.
90. R. Coifman, P.-L. Lions, Y. Meyer et S. Semmes, Compensated compactness and Hardy spaces, *J. Math. Pures Appl.* **9** (1993) 247–286.
91. R. R. Coifman et Y. Meyer, *Au-delà des Opérateurs Pseudo-Différentiels*, Astérisque, Vol. 57 (Soc. Math. France, 1978).
92. R. R. Coifman et Y. Meyer, Nonlinear harmonic analysis, operator theory and PDE, in *Beijing Lectures in Harmonic Analysis*, Ann. of Math. Stud., Vol. 112 (Princeton Univ. Press, 1986), pp. 3–45.
93. R. Coifman, Y. Meyer et E. M. Stein, Some new function spaces and their applications to harmonic analysis, *J. Funct. Anal.* **62** (1985) 304–335.
94. R. Coifman et G. Weiss, *Analyse Harmonique Non Commutative sur Certains Espaces Homogènes*, Lect. Notes Math., Vol. 242 (Springer-Verlag, 1971).
95. R. Coifman et G. Weiss, *Transference Methods in Analysis* (Amer. Math. Soc., 1976).
96. R. Coifman et G. Weiss, Extensions of Hardy spaces and their use in analysis, *Bull. Amer. Math. Soc.* **83** (1977) 569–645.
97. T. Coulhon, Random walks and geometry on infinite graphs, in *Lectures Notes on Analysis in Metric Spaces* (Appunti Corsi Tenuti Docenti Sc., Scuola Norm. Sup., Pisa, 2000) (Trento, 1999), pp. 5–36.
98. T. Coulhon et X. T. Duong, Riesz transforms for $1 \leq p \leq 2$, *Trans. Amer. Math. Soc.* **351** (1999) 1151–1169.
99. T. Coulhon et X. T. Duong, Riesz transform and related inequalities on noncompact Riemannian manifolds, *Comm. Pure Appl. Math.* **56** (2003) 1728–1751.

100. T. Coulhon, X. T. Duong et X. Li, Littlewood–Paley–Stein functions on complete Riemannian manifolds for $1 \leq p \leq 2$, *Studia Math.* **154** (2003) 37–57.
101. T. Coulhon et A. Grigor'yan, Random walks on graphs with regular volume growth, *Geom. Funct. Anal.* **8** (1998) 656–701.
102. T. Coulhon et H. Q. Li, *Arch. Math.* **83** (2004) 229–242.
103. T. Coulhon, E. Russ et V. Tardivel-Nachef, Sobolev algebras on Lie groups and Riemannian manifolds, *Amer. J. Math.* **123** (2001) 283–342.
104. T. Coulhon et L. Saloff-Coste, Puissances d'un opérateur régularisant, *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **26** (1990) 419–436.
105. T. Coulhon et L. Saloff-Coste, Semi-groupes d'opérateurs et espaces fonctionnels sur les groupes de Lie, *J. Approx. Th.* **65** (1991) 176–199.
106. T. Coulhon et L. Saloff-Coste, Variétés Riemanniennes isométriques à l'infini, *Rev. Mat. Iber.* **11** (1995) 687–726.
107. T. Coulhon et Q. S. Zhang, Large time behaviour of heat kernels on forms, *J. Differential Geom.* **77** (2007) 353–384.
108. D. Cruz-Uribe et C. Rios, The solution of the Kato problem for degenerate elliptic operators with Gaussian bounds, arXiv:0907.2947.
109. M. Cwikel et Y. Sagher, Relations between real and complex interpolation spaces, *Indiana Univ. Math. J.* **36** (1987) 905–912.
110. G. Dafni, Nonhomogeneous div-curl lemmas and local Hardy spaces, *Adv. Diff. Eqns.* **10** (2005) 505–526.
111. K. Dalrymple, R. Strichartz et J. P. Vinson, Fractal differential equations on the Sierpinski gasket, *J. Fourier Anal. Appl.* **5** (1999) 203–284.
112. G. David et S. Semmes, *Analysis of and on Uniformly Rectifiable Sets*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 38 (Amer. Math. Soc., 1993).
113. E. B. Davies, Heat kernel bounds, conservation of probability and the Feller property, *J. Anal. Math.* **58** (1992) 99–119.
114. E. B. Davies, Uniformly elliptic operators with measurable coefficients, *J. Funct. Anal.* **132** (1995) 141–169.
115. T. Delmotte, Inégalité de Harnack elliptique sur les graphes, *Coll. Math.* **72** (1997) 19–37.
116. T. Delmotte, Parabolic Harnack inequality, *Rev. Mat. Iber.* **15** (1999) 181–232.
117. D. Deng, X. T. Duong, A. Sikora et L. Yan, Comparison of the classical BMO with the BMO spaces associated with operators and applications, *Rev. Iber. Mat.* **24** (2008) 267–296.
118. D. Deng, L. Song, C. Tan et L. Yan, Duality of Hardy and BMO spaces associated with operators with heat kernel bounds on product domains, *J. Geom. Anal.* **17** (2007) 455–483.
119. G. De Rham, *Variétés Différentiables, Formes, Courants, Formes Harmoniques* (Hermann, 1973).
120. L. Desvillettes, C. Mouhot et C. Villani, Celebrating Cercignani's conjecture for the Boltzmann equation, arXiv:1009.4006.
121. B. Devyver, A Gaussian estimate for the heat Kernel on differential forms and application to the Riesz transform, arXiv:1011.5036.
122. J.-D. Deuschel et D. Stroock, Hypercontractivity and spectral gap of symmetric diffusions with applications to the stochastic Ising models, *J. Funct. Anal.* **92** (1990) 30–48.
123. S. Dobyinsky, Lemme div-curl et renormalisation du produit, *J. Math. Pures Appl.* **9** (1993) 239–245.

124. P. Dorronsoro, A characterization of potential spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* **95** (1985) 21–31.
125. N. Dungey, Heat kernel estimates and Riesz transforms on some Riemannian covering manifolds, *Math. Z.* **247** (2004) 765–794.
126. N. Dungey, Riesz transforms on a discrete group of polynomial growth, *Bull. London Math. Soc.* **36** (2004) 833–840.
127. N. Dungey, A Littewood–Paley–Stein estimate on graphs and groups, *Studia Math.* **189** (2008) 113–129.
128. J. Duoandikoetxea et J. R. Rubio da Francia, Estimations indépendantes de la dimension pour les transformées de Riesz, *C. R. Acad. Sci. Paris* **300** (1985) 193–196.
129. X. T. Duong, S. Hofmann, D. Mitrea, M. Mitrea et L. Yan, Hardy spaces and regularity for the inhomogeneous Dirichlet and Neumann problems, preprint.
130. X. T. Duong et A. McIntosh, The L^p boundedness of Riesz transforms associated with divergence form operators, in *Workshop on Analysis and Applications*, Brisbane, 1997, Proc. of the CMA, Vol. 37 (Australian National Univ., 1999), pp. 15–25.
131. X. T. Duong et A. McIntosh, Singular integral operators with non-smooth kernels on irregular domains, *Rev. Mat. Iber.* **15** (1999) 233–265.
132. X. T. Duong et L. X. Yan, Duality of Hardy and BMO spaces associated with operators with heat kernel bounds, *J. Amer. Math. Soc.* **18** (2005) 943–973.
133. X. T. Duong et L. X. Yan, New function spaces of BMO type, the John–Nirenberg inequality, interpolation, and applications, *Comm. Pure Appl. Math.* **58** (2005) 1375–1420.
134. R. Durán, Error estimates for anisotropic finite elements and applications, in *Proc. Int. Congress of Mathematicians III* (Eur. Maty. Soc. Zürich, 2006), pp. 1181–1200.
135. R. G. Durán, M. A. Muschietti, E. Russ et P. Tchamitchian, Divergence operator and Poincaré inequalities on arbitrary domains of $\mathbb{R}^n$, *Complex. Var. Elliptic Eqs.* **55** (2010) 795–816.
136. P. L. Duren, *Theory of H^p Spaces*, Pure and Applied Math., Vol. 38 (Academic Press, 1970).
137. J. Dziubánski, Atomic decomposition of H^p spaces associated with some Schrödinger operators, *Indiana. Univ. Math. J.* **47** (1998) 75–98.
138. J. Dziubánski, Spectral multipliers for Hardy spaces associated with Schrödinger operators with polynomial potentials, *Bull. Lon. Math. Soc.* **32** (2000) 571–581.
139. J. Dziubánski, G. Garrigós, T. Martinez, J. L. Torrea et J. Zienkiewicz, BMO spaces related to Schrödinger operator with potential satisfying reverse Hölder inequality, *Math. Z.* **249** (2005) 329–356.
140. J. Dziubánski et J. Zienkiewicz, Hardy spaces associated with some Schrödinger operators, *Studia. Math.* **126** (1997) 149–160.
141. J. Dziubánski et J. Zienkiewicz, Hardy spaces H^1 for Schrödinger operators with compactly supported potentials, *Ann. Math.* **184** (2005) 315–326.
142. A. F. M. ter Elst, D. Robinson et A. Sikora, Heat kernels and Riesz transforms on nilpotent Lie groups, *Coll. Math.* **74** (1997) 191–218.
143. A. F. M. ter Elst, D. Robinson et Y. Zhu, Hardy spaces on Lie groups of polynomial growth, *Sci. China Math.* **53** (2010) 23–40.
144. L. C. Evans, Partial regularity for stationary harmonic maps into spheres, *Arch. Rational Mech. Anal.* **116** (1991) 101–113.
145. L. C. Evans et S. Müller, Hardy spaces and the two-dimensional Euler equations with nonnegative vorticity, *J. Amer. Math. Soc.* **7** (1994) 199–219.

146. C. Fefferman, Inequalities for strongly singular convolution operators, *Acta Math.* **124** (1970) 9–36.
147. C. Fefferman, Characterizations of bounded mean oscillation, *Bull. Amer. Math. Soc.* **77** (1971) 587–588.
148. C. Fefferman et E. M. Stein, On some maximal inequalities, *Amer. J. Math.* **93** (1971) 107–115.
149. C. Fefferman et E. M. Stein, H^p spaces of several variables, *Acta Math.* **129** (1972) 137–195.
150. P. J. Fitzsimmons, B. M. Hambly et T. Kumagai, Transition density estimates for Brownian motion on affine nested fractals, *Commun. Math. Phys.* **165** (1994) 595–620.
151. G. B. Folland, Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups, *Ark. Mat.* **13** (1975) 161–207.
152. G. B. Folland et E. M. Stein, *Hardy Spaces on Homogeneous Groups* (Princeton Univ. Press and Univ. of Tokyo Press, 1982).
153. M. Frazier et B. Jawerth, A discrete transform and decompositions of distribution spaces, *J. Funct. Anal.* **93** (1990) 34–170.
154. J. Frehse, An irregular complex valued solution to a scalar uniformly elliptic equation, *Calc. Var. Partial Differential Equations* **33** (2008) 263–266.
155. K. Fukuya, Collapsing of Riemannian manifolds and eigenvalues of Laplace operator, *Invent. Math.* **87** (1987) 517–547.
156. M. Fukushima et T. Shima, On a spectral analysis for the Sierpinski gasket, *Pot. Anal.* **1** (1992) 1–35.
157. M. P. Gaffney, The conservation property of the heat equation on Riemannian manifolds, *Comm. Pure Appl. Math.* **12** (1959) 1–11.
158. I. Gallagher et Y. Sire, Besov algebras on Lie groups of polynomial volume growth and related results, arXiv:1010.0154.
159. J. Garcia-Cuerva et J. L. Rubio da Francia, *Weighted Norm Inequalities and Related Topics*, North Holland Mathematics Studies (Elsevier, 1985).
160. J. B. Garnett, *Bounded Analytic Functions*, Pure and Applied Math., Vol. 96 (Academic Press, 1981).
161. G. Gaudry, T. Qian et P. Sjögren, Singular integrals associated to the Laplacian on the affine group $ax + b$, *Ark. Mat.* **30** (1992) 259–281.
162. G. Gaudry et P. Sjögren, Singular integrals on Iwasawa NA groups of rank 1, *J. Reine Angew. Math.* **479** (1996) 39–66.
163. G. Gaudry et P. Sjögren, Haar-like expansions and and boundedness of a Riesz operator on a solvable Lie group, *Math. Z.* **232** (1999) 241–256.
164. F. W. Gehring, The L^p integrability of the partial derivative of a quasi-conformal mapping, *Acta Math.* **130** (1973) 265–277.
165. I. Gentil et C. Imbert, The Lévy–Fokker–Planck equation: Φ-entropies and convergence to equilibrium, *Asympt. Anal.* **59** (2008) 125–138.
166. G. Geymonat, S. Müller et N. Triantafyllidis, Homogenization of nonlinear elastic materials, microscopic bifurcation and microscopic loss of rank-one convexity, *Arch. Rational Mech. Anal.* **122** (1993) 231–290.
167. J. E. Gilbert, J. A. Hogan et J. D. Lakey, Atomic decomposition of divergence-free Hardy spaces, *Special Vol., Proc. 5th IWAA, Math. Moravica* (1997), pp. 33–52.
168. J. Gilbert et J. Lakey, On a characterization of the local Hardy space by Gabor frames, in *Wavelets, Frames and Operator Theory*, Contemp. Math., Vol. 345 (Amer. Math. Soc., 2004), pp. 153–161.

169. S. Giulini et P. Sjögren, A note on maximal functions on a solvable Lie group, *Arch. Mat.* (*Basel*) **55** (1990) 156–160.
170. D. Goldberg, A local version of real Hardy spaces, *Duke Math. J.* **46** (1979) 27–42.
171. V. Gol'dshtein et M. Troyanov, Axiomatic theory of Sobolev spaces, *Expo. Math.* **19** (2001) 289–336.
172. R. Gong et J. Li, Hardy–Sobolev spaces on product domains and applications, *J. Math. Anal. Appl.* **377** (2011) 296–302.
173. L. Grafakos, Hardy space estimates for multilinear operators II, *Rev. Mat. Iber.* **8** (1992) 69–92.
174. R. I. Grigorchuk, On Milnor's problem on group growth, *Sov. Math. Dokl.* **28** (1983) 23–26.
175. R. I. Grigorchuk, The growth degrees of finitely generated groups and the theory of invariant means, *Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat.* **48** (1984) 939–985.
176. R. I. Grigorchuk, Degrees of growth of -groups and torsion free groups, *Mat. Sb.* (*N.S.*) **126** (1985) 194–214.
177. A. Grigor'yan, The heat equation on a non-compact Riemannian manifold, *Math. USSR Sb.* **72** (1992) 47–77.
178. A. Grigor'yan, Integral maximum principle and its applications, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* **124A** (1994) 353–362.
179. A. Grigor'yan, Gaussian upper bounds for the heat kernel on arbitrary manifolds, *J. Diff. Geom.* **45** (1997) 33–52.
180. C. Guillarmou et A. Hassell, Resolvent at low energy and Riesz transform for Schrödinger operators on asymptotically conic manifolds. I., *Math. Ann.* **341** (2008) 859–896.
181. C. Guillarmou et A. Hassell, Resolvent at low energy and Riesz transform for Schrödinger operators on asymptotically conic manifolds. II., *Ann. Inst. Fourier* **59** (2009) 1553–1610.
182. Y. Guivarc'h, Croissance polynomiale et période des fonctions harmoniques, *Bull. Soc. Math. France* **101** (1973) 333–379.
183. A. Gulisashvili et M. A. Kon, Exact smoothing properties of Schrödinger semigroups, *Amer. J. Math.* **118** (1996) 1215–1248.
184. R. Gundy et N. Varopoulos, Les transformations de Riesz et les intégrales stochastiques, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **289** (1979) 13–16.
185. P. Hajlasz et J. Kinnunen, Hölder quasicontinuity of Sobolev functions on metric spaces, *Rev. Mat. Iber.* **14** (1998) 601–622.
186. P. Hajlasz et P. Koskela, *Sobolev Met Poincaré*, Mem. Amer. Math. Soc., Vol. 145 (Amer. Math. Soc., 2000).
187. B. M. Hambly et T. Kumagai, Transition density estimates for diffusion processes on post critically finite self-similar fractals, *Proc. Lond. Math. Soc.* (3) **78** (1999) 431–458.
188. Y. S. Han, M. Paluszynski et G. Weiss, A new atomic decomposition for the Triebel-Lizorkin spaces, in *Harmonic Analysis and Operator Theory*: *A Conference in Honor of Mischa Cotlar*, January 3–8, 1994, Caracas, Venezuela (Amer. Math. Soc., 1995), pp. 235–249.
189. A. Hassell et A. Sikora, Riesz transforms in one dimension, *Indiana Univ. Math. J.* **58** (2009) 823–852.
190. W. Hebisch, Boundedness of L^1 spectral multipliers for an exponential solvable Lie group, *Coll. Math.* **73** (1997) 155–164.
191. W. Hebisch et L. Saloff-Coste, Gaussian estimates for Markov chains and random walks on groups, *Ann. Probab.* **21** (1993) 673–709.

192. W. Hebisch et T. Steger, Multipliers and singular integrals on exponential growth groups, *Math. Z.* **245** (2003) 37–61.
193. F. Hélein, Régularité des applications faiblement harmoniques entre une surface et une variété riemannienne, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **312** (1991) 591–596.
194. F. Hélein, Regularity of weakly harmonic maps from a surface into a manifold with symmetries, *Manuscripta Math.* **70** (1991) 203–218.
195. I. I. Hirschmann, Fractional integration, *Amer. J. Math.* **75** (1953) 531–546.
196. S. Hofmann, G. Lu, D. Mitrea, M. Mitrea et L. Yan, Hardy spaces associated to non-negative self-adjoint operators satisfying Davies–Gaffney estimates, à paraître dans *Mem. A.M.S.*
197. S. Hofmann et S. Mayboroda, *Math. Ann.* **344** (2009) 37–116.
198. S. Hofmann, S. Mayboroda et A. McIntosh, Second order elliptic operators with complex bounded measurable coefficients in L^p, Sobolev and Hardy spaces, à paraître dans *Ann. Sci. E.N.S.*
199. J. Hogan, C. Li, A. McIntosh et K. Zhang, Global higher integrability of Jacobians on bounded domains, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **17** (2000) 193–217.
200. G. Hu et D. Yang, h^1, *bmo*, *blo* and Littlewood–Paley g-functions with non-doubling measures, *Rev. Mat. Iber.* **25** (2009) 595–667.
201. J. Hu et M. Zähle, Potential spaces on fractals, *Studia Math.* **170** (2005) 259–281.
202. J. Huang, Hardy spaces associated to the Schrödinger operator on strongly Lipschitz domains of $\mathbb{R}^n$, *Math. Z.* **266** (2010) 141–168.
203. T. Hytönen, Littlewood–Paley–Stein theory for semigroups in UMD spaces, *Rev. Matem. Iber.* **23** (2007) 973–1009.
204. T. Hytönen, J. Van Neerven et P. Portal, Conical square function estimates in UMD Banach spaces and applications to H^∞ functional calculi, *J. Anal. Math.* **106** (2008) 317–351.
205. A. D. Ionescu, Fourier integral operators on noncompact symmetric spaces of real rank one, *J. Funct. Anal.* **174** (2000) 274–300.
206. S. Ishiwata, Asymptotic behaviour of a transition probability for a random walk on a nilpotent covering graph, *Contemp. Math.* **347** (2004) 57–68.
207. T. Iwaniec et C. Sbordone, Riesz transforms and elliptic PDEs with VMO coefficients, *J. Anal. Math.* **74** (1998) 183–212.
208. T. Iwaniec, C. Scott et B. Stroffolini, Nonlinear Hodge theory on manifolds with boundary, *Ann. Mat. Pure Appl.* IV, **CLXXVII** (1999) 37–115.
209. D. Jerison et C. Kenig, Boundary value problems on Lipschitz domains, in *Studies in Partial Differential Equations*, MAA Stud. Math., Vol. 23 (Amer. Math. Soc., 1982), pp. 1–68.
210. D. Jerison et C. Kenig, The functional calculus for the Laplacian on Lipschitz domains, in *Journées Equations aux Dérivées Partielles*, Exp. 4 (Ecole Polytech., Palaiseau, 1989), pp. 1–10.
211. L. Ji, P. Kunstmann et A. Weber, Riesz transform on locally symmetric spaces and riemannian manifolds with a spectral gap, *Bull. Sci. Math.* **134** (2010) 37–43.
212. R. Jiang et D. Yang, Generalized vanishing mean oscillation spaces associated with divergence form elliptic operators, *Int. Eq. Op. Theory* **67** (2010) 123–149.
213. R. Jiang et D. Yang, Orlicz–Hardy spaces associated with operators satisfying Davies–Gaffney estimates, arXiv:0903.4494.
214. F. John et L. Nirenberg, On functions of bounded mean oscillation, *Comm. Pure Appl. Math.* **14** (1961) 415–426.
215. P. Jones, Extension theorems for BMO, *Indiana Univ. Math. J.* **29** (1980) 41–66.

216. A. Jonsson, P. Sjögren et H. Wallin, Hardy and Lipschitz subspaces on subsets of $\mathbb{R}^n$, *Studia Math.* **80** (1984) 141–166.
217. A. Jonsson et H. Wallin, Function spaces on subsets of $\mathbb{R}^n$ (Harwood Academic, 1984).
218. T. Kato, Integration of the equation of evolution in a Banach space, *J. Math. Soc. Jpn.* **5** (1953) 208–234.
219. T. Kato et G. Ponce, Commutator estimates and the Euler and Navier–Stokes equations, *Comm. Pure Appl. Math.* **41** (1988) 891–907.
220. S. Keith et X. Zhong, The Poincaré inequality is an open ended condition, *Ann. Math.* (2) **167** (2008) 575–599.
221. C. Kenig et J. Pipher, The Neumann problem for elliptic equations with non-smooth coefficients, *Invent. Mat.* **113** (1993) 447–509.
222. J. Kigami et M. L. Lapidus, Weyl's problem for the spectral distribution of Laplacians on pcf self-similar fractals, *Commun. Math. Phys.* **158** (1993) 93–125.
223. J. Kinnunen et H. Tuominen, Pointwise behaviour of $M^{1,1}$ Sobolev functions, *Math. Z.* **257** (2007) 613–630.
224. H. Komatsu, Fractional powers of operators, *Pacific J. Math.* **19** (1966) 285–346.
225. H. Komatsu, Fractional powers of operators, VI: Interpolation of nonnegative operators and imbedding theorems, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* **19** (1972) 1–62.
226. P. Koskela et E. Saksman, Pointwise characterizations of Hardy–Sobolev functions, *Math. Res. Lett.* **15** (2008) 727–744.
227. P. Koskela, D. Yang et Y. Zhou, A characterization of Hajlasz–Sobolev and Triebel Lizorkin spaces via grand Littlewood–Paley functions, *J. Funct. Anal.* **258** (2010) 2637–2661.
228. T. Kumagai, Function spaces and stochastic processes on fractals, in *Fractal Geometry and Stochastics III*, eds. C. Bandt, U. Mosco et M. Zähle (Birkhäuser, 2004), pp. 221–234.
229. T. Kumagai et K.-T. Sturm, Construction of diffusion processes on fractals, d-sets, and general metric measure spaces, *J. Math. Kyoto Univ.* **45** (2005) 307–327.
230. S. Kusuoka, Dirichlet forms on fractals and products of random matrices, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **25** (1989) 659–680.
231. R. H. Latter, A characterization of $H^p(\mathbb{R}^n)$ in terms of atoms, *Studia Math.* **62** (1978) 93–101.
232. M. Ledoux, *The Concentration of Measure Phenomenon* (Amer. Math. Soc., 2001).
233. H. Q. Li, La transformation de Riesz sur les variétés coniques, *J. Funct. Anal.* **168** (1999) 145–238.
234. P. Li et S. T. Yau, *Acta Math.* **156** (1986) 153–201.
235. P. Li et S. T. Yau, On the Schrödinger equation and the eigenvalue problem, *Commun. Math. Phys.* **88** (1983) 309–318.
236. J. L. Lions et E. Magenes, Problemi ai limiti non omogenei (III), *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **15** (1961) 41–103.
237. J. L. Lions et E. Magenes, *Problèmes aux Limites non Homogènes et Applications*, Vol. 1 (Dunod, 1968).
238. N. Lohoué, Comparaison des champs de vecteurs et des puissances du laplacien sur une variété riemannienne à courbure non positive, *J. Funct. Anal.* **61** (1985) 164–201.
239. N. Lohoué, Estimations des fonctions de Littlewood–Palye–Stein sur les variétés à courbure non-positive, *Ann. Sc. ENS* **20** (1987) 505–544.
240. N. Lohoué, Transformées de Riesz et fonctions de Littlewood–Paley sur les groupes non moyennables, *C. R. Acad. Sci. Paris* **306** (1988) 327–330.

241. N. Lohoué, Estimation des projecteurs de De Rham Hodge de certaines variétés riemaniennes non compactes, *Math. Nachr.* **279** (2006) 272–298.
242. Z. Lou, Div-curl type theorems on Lipschitz domains, *Bull. Aust. Math. Soc.* **72** (2005) 31–38.
243. Z. Lou et A. McIntosh, Hardy spaces of exact forms on Lipschitz domains in R^n, *Indiana Univ. Math. J.* **53** (2004) 583–612.
244. Z. Lou et A. McIntosh, Hardy spaces of exact forms on $\mathbb{R}^n$, *Trans. Amer. Math. Soc.* **357** (2005) 1469–1496.
245. Z. Lou et S. Yang, An atomic decomposition for the Hardy–Sobolev space, *Taiwanese J. Math.* **11** (2007) 1167–1176.
246. R. Macias et C. Segovia, Lipschitz functions on spaces of homogeneous type, *Adv. Math.* **33** (1979) 257–270.
247. R. Macias et C. Segovia, A decomposition into atoms of distributions on spaces of homogeneous type, *Adv. Math.* **33** (1979) 271–309.
248. J. Marcinkiewicz, Sur quelques intégrales du type de Dini, *Ann. Soc. Pol. Math.* **17** (1938) 42–50.
249. M. Marias et E. Russ, H^1-boundedness of Riesz transforms and imaginary powers of the Laplacian on Riemannian manifolds, *Ark. Mat.* **41** (2003) 115–132.
250. J. M. Martell, Sharp maximal functions associated with approximations of the identity in spaces of homogeneous type and applications, *Studia Math.* **161** (2004) 113–145.
251. J. Mateu, P. Mattila, A. Nicolau et J. Orobitg, *BMO* for nondoubling measures, *Duke Math. J.* **102** (2000) 533–566.
252. G. Mauceri, S. Meda et M. Vallarino, Hardy type spaces on certain noncompact manifolds and applications, à paraître dans, *J. London. Math. Soc.*
253. B. Maurey, Isomorphismes entre espaces H^1, *Acta Math.* **145** (1980) 79–120.
254. V. G. Mazýa, S. A. Nazarov et B. A. Plamenevskii, Absence of De Giorgi-type theorems for strongly elliptic equations with complex coefficients, *J. Math. Sci.* (*N.Y.*) **28** (1985) 726–734.
255. A. McIntosh, Operators which have an H^∞ functional calculus, in *Miniconference on Operator Theory and Partial Differential Equations* (Canberra), Centre for Math. and Appl., Vol. 14 (Australian National Univ., 1986), pp. 210–231.
256. A. McIntosh, Square roots of operators and applications to hyperbolic PDE's, in *Miniconference on Operator Theory and Partial Differential Equations* (Canberra), Centre for Math. and Appl. (Australian National Univ., 1983).
257. S. Meda, On the Littlewood–Paley–Stein g-function, *Trans. Amer. Math. Soc.* **347** (1995) 2201–2212.
258. P.-A. Meyer, Transformations de Riesz pour les lois gaussiennes, in *Séminaire de Probabilités XVIII*, Lect. Notes, Vol. 1059 (Springer, 1984), pp. 179–193.
259. P.-A. Meyer, Démonstration probabiliste de certaines inégalités de Littlewood-Paley, in *Séminaire de Probabilités X*, Lect. Notes in Math., Vol. 511 (Springer, 1976), pp. 125–183.
260. Y. Meyer, *Ondelettes et opérateurs*, Vol. I (Hermann, 1991).
261. Y. Meyer, *Ondelettes et opérateurs*, Vol. II (Hermann, 1991).
262. N. G. Meyers, An L^p estimate for the gradient of solutions of second order elliptic divergence equations, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **3** (1963) 189–206.
263. D. Mitrea, Integral equation methods for div-curl problems for planar vector fields in nonsmooth domains, *Diff. Int. Equations* **18** (2005) 1039–1054.
264. A. Miyachi, H^p spaces over open subsets of $\mathbb{R}^n$, *Studia Math.* **95** (1980) 205–228.

265. A. Miyachi, Hardy–Sobolev spaces and maximal functions, *J. Math. Soc. Jpn.* **42** (1990) 73–90.
266. C. Mouhot, E. Russ et Y. Sire, Fractional Poincaré inequalities for general measures, *J. Math. Pures. Appl.* **95** (2011) 72–84.
267. S. Müller, A surprising higher integrability property of mappings with positive determinant, *Bull. Amer. Math. Soc.* **21** (1989) 245–248.
268. F. Murat, Compacité par compensation, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* **4** (1978) 489–507.
269. F. Murat, Compacité par compensation II, in *Proc. Int. Meeting on Recent Methods in Non-Linear Analysis* (Rome, May 1978), eds. E. de Giorgi, E. Magenes et U. Mosco (Pitagora Editrice, 1979), pp. 245–256.
270. R. Nagel, E. M. Stein et S. Wainger, Balls and metrics defined by vector fields I: Basic properties, *Acta Math.* **155** (1988) 103–147.
271. F. Nazarov, S. Treil et A. Volberg, The Tb-theorem on non-homogeneous spaces, *Acta Math.* **190** (2003) 151–239.
272. J. Nečas, *Les Méthodes Directes en Théorie des Équations Elliptiques* (Masson et Cie, 1967).
273. E. M. Ouhabaz, *Analysis of Heat Equations on Domains*, London Mathematical Society Monographs Series, Vol. 31 (Princeton Univ. Press, 2005).
274. M. I. Ostrovskii, Sobolev spaces on graphs, *Quaest. Math.* **28** (2005) 501–523.
275. G. Pisier, Riesz transforms: A simpler analytic proof of P. A. Meyer's inequality, in *Sém. Prob. Strasbourg*, Vol. 22 (Springer, 1988), pp. 485–501.
276. T. Rey, Estimations de De Giorgi-Nash et approximations, Thèse de doctorat de l'Université Paul Cézanne, Marseille (2004).
277. D. Robinson, *Elliptic Operators and Lie Groups* (Oxford Univ. Press, 1991).
278. E. Russ, Riesz transforms on graphs for $1 \leq p \leq 2$, *Math. Scand.* **87** (2000) 133–160.
279. E. Russ, $H^1 - L^1$ boundedness of Riesz transforms on Riemannian manifolds and on graphs, *Pot. Anal.* **14** (2001) 301–330.
280. E. Russ, The atomic decomposition for tent spaces on spaces of homogeneous type, in *CMA/AMSI Research Symposium "Asymptotic Geometric Analysis, Harmonic Analysis and Related Topics"*, Proc. of the Centre for Math. and Appl., Vol. 42 (Australian National Univ., 2007), pp. 125–135.
281. E. Russ et Y. Sire, Non local Poincaré inequalities on Lie groups with polynomial volume growth, arXiv:1001.4075, à paraître dans *Studia Math.*
282. L. Saloff-Coste, Analyse sur les groupes de Lie à croissance polynomiale, *Ark. Mat.* **28** (1990) 315–331.
283. L. Saloff-Coste, Parabolic Harnack inequality for divergence form second order differential operators, *Pot. Anal.* **4** (1995) 429–467.
284. D. Sarason, Functions of vanishing mean oscillation, *Trans. Amer. Math. Soc.* **207** (1975) 391–405.
285. C. Sbordone, New estimates for div-curl products and very weak solutions of PDEs, *Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa* **25** (1997) 739–756.
286. C. Scott, L^p theory of differential forms on manifolds, *Trans. A.M.S.* **347** (1995) 2075–2096.
287. Z. Shen, Bounds of Riesz transforms on L^p spaces for second order elliptic operators, *Ann. Inst. Fourier* **55** (2005) 173–197.
288. A. Sikora, Riesz transform, Gaussian bounds and the method of wave equation, *Math. Z.* **247** (2004) 643–662.
289. P. Sjögren, An estimate for a first-order Riesz operator on the affine group, *Trans. Amer. Math. Soc.* **351** (1999) 3301–3314.

290. P. Sjögren et M. Vallarino, Boundedness from H^1 to L^1 of Riesz transforms on a Lie group of exponential growth, *Ann. Inst. Fourier* **58** (2008) 1117–1152.
291. I. Sneiberg, Spectral properties of linear operators in interpolation families of Banach spaces, *Mat. Issled.* **9** (1974) 214–229.
292. E. M. Stein, The characterization of functions arising as potentials I, *Bull. Amer. Math. Soc.* **67** (1961), 102–104, II, *Bull. Amer. Math. Soc.* **68** (1962) 577–582.
293. E. M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions* (Princeton Univ. Press, 1970).
294. E. M. Stein, *Topics in Harmonic Analysis Related to the Littlewood–Paley Theory* (Princeton Univ. Press, 1970).
295. E. M. Stein, Some results in harmonic analysis in $\mathbb{R}^n$ when $n \to \infty$, *Bull. Amer. Math. Soc.* **9** (1983) 71–73.
296. E. M. Stein, *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals* (Princeton Univ. Press, 1993).
297. E. M. Stein et G. Weiss, On the theory of harmonic functions of several variables, I: The theory of H^p spaces, *Acta Math.* **103** (1960) 25–62.
298. E. M. Stein et G. Weiss, Generalization of the Cauchy–Riemann equations and representations of the rotation group, *Amer. J. Math.* **90** (1968) 163–196.
299. E. M. Stein et G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces* (Princeton Univ. Press, 1971).
300. R. Strichartz, Multipliers on fractional Sobolev spaces, *J. Math. Mech.* **16** (1967) 1031–1060.
301. R. Strichartz, Analysis of the Laplacian on the complete Riemannian manifold, *J. Funct. Anal.* **52** (1983) 48–79.
302. R. Strichartz, H^p Sobolev spaces, *Coll. Math.* **60–61** (1990) 129–139.
303. R. Strichartz, Function spaces on fractals, *J. Funct. Anal.* **198** (2003) 43–83.
304. R. Strichartz, Solvability for differential equations on fractals, *J. Anal. Math.* **96** (2005) 247–267.
305. M. Taibleson et G. Weiss, *The Molecular Characterization of Certain Hardy Spaces. Representation Theorems for Hardy Spaces*, Astérisque, Vol. 77 (Soc. Math. France, 1980), pp. 67–149.
306. L. Tartar, Compensated compactness and applications to partial differential equations, in *Nonlinear Analysis and Mechanics*, Heriot–Watt Symposium IV (Pitman, 1979), pp. 136–212.
307. L. Tartar, The compensated compactness method applied to systems of conservation laws, in *Systems of Nonlinear Partial Differential Equations*, ed. J. Ball (D. Reidel, 1983), pp. 263–288.
308. P. Tchamitchian, The solution of Kato's conjecture (after Auscher, Hofmann, Lacey, McIntosh and Tchamitchian), in *Journées "Equations aux Dérivées Partielles"* (Univ. Nantes, 2001), pp. 1–14.
309. X. Tolsa, *BMO*, H^1 and Calderón–Zygmund operators for non doubling measures, *Math. Ann.* **319** (2001) 89–149.
310. X. Tolsa, A proof of the weak (1,1) inequality for singular integrals with non doubling measures based on a Calderón–Zygmund decomposition, *Publ. Mat.* **45** (2001) 163–174.
311. X. Tolsa, The space H^1 for nondoubling measures in terms of a grand maximal operator, *Trans. Amer. Math. Soc.* **355** (2003) 315–348.
312. H. Triebel, Function spaces on Lie groups, the Riemannian approach, *J. London Math. Soc.* **35** (1987) 327–338.

313. H. Triebel, *Theory of Function Spaces. II*, Monographs in Mathematics, 84 (Birkhäuser, 1992).
314. H. Triebel, *Fractals and Spectra: Related to Fourier Analysis and Function Spaces* (Birkhäuser, 1997).
315. H. Triebel, *Theory of Function Spaces III* (Birkhäuser, 2006).
316. H. Triebel et H. Winkelvoss, Intrinsic atomic characterization of function spaces on domains, *Math. Z.* **221** (1996) 647–673.
317. M. Vallarino, Spaces H^1 and BMO on $ax + b$ groups, *Collect. Math.* **60** (2009) 277–295.
318. N. Varopoulos, Analysis on Lie groups, *J. Funct. Anal.* **76** (1988) 346–410.
319. N. Varopoulos, L. Saloff-Coste et T. Coulhon, *Analysis and Geometry on Groups* (Cambridge Univ. Press, 1992).
320. J. Verdera, On the $T(1)$-theorem for the Cauchy integral, *Ark. Mat.* **38** (2000) 183–199.
321. C. Villani, *Hypocoercivity I*, Mem. Amer. Math. Soc., Vol. 202 (Amer. Math. Soc., 2009).
322. N. F. D. Ward et J. Partington, A construction of rational wavelets and frames in Hardy–Sobolev spaces with applications to system modeling, *SIAM J. Control Optim.* **36** (1998) 654–679.
323. M. Weiss et A. Zygmund, A note on smooth functions, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 62, Indag. Math.* **21** (1959) 52–58.
324. R. L. Wheeden, On hypersingular integrals and Lebesgue spaces of differentiable functions I, *Trans. Amer. Math. Soc.* **134** (1968) 421–436.
325. L. Wu, A new modified logarithmic Sobolev inequality for Poisson point processes and several applications, *Probab. Th. Relat. Fields* **118** (2000) 427–438.
326. D. Yang, Boundedness of linear operators via atoms on Hardy spaces with non-doubling measures, arXiv:0906.1316.
327. N. Yosida, Sobolev spaces on a Riemannian manifold and their equivalence, *J. Math. Kyoto Univ.* **32** (1992) 621–654.
328. A. Youssfi, Localisation des espaces de Besov homogènes, *Indiana Univ. Math. J.* **37** (1988) 565–588.
329. A. Youssfi, Localisation des espaces de Lizorkin–Triebel homogènes, *Math. Nachr.* **147** (1990) 107–121.
330. M. Zähle, Riesz potentials and Liouville operators on fractals, *Pot. Anal.* **21** (2004) 193–208.
331. M. Zähle, Local structures and diffusions on fractals, prépublication (2005).
332. M. Zähle, Harmonic calculus on fractals — A measure geometric approach II, *Trans. Amer. Math. Soc.* **357** (2005) 3407–3423.
333. K. Zhang, On the coercivity of elliptic systems in two dimensional spaces, *Bull. Austr. Math. Soc.* **54** (1996) 423–430.
334. A. Zygmund, On certain integrals, *Trans. Amer. Math. Soc.* **55** (1944) 170–204.
335. A. Zygmund, *Trigonometric Series* (Cambridge Univ. Press, 1959).