Confluentes Mathematici, Vol. 1, No. 1 (2009) 111–122

QUELQUES TENTATIVES DE DÉFINIR UNE NOTION GÉNÉRALE DE GROUPES ET DE CORPS DE DIMENSION UN ET DE DÉTERMINER LEURS PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES

BRUNO POIZAT

Université de Lyon, CNRS Université Lyon 1,
INSA de Lyon, Ecole Centrale de Lyon,
Institut Camille Jordan UMR5208,
21 avenue Claude Bernard,
F-69622 Villeurbanne-cedex, France
poizat@math.univ-lyon1.fr

Received 11 April 2008
Revised 7 November 2008

We make some attempts to define a general notion of groups and fields of dimension one, and to determine their algebraic properties.

Keywords: Groups; fields; dimension; minimality.

AMS Subject Classification: 20A15, 20E34, 03C50, 03C60

0. Introduction

A première vue, cet article semble relever de la Théorie des Modèles, c'est-à-dire de la Logique mathématique; pourtant, il s'agit plutôt de Théorie des Groupes.

A vrai dire, les notions de Théorie des Groupes qu'il emploie sont peu sophistiquées, et on s'attend à ce qu'elles soient toutes bien connues des lecteurs d'un journal généraliste comme *Confluentes Mathematici*. Il est moins certain qu'ils sachent ce qu'un théoricien des modèles voit dans un groupe, si bien qu'il faut dire quelques mots à ce propos.

Ce théoricien des modèles considère le groupe G comme structuré par les parties définissables de ses puissances cartésiennes, lesquelles sont chacune décrite par une formule $f(x_1,\ldots,x_n,a_1,\ldots,a_m)$ de la Logique du premier ordre. Une telle formule est finie; elle ne mentionne comme notions primitives que l'égalité et la loi du groupe (si on a affaire à un corps K, elle mentionne l'addition et la multiplication du corps), plus un uplet $a_1,\ldots,a_m$ d'éléments de G, qu'on appelle les paramètres de la formule; enfin, ses quantifications ne portent que sur les éléments de G (une quantification portant sur les parties de G, ou sur les parties de ses puissances cartésiennes, est dite du second ordre).

C'est ainsi que le centralisateur de a est défini par la formule $x \cdot a = a \cdot x$; le centre de G l'est par $(\forall\, y)\ x \cdot y = y \cdot x$; son deuxième centre par $(\forall\, y)(\exists\, z)(\forall\, t)\ x \cdot y = y \cdot x \cdot z \wedge t \cdot z = z \cdot t$. De même est définissable la relation d'équivalence "x et y sont conjugués" grâce à la formule $(\exists\, z)\ x \cdot z = z \cdot y$, ainsi que la classe de conjugaison de a: $(\exists\, z)\ x \cdot z = z \cdot a$.

Par contre, le dérivé G' de G n'est pas en général définissable; si on dit que c'est le plus grand sous-groupe de G tel que G/G' soit abélien, on introduit une quantification de second ordre; si on veut déclarer qu'il est formé des produits de commutateurs, sans qu'on puisse borner le nombre de facteurs de ces produits, il faut une disjonction infinie.

Les théoriciens des modèles se restreignent à cette logique pour pouvoir bénéficier de ses propriétés de compacité, qui sont difficiles à justifier en quelques lignes; pour cela, ils aiment à remplacer le groupe G par des sur-groupes qu'ils qualifient de saturés, et qui satisfont aux mêmes propriétés exprimables dans la Logique du premier ordre; par bonheur, les seules difficultés techniques de cet article viennent de ce que nous renonçons à ce bénéfice, et que nous ne supposons aucune hypothèse de saturation. Il est donc inutile d'expliquer de quoi il s'agit!

Nous ne ferons donc pas d'extensions, mais nous devrons faire des restrictions. Un sous-groupe H de G est dit restriction élémentaire de ce dernier s'il satisfait à la condition suivante, dite test de Tarski: toute formule $f(x, a_1, \ldots, a_n)$, à paramètres $a_1, \ldots, a_n$ dans H, qui est non-contradictoire, c'est-à-dire satisfaite par au moins un élément de G, est satisfaite par un élément de H. Il est alors facile de voir, par induction sur la longueur des formules, que les uplets d'éléments de H satisfont les mêmes formules dans H et dans G.

C'est ainsi que si nous avons affaire à des corps, et si le corps K a une restriction élémentaire L algébriquement close, il est lui-même algébriquement clos; en effet, le fait que toute équation de degré d a une solution s'exprime par la formule

$$(\forall\, y_0) \ldots (\forall\, y_{d-1})(\exists\, x)\ x^d + y_{d-1} \cdot x^{d-1} + \cdots + y_0 = 0.$$

Ce qui est dit ci-dessus devrait suffire au lecteur non-logicien pour comprendre les définitions et suivre les démonstrations de ce travail. Seul lui échappera la signification de remarques qui ne sont pas essentielles à l'argumentation. S'il tient à en savoir d'avantage, il peut consulter [12].

La problématique de cet article est de préciser la notion informelle de "structure de dimension un". L'exemple des courbes algébriques suggère en premier lieu les structures minimales définies dans la première section ci-après. En procédant par induction, on définit à partir d'elles une notion générale de dimension finie; les groupes qui apparaissent dans ce contexte sont dits "groupes de rang de Morley fini": on trouvera dans la préface de [13] une définition de ces groupes compréhensible par un mathématicien normal. On conjecture qu'ils sont proches des groupes algébriques, qui en sont un cas particulier, et un nombre considérable de travaux leur a été consacrés: ils sont repris dans le dernier en date, [5]; cependant, il a été observé aussi tôt que [3] que cette étude posait de sérieux problèmes dès la dimension trois.

On peut se consoler en constatant que les choses s'amorcent bien pour les (très) petites dimensions, puisqu'un groupe de dimension a un sous-groupe abélien d'indice fini. Nous allons ici affaiblir progressivement l'hypothèse sur la structure du groupe, et voir dans quelles circonstances nous pouvons espérer conserver ce résultat; nous étudierons aussi les corps de dimension un.

1. Der Satz von Joachim

Rappelons qu'une structure infinie M est dite minimale si chaque partie de M, définissable avec paramètres dans M, est finie ou cofinie.

Soit G un groupe minimal; tout sous-groupe définissable propre de G est fini; si son centre est fini, tout élément de G non-central, étant de centralisateur fini, a sa classe de conjugaison infinie; il n'y a donc qu'une classe de conjugaison non centrale, et $G/Z(G)$ est un groupe infini d'exposant fini dont tous les éléments $\neq 1$ sont conjugués: un tel groupe n'existe pas (en effet, comme un groupe d'exposant 2 est commutatif, il devrait être d'exposant p premier $\neq 2$; si $x \neq 1$, x et x^{-1} seraient conjugués par un élément y d'ordre 2 modulo le centralisateur de x, ce qui lui interdit d'être d'exposant p).

Conclusion: Un groupe minimal est commutatif.

Ce théorème est apparu dans [15]. Sa démonstration est à la fois très simple et très importante, car elle a été adaptée pour montrer qu'un groupe infini de rang de Morley fini [3], ou même seulement superstable [1], contenait un sous-groupe abélien définissable infini: voir le Corollaire 6.9 de [13].

Rappelons qu'on ne sait pas si la chose est vraie pour un groupe stable infini.

Le Théorème de Reineke est donc un préliminaire incontournable à la classification des groupes simples de rang de Morley fini, ce qui justifie toute tentative de le généraliser à d'autres contextes, où on devra se passer du forking et de sa symétrie.

Ces tentatives vont nous conduire à des démonstrations pénibles de résultats d'ampleur contestable, et à des questions dont la tractabilité est difficile à apprécier. Avant de nous y livrer, nous allons rappeler un autre théorème germanique très simple.

2. Der Satz von Frank O

Toute partie infinie A algébriquement close (au sens modèle-théorique: A contient tous les éléments de M qui satisfont une formule à paramètres dans A qui n'est satisfaite que par un nombre fini d'éléments) d'une structure minimale M en est une restriction élémentaire: en effet, une formule non-contradictoire à paramètres dans A définit un ensemble fini ou cofini, qui a toujours un point dans A, si bien que A satisfait au test de Tarski.

Dans un corps parfait de caractéristique p, la clôture algébrique modèle-théorique de l'ensemble vide est formée d'éléments algébriques (au sens algébrique). En effet, si x satisfait une formule algébrisante sans paramètres, il doit avoir une orbite finie sous les puissances de l'automorphisme de Frobenius, qui à x associe x^p.

Soit K un corps minimal de caractéristique p; pour chaque entier n, l'homomorphisme de K^* dans K^* qui à x associe x^n a pour image un groupe définissable infini: elle est donc surjective; de même est surjectif l'homomorphisme de K^+ dans K^+ qui à x associe $x^p - x$. Par conséquent, K est parfait, et n'a d'extensions ni radicales ni pseudo-radicales; il contient donc la clôture algébrique k du corps $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, et k est une restriction élémentaire de K.

Conclusion: Un corps minimal de caractéristique p est algébriquement clos.

On ne sait pas si la chose est vraie en caractéristique nulle!

Ce théorème est apparu dans [16]; il serait resté anecdotique si [17] n'avait généralisé le premier paragraphe de cette section à tout corps de rang de Morley fini (dans un langage augmenté), ce qui a donné un nouveau départ à la classification des groupes de rang de Morley fini (voir [4, 14, 18]).

Il est bien connu par ailleurs qu'un corps infini de rang de Morley fini [8], ou même seulement superstable [2], est algébriquement clos.

Rappelons également que les corps séparablement clos sont stables, mais qu'on ne sait pas s'il y a d'autres corps stables infinis.

3. Groupes *d*-Minimaux

Nous dirons qu'une structure infinie M est d-minimale si M ne se divise pas en plus de d parties infinies définissables; ou encore: M est union d'au plus d ensembles définissables minimaux; ou encore: les parties définissables de M, considérées à un ensemble fini près (X et Y sont équivalentes si leur différence symétrique est finie, ce que nous notons $X \approx Y$), forment un ensemble Ω de cardinal inférieur ou égal à 2^d.

Un groupe d-minimal G a un plus petit sous-groupe définissable d'indice fini H; tous ses sous-groupes propres définissables sont finis, et il est aussi d-minimal.

Supposons H non-abélien; son centre est fini, et tout élément non-central a une classe de conjugaison infinie; H n'a donc qu'un nombre fini de classes de conjugaison: tous ses sous-groupes normaux sont définissables, et il n'a pas de sous-groupes propres d'indice fini, même non définissables. Il agit donc trivialement sur Ω par translation à droite ou à gauche.

Soient a et b non centraux dans H; pour tout conjugué $x \cdot b \cdot x^{-1}$ de b sauf un nombre fini, $a \cdot x \cdot b \cdot x^{-1}$ est conjugué de b; le centralisateur de b étant fini, pour presque tout x, $a \cdot x \cdot b \cdot x^{-1}$ est conjugué de b; de même, pour presque tout x, $x^{-1} \cdot a \cdot x \cdot b$ est conjugué de a. Donc a et b sont conjugués, ce qui mène à la contradiction de Reineke.

Conclusion: Un groupe d-minimal est abélien par fini.

Remarque 1. Il est possible qu'une partie X infinie et co-infinie d'un groupe G soit presque préservée par translation, comme le montre l'exemple $G = (\mathbb{Z}, +)$, $X = \mathbb{N}$. Pour un groupe stable, si X est définissable, cette possibilité est éliminée par la symétrie du forking (de X et de $\neg X$, l'un des deux doit être générique, et recouvrir le groupe par un nombre fini de ses translatés). Dans le cas présent, nous avons remplacé la symétrie du forking par une propriété de symétrie des classes de conjugaison.

Remarque 2. Si cela se produit, nous trouvons une infinité $x_0, \ldots, x_i, \ldots$ de points distincts dans X, une infinité $y_0, \ldots, y_i, \ldots$ de points distincts dans son complément, tel que $x_i \cdot y_j \in X$ si $j < i$. Il n'existe donc pas d'entier n tel que X, $a \cdot X$ et $X \cdot a$ soient égaux à au plus n éléments près pour tout a de G. Cette remarque donne une autre démonstration de l'unicité de la classe de conjugaison infinie X, car, si a et a' sont conjugués, les différences symétriques de X et $a \cdot X$ d'une part, X et $a' \cdot X$ d'autre part, on même nombre d'éléments.

4. Corps d-Minimaux

Soit K un corps d-minimal. Rappelons que $X \approx Y$ note l'égalité à un ensemble fini près. Si $a \neq 0$ et $X + b \approx X$, alors $a \cdot X + a.b \approx a \cdot X$; il en suit que le presque-fixateur par translation des parties définissable de K est un idéal d'indice fini dans K. Il est égal à K, si bien que l'action de K^+ sur Ω est triviale: pour toute partie définissable X de K, et tout a de K, $a + X \approx X$.

Une première conséquence est que K n'a pas de sous-groupes additifs propres définissables infinis, c'est-à-dire d'indice fini.

Il n'a pas non plus de sous-groupes multiplicatifs définissables infinis. En effet, si M est un sous groupe définissable infini, c'est-à-dire d'indice fini, de K^*, $1 + a.M \approx a.M$ pour chacune des cossettes de M; pour tout a sauf un nombre fini, $1 + a \in a \cdot M$, $a^{-1} + 1 \in M$, M est cofini, et égal à K^*.

Montrons maintenant que, si une structure d-minimale M porte un groupe définissable G sans sous-groupes définissables propres d'indice fini, toute partie algébriquement close infinie A de M en est une restriction élémentaire. Sinon, on trouverait une partie X de M, définie par une formule à paramètres dans A, qui ne serait satisfaite par aucun point de A; pour tout a d'un certain groupe H d'indice fini dans G, $a \cdot X \approx X$. Si a est dans $A \cap H$, $a \cdot X \supseteq X$, et en fait $a \cdot X = X$ puisque la même chose vaut pour a^{-1}. L'ensemble des a tels que $a \cdot X = X$ forment un sous-groupe définissable de G, qui est infini, et égal à G par hypothèse; $X = G$, ce qui est clairement impossible.

Nous tirons de tout cela la même conclusion que Frank O: Tout corps d-minimal de caractéristique p est algébriquement clos.

5. Groupes et Corps ω-Minimaux

Nous introduisons maintenant une version locale de la minimalité: une structure infinie M est dite ω-minimale si, pour toute formule $f(x, y_1, \ldots, y_n)$, les parties de

M définies par une formule de la forme $f(x, a_1, \ldots, a_n)$ forment un ensemble fini modulo $\approx$.

Moyennant les aménagements suivants, nous pouvons montrer de même qu'un groupe ω-minimal est abélien par fini, et qu'un corps ω-minimal de caractéristique p est algébriquement clos.

Pour les groupes, les sous-groupes définissables sont finis ou d'indice fini, et il n'y a qu'un nombre fini de groupes d'indice fini ayant une définition de la forme $f(x, a_1, \ldots, a_n)$, où la formule f est fixée. En particulier, les centralisateurs infinis d'éléments de G sont en nombre fini; soit H leur intersection; si H n'est pas abélien, il n'a qu'un nombre fini de classes de conjugaison, et on le remplace par son plus petit sous-groupe d'indice fini. On considère alors l'action du groupe sur les ensembles ayant des définitions de la forme $f(a \cdot x, a_1, \ldots, a_n)$, pour une formule f fixée.

Pour les corps, le fixateur de l'action de K^+ sur les ensembles ayant des définitions de la forme $f(a \cdot x + b, a_1, \ldots, a_n)$ est un idéal.

Remarque 3. On dit qu'une structure est fortement, ou uniformément, minimale si ses extensions élémentaires sont aussi minimales; on définit de même les structures uniformément d-minimales et uniformément ω-minimales. Les structures uniformément minimales sont celles qui sont de rang de Morley un et de degré de Morley un, tandis que les structures uniformément d-minimales sont celles qui sont de rang de Morley un et de degré de Morley d. Remarquons que les structures uniformément ω-minimales sont exactement les structures superstables de rang de Lascar un; en effet, leur définition signifie que les types non algébriques forment un famille bornée, et qu'ils ne peuvent dévier.

Remarque 4. Si la structure minimale M porte un groupe G, une partie définissable X de M est infinie si et seulement s'il existe a tel que $M{=}X \cup a \cdot X$; en conséquence, sur les extensions élémentaires N de M, les parties définissables de N se divisent entre "grandes" et "petites", et il y a un type générique, non nécessairement symétrique (si x est générique et y générique sur x, il peut arriver que x ne soit pas générique sur y); la chaîne $\omega + \omega^-$ est un exemple de structure minimale où on ne peut pas distinguer ainsi les parties définissables finies et cofinies. Plus généralement, si la structure est seulement ω-minimale, une partie de M définie par une formule de la forme $f(x, a_1, \ldots, a_n)$ est infinie si et seulement si M est recouvert par $d(f)$ translatés de $X \cdot X^{-1}$, où l'entier $d(f)$ ne dépend que de la formule f; cela implique que les fixateurs des ensembles définissables modulo $\approx$ sont en fait définissables.

6. Groupes *E*-Minimaux

Une structure infinie M est dite E-minimale si chaque relation d'équivalence $e(x, y, a_1, \ldots, a_n)$ entre éléments de M, définissable par une formule avec paramètres $a_1, \ldots, a_n$ dans M, n'a qu'un nombre fini de classes infinies.

Remarque 5. M est d-minimale si et seulement si chacune de ces relations d'équivalence a au plus d classes infinies.

Remarque 6. On qualifie la E-minimalité d'uniforme si elle est conservée par extension élémentaire; cela signifie à toute formule $f(x, y, z_1, \ldots, z_n)$ est associé un entier m tel que chaque relation d'équivalence définie par une formule $f(x, y, a_1, \ldots, a_n)$ n'a pas plus de m classes distinctes à plus de m éléments. La difficulté de nos démonstrations vient de ce que nous ne supposons pas cette uniformité, pas plus que nous ne l'avons fait dans les cas minimaux.

Remarque 7. Exemples d'uniforme E-minimalité: un corps réel-clos, ou plus généralement une structure o-minimale; un corps pseudo-fini, le graphe générique, ou plus généralement une structure supersimple de rang un.

Nous partons maintenant à la chasse aux groupes E-minimaux qui ne sont pas abéliens par fini.

Remarque 8. Si un groupe (quelconque) G a un sous-groupe A abélien d'indice fini, il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour les centralisateurs des éléments de A, si bien que le centralisateur C de A est définissable dans G, ainsi que le centre de ce dernier, qui est un sous-groupe définissable abélien d'indice fini dans G, contenant A. Le même argument montre que, si le centralisateur d'une partie de G est d'indice fini, il est définissable; et aussi que, si G a un sous-groupe nilpotent d'indice fini, il en a un de définissable.

Si G est E-minimal, les sous-groupes définissables de G sont finis ou bien d'indice fini.

Tout sous-groupe infini définissable de G, et tout quotient de G par un sous-groupe fini normal, est aussi E-minimal.

Les éléments de centralisateur d'indice fini forment un sous-groupe G_0; ce sont ceux dont la classe de conjugaison est finie, si bien que G_0 est définissable, étant le complémentaire de la réunion d'un nombre fini de classes de conjugaison. Si G_0 est fini, nous dirons que G est olshanskien; si G_0 est d'indice fini, nous dirons que G est quasi-abélien.

6.1. *Groupes E-minimaux olshanskiens*

On remplace G par le centralisateur de G_0, ce qui ramène au cas où $Z(G)$ est fini, et tout élément non-central a un centralisateur fini; il n'y a qu'un nombre fini de classes de conjugaison, et tous les sous-groupes normaux sont définissables. On remplace ensuite G par son plus petit sous-groupe d'indice fini, puis on le quotiente par son centre; ça donne un groupe simple, à centralisateurs finis, avec un nombre fini de classes de conjugaison. Pour chaque nombre premier p, la taille de ses sous-p-groupes finis est bornée par celle des centralisateurs de ses éléments; comme son exposant est fini, la taille de ses sous-groupes finis est aussi bornée par un certain entier n.

On obtient ainsi une sorte de monstre de Tarski, un groupe dont les seuls sous-groupes propres définissables sont finis, et même d'ordre borné. Je l'ai nommé olshanskien par référence à [10], qui construit un vrai monstre de Tarski, un groupe simple infini dont les seuls sous-groupes non-triviaux sont d'ordre p, où p est un nombre premier fixé assez grand. On peut espérer que la construction d'Ol'shanskii puisse être modifiée de manière à ce qu'il n'ait qu'un nombre fini (pourquoi pas p?) de classes de conjugaison, quitte à ce qu'apparaissent des sous-groupes infinis non définissables; plus précisément, cela est-il vrai pour les existentiellement clos de la classe universelle O_p, formée des groupes d'exposant p dans lesquels les centralisateurs d'éléments $\neq 1$ sont d'ordre p?

Pour continuer, et décider de l'existence de groupes E-minimaux olshanskiens, il faudrait en savoir plus sur la théorie des modèles des classes O_p. Ce serait souhaitable car on peut rêver qu'une construction dans le genre de celle d'Ol'shanskii permette de fabriquer des mauvais groupes simples de rang de Morley trois sans torsion.

6.2. *Groupes E-minimaux quasi-abéliens*

Cette section contient le seul résultat de ce travail qui, selon moi, mérite le beau nom de théorème. Sa démonstration doit une part considérable au rapporteur anonyme de la première version de cet article; le moins que je puisse faire, c'est de remercier ici cet inconnu, fin connaisseur de la Théorie des groupes, pour son aide généreuse et désintéressée.

Théorème 1. *Un groupe E-minimal G quasi-abélien est fini par abélien par fini; plus précisément, s'il n'est pas abélien par fini il a, pour un certain nombre premier p, un p-sous-groupe définissable d'indice fini, de centre fini, et dont le quotient par le dit centre est abélien d'exposant p.*

Démonstration. En remplaçant G par un de ses sous-groupes définissables d'indice fini, on est ramené au cas où ses classes de conjugaison sont finies; nous supposons qu'il n'a pas de sous-groupe abélien d'indice fini.

Dans ces conditions, si H, définissable ou pas, est d'indice fini dans G, son centralisateur C est fini. En effet, le centralisateur Γ_0 de C est définissable d'indice fini; comme il n'est pas abélien, on trouve un centralisateur Γ_1 d'indice fini strictement plus petit; en répétant on obtient une suite strictement décroissante $\Gamma_0 \supset \Gamma_1 \supset \cdots \supset \Gamma_n \supset \cdots$ de centralisateurs définissables, dont les centralisateurs $C \subset C_1 \subset \cdots \subset C_n \subset \cdots$ forment une chaîne strictement croissante de groupes définissables, qui ne peuvent être que finis. On remarque en passant que le groupe G ne satisfait pas la condition de chaîne pour les centralisateurs de ses parties (il n'est pas MC); il n'a même pas de centralisateur minimal d'indice fini.

G est localement fini, car un nombre fini de ses éléments engendrent un groupe dont le centralisateur est d'indice fini. Il est "localement normal", chacun de ses sous-groupes finis étant contenu dans un sous-groupe fini normal.

Nous fixons maintenant un nombre premier p, et nous montrons que ou bien G n'a qu'un nombre fini de p-éléments, ou bien il a un sous-groupe définissable d'indice fini qui est un p-groupe d'exposant fini: plus précisément, le quotient de ce dernier par son centre est d'exposant p.

En effet, comme la relation d'équivalence $x^p = y^p$ n'a qu'un nombre fini de classes infinies, il n'y a dans G qu'un nombre fini d'éléments qui ont une infinitité de racines p-ièmes. Soit G_1 leur centralisateur; dans $G_1/Z(G_1)$, seul l'élément neutre est susceptible d'avoir une infinité de racines p-ièmes, car si $x = y^p$ modulo $Z(G_1)$ pour une infinité de y, comme $Z(G_1)$ est fini on y trouve a tel que $x.a = y^p$ pour une infinité de y.

Si $G_1/Z(G_1)$ contient un élément d'ordre différent de p, son centralisateur $C/Z(G_1)$ ne contient qu'un nombre fini d'éléments d'ordre p, puis un nombre fini d'éléments d'ordre p^2, puis d'ordre $p^3, \ldots$, puis d'ordre $p^n, \ldots$, et on aurait la même propriété pour son image réciproque C, qui est définissable d'indice fini dans G_1, et donc aussi dans G. Si C avait un p-sylow infini, ce dernier contiendrait un groupe abélien divisible D non-trivial; comme le centre de C est fini, on trouverait g dans C ne centralisant pas D; fût N l'intersection des conjugués du centralisateur de g: DN/N serait à la fois fini, divisible et non-trivial, ce qui est impossible. Par conséquent les p-sylows de C sont finis, de même que ceux de G; les p-sylows de G sont finis, conjugués et en nombre fini, si bien que G ne contient qu'un nombre fini de p-éléments.

Dans le cas contraire, $G_1/Z(G_1)$ est d'exposant p, et G_1, étant localement nilpotent, est produit d'un p'-groupe fini par un p-groupe G_2, qui est définissable puisque l'exposant de G est borné.

Montrons ensuite qu'il n'est pas possible que, pour chaque nombre premier p, G ne contienne qu'un nombre fini de p-éléments.

Supposons le contraire. Après avoir remplacé G par le centralisateur de ses 2-éléments, nous sommes ramenés, grâce au Théorème de Feit et Thomson (nous n'avons pas trouvé d'argument plus élémentaire), à un groupe localement résoluble. Appelons fitting de G la réunion de ses sous-groupes finis nilpotents et normaux: il s'agit d'un groupe localement nilpotent. Si nous notons C le centralisateur de Fitting(G), on remarque que le fitting de C est réduit à son propre centre (en effet, si F est un sous-groupe fini nilpotent normal dans C, la réunion de ses conjugués par des éléments de G engendre un sous-groupe fini de C nilpotent et normal dans G); C est donc commutatif car sinon $C/Z(C)$, étant localement résoluble et localement normal, aurait des sous-groupes abéliens normaux non-triviaux. On voit donc que C est en fait le centre de Fitting(G), et qu'il est impossible que Fitting(G) soit fini (cela forcerait C à être à la fois fini et d'indice fini).

Fitting(G), étant localement nilpotent, est la somme de ses p-sylows pour les différentes valeurs de p, lesquels sont finis, et nilpotents; il a donc un centre infini. L'ensemble X des éléments de G qui commutent avec tous leurs conjugués est définissable; les éléments de X qui centralisent X forment un groupe abélien définissable, qui contient le centre de Fitting(G); ce sous-groupe infini abélien définissable contredit l'hypothèse que G n'est pas abélien par fini.

Nous sommes finalement ramenés, après avoir remplacé G par G_2, au cas où G est un p-groupe pour un certain nombre premier p, avec un centre fini et $G/Z(G)$ d'exposant p; G est alors localement nilpotent, et pour conclure la démonstration du théorème il suffit de montrer que son deuxième centre est infini, c'est-à-dire, comme il est définissable, d'indice fini dans G.

Supposons que $Z_2(G)$ soit fini; on peut alors trouver une partie finie normale de G, de centralisateur C, telle que $C \cap Z_2(G) = Z(G)$; on peut ensuite trouver un sous-groupe fini F non-trivial de $C/Z(G)$ qui soit normal dans $G/Z(G)$; F doit contenir un élément central $\neq 1$ de chacun de ses sur-groupes finis K contenus dans $G/Z(G)$, puisque K est nilpotent et F est normal dans K; on en conclut que F contient un élément non-trivial du centre de $G/Z(G)$, aboutissant ainsi à la contradiction finale terminant la preuve du théorème. $\square$

Remarque 9. Un corollaire du théorème, c'est qu'à un groupe E-minimal est associé un entier m majorant le nombre d'éléments de ses classes de conjugaison finies; en effet, c'est clair dans le cas olshanskien, et dans le cas quasi-abélien on peut supposer que toutes les classes de conjugaison du groupe G sont finies; d'après le théorème, G a un sous-groupe H d'indice fini dans lequel les classes de conjugaisons sont bornées; si h est dans H, nous observons que le centralisateur de $g \cdot h$ contient l'intersection du centralisateur de g dans H et du centralisateur de h dans H, ce qui nous permet de borner les indices des centralisateurs des éléments de G une fois choisi un ensemble de représentants de G/H. Si nous avions eu cette information dès le départ, par exemple en supposant G uniformément E-minimal, nous aurions pu réduire drastiquement notre démonstration: en effet, d'après [9] un groupe dont les classes de conjugaison n'ont pas plus de m éléments est fini par abélien.

Remarque 10. Les groupes n'ayant qu'un nombre fini de classes de conjugaison infinies ont été étudiés dans un article tout récent, [7]; ils donnent l'impression de former une classe bien plus vaste et plus sauvage que celle des groupes E-minimaux.

Nous concluons cette section par un exemple de groupe G uniformément E-minimal quasi-abélien et non abélien par fini.

Considérons la classe universelle formée des groupes 2-nilpotents, d'exposant p^2, et n'ayant qu'un seul sous-groupe d'ordre p. Elle a une modèle-complétion oméga-catégorique, formée de ses éléments infinis dont le centre n'a que p éléments.

Si G est l'un de ses modèles, le quotient $G/Z(G)$ est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{F}_p$ muni de l'application bilinéaire alternée $[x, y]$ à valeur dans $Z(G)$ induite par les commutateurs.

Soit $e(x, y)$ une relation d'équivalence définissable avec paramètres dans un sous-groupe fini A de G; elle se décompose en une disjonction finie de formules complètes. Si x et y sont linéairement indépendants sur A modulo $Z(G)$, le type de (x, y) est déterminé par le type de x, le type de y, et la valeur du commutateur $[x, y]$; si ce type satisfait $e(x, y)$, pour tout x' de même type que x on peut trouver y' de même type que y, linéairement indépendant de x et de x', tel que $[x', y'] = [x, y'] = [x, y]$, si bien que tous les éléments du type de x sont équivalents. Comme il n'y a qu'un nombre fini de types, cela ne concerne qu'un nombre fini de classes d'équivalence; en dehors de ces dernières, deux points équivalents doivent être linéairement dépendants, si bien que les autres classes sont finies.

En fait, ce groupe est supersimple de rang un; pour un tel groupe, la dichotomie olshanskien/(fini par abélien par fini) est bien connue (voir [19]).

Remarque 11. Je laisse à d'autres le soin de classer tous les groupes E-minimaux quasi-abéliens.

7. Nomen Rosae

Les différentes sortes de minimalité que nous avons définies peuvent être considérées comme des tentatives plus ou moins convaincantes d'appréhender la notion informelle de "structure de dimension un".

La notion la plus générale, et la plus vague, de dimension a été introduite par [11], et ses rapports avec les "théories roses", où existe une notion rudimentaire de forking, ont été établis dans [6].

Rappelons de quoi il s'agit. Nous vivons dans M^{eq}, où M est une structure assez saturée, et nous définissons le préordre suivant sur les ensembles définissables avec paramètres dans M: $X \leq Y$ s'il existe une application définissable à fibre finies de X dans Y. Quand $X \leq Y$, nous disons que "la dimension chirurgicale de X est inférieure à celle de Y", et que "X et Y ont même dimension chirurgicale" si $X \leq Y$ et $Y \leq X$.

Par exemple, si G est un groupe et H un sous-groupe définissable d'indice fini dans G, G et H ont même dimension chirurgicale; par contre, si F est un sous-groupe fini normal dans G, il est possible que la dimension chirurgicale de G/F soit strictement inférieure à celle de G.

La structure est dite chirurgicale si, pour chaque ensemble définissable X et chaque relation d'équivalence définissable entre éléments de X, il n'y a qu'un nombre fini de classes modulo E qui ont même dimension chirurgicale que X. Par exemple, une structure supersimple, ou o-minimale, est chirurgicale.

Il est montré dans [11] que tout corps infini chirurgical est parfait et n'a, pour chaque entier n, qu'un nombre fini d'extension de degré n. Il en est de même de tous les exemples de corps E-minimaux que nous connaissons; y a-t'il une bonne raison à cela?

L'hypothèse de chirurgicalité diffère des contextes considérés dans cet article sur deux points: 1. on suppose les structures assez saturées, pour pouvoir employer des arguments de compacité; 2. elle concerne tous les ensembles définissables de M^{eq}, et pas seulement les parties définissables de M (si bien qu'une structure uniformément E-minimale n'est pas toujours chirurgicale).

On peut se demander si cette forme très rudimentaire de superstabilité (ou une de ses variantes) permet de montrer des propriétés algébriques spécifiques pour les groupes, et en particulier quand on lui adjoint la E-minimalité.

References

1. C. Berline et D. Lascar, Superstable groups: A partial answer to conjectures of Cherlin and Zil'ber, *Ann. Pure Appl. Logic* **30** (1986) 1–43.
2. G. Cherlin, *Superstable Division Rings*, Logic Colloquium '77 (North-Holland, 1978), pp. 99–111.
3. G. Cherlin, Groups of small Morley rank, *Ann. Pure Appl. Logic* **17** (1979) 1–28.
4. G. Cherlin, Good tori in groups of finite Morley rank, *J. Groups Th.* **8** (2005) 613–621.
5. G. Cherlin, T. Altinel et A. Borovik, *Simple Groups of Finite Morley Rank of Even Type* (Amer. Math. Soc., 2008).
6. C. Ealy et A. Onshus, Characterizing rosy theories, *J. Symbolic Logic* **72** (2007) 919–940.
7. M. Herzog, P. Longobardi et M. Maj, On generalized FC-groups, *J. Group Th.* **11** (2008) 105–117.
8. A. Macintyre, On omega-one categorical theories of fields, *Fund. Math.* **71** (1971) 1–25.
9. B. H. Neumann, Groups covered by permutable subsets, *J. London Math. Soc.* **29** (1954) 236–248.
10. A. Ol'shanskii, Groupes d'exposant fini dont les sous-groupes sont d'ordre premier (en russe), *Alg. Logika* **21** (1982) 553–618.
11. A. Pillay et B. Poizat, Corps et chirurgie, *J. Symbolic Logic* **60** (1995) 528–533.
12. B. Poizat, *Cours de Théorie des Modèles* (Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah, 1985).
13. B. Poizat, *Groupes Stables* (Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah, 1987).
14. B. Poizat, Quelques modestes remarques à propos d'une conséquence inattendue d'un résultat surprenant de Monsieur Frank Olaf Wagner, *J. Symbolic Logic* **66** (2001) 1637–1648.
15. J. Reineke, Minimale gruppen, *Z. Math. Logik* **21** (1975) 357–359.
16. F. O. Wagner, Minimal fields, *J. Symbolic Logic* **65** (2000) 1833–1835.
17. F. O. Wagner, Fields of finite Morley rank, *J. Symbolic Logic* **66** (2001) 703–706.
18. F. O. Wagner, Bad fields in positive characteristic, *Bull. London Math. Soc.* **35** (2003) 499–502.
19. F. O. Wagner, Groups in simple theories, Logic Colloquium 2001, Lecture Notes in Logic, Vol. 20 (Association for Symbolic Logic, 2005), pp. 440–467.