ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JEAN-YVES CHEMIN
CHAO-JIAN XU

Inclusions de Sobolev en calcul de Weyl-Hörmander et champs de vecteurs sous-elliptiques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 30, nº 6 (1997), p. 719-751
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1997_4_30_6_719_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 30, 1997, p. 719 à 751.

INCLUSIONS DE SOBOLEV EN CALCUL DE WEYL-HÖRMANDER ET CHAMPS DE VECTEURS SOUS-ELLIPTIQUES (*)

PAR JEAN-YVES CHEMIN ET CHAO-JIAN XU

ABSTRACT. – In this paper, we study Sobolev embedding theorem for a class of weighted Sobolev space defined by a system of vector fields satisfying the Hörmander condition.

Classification: 35H, 35S
Key Words: Degenerate elliptic operators, nonhomogeneous calculus, microlocal analysis.

RÉSUMÉ. – Dans cet article, nous étudions le problème des inclusions de Sobolev pour des espaces de Sobolev associés à un système de champs de vecteurs satisfaisant à la condition de Hörmander.

1. Introduction

On considère un système de champs de vecteurs $(P) = \{P_1, \cdots, P_m\}$, réels, indéfiniment différentiables sur un ouvert borné $\widetilde{\Omega}$ de $\mathbf{R}^n$, $n \geq 2$. Supposons que ce système satisfasse (P) la condition de Hörmander à l'ordre 2, *i.e.*

$$(H) \quad \begin{cases} P_1, \cdots, P_m \text{ avec leur commutateurs } [P_i, P_j] \\ i, j = 1, \cdots, m \text{ sont de rang maximal sur } \widetilde{\Omega}. \end{cases}$$

On note par $r(x)$ le rang de (P) et l'on pose

$$Q(x) = r(x) + 2(n - r(x)), \quad r_0 = \min_{x \in \widetilde{\Omega}} r(x) \quad \text{et} \quad Q_0 = \max_{x \in \widetilde{\Omega}} Q(x) = r_0 + 2(n - r_0),$$

l'entier Q_0 étant appelé la dimension homogène associé au système sous-elliptique (P). Comme dans [13] et [14], on peut définir une distance sous-elliptique $\rho(\cdot, \cdot)$ sur $\widetilde{\Omega}$ associée au système de champs de vecteurs (P) de la manière suivante: Pour $0 < \delta < 1$, $C(\delta)$ désigne l'ensemble des applications φ, lipschtiziennes de $[0, 1]$ dans $\widetilde{\Omega}$ telles que, pour presque tout t de $[0, 1]$, on ait

$$\varphi'(t) = \sum_{j=1}^{m} a_j(t) P_j(\varphi(t)) \quad \text{avec} \quad |a_j(t)| < \delta.$$

(*) Ce travail du second auteur est partiellement financé par la NNSF de Chine.

On définit pour $x, y \in \widetilde{\Omega}$,

$$\rho(x,y) = \inf\{\delta; \exists\varphi \in C(\delta), \text{avec } \varphi(0) = x, \varphi(1) = y\}, \tag{1}$$

et une famille de boules dites « sous-unitaires »

$$B(x,\delta) = \{y \in \widetilde{\Omega}; \rho(x,y) < \delta\}.$$

La condition (H) implique que, si $|x-y|$ est assez petit, on a

$$C^{-1}|x-y| \leq \rho(x,y) \leq C|x-y|^{\frac{1}{2}}.$$

Avec cette géometrie sous-elliptique, le système de champs de vecteurs (P) possède de nombreuses propriétés d'un système elliptique, comme par exemple, l'inégalité de Harnack, l'inégalité de Poincaré, le principe de maximum, les estimations sur le noyau de Green etc. Dans [6], est démontré que la paramétrixe de l'opérateur

$$\Delta_P \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{j=1}^{m} P_j^\star P_j$$

est un opérateur pseudo-différentiel d'une classe du calcul de Weyl-Hörmander. Cette démonstration nécessite la caractérisation en termes de calcul de Weyl-Hörmander des espaces de Sobolev associés au système sous-elliptique (P). Rappelons leur définition élémentaire dans le cas d'indices entiers, ainsi que celle des espaces de type BMO et Hölder associés à la distance ρ définie par le système sous-elliptique (P).

DÉFINITION 1.1. – *Pour $k \in \mathbf{N}, \Omega \subset\subset \widetilde{\Omega}$, on définit $H^k_{(P)}(\Omega)$ comme l'ensemble des fonctions f de $L^2(\Omega)$ telles que*

$$\|f\|^2_{H^k_{(P)}(\Omega)} \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{|J|\leq k} \|P^J f\|^2_{L^2(\Omega)} < \infty, \tag{2}$$

où si $J \in \{1, \cdots, m\}^\ell$, on a $|J| = \ell$ et $P^J = P_{j_1} \cdots P_{j_l}$.

Pour $0 < \alpha < 1$, on définit l'espace $C^{0,\alpha}_{(P)}(\Omega)$ comme étant l'ensemble des fonctions bornées f telles que

$$[f]^P_\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{x,y\in\Omega} \frac{|f(x)-f(y)|}{\rho(x,y)^\alpha} < +\infty, \tag{3}$$

et pour $k \in \mathbf{N}, 0 < \alpha < 1$, on pose

$$C^{k,\alpha}_{(P)}(\Omega) = \{f \in C^{0,\alpha}_{(P)}(\Omega); P^J f \in C^{0,\alpha}_{(P)}(\Omega), \forall |J| \leq k\}. \tag{4}$$

On a aussi une version de BMO et VMO adaptée à la distance sous-elliptique ρ.

DÉFINITION 1.2. – *On appelle $BMO^0_{(P)}(\Omega)$ l'espace défini par*

$$BMO^0_{(P)}(\Omega) \stackrel{\text{déf}}{=} \{f \in L^1_{loc}(\Omega)/\mathbf{C};\ \sup_{B(x,R)\subset\Omega} \frac{1}{|B(x,R)|}\int_{B(x,R)} |f(y) - f_B|dy < +\infty\},$$

où l'on a posé

$$f_B = \int_{B(x,R)} f(y)\frac{dy}{|B(x,R)|} \quad \textit{et} \quad B(x,R) = \{y \,/\, \rho(x,y) < R\}.$$

Et pour $k \in \mathbf{N}$, on a

$$BMO^k_{(P)}(\Omega) = \{f \,/\, P^J f \in BMO^0_{(P)}(\Omega); \forall |J| \leq k\}.$$

Enfin, on définit $VMO^k_{(P)}(\Omega)$ comme étant l'ensemble des fonctions f appartenant à l'espace $BMO^k_{(P)}(\Omega)$ telles que

$$\forall x \in \Omega\,,\ \forall J \,/\, |J| \leq k\,,\ \lim_{R\to 0}\int_{B(x,R)} |P^J f(y) - (P^J f)_B|\frac{dy}{|B(x,R)|} = 0.$$

Le but de cet article est d'établir une théorie complète des inclusions de Sobolev dans ce cadre, y compris dans les cas critiques. Des résultats partiels ont été obtenus précédemment par l'un des deux auteurs (voir [16] et [17]). Donnons ici une version du théorème général 3.3 dans le cas des espaces de Sobolev d'indice entier.

THÉORÈME 1.3. – *Supposons que le système de champs de vecteurs P satisfasse la condition de Hörmander à l'ordre 2. On a alors pour tout $\Omega \subset\subset \Omega' \subset\subset \widetilde{\Omega}$, les inclusions continues suivantes:*

$$k < \frac{Q_0}{2} \Rightarrow H^k_{(P)}(\Omega') \subset L^p(\Omega) \quad \textit{avec} \quad p = \frac{2Q_0}{Q_0 - 2k}.$$

Supposons que la dimension homogène Q_0 soit paire. Nous avons alors

$$H^{k+Q_0/2}_{(P)}(\Omega') \subset VMO^k_{(P)}(\Omega).$$

Maintenant, supposons que la dimension homogène Q_0 soit impaire. Nous avons alors

$$H^{k+\frac{Q_0+1}{2}}_{(P)}(\Omega') \subset C^{k,\frac{1}{2}}_{(P)}(\Omega).$$

Dans ce cas des indices entiers, des résultats d'inclusion de Sobolev dans l'espace VMO ont été obtenus notamment par B. Franchi, S. Gallot et R.I. Wheeden dans [7], et par P. Maheux et L. Saloff-Coste dans [12].

Nous voudrions dans cette introduction donner une idée de la méthode employée dans cet article. Pour cela, exposons brièvement une démonstration des inclusions de Sobolev usuelles. Il est bien connu que l'espace de Sobolev homogène $\dot{H}^s(\mathbf{R}^d)$ défini par

$$f \in \dot{H}^s \Leftrightarrow |f|_{\dot{H}^s} \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\int_{\mathbf{R}^d} |\xi|^{2s}|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

est continûment inclus dans L^p, c'est-à-dire que l'on a

$$\|f\|_{L^p} \leq C_s |f|_{\dot{H}^s} \quad \text{avec} \quad p = \frac{2d}{d-2s} \quad \text{et ce, dès que} \quad 0 \leq s < \frac{d}{2}. \tag{5}$$

De même, on sait que, pour toute fonction u suffisamment régulière, on a

$$\|f\|_{BMO} \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_B \frac{1}{|B|} \int_B |f - f_B| dx \leq |f|_{\dot{H}^{\frac{d}{2}}}. \tag{6}$$

où B désigne une boule quelconque de la métrique euclidienne. Enfin, on a, pour tout s tel que $s - d/2$ soit un réel strictement positif non entier,

$$\sup_{\substack{(x,y)\in\mathbf{R}^d, x\neq y \\ |\alpha|=k}} \frac{|\partial^\alpha f(x) - \partial^\alpha f(y)|}{|x-y|^\epsilon} \leq |f|_{\dot{H}^s} \quad \text{avec} \quad k = \left[s - \frac{d}{2}\right] \quad \text{et} \quad \epsilon = s - \frac{d}{2} - k. \tag{7}$$

Pour démontrer ces trois inégalités bien connues, nous allons décomposer f en termes de « basses » et « hautes » fréquences, en posant

$$f = f_{1,A} + f_{2,A} \quad \text{avec} \quad f_{1,A} = \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{1}_{B(0,A)}\widehat{f}) \quad \text{et} \quad f_{2,A} = \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{1}_{B^c(0,A)}\widehat{f}). \tag{8}$$

Commençons par démontrer l'assertion (7). Pour ce faire, écrivons que

$$|\partial^\alpha f(x) - \partial^\alpha f(y)| \leq \|\nabla \partial^\alpha f_{1,A}\| |x-y| + 2\|\partial^\alpha f_{2,A}\|_{L^\infty}.$$

Il est clair que

$$\begin{aligned}
\|\nabla \partial^\alpha f_{1,A}\|_{L^\infty} &\leq \int_{\mathbf{R}^n} |\xi|^{k+1} |\widehat{f}_{1,A}(\xi)| d\xi \\
&\leq \left(\int_{|\xi|\leq A} |\xi|^{2k+2-2s} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} |f|_{H^s} \\
&\leq C_s A^{1-\epsilon} |f|_{H^s}.
\end{aligned}$$

De même, on a

$$\|\partial^\alpha f_{2,A}\|_{L^\infty} \leq C_s A^{-\epsilon} |f|_{H^s}.$$

On en déduit alors que

$$|\partial^\alpha f(x) - \partial^\alpha f(y)| \leq C_s \big(|x-y| A^{1-\epsilon} + A^{-\epsilon}\big) |f|_{H^s}.$$

En choisissant $A = |x-y|^{-1}$, on démontre l'inégalité (7). La démonstration de l'inclusion dans BMO est au moins aussi simple. Grâce à l'inégalité de Hölder, on peut écrire

$$\int_B |f - f_B| \frac{dx}{|B|} \leq \|f_{1,A} - (f_{1,A})_B\|_{L^2(B, \frac{dx}{|B|})} + \frac{2}{|B|^{\frac{1}{2}}} \|f_{2,A}\|_{L^2}.$$

En désignant par R le rayon de la boule B, on a, d'après la définition (8) de $f_{1,A}$ que

$$
\begin{aligned}
\|f_{1,A} - (f_{1,A})_B\|_{L^2(B,\frac{dx}{|B|})} &\leq R\|\nabla f_{1,A}\|_{L^\infty} \\
&\leq R \int_{\mathbf{R}^d} |\xi|^{1-\frac{d}{2}} |\xi|^{\frac{d}{2}} |\widehat{f}_{1,A}(\xi)| d\xi \\
&\leq RA|f|_{H^{\frac{d}{2}}}.
\end{aligned}
$$

On en déduit que

$$
\int_B |f - f_B| \frac{dx}{|B|} \leq RA|f|_{H^{\frac{d}{2}}} + C(AR)^{-\frac{d}{2}} \left(\int_{|\xi| \geq A} |\xi|^d |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}.
$$

En choisissant $A = R^{-1}$, on obtient l'inégalité (6). La démonstration de l'assertion (5) que nous allons présenter ici est basée sur une méthode issue de l'interpolation réelle. On commence par écrire que

$$
\|f\|_{L^p}^p = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \mu(|f| > \lambda) d\lambda.
$$

On utilise la décomposition (8). D'après l'inégalité triangulaire, on a, pour tout couple de réels strictement positifs (A, λ),

$$
(|f| > \lambda) \subset (2|f_{1,A}| > \lambda) \cup (2|f_{2,A}| > \lambda).
$$

On a clairement que

$$
\begin{aligned}
\|f_{1,A}\|_{L^\infty} &\leq \|\widehat{f_{1,A}}\|_{L^1} \\
&\leq |f|_{\dot{H}^s} \left(\int_{B(0,A)} |\xi|^{-2s} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{C}{d-2s} A^{\frac{d}{2}-s} |f|_{\dot{H}^s}.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

D'après l'inégalité (9) ci-dessus, on a

$$
A = A_\lambda \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\frac{\lambda(d-2s)}{4C|f|_{\dot{H}^s}} \right)^{\frac{p}{d}} \Rightarrow \mu\left(|f_{1,A}| > \frac{\lambda}{2} \right) = 0.
$$

On en déduit donc que

$$
\|f\|_{L^p}^p \leq p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \mu(2|f_{2,A_\lambda}| > \lambda) d\lambda.
$$

Il est bien connu (c'est l'inégalité de Bienaimé-Tchebychev) que

$$
\mu\left(|f_{2,A_\lambda}| > \frac{\lambda}{2} \right) \leq 4 \frac{\|f_{2,A}\|_{L^2}^2}{\lambda^2}.
$$

Il en résulte donc que, pour un tel choix de A, on a

$$\|f\|_{L^p}^p \leq 4p \int_0^\infty \lambda^{p-3} \|f_{2,A_\lambda}\|_{L^2}^2 d\lambda. \tag{10}$$

Mais, on sait que la transformée de Fourier est (à une constante près) une isométrie de L^2; on a donc

$$\|f_{2,A_\lambda}\|_{L^2}^2 = (2\pi)^d \int_{(|\xi| \geq A_\lambda)} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

D'après l'inégalité (10), il vient

$$\|f\|_{L^p}^p \leq 4p(2\pi)^d \int_{\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d} \lambda^{p-3} \mathbf{1}_{\{(\lambda,\xi)/\ |\xi| \geq A_\lambda\}}(\lambda, \xi) |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi d\lambda.$$

Or, par définition de A_λ, on a

$$|\xi| \geq A_\lambda \Leftrightarrow \lambda \leq C_\xi \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{4C|f|_{\dot{H}^s}}{d-2s} |\xi|^{\frac{d}{p}}.$$

D'après le théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^p}^p &\leq 4p(2\pi)^d \int_{\mathbf{R}^d} \left(\int_0^{C_\xi} \lambda^{p-3} d\lambda \right) |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq 4 \frac{p(2\pi)^d}{p-2} \left(\frac{4C}{d-2s} \right)^{p-2} |f|_{\dot{H}^s}^{p-2} \int_{\mathbf{R}^d} |\xi|^{\frac{d(p-2)}{p}} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi.
\end{aligned}$$

Comme $2s = \dfrac{d(p-2)}{p}$, on a démontré le théorème d'inclusion de Sobolev.

Dans cet article, nous nous employerons à remplacer $|\xi|$ dans les démonstrations ci-dessus, par un poids relatif à une métrique de Hörmander, c'est-à-dire à remplacer $|\xi|$ par une fonction $m(x, \xi)$ vérifiant des propriétés convenables.

La structure de l'article sera la suivante:

dans la deuxième section, nous rappellerons les bases du calcul de Weyl-Hörmander et de la théorie générale des espaces de Sobolev telle qu'elle est construite dans [3]. Le lemme qui conclut cette section est une version localisée dans l'espace des x du lemme de presque-orthogonalité de Cotlar.

La troisième section est dévolue à l'énoncé précis et complet du théorème qui contient le théorème 1.3.

Dans la quatrième section, nous définirons un opérateur qui sera l'équivalent, en calcul de Weyl-Hörmander et pour un poids m donné, de l'opérateur de troncature en fréquences utilisé dans la démonstration des inclusions de Sobolev classiques présentée ci-dessus. Cet opérateur sera notamment infiniment régularisant dans une chaîne d'espaces de Sobolev.

Dans la cinquième section, nous utiliserons l'opérateur construit dans la section précédente pour démontrer un résultat général sur les inclusions de Sobolev dans L^p en calcul de Weyl-Hörmander.

Enfin la sixième section est consacrée à la démonstration des inclusions de Sobolev relatifs à un système sous-elliptique dans les espaces de type VMO et höldériens. Outre l'opérateur de régularisation défini dans la quatrième section, les inégalités de type Poincaré dans le cadre des métriques sous-riemanniennes joueront un rôle important.

2. Calcul de Weyl-Hörmander

Dans cette section, nous allons présenter les concepts et théorèmes de base du calcul de Weyl-Hömander (voir [9]). Le procédé de quantification de Weyl que nous employerons dans cet article consiste à associer à une fonction appartenant à la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{2n})$ l'opérateur défini par

$$a^w u(x) \stackrel{\text{déf}}{=} (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^{2n}} e^{i\langle x-z,\zeta\rangle} a\left(\frac{x+z}{2},\zeta\right) u(z)dzd\zeta.$$

On désigne par $[X,Y]$ la forme symplectique définie par

$$\begin{cases} \mathbf{R}^{2n}\times\mathbf{R}^{2n} & \to \mathbf{R} \\ (X,Y) & \mapsto [X,Y] = \langle y,\xi\rangle - \langle x,\eta\rangle \quad \text{si} \quad X=(x,\xi) \quad \text{et} \quad Y=(y,\eta). \end{cases}$$

On a la formule de composition suivante

$$a^w \circ b^w = (a\# b)^w \text{ avec } (a\# b)(X) = \pi^{-2n} \int_{\mathbf{R}^{2n}\times\mathbf{R}^{2n}} e^{-2i[X-Y_1,X-Y_2]} a(Y_1)b(Y_2)dY_1dY_2.$$

Le calcul de Weyl-Hörmander vise à étendre à une classe aussi large que possible ce procédé de quantification. Pour cela, rappelons le concept de métrique de Hörmander.

DÉFINITION 2.1. – *Soit g une application mesurable de $\mathbf{R}^{2n}$ dans l'ensemble des formes quadratiques définies positives sur $\mathbf{R}^{2n}$. On dit que g est une métrique de Hörmander si et seulement si les trois conditions ci-dessus sont satisfaites.*

- *la condition de lenteur qui exige l'existence d'une constance C_0 telle que*

$$g_X(X-Y) \le \frac{1}{C_0} \Rightarrow C_0^{-1} g_X \le g_Y \le C_0 g_X\,; \tag{11}$$

- *le principe d'incertitude qui affirme que l'on doit avoir $g_X \le g_X^\sigma$, la métrique g_X^σ étant définie par*

$$g_X^\sigma(T) \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{W\neq 0} \frac{[T,W]}{g_X(W)}\;; \tag{12}$$

- *la condition de tempérance qui exige l'existence d'un entier N_0 tel que l'on ait, pour tout couple (X,Y) de $\mathbf{R}^{2n}\times\mathbf{R}^{2n}$,*

$$C_0^{-1}(1+g_Y^\sigma(X-Y))^{-N_0} g_X \le g_Y \le C_0(1+g_Y^\sigma(X-Y))^{N_0} g_X. \tag{13}$$

Définissons maintenant le concept de g-poids.

DÉFINITION 2.2. – *Soit g une métrique de Hörmander, on dit qu'une fonction mesurable m définie sur $\mathbf{R}^{2n}$ à valeurs dans $\mathbf{R}_+^\star$ est un g-poids si et seulement si elle vérifie une condition de lenteur, à savoir*

$$\exists \widetilde{C} \,/\, g_X(X-Y) \le \frac{1}{\widetilde{C}} \Rightarrow \left(\frac{m(X)}{m(Y)}\right)^{\pm 1} \le \widetilde{C} \tag{14}$$

et une condition de tempérance, c'est-à-dire

$$\exists \widetilde{N} \,/\, \left(\frac{m(X)}{m(Y)}\right)^{\pm 1} \leq \widetilde{C}(1 + g_Y^\sigma(X-Y))^{\widetilde{N}}. \tag{15}$$

Lorsque l'on se donne une métrique de Hörmander g, on fixe un réel strictement positif r strictement inférieur à C_0^{-1}, la constance C_0 étant celle intervenant dans les assertions (11) et (13). On désignera dans toute la suite par U_X la g_X-boule de centre X et de rayon r, c'est-à-dire

$$U_X \stackrel{\text{déf}}{=} \{Y \in \mathbf{R}^{2n} \,/\, g_X(Y-X) < r\}.$$

Pour alléger les notations, la notation de la dépendance en r sera systématiquement omise. Il est alors commode de définir la fonction $\triangle$ suivante

$$\begin{aligned} \triangle(X,Y) &\stackrel{\text{déf}}{=} 1 + \max\{g_X^\sigma(U_X - U_Y), g_Y^\sigma(U_X - U_Y)\} \quad \text{avec} \\ g_X^\sigma(U_X - U_Y) &= \inf_{(X',Y') \in U_X \times U_Y} g_X^\sigma(X' - Y'). \end{aligned} \tag{16}$$

Comme il est démontré dans [4], on peut remplacer les conditions (11) et (13) par

$$\frac{1}{C_0}\triangle(X,Y)^{-N_0} g_X \leq g_Y \leq C_0 \triangle(X,Y)^{N_0} g_X. \tag{17}$$

De même, on peut remplacer les conditions (14) et (15) par

$$\exists \widetilde{C} \,/\, \left(\frac{m(X)}{m(Y)}\right)^{\pm 1} \leq \widetilde{C} \triangle(X,Y)^{\widetilde{N}}. \tag{18}$$

L'une des propriétés fondamentales de la fonction $\triangle$, visiblement symétrique, est décrite par le lemme suivant, démontré dans [4].

LEMME 2.3. – *Il existe un entier N_1 tel que*

$$\sup_{X \in \mathbf{R}^{2n}} \int_{Y \in \mathbf{R}^{2n}} \triangle(X,Y)^{-N_1} |g_Y|^{\frac{1}{2}} dY < \infty, \tag{19}$$

où $|g_Y|^{\frac{1}{2}}$ désigne le déterminant de la forme quadratique g_Y dans une quelconque base symplectique de $\mathbf{R}^{2n}$.

Définissons maintenant les classes de symboles associées à une métrique de Hörmander g et à un g-poids m.

DÉFINITION 2.4. – *Soient g une métrique de Hörmander et m un g-poids. On désigne par $S(m,g)$ l'ensemble des fonctions a indéfiniment différentiables telles que, pour tout entier k,*

$$\|a\|_{k;S(m,g)} \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{\substack{j \leq k, X \in \mathbf{R}^{2n} \\ g_X(T_j) \leq 1}} |\partial_{T_1} \cdots \partial_{T_j} a(X)| m(X) < \infty$$

où $\partial_T a$ désigne l'application $\langle da, T \rangle$.

Citons tout de suite deux résultats fondamentaux démontrés dans [9]. L'opération $\#$ se prolonge au produit de deux classes de symboles et envoie continûment $S(m, g) \times S(m', g)$ dans $S(mm', g)$. De plus, si a appartient à $S(1, g)$, alors a^w est un opérateur borné sur L^2. La démonstration de ces résultats est basée sur un procédé de localisation dans $\mathbf{R}^{2n}$, procédé décrit par le lemme suivant.

LEMME 2.5. – *Soit g une métrique de Hörmander. Il existe une famille $(\varphi_Y)_Y \mathbf{R}^{2n}$ de fonctions indéfiniment différentiables, bornée dans $S(1, g)$ telle que, pour tout Y de $\mathbf{R}^{2n}$, la fonction φ_Y soit supportée dans la boule U_Y et telle que*

$$\forall X \in \mathbf{R}^{2n}, \quad \int_{Y \in \mathbf{R}^{2n}} \varphi_Y(X) |g_Y|^{\frac{1}{2}} dY = 1. \tag{20}$$

CONVENTION. – Dans toute la suite de l'article, étant donné une métrique de Hörmander g, nous choisirons et désignerons par (φ_Y) une famille de fonctions vérifiant (20).

Il est clair que le résultat de l'opération $\#$ entre deux fonctions à support compact ne donne pas une fonction à support compact. Le concept de confinement surmonte cette difficulté. Nous rappelons ici la démarche de [4].

DÉFINITION 2.6. – *Soient γ une forme quadratique définie positive sur $\mathbf{R}^{2n}$ telle que $\gamma^\sigma \geq \gamma$ et Y un point de $\mathbf{R}^{2n}$. L'espace des fonctions γ-confinées près de Y, noté $Conf(\gamma, Y)$ est l'espace $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{2n})$ muni de la famille de semi-normes*

$$\|a\|_{k,Conf(\gamma,Y)} \overset{\text{déf}}{=} \sup_{\substack{X \in \mathbf{R}^{2n} \\ j \leq k, \gamma(T_j) \leq 1}} \left(1 + \gamma^\sigma(X - B_\gamma(Y, r))\right)^{\frac{k}{2}} |\partial_{T_1} \cdots \partial_{T_j} a(X)|.$$

Cette propriété, contrairement est celle d'être supportée dans $B_\gamma(Y, r)$ est stable par rapport à l'opération $\#$. Cette stabilité est précisément décrite par le théorème 3.2.1. de [4] que nous rappelons ici.

THÉORÈME 2.7. – *Soient g une métrique de Hörmander et a et b deux fonctions de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{2n})$. Pour tout couple d'entiers (k, N), il existe un entier ℓ et une constante C telle que, pour tout couple (Y, Z) de $\mathbf{R}^{2n} \times \mathbf{R}^{2n}$, on ait*

$$\|a\#b\|_{k,Conf(g_Y,Y)} + \|a\#b\|_{k,Conf(g_Z,Z)} \leq C\triangle(Y, Z)^{-N} \|a\|_{\ell,Conf(g_Y,Y)} \|b\|_{\ell,Conf(g_Z,Z)}.$$

Nous ferons, notamment à la fin de cette section et dans la section 4, un usage répété du concept de famille uniformément confinée que voici.

DÉFINITION 2.8. – *Soit g une métrique de Hömander et $(a_Y)_{\mathbf{R}^{2n}}$ une famille de fonctions de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{2n})$. On dit que cette famille est uniformément confinée si et seulement si, pour tout entier k,*

$$\|(a_Y)\|_{k,Conf(g)} \overset{\text{déf}}{=} \sup_{Y \in \mathbf{R}^{2n}} \|a_Y\|_{k,Conf(g_Y,Y)} < \infty.$$

Le lemme suivant, démontré dans [4], nous sera très utile.

LEMME 2.9. – *Soient g une métrique de Hörmander et m un g-poids. Pour tout entier k, il existe une constante C et un entier ℓ, ne dépendant que de k, des constantes C_0 et $\widetilde{C}$ et des entiers N_0, $\widetilde{N}$ et N_1 présents dans les relations* (17), (18) *et* (19) *vérifiant la propriété suivante.*

Si $(\theta_Y)_{\mathbf{R}^{2n}}$ est une famille uniformément confinée et si a appartient à $S(m,g)$, alors on a

$$\left\| \left(\frac{a\#\theta_Y}{m(Y)} \right) \right\|_{k,Conf(g)} \leq C\|a\|_{\ell,S(m,g)} \|(\theta_Y)\|_{\ell,Conf(g)}.$$

Réciproquement, si $(\theta_Y)_{Y\in\mathbf{R}^{2n}}$ est une famille uniformément confinée, alors

$$\int_{\mathbf{R}^{2n}} m(Y)\theta_Y(X)|g_Y|^{\frac{1}{2}}dY \in S(m,g).$$

Venons-en à la définition des espaces de Sobolev. La définition la plus naturelle dans ce cadre est la suivante.

DÉFINITION 2.10 – *Soient g une métrique de Hörmander et m un g-poids. On appelle espace de Sobolev relatif à m et l'on note $H(m,g)$ l'ensemble des distibutions tempérées u sur $\mathbf{R}^{2n}$ telle que*

$$\forall a \in S(m,g)\,,\ a^w u \in L^2.$$

Pour étudier ces espaces, il est commode, bien que non absolument nécessaire, de faire une hypothèse supplémentaire sur la métrique de Hörmander g.

DÉFINITION 2.11. – *On dit qu'une métrique de Hörmander g est fortement tempérée si et seulement si il existe une fonction δ de $\mathbf{R}^{2n}\times\mathbf{R}^{2n}$ dans $\mathbf{R}_+$ vérifiant l'inégalité triangulaire et telle qu'il existe C_2 et N_2 telle que*

$$C_2^{-1}(1+\delta(X,Y))^{-N_2}g_Y \leq g_X \leq C_2(1+\delta(X,Y))^{N_2}g_Y \quad et$$

$$1+\delta(X,Y) \leq C_2\triangle(X,Y)^{N_2}.$$

On dit qu'une métrique de Hörmander g est dominée par une métrique fortement tempérée si et seulement si il existe une métrique de Hörmander fortement tempérée $\widetilde{g}$, un entier N' et une constante C telle que l'on ait

$$g_X \leq \widetilde{g}_X \quad et \quad C^{-1}(1+\widetilde{g}_Y^\sigma(X-B_{\widetilde{g}}(Y,r)))^{-N'}g_Y \leq g_X \leq C(1+\widetilde{g}_Y^\sigma(X-B_{\widetilde{g}}(Y,r)))^{N'}g_Y,$$

et ce pour tout réel strictement positif assez petit.

La raison de l'introduction de cette notion tient dans le fait que, pour une telle métrique, nous avons la propriété suivante, qui est le théorème 7.8 de [3].

THÉORÈME 2.12. – *Soit g une métrique de Hömander dominée par une métrique fortement tempérée. Considérons une famille (φ_Y) vérifiant les conclusions du lemme 2.5, il existe une famille (ψ_Y) uniformément confinée telle que,*

$$\forall X \in \mathbf{R}^{2n}\,,\ \int_{Y\in\mathbf{R}^{2n}} (\psi_Y\#\varphi_Y)(X)|g_Y|^{\frac{1}{2}}dY = 1. \tag{21}$$

Une fois établi ce résultat, on peut donner une caractérisation de type "Littlewood-Paley" des espaces de Sobolev, démontrée dans [3].

THÉORÈME 2.13. – *Soient g une métrique de Hörmander dominée par une métrique fortement tempérée et m un g-poids. L'espace $H(m,g)$ est l'ensemble des distributions tempérées u telles que*

$$\|u\|_{H(m,g)} \overset{\text{déf}}{=} \left(\int m(Y)^2 \|\varphi_Y^w u\|_{L^2}^2 |g_Y|^{\frac{1}{2}} dY\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Dans le cadre d'une métrique de Hörmander quelconque, le théorème ci-dessus est encore vrai, à ceci près qu'il faut remplacer l'intégrale ci-dessus par une série rapidement convergente d'intégrales de même type.

Comme il est démontré dans [3], l'espace $H(1,g)$ est l'espace L^2. De plus, l'espace $H(m,g)$ est indépendant de la métrique g, au sens où, si $\widetilde{g}$ est une métrique de Hörmander comparable à g, et que m est un $\widetilde{g}$-poids, alors $H(m,g) = H(m,\widetilde{g})$.

Le théorème suivant nous sera utile; il est extrait du corollaire 6.7 de [3].

THÉORÈME 2.14. – *Soient g une métrique de Hörmander dominée par une métrique fortement tempérée et m un g-poids. Il existe un symbole $\mathcal{M}$ appartenant à $S(m,g)$ et une constante C telle que*

$$u \in H(m,g) \Leftrightarrow \mathcal{M}^w u \in L^2 \quad \textit{et} \quad C^{-1}\|u\|_{H(m,g)} \leq \|\mathcal{M}^w u\|_{L^2} \leq C\|u\|_{H(m,g)}.$$

Ici, nous sommes motivés dans des résultats du type inclusion de Sobolev. L'espace des x joue donc un rôle privilégié. C'est pourquoi nous ferons l'hypothèse que la métrique g est scindée.

DÉFINITION 2.15. – *Soit g une métrique de Hörmander, elle est dite scindée si et seulement si l'on a, pour tout X de $\mathbf{R}^{2n}$,*

$$g_X(dx,d\xi)^2 = g_{1,X}(dx^2) + g_{2,X}(d\xi^2).$$

Remarquons que si g est scindée, alors la métrique g^σ définie par la relation (12) vérifie alors

$$g_X^\sigma(dx,d\xi)^2 = g_{2,X}^{-1}(dx^2) + g_{1,X}^{-1}(d\xi^2).$$

Le principe d'incertidude se traduit par

$$g_{1,X} \leq g_{2,X}^{-1} \quad \text{et bien sûr} \quad g_{2,X} \leq g_{1,X}^{-1}. \tag{22}$$

CONVENTION. – Dans tout la suite, nous conviendrons que g désigne une métrique de Hörmander, scindée et dominée par une métrique fortement tempérée.

Dans la théorie du calcul de Weyl-Hörmander, les lemmes de type Cotlar sont très importants, voir par exemple [9] et [4]. Nous allons démontrer ici un lemme de type Cotlar, qui prend aussi en compte de manière particulière la localisation en espace.

LEMME 2.16 **(de Cotlar localisé).** – *Soient $(\theta_Y)_{Y\in\mathbf{R}^{2n}}$ une famille uniformément confinée de symboles et $(u_Y)_{Y\in\mathbf{R}^{2n}}$ une famille de fonctions de $L^2(\mathbf{R}^n)$ telle que*

$$\int \|u_Y\|_{L^2}^2 |g_Y|^{\frac{1}{2}} dY < +\infty. \tag{23}$$

Alors, quelque soit N, il existe une constante C et un entier k tels que

$$\begin{aligned}\left\|\int_{\mathbf{R}^{2n}} \theta_Y^w u_Y |g_Y|^{\frac{1}{2}} dY\right\|_{L^2}^2 &\leq C\|(\theta_Y)\|_{k,Conf(g)}^2 \\ &\quad\times \int_{Y\in\mathbf{R}^{2n}} \left\|\left(1+g_{2,Y}^{-1}(\cdot - U_Y)\right)^{-N} u_Y\right\|_{L^2}^2 |g_Y|^{\frac{1}{2}} dY.\end{aligned} \tag{24}$$

Pour démontrer cela, posons

$$I = \int_{\mathbf{R}^{2n}\times\mathbf{R}^{2n}} (\theta_Y^w u_Y | \theta_Z^w u_Z)_{L^2} |g_Y|^{\frac{1}{2}} |g_Z|^{\frac{1}{2}} dY dZ.$$

D'après les propriétés de la quantification de Weyl, on a

$$I = \int_{\mathbf{R}^{2n}\times\mathbf{R}^{2n}} \left((\overline{\theta}_Z \# \theta_Y)^w u_Y | u_Z\right)_{L^2} |g_Y|^{\frac{1}{2}} |g_Z|^{\frac{1}{2}} dY dZ.$$

Définissons l'opérateur différentiel à coefficients $L_{Y,Z}$ par

$$L_{Y,Z} f(\xi) = f(\xi) - \sum_{1\leq i,j\leq n} (g_{2,Y} + g_{2,Z})_{i,j}^{-1} \frac{\partial^2}{\partial\xi_i \partial\xi_j} f(\xi).$$

Cet opérateur $L_{Y,Z}$ est une somme finie de composées de dérivation de $g_{2,Y}+g_{2,Z}$-longueur plus petite que 1. De plus, on a

$$\left(L_{Y,Z}(e^{i\langle t,\cdot\rangle})\right)(\tau) = (1 + (g_{2,Y}+g_{2,Z})^{-1}(t)) e^{i\langle t,\tau\rangle}. \tag{25}$$

En posant $\Theta_{Y,Z} = \overline{\theta}_Z \# \theta_Y$, on peut écrire, grâce à des intégrations par parties que, pour tout entier N,

$$\begin{aligned} I_{Y,Z} &\overset{\text{déf}}{=} \int (\Theta_{Y,Z}^w u_Y)(x) u_Z(x) dx \\ &= \int e^{i\langle x-t,\tau\rangle} \Theta_{Y,Z}\left(\frac{x+t}{2},\tau\right) u_Y(t) u_Z(x) dx dt d\tau \\ &= \int (1 + (g_{2,Y}+g_{2,Z})^{-1}(x-t))^{-N-n} \left(L_{Y,Z}^{N+n} e^{i\langle x-t,\tau\rangle}\right) \Theta_{Y,Z}\left(\frac{x+t}{2},\tau\right) \\ &\qquad\qquad \times u_Y(t) u_Z(x) dx dt d\tau \\ &= \int (1 + (g_{2,Y}+g_{2,Z})^{-1}(x-t))^{-N-n} e^{i\langle x-t,\tau\rangle} L_{Y,Z}^{N+n} \Theta_{Y,Z}\left(\frac{x+t}{2},\tau\right) \\ &\qquad\qquad \times u_Y(t) u_Z(x) dx dt d\tau. \end{aligned} \tag{26}$$

D'après le théorème 2.7, pour tout entier N, il existe un entier k et une constante C telle que

$$\begin{aligned}&\|L_{Y,Z}^{N+n}(\Theta_{Y,Z})\|_{N+n,Conf(g_Y,Y)} + \|L_{Y,Z}^{N+n}(\Theta_{Y,Z})\|_{N+n,Conf(g_Z,Z)}\\ &\quad\leq C\triangle(Y,Z)^{-N_1}\|\theta_Y\|_{k,Conf(g_Y,Y)}\|\theta_Y\|_{k,Conf(g_Z,Z)},\end{aligned}$$

ce qui signifie en particulier que

$$\begin{aligned}&\left|L_{Y,Z}^{N+n}\Theta_{Y,Z}\left(\frac{x+t}{2},\tau\right)\right| \leq C\triangle(Y,Z)^{-N_1}\left(1+g_Y^\sigma\left(\left(\frac{x+t}{2},\tau\right)-U_Y\right)\right)^{-\frac{N+n}{2}}\\ &\quad\times\left(1+g_Z^\sigma\left(\left(\frac{x+z}{2},\tau\right)-U_Z\right)\right)^{-\frac{N+n}{2}}.\end{aligned}$$

On déduit alors de (26) que l'on a

(27)
$$\begin{aligned}|I_{Y,Z}| \leq & C\triangle(Y,Z)^{-N_1}\\ &\times\int\left(1+g_Y^\sigma\left(\left(\frac{x+t}{2},\tau\right)-U_Y\right)\right)^{-\frac{N+n}{2}}(1+(g_{2,Y}^{-1}(x-t))^{-\frac{N+n}{2}}|u_Y(t)|\\ &\times\left(1+g_Z^\sigma\left(\left(\frac{x+t}{2},\tau\right)-U_Z\right)\right)^{-\frac{N+n}{2}}(1+(g_{2,Z}^{-1}(x-t))^{-\frac{N+n}{2}}|u_Z(x)|dxdtd\tau\end{aligned}$$

La métrique g étant scindée, il vient, en convenant que $Y=(y,\eta)$,

$$1+g_{2,Y}(\tau-\eta)\leq C\left(1+g_Y\left(\left(\frac{x+t}{2},\tau\right)-U_Y\right)\right).$$

D'après le principe d'incertitude, on en déduit que

$$1+g_{2,Y}(\tau-\eta)\leq C\left(1+g_Y^\sigma\left(\left(\frac{x+t}{2},\tau\right)-U_Y\right)\right). \tag{28}$$

En utilisant à nouveau que la métrique g est scindée, on écrit que

$$\begin{aligned}g_{2,Y}^{-1}(t-U_Y) &\leq \frac{1}{2}g_{2,Y}^{-1}(x-t)+2g_{2,Y}^{-1}\left(\left(\frac{x+t}{2},\tau\right)-U_Y\right)\\ &\leq \frac{1}{2}g_{2,Y}^{-1}(x-t)+2g_Y^\sigma\left(\left(\frac{x+t}{2},\tau\right)-U_Y\right).\end{aligned}$$

D'où il vient que

$$(1+g_{2,Y}^{-1}(t-U_Y))^{\frac{N}{2}}\leq C(1+g_{2,Y}^{-1}(x-t))^{\frac{N}{2}}\left(1+g_Y^\sigma\left(\left(\frac{x+t}{2},\tau\right)-U_Y\right)\right)^{\frac{N}{2}}.$$

De cette inégalité et de l'inégalité (28), il résulte que, pour tout Y de $\mathbf{R}^{2n}$, on a

$$\begin{aligned}&(1+g_{2,Y}^{-1}(x-t))^{-\frac{N+n}{2}}\left(1+g_Y^\sigma\left(\left(\frac{x+t}{2},\tau\right)-U_Y\right)\right)^{-\frac{N+n}{2}}\\ &\quad\leq C(1+g_{2,Y}^{-1}(t-U_Y))^{-\frac{N}{2}}(1+g_{2,Y}^{-1}(x-t))^{-\frac{n}{2}}(1+g_{2,Y}(\tau-\eta))^{-\frac{n}{2}}\end{aligned}$$

En reportant cette inégalité dans (27), on obtient

$$|I_{Y,Z}| \le C\triangle(Y,Z)^{-N_1} \int (1+g_{2,Y}^{-1}(x-t))^{-\frac{n}{2}}(1+g_{2,Y}(\tau-\eta))^{-\frac{n}{2}}\mathcal{U}_Y(t)$$
$$\times (1+g_{2,Z}^{-1}(x-t))^{-\frac{n}{2}}(1+g_{2,Z}(\tau-\zeta))^{-\frac{n}{2}}\mathcal{U}_Z(x)dxdtd\tau.$$

où $\mathcal{U}_Y$ est définie par

$$\mathcal{U}_Y(t) \stackrel{\text{déf}}{=} (1+g_{2,Y}^{-1}(t-U_Y))^{-\frac{N}{2}}|u_Y(t)|.$$

L'inégalité de Schwarz implique que

$$|I_{Y,Z}| \le C\triangle(Y,Z)^{-N_1} J_Y^{\frac{1}{2}} J_Z^{\frac{1}{2}} \quad \text{avec}$$
$$J_Y \stackrel{\text{déf}}{=} \int (1+g_{2,Y}^{-1}(x-t))^{-n}(1+g_{2,Y}(\tau-\eta))^{-n}\mathcal{U}_Y(t)^2 dxdtd\tau.$$

En posant le changement de variables,

$$x' = g_{2,Y}^{-\frac{1}{2}}(x-t)\,,\ \tau' = g_{2,Y}^{\frac{1}{2}}(\tau-\eta) \quad \text{et} \quad t' = t,$$

dont le jacobien 1, on trouve que

$$J_Y \le C\|(1+g_{2,Y}^{-1}(\cdot - U_Y))^{-N}u_Y\|_{L^2}^2.$$

Ainsi donc, nous avons démontré que

$$|I_{Y,Z}| \le C\triangle(Y,Z)^{-N_1}\|(1+g_{2,Y}^{-1}(\cdot - U_Y))^{-N}u_Y\|_{L^2}\|(1+g_{2,Z}^{-1}(\cdot - U_Z))^{-N}u_Z\|_{L^2}.$$

En appliquant l'inégalité de Schwarz pour la mesure

$$\triangle(Y,Z)^{-N_1}|g_Y|^{\frac{1}{2}}|g_Z|^{\frac{1}{2}}dYdZ,$$

il vient

$$I^2 \le \int \|(1+g_{2,Y}^{-1}(\cdot - U_Y))^{-N}u_Y\|_{L^2}^2 \triangle(Y,Z)^{-N_1}|g_Y|^{\frac{1}{2}}|g_Z|^{\frac{1}{2}}dYdZ.$$

La condition (19), qui est

$$\sup_Y \int_Z \triangle(Y,Z)^{-N_1}|g_Z|^{\frac{1}{2}}dZ \le C$$

implique le lemme.

3. Énoncés des théorèmes

Pour énoncer nos théorèmes, nous définissons d'abord les espaces de fonctions associés au système de champs de vecteurs (P).

Pour étudier les espaces de fonctions ci-dessus, on va définir comme dans [6] une métrique de Hörmander et des poids admissibles associés au système de champs de vecteurs (P). Nous faisons un prolongement elliptique des champs de vecteurs du système (P) en dehors de Ω. Choisissons une fonction de troncature $\varphi \in C_0^\infty(\widetilde{\Omega}), 0 \leq \varphi \leq 1, \varphi(x) = 1$ sur Ω, on définit alors le système $(\widetilde{P})$ sur $\mathbf{R}^n$ par

$$(29) \qquad \widetilde{P}_j = \varphi P_j\,, \quad j = 1, \cdots, m \quad \text{et} \quad \widetilde{P}_{j+m} = (1 - \varphi(x))\partial_{x_j}\,, \quad j = 1, \cdots, n.$$

Le sytème $(\widetilde{P}_j)_{1\leq j\leq m+n}$ satisfait la condition de Hörmander à l'ordre 2 sur $\mathbf{R}^n$. Il existe $\Omega \subset\subset \Omega' \subset\subset \widetilde{\Omega}$, tel que $(\widetilde{P}_j)_{1\leq j\leq m}|_{\Omega'} = \varphi(P_j)_{1\leq j\leq m}$ avec $1/2 \leq \varphi(x) \leq 1$ sur Ω', et en dehors de Ω', le système $(\widetilde{P})$ est elliptique. On pose alors

$$(30) \qquad M(x,\xi) \overset{\text{déf}}{=} \left(\sum_{j=1}^{m+n} \widetilde{P}_j^2(x,\xi) + \langle \xi \rangle \right)^{\frac{1}{2}},$$

où $\langle \xi \rangle = (1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}}$, et pour $X = (x, \xi)$ on définit la métrique

$$(31) \qquad G_X(dx, d\xi) = M^{-2}(X)(\langle \xi \rangle^2 dx^2 + d\xi^2).$$

Dans [6], on a démontré que G est une métrique de Hörmander, dominée par une métrique fortement tempérée (la métrique dite $(1/2, 1/2)$) et que les fonctions $M^s(X)$ sont des G-poids tout $s \in \mathbf{R}$. On peut donc définir des espaces de Sobolev $H(m, G)$ comme dans la section 2. Remarquons tout d'abord que l'on a le lemme suivant.

LEMME 3.1. – *Pour tout* $k \in \mathbf{N}$, *on a*

$$(32) \qquad H(M^k, G) = H^k_{(\widetilde{P})}(\mathbf{R}^n).$$

DÉMONSTRATION. – Pour $k = 0$, on a $H(1, G) = L^2(\mathbf{R}^n) = H^0_{(\widetilde{P})}(\mathbf{R}^n)$. Le théorème 2.1 de [6] implique que $\mathcal{H} =^{\text{déf}} \sum \widetilde{P}_j^* \widetilde{P}_j + 1$ est un isomorphisme de $H(m, G)$ dans $H(mM^{-2}, G)$ pour tout G-poids m. Donc il existe une constante C strictement positive telle que, pour toute fonction u de l'espace $H(M^2, G)$, on ait

$$C^{-1}\|u\|_{H(M^2,G)} \leq \|\mathcal{H}u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \leq C\|u\|_{H(M^2,G)}.$$

En utilisant l'hypoellipticité maximale de l'opérateur $\mathcal{H}$ (voir [14]), on a

$$\sum_{|J|\leq 2} \|\widetilde{P}^J u\|^2_{L^2(\mathbf{R}^n)} \leq C\Big(\|\mathcal{H}u\|^2_{L^2(\mathbf{R}^n)} + \|u\|^2_{L^2(\mathbf{R}^n)}\Big).$$

Ceci montre que $H(M^2, G) = H^2_{(\widetilde{P})}(\mathbf{R}^n)$, les normes étant bien sûr équivalentes, d'où le lemme pour $k = 2$. Pour $k = 1$, on a $\widetilde{P}_j \in Op(S(M, G))$, donc $\widetilde{P}_j : H(M, G) \to L^2$ est continue pour $j = 1, \cdots, m + n$, et

$$\|u\|_{H^1_{(\widetilde{P})}(\mathbf{R}^n)} \leq C\|u\|_{H(M,G)},$$

pour tout $u \in H(M,G)$. L'opérateur $\mathcal{H}$ est aussi un isomorphisme de $H(M,G)$ sur $H(M^{-1},G)$. De plus, d'après le théorème 2.14, il existe un symbole $\mathcal{M}_{-1}$ appartenant à $S(M^{-1},G)$ tel que

$$\|u\|_{H(M,G)} \leq C\|\mathcal{H}u\|_{H(M^{-1},G)} \leq C\|\mathcal{M}_{-1}^{w} Hu\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}.$$

Or, par définition de l'opérateur $\mathcal{H}$, on a

$$\mathcal{M}_{-1}^{w}\mathcal{H}u = \sum_{j=1}^{m+n} \mathcal{M}_{-1}^{w} P_j^\star P_j u + \mathcal{M}_{-1}^{w} u.$$

Comme $\mathcal{M}_{-1}\#\widetilde{P}_j^\star$ appartient à $S(1,G)$, on a démontré que

$$\|u\|_{H(M,G)} \leq C\|u\|_{H^1_{\widetilde{(P)}}(\mathbf{R}^n)}$$

et donc que $H^1_{\widetilde{(P)}}(\mathbf{R}^n) = H(M,G)$. Pour un entier positif k quelconque, une récurrence omise donne le lemme.

En utilisant le résultat de ce lemme, il est raisonnable de définir ainsi les espaces de Sobolev pour des indices non entiers.

DÉFINITION 3.2. – *Pour tout $s \in \mathbf{R}$, on définit*

$$H^s_{(P)}(\Omega) = H(M^s,G)|_\Omega \quad \textit{avec la norme} \quad \|u\|_{H^s_{(P)}(\Omega)} = \inf_{\substack{v\in H(M^s,G)\\ v_{|\Omega}=u}} \|v\|_{H(M^s,G)}.$$

Énonçons maintenant le principal théorème de cet article.

THÉORÈME 3.3. – *Supposons que le système de champs de vecteurs (P) satisfasse la condition de Hörmander à l'ordre 2. On a alors pour tout $\Omega \subset\subset \Omega' \subset\subset \widetilde{\Omega}$, les inclusions continues suivantes :*

(i) *Pour tout $0 < s < Q_0/2$, on a*

$$H^s_{(P)}(\Omega') \subset L^p(\Omega) \quad \textit{avec} \quad p = \frac{2Q_0}{Q_0 - 2s}.$$

(ii) *Pour tout entier positif k, on a*

$$H^{k+\frac{Q_0}{2}}_{(P)}(\Omega') \subset VMO^k_{(P)}(\Omega).$$

(iii) *Pour tout entier k et tout réel α de l'intervalle* $]0,1[$, *on a*

$$H^{k+\frac{Q_0}{2}+\alpha}_{(P)}(\Omega') \subset C^{k,\alpha}_{(P)}(\Omega),$$

où Q_0 est la dimension homogène définie dans l'introduction.

On a donc obtenu une théorie complète des inclusions de Sobolev pour les espaces de fonctions $M^s(\Omega)$ avec les indices critiques. On peut trouver des résultats de ce type, mais non optimaux dans [16] et [17]. Dans [18], pour le système de champs de vecteurs $\partial_{x_1}, x_1^k\partial_{x_2}, k \geq 1$ sur un ouvert borné de $\mathbf{R}^2$, on a défini une métrique de Hörmander par

$$\begin{aligned}\widetilde{M}(x,\xi) &= (\xi_1^2 + (\widetilde{x}_1^k\xi_2)^2 + \langle\xi\rangle^{2\delta})^{\frac{1}{2}} \quad \text{et}\\ \widetilde{G}_{(x,\xi)}(dx,d\xi) &= \widetilde{M}^{-2/k}(x,\xi)\langle\xi\rangle^{2/k}dx_1^2 + dx_2^2\\ &\quad + \widetilde{M}^{-2/k}(x,\xi)\langle\xi\rangle^{-2\delta(1-1/k)}d\xi_1^2 + \langle\xi\rangle^{-2}d\xi_2^2,\end{aligned}$$

où $\delta = (1+k)^{-1}, \widetilde{x}_1 \in C^\infty(\mathbf{R})$ avec $\widetilde{x}_1 = x_1$ pour $|x_1| \leq \epsilon$, et $\widetilde{x}_1 = C$ pour $|x_1| \geq 2\epsilon$. Les résultats du théorème 3.3 ci-dessus sont aussi vrais pour $\widetilde{G}, \widetilde{M}$ avec $Q_0 = k+2$.

Remarquons que nous avons étudié seulement le problème dans l'intérieur d'un domaine, le problème près du bord est beaucoup plus délicat et à notre connaissance, tout à fait ouvert.

4. Étude des opérateurs régularisants

Pour alléger les notations, nous n'écrirons les démonstrations que dans le cas où l'on dispose d'une partition de l'unité

$$1 = \int_{Y\in\mathbf{R}^{2n}} (\psi_Y \# \varphi_Y)(X)|g_Y|^{\frac{1}{2}}dY, \qquad \forall X \in \mathbf{R}^{2n}. \tag{33}$$

Alors pour tout $u \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$, on a

$$u(x) = \int_{Y\in\mathbf{R}^{2n}} \psi_Y^w \circ \varphi_Y^w u(x)|g_Y|^{\frac{1}{2}}dY. \tag{34}$$

Nous allons définir un opérateur régularisant qui est dans notre cadre, l'analogue de la très classique troncature en fréquences. Choisissons une fonction de troncature $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^1), 0 \leq \chi \leq 1; \chi(t) = 1$, pour $|t| \leq 1$ et $\chi(t) = 0$ pour $|t| \geq 2$. Pour un poids $m(x,\xi)$ de Hörmander, un réel $A > 1$, et $Y = (y,\eta) \in \mathbf{R}^{2n}$, on pose

$$\chi_{Y,m,A}(x) \overset{\text{déf}}{=} \chi\left(\frac{m(x,\eta)}{A}\right).$$

On définit alors l'opérateur $S_{m,A}$ par

$$S_{m,A}u \overset{\text{déf}}{=} \int_{\mathbf{R}^{2n}} \psi_Y^w(\chi_{Y,m,A}\varphi_Y^w u)|g_Y|^{\frac{1}{2}}dY. \tag{35}$$

L'opérateur $S_{m,A}$ doit être compris comme un opérateur de troncature, non plus en fréquences, c'est-à-dire par rapport à $(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}$, mais par rapport au poids m. Cet opérateur $S_{m,A}$ est régularisant au sens dans la chaîne des espaces $H(m^\sigma m_1, g)$.

THÉORÈME 4.1. – *Soient g une métrique de Hörmander, m et m_1 deux g-poids et σ un réel positif. Il existe une constante C telle que, pour tout réel A strictement supérieur à* 1, *on ait*

$$\|S_{m,A}\|_{\mathcal{L}(H(m_1,g),H(m^\sigma m_1,g))} \leq CA^\sigma.$$

Pour démontrer ce théorème, on utilise le théorème 2.14 qui signifie ici qu'il existe un symbole $\mathcal{M}_{1,\sigma} \in S(m^\sigma m_1, g)$ tel que

$$\|S_{m,A}u\|_{H(m^\sigma m_1,g)} \leq \|\mathcal{M}_{1,\sigma}^w S_{m,A}u\|_{L^2}.$$

Or, par définition de l'opérateur $S_{m,A}$, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{1,\sigma}^w S_{m,A}u &= \int \mathcal{M}_{1,\sigma}^w \circ \psi_Y^w(\chi_{m,A}\varphi_Y^w u)|g_Y|^{\frac{1}{2}}dY\\ &= \int \left(\frac{\mathcal{M}_{1,\sigma}\#\psi_Y}{m^\sigma(Y)m_1(Y)}\right)^w m^\sigma(Y)m_1(Y)(\chi_{Y,m,A}\varphi_Y^w u)|g_Y|^{\frac{1}{2}}dY.\end{aligned}$$

Il résulte du lemme (2.9) que la famille (θ_Y) définie par

$$\theta_Y \overset{\text{déf}}{=} \frac{\mathcal{M}_{1,\sigma}\#\psi_Y}{m^\sigma(Y)m_1(Y)}$$

est une famille uniformément confinée. Du lemme 2.16 de Cotlar localisé et du théorème 2.9, on déduit alors que

$$\|S_{m,A}u\|_{H(m^\sigma,g)}^2 \leq C\int m(Y)^{2\sigma}m_1(Y)^2\|(1+g_{2,Y}^{-1}(\cdot - U_Y))^{-N}\chi_{Y,m,A}\varphi_Y^w u\|_{L^2}^2|g_Y|^{\frac{1}{2}}dY.$$

Le poids m étant tempéré, on a

$$\left(\frac{m(Y)}{m(x,\eta)}\right)^\sigma \leq C(1+g_{2,Y}^{-1}(x-U_Y))^{\widetilde{N}\sigma}.$$

De plus, comme on a

$$m(x,\eta)^\sigma\chi_{Y,m,A}(x) \leq CA^\sigma,$$

il résulte de l'inégalité (36) que

$$\|S_{m,A}u\|_{H(m^\sigma,g)} \leq CA^{2\sigma}\int m_1(Y)^2\|(1+g_{2,Y}^{-1}(\cdot - U_Y))^{\widetilde{N}\sigma - N}\varphi_Y^w u\|_{L^2}^2|g_Y|^{\frac{1}{2}}dY.$$

En prenant $N = [\widetilde{N}\sigma]+1$, on obtient

$$\|S_{m,A}u\|_{H(m^\sigma m_1,g)}^2 \leq CA^{2\sigma}\|u\|_{H(m_1,g)}^2,$$

ce qui assure le résultat recherché.

On peut aussi obtenir une estimation de type L^∞, comme le décrit le théorème suivant.

THÉORÈME 4.2. – *Soient m et m_1 deux g-poids, et (δ,σ) un couple de réels tel que δ soit positif. On désigne par $\Omega_{\delta,\sigma}$ l'ensemble des x de $\mathbf{R}^n$ tels que*

$$\Pi(x)^2 \overset{\text{déf}}{=} \sup_{A>0} A^{-2\delta}\int_{m(x,\eta)\leq A} m(x,\eta)^{2\sigma}m_1(x,\eta)^{-2}d\eta < +\infty. \tag{37}$$

Alors, pour tout réel positif α et pour tout symbole L appartenant à $S(m^{\alpha+\sigma}, g)$, il existe une constante C telle que, pour tout x de $\Omega_{\delta,\sigma}$ la forme linéaire sur $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ définie par

$$\begin{cases} \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) & \to \mathbf{C} \\ u & \mapsto \dfrac{(L^w \circ S_{m,A} u)(x)}{\Pi(x)} \end{cases}$$

se prolonge en une forme linéaire continue sur $H(m_1, g)$ et l'on a alors

$$\forall u \in H(m_1,g)\,, \forall x \in \Omega_{\delta,\sigma}\,,\ |L^w \circ S_{m,A}(u)(x)| \leq C A^{\alpha+\delta} \|u\|_{H(m_1,g)} \Pi(x). \tag{38}$$

La démonstration de ce théorème repose sur une estimation ponctuelle relative à $\theta^w u$, lorsque θ est une fonction de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{2n})$. Remarquons que cette inégalité est implicitement contenue dans la démonstration du lemme 4.8 de [3]. Voici son énoncé.

LEMME 4.3. – *Pour tout couple d'entiers (N, N'), il existe une constante C et un entier k tels que l'on ait la propriété suivante :*

Pour toute fonction $\theta \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{2n})$, et pour toute forme quadratique scindée

$$\gamma(dx^2, d\xi^2) = \gamma_1(dx^2) + \gamma_2(d\xi^2)$$

satisfaisant au principe d'incertitude $\gamma \leq \gamma^\sigma$, on a

$$|(1+\gamma_2^{-1}(x-U_{1,Y}))^N \theta^w u(x)| \leq C\|\theta\|_{k,Conf(\gamma,Y)} |\gamma_2|^{-1/2} ((1+\gamma_2^{-1}(\cdot))^{-N'} * |u|)(x),$$

pour tout $Y \in \mathbf{R}^{2n}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}^n$.

Pour démontrer ce lemme, considérons L_0 l'opérateur différentiel en η défini par

$$L_0 = Id - (\gamma_2^{-1}\psi_\eta, \psi_\eta).$$

Cet opérateur est un composé de dérivations en η de γ_2-longueur 1. Par intégration par parties, on trouve que, pour tout entier positif M,

$$\begin{aligned} |\theta^w u(x)| &= \left| \int e^{i\langle x-z,\zeta\rangle} (1+\gamma_2^{-1}(x-z))^{-M} (L_0^M \theta)\left(\frac{x+z}{2}, \zeta\right) u(z) dz d\zeta \right| \\ &\leq C\|\theta\|_{M+n,Conf(\gamma,Y)} \int (1+\gamma_2^{-1}(x-z))^{-M} \left(1+\gamma_1^{-1}(\zeta - U_{2,Y})\right)^{-n} \\ &\quad \times \left(1+\gamma_2^{-1}\left(\frac{x+z}{2} - U_{1,Y}\right)\right)^{-M-n} |u(z)| dz d\zeta. \end{aligned}$$

Il est clair que l'on a

$$(1+\gamma_2^{-1}(x-U_{1,Y}))^N \leq C(1+\gamma_2^{-1}(x-z))^N \left(1+\gamma_2^{-1}\left(\frac{x+z}{2} - U_{1,Y}\right)\right)^N.$$

Le principe d'incertitude tel qu'il est formulé dans (22) se traduit par

$$\gamma_1^{-1}(\zeta - U_{2,Y}) \geq \gamma_2(\zeta - U_{2,Y}) \geq c\gamma_2(\zeta - \eta).$$

Donc, en choisissant $2M = 2N + 2N_1$, on trouve que

$$(1+\gamma_2^{-1}(x-U_{1,Y}))^N|\theta^w u(x)| \leq C\|\theta\|_{2M+2n,Conf(\gamma,Y)} \times \int (1+\gamma_2(\zeta-\eta))^{-n}(1+\gamma_2^{-1}(x-z))^{-N_1}|u(z)|dzd\zeta.$$

En posant $\zeta' = \gamma_2^{\frac{1}{2}}(\zeta-\eta)$, il vient

$$(1+\gamma_2^{-1}(x-U_{1,Y}))^N|\theta^w u(x)| \leq C\|\theta\|_{2M+2n,Conf(\gamma,Y)}|\gamma_2|^{-\frac{1}{2}}\int (1+\gamma_2^{-1}(x-z))^{-N_1}|u(z)|dz,$$

ce qui n'est rien d'autre que la conclusion du lemme.

Revenons à la démonstration du théorème 4.2. Par définition de $S_{m,A}$, on a

$$\begin{aligned} I(x) &\overset{\text{déf}}{=} L^w \circ S_{m,A}(u)(x) \\ &= \int (L\#\psi_Y)^w(\chi_{Y,m,A}\varphi_Y^w u)(x)|g_Y|^{\frac{1}{2}}dY \\ &= \int \mathcal{L}_Y^w(\mathcal{U}_Y)(x)|g_Y|^{\frac{1}{2}}dY \quad \text{avec} \\ \mathcal{L}_Y &= \frac{L\#\psi_Y}{m(Y)^{\sigma+\alpha}} \quad \text{et} \\ \mathcal{U}_Y(x) &= m(Y)^{\sigma+\alpha}\chi_{Y,m,A}(x)(\varphi_Y^w u)(x). \end{aligned}$$

Le lemme 4.3 implique que, pour tout couple d'entiers (N, N'), il existe un entier k et une constante C telle que

$$|\mathcal{L}_Y^w(\mathcal{U}_Y)(x)| \leq C(1+g_{2,Y}^{-1}(x-U_Y))^{-N}\|\mathcal{L}_Y\|_{k,Conf(g_Y,Y)})|g_{2,Y}|^{-\frac{1}{2}} \times \Big((1+g_{2,Y}^{-1}(\cdot))^{-N'} * |\mathcal{U}_Y|\Big)(x).$$

D'après le lemme 2.9, on a

$$\|\mathcal{L}_Y\|_{k,Conf(g_Y,Y)} \leq C_k.$$

D'où il résulte que

$$|\mathcal{L}_Y^w(\mathcal{U}_Y)(x)| \leq C\big(1+g_{2,Y}^{-1}(x-U_Y)\big)^{-N}|g_{2,Y}|^{-\frac{1}{2}}\Big((1+g_{2,Y}^{-1}(\cdot))^{-N'} * |\mathcal{U}_Y|\Big)(x).$$

On déduit alors de (39) que

$$I(x) \leq C\int_{(Y,z)\in\mathbf{R}^{2n}\times\mathbf{R}^n} (1+g_{2,Y}^{-1}(x-U_Y))^{-N}|g_{2,Y}|^{-\frac{1}{2}} \times (1+g_{2,Y}^{-1}(x-z))^{-N'}|\mathcal{U}_Y(z)|\,|g_Y|^{\frac{1}{2}}dYdz.$$

Or, par définition de $\mathcal{U}_Y$ et de $\chi_{Y,m,A}$, on a

$$\begin{aligned}|\mathcal{U}_Y(z)| &\leq m(Y)^{\sigma+\alpha}\chi_{Y,m,A}(z)|(\varphi_Y^w u)(z)|\\ &\leq m(Y)^{\sigma+\alpha}m_1(Y)\chi_{Y,m,A}(z)m_1(Y)^{-1}|(\varphi_Y^w u)(z)|.\end{aligned}$$

Les poids m et m_1 étant tempérés, d'après (15), il existe un entier N_2 tel que

$$m(Y)^{\sigma+\alpha}m_1(Y)^{-1} \leq m(z,\eta)^{\sigma+\alpha}m_1(z,\eta)^{-1}(1+g_{2,Y}^{-1}(z-U_{1,Y}))^{N_2}.$$

Comme nous savons que

$$g_{2,Y}^{-1}(z-U_{1,Y}) \leq 2g_{2,Y}^{-1}(x-z) + 2g_{2,Y}^{-1}(x-U_{1,Y}),$$

on en déduit que

$$\begin{aligned}I(x) \leq CA^\alpha \int_{\mathcal{I}_m(A)} &(1+g_{2,Y}^{-1}(x-U_Y))^{N_2-N}(1+g_{2,Y}^{-1}(x-z))^{N_2-N'}\\ &\times m(z,\eta)^\sigma m_1(z,\eta)^{-1}|g_{2,Y}|^{-\frac{1}{2}}m_1(Y)|(\varphi_Y^w u)(z)||g_Y|^{\frac{1}{2}}dY dz \quad \text{avec}\\ \mathcal{I}_m(A) &\stackrel{\text{déf}}{=} \{(Y,z)\in \mathbf{R}^{2n}\times\mathbf{R}^n \ / \ m(z,\eta)\leq A\}.\end{aligned}$$

L'inégalité de Schwarz pour la mesure $|g_Y|^{\frac{1}{2}}dY dz$ implique que

$$\begin{aligned}&I(x)^2 \leq CA^{2\alpha}I_1(x)I_2(x) \quad \text{avec}\\ &I_1(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \int m_1(Y)^2|(\varphi_Y^w u)(z)|^2|g_Y|^{\frac{1}{2}}dY dz \quad \text{et}\\ &I_2(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\mathcal{I}_m(A)} m(z,\eta)^{2\sigma}m_1(z,\eta)^{-2}(1+g_{2,Y}^{-1}(x-U_Y))^{2N_2-2N}\\ &\qquad\qquad\qquad \times (1+g_{2,Y}^{-1}(x-z))^{2N_2-2N'}|g_{1,Y}|^{\frac{1}{2}}|g_{2,Y}|^{-\frac{1}{2}}dY dz.\end{aligned}$$

La métrique g étant tempérée, on a, en posant $X=(x,\eta)$,

$$\begin{aligned}|g_{1,Y}|^{\frac{1}{2}} &\leq |g_{1,X}|^{\frac{1}{2}}(1+g_{2,Y}^{-1}(x-U_Y))^{\frac{N_0 n}{2}}\\ |g_{2,Y}|^{-\frac{1}{2}} &\leq |g_{2,X}|^{-\frac{1}{2}}(1+g_{2,Y}^{-1}(x-U_Y))^{\frac{N_0 n}{2}} \quad \text{et}\\ (1+g_{2,Y}^{-1}(x-z))^{2N_2-2N'} &\leq (1+g_{2,X}^{-1}(x-z))^{2N_2-2N'}(1+g_{2,Y}^{-1}(x-U_Y))^{2N_0(N'-N_2)}\end{aligned}$$

D'après le principe d'incertitude et la tempérance de g, on a

$$\begin{aligned}(1+g_{2,Y}^{-1}(x-U_Y))^{-n} &\leq C(1+g_{1,Y}(x-y))^{-n}\\ &\leq C(1+g_{1,X}(x-y))^{-n}(1+g_{2,Y}^{-1}(x-U_Y))^{N_0 n}.\end{aligned}$$

On en déduit alors que la quantité

$$(1+g_{2,Y}^{-1}(x-U_Y))^{2N_2-2N}(1+g_{2,Y}^{-1}(x-z))^{2N_2-2N'}|g_{1,Y}|^{\frac{1}{2}}|g_{2,Y}|^{-\frac{1}{2}}$$

est majorée par

$$C(1+g_{1,X}(x-y))^{-n}(1+g_{2,X}^{-1}(x-z))^{2N_2-2N'}|g_{1,X}|^{\frac12}|g_{2,X}|^{-\frac12}$$
$$\times(1+g_{2,Y}^{-1}(x-U_Y))^{2N_0(N'-N_2)+n(N_0+1)+2(N_2-N)}$$

D'où, en choisissant

$$N=1+N_2+N_0(N'-N_2)+n\left[\frac{N_0+1}{2}\right],$$

on trouve que

$$I_2(x)\le C\int_{\mathcal{I}_m(A)}m(z,\eta)^{2\sigma}m_1(z,\eta)^{-2}(1+g_{2,X}^{-1}(x-z))^{2N_2-2N'}$$
$$\times(1+g_{1,X}(x-y))^{-n}|g_{1,X}|^{\frac12}|g_{2,X}|^{-\frac12}dYdz.$$

Le poids m étant tempérée, on a

$$m(z,\eta)^{2\sigma}m_1(z,\eta)^{-2}\le m(x,\eta)^{2\sigma}m_1(x,\eta)^{-2}(1+g_{2,X}^{-1}(x-z))^{2N_2}\quad\text{et}$$
$$m(x,\eta)\le CA(1+g_{2,X}^{-1}(x-z))^{N_0}.$$

Par définition de $\mathcal{I}_m(A)$, on en déduit que

$$I_2(x)\le\int_{\mathcal{J}_m(A)}m(x,\eta)^{2\sigma}m_1(x,\eta)^{-2}(1+g_{2,X}^{-1}(x-z))^{4N_2-2N'}$$
$$\times(1+g_{1,X}(x-y))^{-n}|g_{1,X}|^{\frac12}|g_{2,X}|^{-\frac12}dYdz\quad\text{avec}$$
$$\mathcal{J}_m(A)\overset{\text{déf}}{=}\{(y,\eta,z)\in\mathbf{R}^{2n}\times\mathbf{R}^n\ /\ m(x,\eta)\le CA(1+g_{2,X}^{-1}(x-z))^{N_0}\}.$$

En posant le changement de variables

$$\eta'=\eta\,,\quad y'=g_{1,X}^{\frac12}(x-y)\,,\quad z'=g_{2,X}^{-\frac12}(x-z),$$

dont le jacobien est $|g_{1,X}|^{\frac12}|g_{2,X}|^{-\frac12}$, on obtient

$$I_2(x)\le C\int_{\mathcal{K}_m(A)}m(x,\eta')^{2\sigma}m_1(x,\eta')^{-2}(1+|z'|^2)^{2N_2-2N'}(1+|y'|^2)^{-n}dy'd\eta'dz'\quad\text{avec}$$
$$\mathcal{K}_m(A)=\{(y',\eta',z')\ /\ m(x,\eta')\le A(1+|z'|^2)^{N_0}\}.$$

Par définition de la fonction Π,

$$\int_{\{\eta\ /\ m(x,\eta)\le A(1+|z|^2)^{N_0}\}}m(x,\eta)^{2\sigma}m_1(x,\eta)^{-2}d\eta\le\Pi(x)^2A^{2\delta}(1+|z|^2))^{2N_0\delta}.$$

Il en résulte que

$$I_2(x)\le CA^{2\delta}\Pi(x)^2\int(1+|z|^2))^{4N_2+2N_0\delta-2N'}(1+|y|^2)^{-n}dydz.$$

En choisissant par exemple $N'=[N_2\delta]+2N_2+n+1$, on conclue la démonstration du théorème.

Nous allons donner un autre théorème, assez proche du précédent et relatif aux inclusions dans L^∞.

THÉORÈME 4.4. – *Soient m et m_1 deux g-poids, et δ un réel positif. On désigne par Ω_δ l'ensemble des x de $\mathbf{R}^n$ tels que*

$$\Pi_1(x)^2 \overset{\text{déf}}{=} \sup_{A>0} A^{2\delta} \int_{m(x,\eta)\geq A} m_1^{-2}(x,\eta)d\eta < +\infty. \tag{40}$$

Alors la forme linéaire sur $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ définie par

$$\begin{cases} \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) & \to \mathbf{C} \\ u & \mapsto \dfrac{(u - S_{m,A}u)(x)}{\Pi_1(x)} \end{cases}$$

se prolonge en une forme linéaire continue sur $H(m_1, g)$ et l'on a

$$\forall u \in H(m_1,g)\,, \forall x \in \Omega_\delta\,,\ |(u - S_{m,A}u)(x)| \leq CA^{-\delta}\|u\|_{H(m_1,g)}\Pi_1(x).$$

La démonstration de ce théorème est assez proche de celle du théorème 4.2. On écrit

$$\begin{aligned} \widetilde{u}_A(x) &\overset{\text{déf}}{=} (u - S_{m,A}u)(x) \\ &= \int \psi_Y^w\left(1 - \chi\left(\frac{m(\cdot,\eta)}{A}\right)\right)\varphi_Y^w u(x)|g_Y|^{\frac12} dY. \end{aligned}$$

On utilise alors le lemme 4.3. pour tout entier N, on a

$$\begin{aligned} |\widetilde{u}_A(x)| \leq C \int_{m(z,\eta)\geq A} & |g_{2,Y}|^{-\frac12}(1 + g_{2,Y}^{-1}(x - U_{1,Y}))^{-N}(1 + g_{2,Y}^{-1}(x - z))^{-N} m_1(Y)^{-1} \\ & \times m_1(Y)|\varphi_Y^w u(z)||g_Y|^{\frac12} dY dz. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Schwarz avec la mesure $|g_Y|^{\frac12} dY dz$, on trouve que

$$\begin{aligned} |\widetilde{u}_A(x)|^2 \leq C\|u\|^2_{H(m_1,g)} \int_{\mathcal{I}'_m(A)} & (1 + g_{2,Y}^{-1}(x - U_Y))^{-2N}(1 + g_{2,Y}^{-1}(x - z))^{-2N} \\ & \times m_1^{-2}(Y)|g_{2,Y}|^{-\frac12}|g_{1,Y}|^{\frac12} dY dz \quad \text{avec} \end{aligned}$$

$$\mathcal{I}'_m(A) \overset{\text{déf}}{=} \{(Y,z) \in \mathbf{R}^{2n} \times \mathbf{R}^n \ / \ m(z,\eta) \geq A\}.$$

La tempérance du poids m_1 implique que

$$\begin{aligned} |\widetilde{u}_A(x)|^2 \leq C\|u\|^2_{H(m_1,g)} \int_{\mathcal{I}_m(A)} & (1 + g_{2,Y}^{-1}(x - U_Y))^{2\widetilde{N}_0 - 2N}(1 + g_{2,Y}^{-1}(x - z))^{2\widetilde{N}_0 - 2N} \\ & \times m_1^{-2}(Y)|g_{2,Y}|^{-\frac12}|g_{1,Y}|^{\frac12} dY dz \quad \text{avec} \end{aligned}$$

$$\mathcal{J}_m(A) \overset{\text{déf}}{=} \{(y,\eta,z) \in \mathbf{R}^{2n} \times \mathbf{R}^n \ / \ m(x,\eta) \geq CA(1 + g_{2,X}^{-1}(x - z))^{-\widetilde{N}}\}.$$

Des inégalités absolument analogues à celles de la démonstration précédente conduisent alors à

$$\begin{aligned} |\widetilde{u}_A(x)|^2 &\leq C\|u\|^2_{H(m_1,g)} \left(\int_{\{\eta\ /\ m(x,\eta)\geq A(1+|z|^2)^{-\widetilde{N}}\}} m_1(x,\eta)^{-1}(1 + |z|^2)^{2\widetilde{N}_0 - 2N} d\eta dz\right) \\ &\leq CA^{-2\delta}\|u\|^2_{H(m_1,g)}\Pi_1(x) \int (1 + |z|^2)^{2\widetilde{N}_0 + 2\delta\widetilde{N} - 2N} dz. \end{aligned}$$

D'où le théorème.

5. Démonstration du théorème d'inclusion dans L^p

Tout d'abord, nous allons rappeler les résultats démontrés dans [3]. Le résultat essentiel pour les inclusions de Sobolev était l'inclusion dans L^∞ décrite par le théorème suivant, extrait du théorème 4.7 de [3].

THÉORÈME 5.1. – *Soit m un g-poids, on désigne par Ω_∞ l'ensemble des x tels que*

$$\Pi_\infty(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\mathbf{R}^n} m^{-2}(x,\xi)d\xi < \infty. \tag{41}$$

Pour tout x de Ω_∞, la forme linéaire sur $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ définie par

$$\begin{cases} \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) & \to \mathbf{C} \\ u & \mapsto \dfrac{u(x)}{\Pi_\infty(x)} \end{cases}$$

se prolonge en une forme linéaire continue sur $H(m,g)$ et l'on a

$$\forall u \in H(m,g)\,,\ \forall x \in \Omega_\infty\,,\ |u(x)| \leq C\,\Pi_\infty(x)\|u\|_{H(m,g)}. \tag{42}$$

Les résultats d'inclusion dans L^p étaient alors obtenus par interpolation et l'on ne pouvait dès lors pas espérer obtenir les cas critiques. Remarquons qu'en appliquant les deux théorèmes 4.2 et 4.4, nous retrouvons le théorème ci-dessus. En utilisant une méthode explicite basée sur les idées de l'interpolation réelle, méthode que nous avons exposée dans l'introduction dans le cas des espaces de Sobolev usuels, nous allons démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 5.2. – *Soit m un g-poids supérieur ou égal à 1 et A_0 un réel strictement supérieur à 1. On désigne par Ω_p l'ensemble des x tel que*

$$\Pi_p(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{A \geq A_0} A^{-\frac{4}{p-2}} \int_{\{\xi\ /\ m(x,\xi)\leq A\}} m(x,\xi)^{-2}d\xi < \infty.$$

Si la mesure de Lebesgue Ω_p est strictement positive, alors l'application de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ dans L^∞ définie par

$$u \mapsto \frac{u}{\Pi_p}$$

se prolonge en une application linéaire continue de $H(m,g)$ dans $L^p(\Omega_p, d\mu_p)$, où $d\mu_p$ désigne la mesure $\Pi_p^2(x)dx$.

Remarquons que l'on retrouve bien les inclusions de Sobolev habituelles (homogénéité en moins bien sûr), lorsque $m(x,\xi) = (1+|\xi|^2)^s$. On procède de manière analogue à celle présentée dans l'introduction pour les espaces de Sobolev usuels. Posons

$$A_\lambda = \left(\frac{\lambda}{4C\|u\|_{H(m,g)}}\right)^{(p-2)/2} \quad \text{et} \quad \lambda_0 = 4C\|u\|_{H(m,g)}A_0^{2/(p-2)},$$

où la constante C est donnée par l'inégalité (38) du théorème 4.2. De plus, nous désignerons par $\mu_p(|v| > \lambda)$ la mesure de l'ensemble des x de Ω_p tels que $|v(x)| > \lambda$. On écrit alors

$$\begin{aligned}\left\|\frac{u}{\Pi_p}\right\|^p_{L^p(\Omega_p,d\mu_p)} &= p\int \lambda^{p-1}\mu_p\left(\frac{|u|}{\Pi_p} > \lambda\right)d\lambda \\ &\leq p\int_{\lambda\leq\lambda_0} \lambda^{p-1}\mu_p\left(\frac{|u|}{\Pi_p} > \lambda\right)d\lambda + p\int_{\lambda\geq\lambda_0} \lambda^{p-1}\mu_p\left(\frac{|S_{m,A}u|}{\Pi_p} > \frac{\lambda}{2}\right)d\lambda \\ &\quad + p\int_{\lambda\geq\lambda_0} \lambda^{p-1}\mu_p\left(\frac{|u - S_{m,A}u|}{\Pi_p} > \frac{\lambda}{2}\right)d\lambda.\end{aligned}$$

D'après le théorème 4.2 appliqué avec $\sigma = 0$, $m_1 = m^s$, $\delta = \dfrac{2}{p-2}$ et $A = A_\lambda$, puis par définition de A_λ, on a

$$\left(\frac{|S_{m,A}u|}{\Pi_p} > \frac{\lambda}{2}\right) = \emptyset.$$

Il en résulte que

$$\left\|\frac{u}{\Pi_p}\right\|^p_{L^p(\Omega_p,d\mu_p)} \leq p\int_{\lambda\leq\lambda_0} \lambda^{p-1}\mu_p\left(\frac{|u|}{\Pi_p} > \lambda\right)d\lambda + p\int_{\lambda\geq\lambda_0} \lambda^{p-1}\mu_p\left(\frac{|u - S_{m,A_\lambda}u|}{\Pi_p} > \frac{\lambda}{2}\right)d\lambda.$$

On en déduit que

$$\left\|\frac{u}{\Pi_p}\right\|^p_{L^p(\Omega_p,d\mu_p)} \leq \lambda_0^{p-2} p\int_{\lambda\leq\lambda_0} \lambda\mu_p\left(\frac{|u|}{\Pi_p} > \lambda\right)d\lambda + p\int_{\lambda\geq\lambda_0} 4\lambda^{p-3}\left\|\frac{u - S_{m,A_\lambda}u}{\Pi_p}\right\|^2_{L^2(\Omega_p,d\mu_p)} d\lambda.$$

En remarquant que, pour toute fonction v de $L^2(\mathbf{R}^n, dx)$, on a

$$\left\|\frac{v}{\Pi_p}\right\|^2_{L^2(\Omega_p,d\mu_p)} = \|v\|^2_{L^2(\Omega_p,dx)},$$

on peut écrire que

$$\begin{aligned}\lambda_0^{p-2} p\int_{\lambda\leq\lambda_0} \lambda\mu_p\left(\frac{|u|}{\Pi_p} > \lambda\right)d\lambda &\leq \lambda_0^{p-2}\|u\|^2_{L^2(\Omega_p,dx)} \\ &\leq (4C)^{p-2}A_0^2\|u\|^p_{H(m,g)}\end{aligned}$$

et donc que

$$\begin{aligned}\left\|\frac{u}{\Pi_p}\right\|^p_{L^p(\Omega_p,d\mu_p)} &\leq (4C)^{p-2}A_0^2\|u\|^p_{H(m,g)} + p\int_{\lambda\geq\lambda_0} 4\lambda^{p-3}\|u - S_{m,A_\lambda}u\|^2_{L^2(\Omega_p,dx)}d\lambda \\ &\leq (4C)^{p-2}A_0^2\|u\|^p_{H(m,g)} + p\int_{\lambda\geq\lambda_0} 4\lambda^{p-3}\|u - S_{m,A_\lambda}u\|^2_{L^2(\mathbf{R}^n,dx)}d\lambda.\end{aligned}$$

Il s'agit donc de majorer $\|u - S_{m,A_\lambda}u\|_{L^2}^2$. C'est ici qu'intervient le lemme 2.16 de « Cotlar localisé ». On applique le lemme avec ψ_Y et $u_Y(x) = (1 - \chi_{Y,m,A_\lambda})(x)\varphi_Y^w u(x)$, il vient alors

$$\|u - S_{m,A_\lambda}u\|_{L^2}^2 \leq C \int (1 + g_{2,Y}^{-1}(x - U_{1,Y}))^{-N}(1 - \chi_{Y,m,A_\lambda}(x))^2 |\varphi_Y^w u(x)|^2 |g_Y|^{\frac{1}{2}} dY dx.$$

D'où il résulte que

$$\begin{aligned} p\int_{\lambda\geq\lambda_0} \lambda^{p-3}\|u - S_{m,A_\lambda}u\|_{L^2}^2 d\lambda \leq C \int (1 + g_{2,Y}^{-1}(x - U_{1,Y}))^{-N}(1 - \chi_{Y,m,A_\lambda})(x))^2 \\ \times |\varphi_Y^w u(x)|^2 \lambda^{p-3} |g_Y|^{\frac{1}{2}} dY dx d\lambda. \end{aligned}$$

La définition de la fonction χ_{Y,m,A_λ} implique que $A_\lambda \leq m(x,\eta)$. Par définition de A_λ, ceci signifie que

$$\lambda \leq 4C\|u\|_{H(m,g)} m(x,\eta)^{2/(p-2)} = \lambda(x,\eta).$$

D'où

$$\begin{aligned} p\int_{\lambda\geq\lambda_0} \lambda^{p-3}\|u - S_{m,A_\lambda}u\|_{L^2}^2 d\lambda &\leq \frac{p}{p-2} \int (1 + g_{2,Y}^{-1}(x - U_{1,Y}))^{-N_0} \lambda^{p-2}(x,\eta) dY dx \\ &\leq C_N^p \|u\|_{H(m,g)}^{p-2} \int (1 + g_{2,Y}^{-1}(x - U_{1,Y}))^{-N} m^2(x,\eta) \\ &\qquad \times |\varphi_Y^w u(x)|^2 dY dx. \end{aligned}$$

La tempérance du poids m donne

$$m^2(x,\eta) \leq C m^2(y,\eta)(1 + g_{2,Y}^{-1}(x - U_{1,Y}))^{N_0}\,;$$

il en résulte que

$$p\int_{\lambda\geq\lambda_0} \lambda^{p-3}\|u - S_{m,A_\lambda}u\|_{L^2}^2 d\lambda \leq C\|u\|_{H(m,g)}^p.$$

Ceci démontre le théorème 5.2.

Pour obtenir le point (i) du théorème principal, il nous reste à démontrer le lemme suivant.

LEMME 5.3. – *Soient G et M la métrique et le poids associés au système de champs de vecteurs $(\widetilde{P})$ par (29) et (30); on a alors pour tout $A \geq 1$, et tout $x \in \mathbf{R}^n$,*

$$\sup_{A\geq 1} A^{2s-Q_0} \int_{M(x,\xi)\leq A} M^{-2s}(x,\xi) d\xi < \infty \quad si \quad 0 < s < \frac{Q_0}{2}, \tag{43}$$

$$\sup_{A\geq 1} A^{2s-Q_0} \int_{M(x,\xi)\geq A} M^{-2s}(x,\xi) d\xi < \infty \quad si \quad s > \frac{Q_0}{2}, \tag{44}$$

où Q_0 est la dimension homogène définie dans l'introduction.

DÉMONSTRATION. – Pour $x \notin \Omega'$, on a

$$C^{-1}\langle\xi\rangle \leq M(x,\xi) \leq C\langle\xi\rangle,$$

donc (43) et (44) sont vraies. Pour $x \in \Omega'$, on a

$$\sum_{j=1}^{m} P_j^2(x,\xi) = \sum_{k,l=1}^{n} a_{k,\ell}(x)\xi_k\xi_\ell,$$

avec $(a_{k,\ell}(x))$ une matrice de dimension n, semi-définie positive avec le rang $r(x) \geq r_0$. Il existe alors une matrice non singulière $\theta(x)$ telle que $|\theta(x)| = 1$, et

$$\sum_{j=1}^{m} P_j^2(x,\xi) = \sum_{j=1}^{r(x)} \lambda_j(x)(\theta(x)\xi)_j^2,$$

où $0 < \lambda_j(x), j = 1,\cdots,r(x)$, sont les valeurs propres de matrices $(a_{k,\ell}(x))$. Ce sont bien sûr des fonctions continues. Par définition de r_0, il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\begin{aligned}
&\lambda(x) = \inf_{x\in\bar{\Omega}'} \sup_{J\in\mathcal{J}(x)} \lambda_J(x) \geq c \quad \text{avec}\\
&\mathcal{J}(x) = \{J = (j_1,\cdots,j_{r_0}); 1 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_{r_0} \leq r(x)\} \quad \text{et}\\
&\lambda_J(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \prod_{j\in\mathcal{J}} \lambda_j(x)
\end{aligned}$$

Donc pour x_0 fixé, on peut utiliser les mêmes valeurs propres strictement positives $\lambda_j(x)$, $j = 1,\cdots,r_0$, dans un voisinage de x_0. On définit alors les quantités suivantes :

$$\begin{aligned}
&\bar{\xi} \stackrel{\text{déf}}{=} \theta(x)\xi\,,\\
&\|\bar{\xi}\| \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\sum_{j=1}^{r_0} \bar{\xi}_j^4 + \sum_{j=r_0+1}^{n} \bar{\xi}_j^2\right)^{\frac{1}{4}} \quad \text{et}\\
&\delta_a\bar{\xi} \stackrel{\text{déf}}{=} (a\bar{\xi}_1,\cdots,a\bar{\xi}_{r_0},a^2\bar{\xi}_{r_0+1},\cdots,a^2\bar{\xi}_n).
\end{aligned}$$

On a alors $\|\delta_a\bar{\xi}\| = a\|\bar{\xi}\|$, et $d(\delta_a\xi) = a^{Q_0}d\xi$. Les propriétés de $\theta(x)$ et de $\lambda(x)$ donnent immédiatement que

$$c(1 + \|\bar{\xi}\|) \leq M(x,\theta^{-1}(x)\bar{\xi}).$$

On a donc pour $x \in \Omega'$,

$$\begin{aligned}
\int_{M(x,\xi)\leq A} M^{-2s}(x,\xi)d\xi &= \int_{M(x,\theta^{-1}(x)\bar{\xi})\leq A} M^{-2s}(x,\theta^{-1}(x)\bar{\xi})|\theta^{-1}(x)|d\bar{\xi}\\
&\leq c^{-2s}\int_{\|\bar{\xi}\|\leq c^{-1}A} \|\bar{\xi}\|^{-2s}d\bar{\xi}.
\end{aligned}$$

Posons $\bar{\xi} = \delta_A \xi'$, on a

$$\int_{\|\bar{\xi}\| \leq c^{-1}A} \|\bar{\xi}\|^{-2s} d\bar{\xi} = A^{Q_0 - 2s} \int_{\|\xi'\| \leq c^{-1}} \|\xi'\|^{-2s} d\xi'.$$

Pour $0 < s < Q_0/2$, on a

$$\int_{\|\xi'\| \leq c^{-1}} \|\xi'\|^{-2s} d\xi' = C(c, s, Q_0) < +\infty.$$

Ceci démontre (43). Pour $2s > Q_0 \geq Q(x)$, on a

$$\begin{aligned}\int_{\{M(x,\xi) \geq A\}} M^{-2s}(x,\xi) d\xi &= \int_{\{M(x, \theta^{-1}(x)\bar{\xi}) \geq A\}} M^{-2s}(x, \theta^{-1}(x)\bar{\xi}) |\theta^{-1}(x)| d\bar{\xi} \\ &\leq c^{-2s} \int_{\mathcal{A}} \left(\sum_{j=1}^{r_0} \bar{\xi}_j^2 + \sum_{r_0+1}^{r(x)} \lambda_j(x) \bar{\xi}_j^2 + |\bar{\xi}| \right)^{-s} d\bar{\xi} \quad \text{avec} \\ \mathcal{A} &\stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ \bar{\xi} \,/\, \left(\sum_{j=1}^{r_0} |\bar{\xi}_j|^2 + \sum_{r_0+1}^{r(x)} \lambda_j(x) |\bar{\xi}_j|^2 + |\bar{\xi}| \right)^{\frac{1}{2}} \geq cA \right\}.\end{aligned}$$

En faisant le changement de variable $\bar{\xi} = \delta_A \xi'$, on trouve

$$\int_{\{M(x,\xi) \geq A\}} M^{-2s}(x,\xi) d\xi \leq C A^{Q_0 - 2s} \int_{\mathcal{A}'} \left(\sum_{j=1}^{r_0} \xi'^2_j + \sum_{r_0+1}^{r(x)} A^2 \lambda_j(x) \xi'^2_j + |\xi'| \right)^{-s} d\bar{\xi}'$$

$$\text{avec} \quad \mathcal{A}' \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ \xi' \,/\, \left(\sum_{j=1}^{r_0} |\xi'_j|^2 + \sum_{r_0+1}^{r(x)} A^2 \lambda_j(x) |\xi'_j|^2 + |\xi'| \right)^{\frac{1}{2}} \geq c \right\}.$$

Si $A^2 \lambda_j(x) \geq 1$, on fait un changement de variables $\xi'_j = A \lambda_j^{\frac{1}{2}}(x) \bar{\xi}_j$. Si $A^2 \lambda_j(x) \leq 1$, on utilise simplement l'inégalité $0 \leq A^2 \lambda_j(x) |\xi_j|^2 \leq |\xi_j|^2$. Pour simplifier les notations, on suppose que l'on a

$$A^2 \lambda_j(x) \leq 1 \quad \text{pour} \quad j = r_0 + 1, \cdots, r(x).$$

En utilisant que $s > Q_0/2$, on a alors l'estimation suivante,

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{A}'} \left(\sum_{j=1}^{r_0} \xi'^2_j + \sum_{r_0+1}^{r(x)} A^2 \lambda_j(x) \xi'^2_j + |\xi'| \right)^{-s} d\bar{\xi}' \\ &\leq \int_{\left\{ \left(\sum_{j=1}^{r(x)} \xi'^2_j + |\xi'| \right)^{\frac{1}{2}} \geq c' \right\}} \left(\sum_{j=1}^{r_0} \xi'^2_j + |\xi'| \right)^{-s} d\xi' \leq C(s, Q_0) < +\infty.\end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration du lemme.

En remarquant que

$$\frac{Q_0}{s} - 2 = \frac{4}{\dfrac{2Q_0}{Q_0 - 2s} - 2},$$

l'inégalité (43) donne immédiatement l'existence d'une constante C telle que

$$\int_{M^s(x,\xi)\leq A} M^{-2s}(x,\xi)d\xi \leq CA^{4/(p-2)} \quad \text{avec} \quad p = \frac{2Q_0}{Q_0 - 2s}. \tag{45}$$

Ceci achève la démonstration du point (i) du théorème 3.3.

Maintenant le théorème 4.2 donne immédiatement le résultat suivant.

COROLLAIRE 5.4. – *Supposons* $0 \leq s - Q_0/2 < 1, u \in H(M^s, G)$, *on a alors*

$$\|\widetilde{P}(S_{m,A}u)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)} \leq CA^{1-(s-Q_0/2)}\|u\|_{H(M^s,G)}.$$

Il est évident pour $0 < s < Q_0/2$ en utilisant (43). Lorsque $s \geq Q_0/2$, on peut, grâce à l'inégalité (43) appliquée avec $s = s - 1$, utiliser le théorème 4.2 avec

$$\alpha = 0\,,\ L = \widetilde{P}\,,\ \sigma = 1\,,\ m = M\,,\ m_1 = m^s \quad \text{et} \quad \delta = 1 + \frac{Q_0}{2} - s.$$

6. Démonstration des inclusions dans $BMO(P)$ et $C^{k,\alpha}_{(P)}$

Pour démontrer l'inclusion dans VMO, on a besoin de quelques propriétés des boules $B(x, R)$ relatives à la métrique sous-elliptique associée au système de champs de vecteurs (P). Comme il est démontré dans [13], il existe un couple de réels strictement positifs (R_0, C) tel que, pour tout $x \in \Omega'$, et tout $R \in]0, R_0[$, on ait

$$R^{Q_0} \leq C|B(x,R)|. \tag{47}$$

On a aussi une inégalité de Poincaré associée au système de champs de vecteurs (P) et aux boules $B(x_0, R)$ (voir [10]).

LEMME 6.1 (Inégalité de Poincaré-Jerison). – *Il existe un couple de réels strictement positifs* (R_0, C) *tel que, pour tout* $x \in \Omega'$, *et tout* $R \in]0, R_0]$, *on ait, pour toute fonction* u *appartenant à* $M^1(\Omega')$,

$$\int_{B(x_0,R)} |u(x) - u_B|^2 dx \leq CR^2 \int_{B(x_0,R)} |Pu(x)|^2 dx \quad \textit{avec} \tag{48}$$

$$|Pu|^2 = \sum_{j=1}^{m} |P_j u|^2.$$

Nous démontrons maintenant l'inclusion dans VMO.

THÉORÈME 6.2. – *On a l'inclusion continue*

$$H(M^{Q_0/2}, G) \subset VMO^0_{\widetilde{P}}(\mathbf{R}^n). \tag{49}$$

Remarque. – Pour tout $|J| \leq k$, on a

$$u \in H(M^k, G) \Rightarrow \widetilde{P}^J u \in H(M^{k-|J|}, G).$$

Le point (ii) du théorème 3.3 est alors immédiat d'après la définition 3.2.

Pour démontrer le théorème 6.2, on procède à nouveau de manière analogue à celle exposée dans l'introduction pour les espaces de Sobolev usuels. Comme l'espace $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ est dense dans $H(M^{Q_0/2}, G) \subset L^2(\mathbf{R}^n)$, il nous suffit de démontrer qu'il existe un couple de réels strictement positifs (R_0, C) tel que, pour tout réel R tel que $0 < R \leq R_0$, pour tout $x_0 \in \mathbf{R}^n$, l'on ait

$$|B(x_0, R)|^{-1} \int_{B(x_0,R)} |u(x) - u_B|^2 dx \leq C(R_0) \|u\|^2_{H(M^{Q_0/2}, G)}. \tag{50}$$

Nous allons décomposer la fonction u d'une manière analogue à celle utilisée dans l'introduction (*voir* (6)), mais en utilisant les opérateurs régularisant de la section 4. On pose

$$u = u_1 + u_2 \quad \text{avec} \quad u_1 = S_{M,A} u \quad \text{et} \quad u_2 = u - u_1, \tag{51}$$

le réel $A \geq 1$ étant à déterminer. En utilisant le lemme 2.16 de Cotlar localisé, on a pour tout $0 < R \leq R_0$, et tout $x_0 \in \mathbf{R}^n$,

$$\begin{aligned}
I_{x_0}(R) &\stackrel{\text{déf}}{=} |B(x_0, R)|^{-1} \int_{B(x_0,R)} |u_2(x) - u_{2,B}|^2 dx \leq C R^{-Q_0} \int_{\mathbf{R}^n} |u_2(x)|^2 dx \\
&= C R^{-Q_0} \int_{\mathbf{R}^n} \left| \int_{\mathbf{R}^{2n}} \psi^w_Y (1 - \chi_{Y,m,A}) \varphi^w_Y u(x) |G_Y|^{\frac{1}{2}} dY \right|^2 dx \\
&\leq C R^{-Q_0} \int_{\mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}^{2n}} |(1 + G^{-1}_{2,Y}(x - U_{1,Y}))^{-N} \\
&\qquad \times (1 - \chi(A^{-1} M(x, \eta)) \varphi^w_Y u(x)|^2 |G_Y|^{\frac{1}{2}} dY dx \\
&\leq C(RA)^{-Q_0} \int_{\mathbf{R}^n} \int_{A \leq M(x,\eta)} (1 + G^{-1}_{2,Y}(x - U_{1,Y}))^{-2N} \\
&\qquad \times M(x, \eta)^{Q_0} |\varphi^w_Y u(x)|^2 |G_Y|^{\frac{1}{2}} dY dx.
\end{aligned}$$

Choisissons maintenant $A = R^{-1}$. En utilisant la tempérance du poids M, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\int_{B(x_0,R)} |u_2(x) - u_{2,B}|^2 \frac{dx}{|B(x_0, R)|} &\leq C \int_{\mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}^{2n}} (1 + G^{-1}_{2,Y}(x - U_{1,Y}))^{-2N + N_1 Q_0} \\
&\quad \times M(y, \eta)^{Q_0} |\varphi^w_Y u(x)|^2 |G_Y|^{\frac{1}{2}} dY dx.
\end{aligned}$$

En choisissant

$$N = \left[\frac{N_1 Q_0}{2} \right] + 1,$$

on obtient

$$\int_{B(x_0,R)} |u_2(x) - u_{2,B}|^2 \frac{dx}{|B(x_0,R)|} \leq C \int_{\mathbf{R}^{2n}} M(Y)^{Q_0} \|\varphi_Y^w u\|_{L^2}^2 |G_Y|^{\frac{1}{2}} dY$$
$$\leq C\|u\|_{H(M^{Q_0/2},G)}^2.$$

Pour u_1, en utilisant l'inégalité de Poincaré-Jerison, il existe $R_1 > 0, C > 0$, tels que pour tout $0 < R \leq R_0$ et tout $x_0 \in \mathbf{R}^n$, on ait

$$(52)\quad |B(x_0,R)|^{-1} \int_{B(x_0,R)} |u_1(x) - u_{1,B}|^2 dx \leq CR^2 |B(x_0,R)|^{-1} \|\widetilde{P}u_1\|_{L^2(B(x_0,R))}^2$$
$$\leq CR^2 \|\widetilde{P}u_1\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)}^2.$$

En utilisant le corollaire 5.4 avec $s = \dfrac{Q_0}{2}$, on a alors démontré le théorème.

Pour l'inclusion dans les espaces hölderiens, on donne d'abord une caractérisation des espaces $C^{k,\alpha}_{(P)}$, la démonstration étant analogue à celle de [8] pour les espaces hölderiens usuels (voir aussi [19]).

LEMME 6.3. – *Soit $u \in L^p_{loc}(\Omega'), 1 \leq p < +\infty$, on a alors $u \in C^{0,\alpha}_{(P),loc}(\Omega'), 0 < \alpha < 1$, si et seulement s'il existe $R_0 > 0, C > 0$, tels que pour tout $0 < R \leq R_0, x_0 \in \Omega'$, on ait*

$$(53)\qquad \int_{B(x_0,R)} |u(x) - u_B|^p dy \leq C^p R^{p\alpha} |B(x_0,R)|.$$

On démontre une version générale pour l'inclusion hölderienne.

THÉORÈME 6.4. – *Soit m_1 un G-poids tel que $m_1 \geq c > 0$. Supposons qu'il existe $C > 0$ et $1 > \beta > 0$ tels que l'on ait*

$$(54)\qquad \int_{M(x,\xi)\geq A} m_1(x,\xi)^{-2} d\xi \leq CA^{-2\beta},$$

et

$$(55)\qquad \int_{M(x,\xi)\leq A} M(x,\xi)^2 m_1(x,\xi)^{-2} d\xi \leq CA^{2-2\beta}.$$

On a alors l'inclusion continue suivante

$$H(m_1,G) \subset C^{0,\beta}_{(\widetilde{P})}(\mathbf{R}^n),$$

où $C^{k,\beta}_{(\widetilde{P})}(\mathbf{R}^n)$ est défini par $(\widetilde{P})$.

En utilisant (43) et (44), on a immédiatement le point (iii) du théorème 3.3.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 6.4. – Il est évident que (54) implique qu'il existe $C_1 > 0$, tel que

$$\int_{\mathbf{R}^n} m_1^{-2}(x,\xi) d\xi \leq C_1.$$

Donc le théorème 4.7 de [3], dont nous avons extrait le théorème 5.1, implique que

$$H(m_1, G) \subset L^\infty(\mathbf{R}^n).$$

Puisque $m_1 \geq c$, on a $H(m_1, G) \subset L^2(\mathbf{R}^n)$. En utilisant le lemme 6.3, il suffit de démontrer l'inégalité (53) pour $u \in H(m_1, G)$ et ce avec $p = 2$. On fait la même décomposition (51) que dans la démonstration du théorème 6.2. D'après l'inégalité (52) on a alors

$$|B(x_0, R)|^{-1} \int_{B(x_0,R)} |u(x) - u_B|^2 dx \leq CR^2 \|\widetilde{P} u_1\|^2_{L^\infty(\mathbf{R}^n)} + C\|u_2\|^2_{L^\infty(\mathbf{R}^n)}.$$

En utilisant la condition (55) et le théorème 4.2 avec

$$\alpha = 0\,,\ L \in (\widetilde{P})\,,\ \sigma = 1\,,\ m = M \quad \text{et} \quad \delta = 1 - \beta,$$

on a

$$\|\widetilde{P} u_1\|^2_{L^\infty(\mathbf{R}^n)} \leq CA^{2-2\beta} \|u\|^2_{H(m_1,G)}.$$

La condition (54) et le théorème 4.4 donnent

$$\|u_2\|^2_{L^\infty(\mathbf{R}^n)} \leq CA^{-2\beta} \|u\|^2_{H(m_1,G)}.$$

En choisissant $A = R^{-1}$, on obtient

$$|B(x_0, R)|^{-1} \int_{B(x_0,R)} |u(x) - u_B|^2 dx \leq CR^{2\beta} \|u\|^2_{H(m_1,G)}.$$

Ceci termine la démonstration du théorème 3.3.

Remerciements: Ce travail a été réalisé lors de deux séjours d'un des auteurs (C.-J. Xu) au Laboratoire d'Analyse Numérique de l'Université Paris 6. Il remercie chaleureusement ce laboratoire de son accueil.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Beals, *Weighted distribution spaces and pseudodifferential operators*, (*Journal d'Analyse Mathématique*, vol. 39, 1981, p. 130-187).

[2] J.-M. Bony, *Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires*, (*Annales de l'École Normale Supérieure*, vol. 14, 1981, p. 209-246).

[3] J.-M. Bony et J.-Y. Chemin, *Espaces fonctionnels associés au calcul de Weyl-Hörmander*, (*Bulletin de la Société Mathématique de France*, vol. 122, 1994, p. 77-118).

[4] J.-M. Bony et N. Lerner, *Quantification asymptotique et microlocalisation d'ordre supérieur*, (*Annales de l'École Normale Supérieure*, vol. 22, 1989, p. 377-433).

[5] C. E. Cancelier et J.-Y. Chemin, *Sous-ellipticité d'opérateurs integro-différentiels vérifiant le principe du maximum*, (*Annali della Scuola Normale di Pisa*, vol. 20, 1994, p. 299-312).

[6] C. E. Cancelier, J.-Y. Chemin et C.-J. Xu, *Calcul de Weyl-Hörmander et opérateurs sous-elliptiques*, (*Annales de l'Institut Fourier*, vol. 43, 1993, p. 1157-1178).

[7] B. FRANCHI, S. GALLOT et R. I. WHEEDEN, *Sobolev and isoperimetric inequalities for degenerate metrics*, (*Mathematische Annalen*, vol. 300, 1994, p. 557-571).

[8] M. GIAQUINTA, *Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems*, (*Annals of Mathematical Studies*, vol. 105, Princeton University Press, New Jersey, 1983).

[9] L. HÖRMANDER, *The analysis of linear partial differential equations*, tome 3, Springer Verlag, 1985.

[10] D. JERISON, *The Poincaré inequality for vector fields satisfying Hörmander's conditions*. (*Duke Mathematical Journal*, vol. 53, 1986, p. 503-523).

[11] N. LERNER, *Sur les espaces de Sobolev généraux associés aux classes récentes d'opérateurs pseudo-différentiels*, (*Notes aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, vol. 289, 1979, p. 663-666).

[12] P. MAHEUX et L. SALOFF-COSTE, *Analyse sur les boules d'un opérateur sous-elliptique*, (*Mathematische Annalen*, vol. 303, p. 713-740).

[13] A. NAGEL, E. STEIN et S. WAINGER, *Balls and metrics defined by vector fields I, basic properties*, (*Acta Mathematica*, vol. 155, 1985, p. 103-147).

[14] L. ROTHSCHILD et E. STEIN, *Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups*, (*Acta Mathematica*, vol. 137, 1977, p. 247-320).

[15] A. UNTERBERGER, *Oscillateur harmonique et opérateurs pseudo-différentiels*, (*Annales de l'Institut Fourier*, vol. 29, 1979, p. 201-221).

[16] C.-J. XU, *Subelliptic variational problems*, (*Bulletin de la Société Mathématique de France*, vol. 118, 1990, p. 147-169).

[17] C.-J. XU, *Semilinear subelliptic equations and Sobolev inequality for vector fields satisfying Hörmander's condition*, (*Chinese Annals of Mathematics*, vol. 15 A, 1994, p. 65-72, version en anglais: *Chinese Journal of Contempory Mathematics*, vol. 15, 1994, p. 34-40).

[18] C.-J. XU et X. ZHU, *On the inverse of a class of degenerate elliptic operators*, à paraître dans (*Chinese Annals of Mathematics*).

[19] C.-J. XU et C. ZUILY, *Higher interior regularity for quasilinear subelliptic systems*, (*Calculus of variations and partial differential equations*, vol. 5, 1997, p. 323-343).

(Manuscrit reçu le 20 décembre 1996;
révisé le 5 juin 1997.)

Jean-Yves CHEMIN
Analyse numérique,
Tour 55-65, 5^{e} étage
Université Pierre-et-Marie-Curie,
4, place Jussieu,
75230 Paris Cedex 05, France.

et

Chao-Jian XU
Institut de Mathématiques,
Université de Wuhan,
Wuhan430072,
R. P. Chine.