GILLES LEBEAU

Propagation des ondes dans les variétés à coins

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 30, nº 4 (1997), p. 429-497
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1997_4_30_4_429_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 30, 1997, p. 429 à 497.

PROPAGATION DES ONDES DANS LES VARIÉTÉS À COINS

PAR GILLES LEBEAU

ABSTRACT. – We study the propagation of analytic singularities for a solution of the wave equation (of finite energy) in a domain ω of a Riemannian analytic manifold $\mathcal{M}$, with Dirichlet or Neumann boundary conditions. The singularities of the boundary $\partial\omega$ are supposed to be of quasi-conical type and we allow some cuspidal points in the Dirichlet case.

Mots clés : Équations d'ondes, Singularités analytiques, Analyse microlocale.

RÉSUMÉ. – On étudie la propagation des singularités analytiques pour les solutions (d'énergie finie) de l'équation des ondes dans un domaine ω d'une variété Riemannienne analytique $\mathcal{M}$, avec conditions de Dirichlet ou de Neumann au bord. Les singularités de la frontière $\partial\omega$ sont supposées de type quasi-conique, avec éventuellement des singularités de type cusp dans le cas Dirichlet.

Plan

Introduction, notations et résultats

Soit $\mathcal{M}$ une variété analytique réelle, munie d'une métrique riemannienne analytique g et ω un ouvert connexe relativement compact de $\mathcal{M}$. D'après le théorème de Hille-Yosida, le problème d'évolution avec condition de Dirichlet au bord, où Δ est le Laplacien négatif sur $(\mathcal{M}, g)$

$$(1) \qquad \begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta)u = 0, & u|_{\partial\omega} = 0 \\ u|_{t=0} = u_0, & \partial_t u|_{t=0} = u_1 \qquad (u_0, u_1) \in H_0^1(\omega) \oplus L^2(\omega) \end{cases}$$

(*) AMS Subject Classification Index. 35 L 05, 35 S 15.

possède une solution unique $u(t,\cdot) \in C^0(\mathbb{R}_t, H_0^1(\omega)) \cap C^1(\mathbb{R}_t, L^2(\omega))$. Nous nous intéressons ici à la microlocalisation et à la propagation des singularités analytiques pour les solutions de (1). Le théorème de propagation a été prouvé par J. Sjöstrand [S.2] dans le cas où ω est une variété à bord analytique, et dans [L.2] dans le cas où $\partial\omega$ ne présente que des singularités de type dièdre (*i.e.* intersection de deux hypersurfaces analytiques transverses). Dans le cas de singularités coniques strictes (*i.e.* $\omega \simeq \mathbb{R}_+^* \times N$, $g = dr^2 + r^2 g'$, (N, g') variété riemannienne) la propagation des singularités a été étudiée dans la catégorie C^∞ par Cheeger-Taylor [C-T] et dans le cas analytique par Rouleux [R] en utilisant la méthode de séparation des variables.

Notre objectif est d'étendre les résultats précédents à une classe d'ouvert ω assez générale pour couvrir en particulier les situations de singularités coniques courbes (par exemple une ogive dans $\mathbb{R}^3$), de singularités de type quadrant $((\mathbb{R}_+^*)^p \times \mathbb{R}^q)$, des discontinuités de courbure (raccord C^1 de deux hypersurfaces) ou encore des cas où ω n'est pas d'un seul côté de sa frontière (par exemple un écran de $\mathbb{R}^3$).

L'hypothèse de départ que nous faisons sur la géométrie est que nous supposons donnée une stratification finie de l'adhérence de ω

$$\overline{\omega} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{S}_i, \quad I \text{ fini}, \quad 0 \in I, \quad \mathcal{S}_0 = \omega \tag{2}$$

où les strates $\mathcal{S}_i$ sont des sous variétés analytiques connexes de codimension $d(i)$, deux à deux disjointes, vérifiant

$$i \neq j \quad \text{et} \quad \overline{\mathcal{S}_i} \cap \mathcal{S}_j \neq \phi \Longrightarrow \mathcal{S}_j \subset \overline{\mathcal{S}_i} \quad \text{et} \quad d(j) > d(i). \tag{3}$$

Pour $m \in \overline{\omega}$, on note $I(m) = \{i, m \in \overline{\mathcal{S}_i}\}$ et on désigne par $i(m)$ l'unique élément de I tel que $m \in \mathcal{S}_{i(m)}$. On a $0 \in I(m)$ pour tout m, et si $m \in \omega$, $I(m) = \{0\}$.

La première hypothèse que nous faisons est de supposer la stratification localement triviale, c'est-à-dire

(H.1) Pour tout $m \in \overline{\omega}$, il existe un système de coordonnées locales $x = (x', x'')$ centré en m, $x' \in \mathbb{R}^d$, $d = \operatorname{codim}(\mathcal{S}_{i(m)})$, $x'' \in \mathbb{R}^q$, $d + q = \dim \mathcal{M}$, un $\varepsilon_0 > 0$, et pour tout $i \in I(m)$ des sous-variétés analytiques connexes $\mathcal{S}'_i$ de $\mathcal{M}' = \{x' \in \mathbb{R}^d, |x'| < \varepsilon_0\}$ tels que $\mathcal{S}'_{i(m)} = \{x' = 0\}$ et

$$\mathcal{S}_i \cap \{|x'| < \varepsilon_0, |x''| < \varepsilon_0\} = \mathcal{S}'_i \times \{|x''| < \varepsilon_0\} \qquad \forall i \in I(m). \tag{4}$$ ◊

On suppose ici que ε_0 est assez petit pour que toute strate $\mathcal{S}_i$ qui rencontre $\{|x'| < \varepsilon_0, |x''| < \varepsilon_0\}$ vérifie $i \in I(m)$; pour $i \in I(m) \setminus i(m)$ on a d'après (3) $\operatorname{codim}(\mathcal{S}'_i) < d$. Si on pose $\omega' = \mathcal{S}'_0$ on a alors une stratification de l'adhérence $\bar{\omega}'$ de ω' dans $\mathcal{M}'$

$$\bar{\omega}' = \bigcup_{i \in I(m)} \mathcal{S}'_i. \tag{5}$$

L'hypothèse (H.1) est triviale pour $m \in \omega$. Pour $m \in \overline{\omega} \setminus \omega$, notons g_m la métrique induite par g sur la fibre L_m en m du fibré normal à $\mathcal{S}_{i(m)}$ dans $\mathcal{M}$ (*i.e.* la restriction de g

à l'orthogonal du tangent à la strate $S_{i(m)}$) ; le système de coordonnées précédent nous permet d'identifier L_m à $\mathbb{R}^d_{x'}$.

La deuxième hypothèse que nous faisons (explicitée dans le §. II) est

(H.2) le couple $(\bar{\omega}' = \cup \mathcal{S}'_i, g_m)$ est sous-conique .

Nous verrons au §. II que l'hypothèse (H.2) est stable par petite perturbation de la forme quadratique g_m de sorte que si (H.2) est vérifié en un point $m \in \mathcal{S}_{i(m)}$ (H.2) est vérifié en tout point $m' \in \mathcal{S}_{i(m)}$ voisin de m sur la même strate.

Dans toute la suite, on posera

$$M = \mathcal{M} \times \mathbb{R}_t ; \quad \Omega = \omega \times \mathbb{R}_t ; \quad S_i = \mathcal{S}_i \times \mathbb{R}_t \qquad i \in I \tag{6}$$

$$P = \partial_t^2 - \Delta . \tag{7}$$

Pour tout point $(m, t_0) \in \overline{\Omega}$, on notera à nouveau $x = (x', x'')$ (par abus) un système de coordonnées locales centré en (m, t_0) fourni par l'hypothèse (H.1), $x' = (x_1, \ldots, x_d)$, $d = \operatorname{codim} S_{i(m)}$, avec cette fois $x'' = (x_{d+1}, \ldots, x_m, x_{m+1} = t - t_0)$, $m = \dim \mathcal{M}$. Dans ce système de coordonnées le symbole principal $p(x, \xi)$ de P s'écrit

$$p(x, \xi) = {}^t(\xi' - \nu) A(x) (\xi' - \nu) + R(x, \xi'') \tag{8}$$

où $\nu = \nu(x, \xi'')$ est linéaire en ξ'', $R(x, \xi'')$ quadratique en ξ'' et $A(x)$ est une matrice réelle symétrique $d \times d$. Si $S = S_{i(m)}$ est la strate à laquelle appartient (m, t_0), les fibrés vectoriels sur S, $T_S M$ (fibré normal à S) et $T^*_S M$ (fibré conormal à S) sont en dualité, et la métrique duale de la métrique induite par g sur $T_S M = T_{\mathcal{S}} \mathcal{M} \times \mathbb{R}_t \simeq (T\mathcal{S})^{\perp}_g \times \mathbb{R}_t$ est la restriction de p à $T^*_S M = \{x' = 0, \xi'' = 0\}$, dont la matrice dans le système de coordonnées précédent est $A(0, x'') \gg 0$ (car si $i^* : T^*\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} T\mathcal{M}$ est l'isomorphisme définit par la métrique g : $\langle \xi, u \rangle = (i^*(\xi) | u)_g$, on a $i^*(T^*_{\mathcal{S}} \mathcal{M}) = (T\mathcal{S})^{\perp}_g$.) Bien sûr, lorsque $d = 0$, (*i.e.* $m \in \omega$) on a $p = R$, et A et ν n'existent pas.

Par un changement de variables de la forme $y' = x'$, $y''_k = x''_k + \sum_{j=1}^{d} \theta_{j,k}(x'') x'_j$ (qui préserve (H.1) et (H.2)) on peut toujours supposer, ce que nous ferons par la suite

$$\nu(x' = 0, x'', \xi'') \equiv 0 \tag{9}$$

et on posera

$$A_0(x'') = A(x' = 0, x'') ; \quad R_0(x'', \xi'') = R(x' = 0 ; x'', \xi'') . \tag{10}$$

On définit le conormal à $\overline{\Omega}$ par

$$T^*_{\overline{\Omega}} = \bigcup_{i \in I} T^*_{S_i} M . \tag{11}$$

C'est un fermé de T^*M d'après (H.1). On pose

$$\dot{T}_b^*\Omega = \bigcup_{i\in I} T^*S_i \setminus S_i \tag{12}$$

et on note π la projection canonique surjective

$$\pi : T^*M|_{\bar{\Omega}} \setminus T^*_{\bar{\Omega}} \longrightarrow \dot{T}_b^*\Omega. \tag{13}$$

On appelle espace de phase du problème (1) l'espace $\dot{T}_b^*\Omega$ munit de la topologie image par π et de l'action naturelle de $\mathbb{R}_+^*$ dans les fibres.

Soit $\operatorname{Car} P = p^{-1}(0) \subset T^*M$ la variété caractéristique de P. On définit les régions elliptiques $\mathcal{E}$, glancing $\mathcal{G}$ et transverses $\mathcal{T}$ de $\dot{T}_b^*\Omega$ par

$$\begin{cases} \rho \in \mathcal{E} \Longleftrightarrow \pi^{-1}(\rho) \cap \operatorname{Car} P = \phi \\ \rho \in \mathcal{G} \Longleftrightarrow \sharp\{\pi^{-1}(\rho) \cap \operatorname{Car} P\} = 1 \\ \rho \in \mathcal{T} \Longleftrightarrow \rho \notin \mathcal{E} \cup \mathcal{G} \end{cases} \tag{14}$$

et on pose

$$\Sigma_b = \mathcal{G} \cup \mathcal{T} = \pi(\operatorname{Car} P) = \dot{T}_b^*\Omega \setminus \mathcal{E}. \tag{15}$$

On appelle Σ_b la variété caractéristique du problème 1.

On notera $\hat{\pi}$ la restriction de π à $\operatorname{Car} P$. Par construction $\mathcal{E}$ est ouvert, Σ_b fermé ; on vérifiera au . III que π et $\hat{\pi}$ définissent la même topologie sur Σ_b, et que Σ_b est un espace métrisable localement compact.

Si $S = S_i$ est une des strates de la stratification de $\overline{\Omega}$, on notera $\mathcal{E}_S = \mathcal{E} \cap \dot{T}^*S$, $\mathcal{G}_S = \mathcal{G} \cap \dot{T}^*S$, $\mathcal{T}_S = \mathcal{T} \cap \dot{T}^*S$; on remarquera que dans le cas $S = S_0 = \Omega$, on a $\mathcal{T}_{S_0} = \phi$ et $\mathcal{G}_{S_0} = \operatorname{Car} P|_\Omega$.

Pour u solution de (1), on note $\underline{u}$ le prolongement de u par zéro hors de $\overline{\Omega}$

$$\underline{u}(x) = u(x) \ \ \forall x \in \Omega; \quad \underline{u}(x) = 0 \qquad \forall x \notin \overline{\Omega}. \tag{16}$$

DÉFINITION I.1. – *Le spectre de u, $SS_b(u)$, est le sous-ensemble de $\dot{T}_b^*\Omega$ défini par*

$$SS_b(u) = \pi(SS(\underline{u}) \setminus T^*_{\bar{\Omega}}) \tag{17}$$

où $SS(\underline{u}) \subset T^*M|_{\bar{\Omega}}$ est le spectre analytique de Sato de $\underline{u}$. ◇

Le premier résultat que nous prouvons dans le §. 4 est le :

THÉORÈME 1 (Régularité elliptique).

Pour u solution de (1), $SS_b(u)$ est fermé, homogène, contenu dans Σ_b.

Pour étudier la propagation du spectre de u dans Σ_b, nous utiliserons la construction suivante des rayons optiques.

Pour $\rho \in \Sigma_b$, soit K_ρ le compact de $\operatorname{Car} P$

$$K_\rho = \hat{\pi}^{-1}(\rho) = \pi^{-1}(\rho) \cap \operatorname{Car} P. \tag{18}$$

Nous noterons $\mathcal{F}_\rho$ l'espace des fonctions analytiques réelles f définies dans un voisinage U de K_ρ dans $\operatorname{Car} P$, et π invariantes (*i.e.* pour $\sigma, \sigma' \in T^*M|_{\bar{\Omega}} \cap U$, $\pi(\sigma) = \pi(\sigma') \Rightarrow f(\sigma) = f(\sigma')$). Pour $f \in \mathcal{F}_\rho$, on note f_π la fonction continue définie près de $\rho \in \Sigma_b$ qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} T^*M|_{\bar{\Omega}} \cap U & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ \hat{\pi}\big\downarrow & \nearrow_{f_\pi} & \\ \Sigma_b & & \end{array} \tag{19}$$

DÉFINITION I.2. – *Un rayon est une application γ de I (intervalle de $\mathbb{R}$) dans Σ_b, qui vérifie*

(i) γ *est continue (1ère loi de Descartes).*

(ii) *Si $\rho_0 = \gamma(s_0) \in \mathcal{G}$, pour tout $f \in \mathcal{F}_{\rho_0}$,la fonction, $s \mapsto f_\pi(\gamma(s))$ est dérivable en s_0 et avec $q_0 = \hat{\pi}^{-1}(\rho_0)$ on a*

$$\frac{d}{ds} f_\pi \circ \gamma(s_0) = \{p, f\}(q_0) = df(q_0)(H_p(q_0)). \tag{20}$$

(iii) *Si $\rho_0 = \gamma(s_0) \in \mathcal{T} \cap T^*S_i$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que*

$$s \in I \quad \text{et} \quad 0 < |s - s_0| < \varepsilon_0 \Longrightarrow \gamma(s) \notin T^*S_i. \tag{21}$$

L'étude des rayons sera effectuée au §. III. On vérifiera en particulier que pour tout $s_0 \in I$, il existe deux éléments (uniques) q_d et q_g de K_{ρ_0}, $\rho_0 = \gamma(s_0)$ tels que pour tout $f \in \mathcal{F}_{\rho_0}$, $s \mapsto f_\pi \circ \gamma$ est dérivable à gauche et à droite en s_0 et

$$\left(\frac{d}{ds}\right)_{g,d} (f_\pi \circ \gamma)(s_0) = \{p, f\}(q_{g,d}). \tag{22}$$

En particulier, comme on a toujours $t, \tau \in \mathcal{F}_{\rho_0}$, les fonctions t et τ sont bien définies sur Σ_b. On a $\tau \neq 0$ sur Σ_b d'après (8) (car $R|_{\tau=0} \gg 0$) et sur tout rayon d'après (22), $\dot{\tau} = 0$ et $\dot{t} = -2\tau$.

On vérifiera également qu'une limite uniforme de rayons est un rayon.

Si $S = S_i$ est une des strates et $\rho_0 \in \mathcal{T}_S$, pour $a > 0$ on note $\Gamma^-_{\rho_0,a}$ (resp. $\Gamma^+_{\rho,a}$) les rayons entrants (resp. sortants) en ρ_0

$$\begin{cases} \Gamma^-_{\rho_0,a} = \left\{\text{rayons } [-a, 0[\xrightarrow{\gamma} \Sigma_b \ \lim\limits_{s \to 0} \gamma(s) = \rho_0\right\} \\ \Gamma^+_{\rho_0,a} = \left\{\text{rayons }]0, a] \xrightarrow{\gamma} \Sigma_b \ \lim\limits_{s \to 0} \gamma(s) = \rho_0\right\}. \end{cases} \tag{23}$$

Le théorème de réflexion transverse s'énonce alors

THÉORÈME 2 (Réflexion). – *Soit $\sigma = \pm 1$ un signe.*

Soit u solution de (1), et $\rho_0 \in \mathcal{T}_S$. On suppose qu'il existe W voisinage de ρ_0 dans Σ_b et $a_0 > 0$ tels que pour tout $\rho \in W$ tel qu'il existe $\gamma \in \Gamma^\sigma_{\rho_0,a}$ $(0 < a < a_0)$, avec $\gamma(\sigma a) = \rho$, on a $\rho \notin SS_b(u)$. Alors $\rho_0 \notin SS_b(u)$.

Soit à présent S une des strates, $\rho_0 \in \mathcal{G}_S$, q_0 l'unique point de $\operatorname{Car} P$ tel que $\hat{\pi}(q_0) = \rho_0$. On se place dans le système de coordonnées locales où p est donné par (8) et on se donne $\Theta(x'', \xi'')$ une fonction analytique définie près de ρ_0 dans T^*S et vérifiant $\Theta(\rho_0) = 0$, $\{R_0, \Theta\}(\rho_0) \neq 0$. Dans ce système de coordonnées, Θ définit une fonction sur Σ_b près de ρ_0.

Le théorème microhyperbolique s'énonce alors

THÉORÈME 3 (Microhyperbolicité).*Soit u solution de (1) ; ρ_0, Θ comme précédemment. On suppose qu'il existe V voisinage de ρ_0 dans Σ_b tel que $\rho \in V$ et $\Theta(\rho) < 0$ impliquent $\rho \notin SS_b(u)$. Alors $\rho_0 \notin SS_b(u)$.*

A partir des théorèmes 1, 2, 3, on déduit alors en suivant la méthode de Melrose-Sjöstrand [M-S] le

THÉORÈME (Propagation). – *Pour u solution de (1), le fermé $SS_b(u)$ de Σ_b est une union de rayons maximaux* (i.e. *de rayons $\gamma : \mathbb{R} \to \Sigma_b$).*

Remarque. – Le lecteur notera que les définitions de $\dot{T}^*_b\Omega$, $SS_b(u)$ dépendent de la stratification choisie de $\overline{\Omega}$, mais pas du système de coordonnées locales (x', x'') qui redresse la stratification près de chaque strate. Bien sûr, un choix stupide de stratification (par exemple en introduisant des strates fictives) donnera un mauvais résultat dans le théorème 4. De même, lorsqu'on travaille près d'un point x_0 de $\overline{\Omega}$, on aura intérêt à remplacer, près de x_0, Ω par chacune de ses composantes connexes locales. L'auteur ne sait pas donner une formulation intrinsèque sur Ω des résultats précédents. $\diamondsuit$

Les théorèmes 1 à 4 sont de nature locale près de chaque point $z_0 = (m_0, t_0)$ de $\overline{\Omega}$; si S est la strate à laquelle appartient z_0 et $d = \operatorname{codim} S$, pour démontrer nos résultats près de z_0, nous supposerons que tous ces résultats sont acquis près de tout point $z \in S_i$ avec $\operatorname{codim} S_i < d$, *i.e.* nous procédons par récurrence sur la codimension des strates. Pour $d = 0$, $S = S_0 = \Omega$ on a $SS_b(u)|_\Omega = SS(u)$, $\dot{T}^*_b\Omega|_{S_0} = \dot{T}^*\Omega$, $\pi|_{\dot{T}^*\Omega} = \mathrm{Id}$ et les théorèmes 1, 4 sont les résultats classiques de régularité elliptique et de propagation à l'intérieur de Sato (*voir* [S-K-K]) et le théorème 3 est un cas particulier du théorème microhyperbolique de Kashiwara-Kawaï (*voir* [K-K]). Nous supposerons donc $d \geq 1$, et nous travaillerons dans le système de coordonnées locales (x', x'') qui redresse la stratification avec $S = \{x' = 0\}$. On appellera x' les variables normales et x'' les variables tangentielles. D'après (8) et (10) on a

$$\mathcal{E}_S = \{R_0 > 0\}; \quad \mathcal{G}_S = \{R_0 = 0\}; \quad \mathcal{T}_S = \{R_0 < 0\}. \tag{24}$$

Par exemple si $\operatorname{codim} S = d = \dim \mathcal{M}$ (codimension maximale) on a $S = m_0 \times \mathbb{R}_t$, $\mathcal{E}_S = \mathcal{G}_S = \phi$ et $\mathcal{T}_S = \dot{T}^*S$. Dans les autres cas $(1 \leq d < \dim \mathcal{M})$, on a $S = \mathcal{S} \times \mathbb{R}_t$, $\dim \mathcal{S} = \dim \mathcal{M} - d > 0$, et si $(x''; \xi'') = (y'', t, \eta'', \tau) \in \dot{T}^*S$, $(y'', \eta'') \in T^*\mathcal{S}$, on a $R_0(x'', \xi'') = ||\eta''||^2_{y''} - \tau^2$, où $||\eta''||^2_{y''}$ est la métrique duale de la métrique induite sur $\mathcal{S}$ par g d'après (10).

Nous noterons toujours $y = (y', y'')$ les variables spatiales, $x' = y'$, $x'' = (y'', t)$; $d = d_y$ désignera la différentielle extérieure en y de sorte qu'on a $|df|^2 = p(x; d_y f, \tau = 0)$, pour f à valeurs réelles.

Utilisant l'hypothèse (H.1), on posera $\mathcal{M}' = \{|x'| < \varepsilon_0\}$, $B_0 = \{|y''| < \varepsilon_0$ et $|t - t_0| < \varepsilon_0\}$, $\Omega_0 = \Omega \cap (\mathcal{M}' \times B_0) = \omega' \times B_0$.

Pour $\mathcal{B}$ espace de Banach, U ouvert de $\mathbb{R}^n$, nous noterons $\mathcal{D}'(U; \mathcal{B})$ l'espace de distribution des applications linéaires continues de $C_0^\infty(U)$ dans $\mathcal{B}$. Comme d'habitude on note $H_0^1(\omega')$ l'adhérence de $C_0^\infty(\omega')$ dans $H^1(\omega')$, $H^{-1}(\omega') \hookrightarrow \mathcal{D}'(\omega')$ son dual caractérisé par

$$v \in H^{-1}(\omega') \iff \exists C \ \ \forall \psi \in C_0^\infty(\omega') \Big| \int_{\omega'} v\psi \Big| \leq C ||\psi||_{H^1}. \tag{25}$$

Pour $u(t, y)$ solution de (1), on a $u \in C^0(\mathbb{R}_t, H_0^1(\omega))$ donc pour tout $\chi(x') \in C_0^\infty(\mathcal{M}')$

$$\chi u \in \mathcal{D}'(B_0; H_0^1(\omega')). \tag{26}$$

$\Big[$En effet pour $\varphi(t, y'') \in C_0^\infty(B_0)$, on a $\int \chi(y')\varphi(t, y'')u(t, y)\,dt = a(y) \in H_0^1(\omega)$, $||a||_{H_0^1} \leq \mathrm{Cte}(||\varphi||_{L^\infty} + ||\nabla\varphi||_{L^\infty})$, et $\mathrm{support}(a) \subset \big\{|y''| \leq \varepsilon_0 - \delta, y' \in \mathrm{support}(\chi)\big\}$ pour un $\delta > 0$, donc $b(y') = \int a\,dy'' \in H^1(\omega')$, $||b||_{H^1} \leq \mathrm{Cte}\,||\varphi||_{W^{1,\infty}}$ et on a $b \in H_0^1(\omega')$ car $a = \lim\limits_{H^1} a_n$, $a_n \in C_0^\infty(\omega)$; en choisissant $\theta_1(y'') \in C_0^\infty(|y''| < \varepsilon_0)$, $\theta_1 = 1$ près de $|y''| \leq \varepsilon_0 - \delta$, et $\theta_2(y') \in C_0^\infty(|y'| < \varepsilon_0)$, $\theta_2 = 1$ près du support de χ, on a avec $a'_n = \theta_1\theta_2 a_n$, $a = \lim\limits_{H^1} a'_n$ et $a'_n \in C_0^\infty(y' \in \omega'; |y''| < \varepsilon_0)$.$\Big]$

Notre stratégie va consister à microlocaliser la formulation faible locale du problème (1), à savoir

$$\begin{cases} u \quad \text{est une distribution sur} \quad B_0 \times \omega' \quad \text{qui vérifie} \\ \forall \chi(x') \in C_0^\infty(\mathcal{M}') \quad \chi u \in \mathcal{D}'(B_0; H_0^1(\omega')) \\ \forall f \in C_0^\infty(B_0, H_0^1(\omega')) \quad \displaystyle\int_{\Omega_0} \Big[(du|df) - \partial_t u \partial_t f\Big]\, d_g y\, dt = 0 \end{cases} \tag{1'}$$

où $d_g y$ désigne l'élément de volume riemmannien.

En particulier, seule la régularité H^1 de u par rapport aux variables normales x' interviendra dans la suite, et la condition de Dirichlet au bord est intégrée dans la formulation variationnelle. Les théorèmes 1 à 4 seront prouvés pour les solutions de $(1')$.

Le papier est organisé comme suit.

Dans le §. II, on explicite l'hypothèse (H.2) liée à l'existence d'un système de coordonnées sous-polaires compatibles à la stratification, et on donne quelques exemples dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

Dans le §. III, on étudie les propriétés des rayons. En particulier, on vérifie que (H.2) implique la trivialité de la dynamique des rayons près de la région transverse $\mathcal{T}$ (absence de rayons captifs à échelle zéro).

Dans le §. IV, on donne la caractérisation de $SS_b(u)$ par transformation F.B.I tangentielle, en terme de régularité analytique tangentielle et on prouve le théorème 1.

Dans le §. V, on prouve le théorème 2 de réflexion par réduction à un problème semi-classique, en utilisant un argument de déformation complexe en la variable normale (le « complex scaling", ou « dilatation analytique", de la théorie du Scattering).

Dans le §. VI, on vérifie que le théorème microhyperbolique (à valeurs Banach) de Kashiwara-Kawaï s'applique bien ici et on en déduit en suivant le travail de Sjöstrand [S.2] une estimation des singularités microlocales près de $\mathcal{G}$.

La preuve du théorème 4 de propagation dans le §. VII suit la méthode de Melrose-Sjöstrand [M-S].

Enfin, dans le §. VIII, nous indiquons comment la stratégie précédente s'applique au problème de Neumann $\frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\partial\omega} = 0$. Dans ce cas, nous renforcerons l'hypothèse (H.2) en

$$\text{(H.3)} \qquad \bar{\omega}' = \cup \mathcal{S}_i' \quad \text{est quasi-conique .}$$

II. Métriques sous-coniques

II.1. Métriques sous-coniques

Dans ce paragraphe, N désigne une variété analytique réelle, $E \to N$ un fibré vectoriel réel sur N, $E' \to N$ son fibré dual. On note $\theta \in N$ les points de N, e, e' les vecteurs des fibres E_θ, E'_θ, et $n = \dim E_\theta = \dim E'_\theta$. Pour $r > 0$, $\gamma > 0$, on note $\Gamma(r,\gamma)$ le secteur complexe

$$(1) \qquad \Gamma(r,\gamma) = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < r,\ |\operatorname{Im} z| < \gamma \operatorname{Re} z\}.$$

On écrira $\Gamma(r,\gamma) < \Gamma(r',\gamma')$ si on a $r < r'$ et $\gamma < \gamma'$. Si Γ est un secteur, $\mathcal{A}_\Gamma$ désignera l'espace des fonctions $f(z,\theta)$ **bornées**, à valeurs complexes, holomorphes en $z \in \Gamma$, analytiques en $\theta \in N$, et on notera $\mathcal{A}$ la limite inductive sur Γ des espaces $\mathcal{A}_\Gamma$. Les inégalités de Cauchy entraînent

$$(2) \qquad f \in \mathcal{A}_\Gamma \Longrightarrow \forall \ell, \quad \forall \Gamma' < \Gamma \qquad z^\ell \partial_z^\ell f(z,\theta) \in \mathcal{A}_{\Gamma'}$$

ce qui exprime une propriété de conormalité sur $z = 0$ des éléments de $\mathcal{A}$.

DÉFINITION. – *Une métrique tempérée sur E est la donnée d'un secteur Γ et d'une fonction $q(z,\theta,e)$ de $\Gamma \times E$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant*

(i) $\forall(\theta,e) \in E$, $z \mapsto q(z,\theta,e)$ *est holomorphe.*

(ii) $\forall z \in \Gamma$, $(\theta,e) \mapsto q(z,\theta,e)$ *est une forme quadratique complexe en e, dépendant analytiquement de θ, réelle pour $z \in \Gamma \cap \mathbb{R}$.*

(iii) *Pour $r \in \Gamma \cap \mathbb{R}$, $q(r,\cdot)$ est définie positive et $\exists C_0 > 0$ tel que pour $z \in \Gamma$, $r \in \Gamma \cap \mathbb{R}$, $(\theta,e) \in E$ on ait*

$$\frac{r}{2} \le |z| \le 2r \Longrightarrow |q(z,\theta,e)| \le C_0\, q(r,\theta,e).$$

Soit q une métrique tempérée sur E ; quitte à diminuer Γ, les inégalités de Cauchy entraînent qu'il existe C tel qu'on ait

$$(3) \qquad r^\ell \left|\partial_z^\ell q(z,\theta,e)\right| \le C^\ell \ell!\, q(r,\theta,e)$$

pour tout $(\theta,e) \in E$ et tout $r, z \in \Gamma$ vérifiant $\frac{r}{2} \le |z| \le 2r$.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $|\alpha| \leq \alpha_0$ petit, l'identité $q(re^{i\alpha}, \cdot) = \sum \frac{q^{(\ell)}}{\ell!}(r, \cdot) r^\ell (e^{i\alpha} - 1)^\ell$ et (3) impliquent pour $0 < r \leq r_0$ petit

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} \left|q(re^{i\alpha}, \cdot) - q(r, \cdot)\right| \leq \text{Cte}\, |\alpha| q(r, \cdot) \\ \left|\operatorname{Im} q(re^{i\alpha}, \cdot) - \alpha r \dfrac{\partial q}{\partial r}(r, \cdot)\right| \leq \text{Cte}\, |\alpha|^2 q(r, \cdot) \\ \left|\operatorname{Re} q(re^{i\alpha}, \cdot) - q(r, \cdot)\right| \leq \text{Cte}\, |\alpha|^2 q(r, \cdot) \end{cases}$$

où les Cte sont indépendantes de $r, \alpha, (\theta, e)$. Si $q_1(z, \theta, e)$ vérifie les points (i) et (ii) de la définition 1, pour $\beta > 0$, on écrira $q_1 \in \mathcal{O}(r^\beta q)$ si

$$\text{(5)} \qquad \exists M, \ \forall(\theta, e), \ \forall z \quad |q_1(z, \theta, e)| \leq M r^\beta q(r, \theta, e) \quad \text{avec} \quad r = |z|.$$

Si q est tempérée et $q_1 \in \mathcal{O}(r^\beta q)$, $q + q_1$ est tempérée (en diminuant Γ).

Soit $\theta \in N$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E_θ, $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ la base duale de E'_θ (*i.e.* $e'_j(e_\ell) = \delta_{j,\ell}$). Pour $e = \Sigma x_j e_j \in E_\theta$, on a

$$\text{(6)} \qquad q(z, \theta, e) = {}^t x A_z x$$

où $z \mapsto A_z$ est holomorphe en $z \in \Gamma$ à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; symétrique : ${}^t A_z = A_z$, et pour $r \in \Gamma \cap \mathbb{R}$, A_r est réelle définie positive ; quitte à diminuer Γ, la 3me inégalité de (4) entraîne $\operatorname{Re}(A_z) \gg 0$ donc $\det A_z \neq 0$. Pour $e' = \Sigma x'_j e'_j \in E'_\theta$, on pose

$$\text{(7)} \qquad q'(z, \theta, e') = {}^t x' A_z^{-1} x'$$

qui ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ choisie (si $\tilde{\mathcal{B}}$ est une autre base de E_θ, P la matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ à $\tilde{\mathcal{B}}$, la matrice de changement de base de $\mathcal{B}'$ à $\tilde{\mathcal{B}}'$ est $P' = {}^t P^{-1}$ et la matrice $\tilde{A}$ de q dans la base $\tilde{\mathcal{B}}$ est $\tilde{A} = {}^t P A P$).

DÉFINITION 2. – *On appelle q' la métrique duale de q.*

LEMME 1. – *Soit q une métrique tempérée sur E. Alors sa métrique duale q' est tempérée. Si de plus $q_1 \in \mathcal{O}(r^\beta q)$ alors $(q + q_1)' - q' \in \mathcal{O}(r^\beta q')$.*

Preuve. – On désigne par C des constantes indépendantes de $\theta \in N$, $r \in \Gamma \cap \mathbb{R}$, $|\alpha| \leq \alpha_0$ avec Γ, α_0 petits. Pour A matrice symétrique réelle, on note $\operatorname{Sp}(A)$ son spectre et $||A|| = \sup\{|\lambda|, \lambda \in \operatorname{Sp}(A)\} = \sup\{{}^t x A x; \Sigma x_j^2 = 1\}$. Soit $\theta \in N$, et $r \in \Gamma \cap \mathbb{R}$; choisissons une base $\mathcal{B}$ de E_θ telle que $A_r = \text{Id}$ dans cette base ; soit $z = re^{i\alpha}$ et $A_z = A^1 + iA^2$ la matrice de $q(z, \theta, \cdot)$ dans la base $\mathcal{B}$, avec A^j symétriques réelles.

D'après (4) on a $||A^1 - \text{Id}|| \leq C|\alpha|^2$ et $||A^2|| \leq C|\alpha|$, donc $A_z^{-1} - \text{Id} = B^1 + iB^2$, $||B^j|| \leq C|\alpha|$; comme la matrice de $q'(r, \theta, \cdot)$ dans la base duale $\mathcal{B}'$ est Id, (7) implique

$$\text{(8)} \qquad |q'(z, \theta, \cdot)| \leq (1 + C|\alpha|) q'(r, \theta, \cdot) \text{ pour } z = re^{i\alpha}.$$

Soit à présent r' réel, $\frac{r}{2} \leq r' \leq 2r$, $A_{r'}$ la matrice de $q(r', \theta, \cdot)$ dans la base $\mathcal{B}$ précédente. On a $\frac{1}{C_0} q(r, \theta, \cdot) \leq q(r', \theta, \cdot) \leq C_0 q(r, \theta, \cdot)$ donc $\operatorname{Sp}(A_{r'}) \subset \left[\frac{1}{C_0}, C_0\right]$ donc $\operatorname{Sp}(A_{r'}^{-1}) \subset \left[\frac{1}{C_0}, C_0\right]$ donc

$$\text{(9)} \qquad |q'(r', \theta, \cdot)| \leq C_0 q'(r, \theta, \cdot) \text{ pour } \frac{r}{2} \leq r' \leq 2r.$$

D'après (8), (9), q' est tempérée.

Soit à présent $q_1 \in \mathcal{O}(r^\beta q)$, $z = r e^{i\alpha}$, $D_z = D^1 + i D^2$ la matrice de $q_1(z, \theta, \cdot)$ dans la base $\mathcal{B}$ (où $A_r = \mathrm{Id}$). D'après (5), on a $||D^j|| \leq M r^\beta$ et $A_z^{-1} D_z = (\mathrm{Id} + B^1 + i B^2) D_z$, $||B^j|| \leq C|\alpha| \ll 1$ entraîne $(A_z + D_z)^{-1} = (\mathrm{Id} + A_z^{-1} D_z)^{-1} A_z^{-1} = A_z^{-1} + \mathcal{O}(r^\beta)$ c'est-à-dire $|(q + q_1)'(z, \theta, \cdot) - q'(z, \theta, \cdot)| \leq C r^\beta q'(r, \theta, \cdot)$. ◇

Soit q une métrique tempérée, $\theta \in N$, $\mathcal{B}$ une base de E_θ, A_z la matrice de $q(z, \theta, \cdot)$ dans la base $\mathcal{B}$. On définit une fonction sur $\Gamma \times N$ (Γ petit) en posant

$$z \frac{\partial}{\partial z} \log \det q = z \frac{\partial}{\partial z} \log \det A_z \tag{10}$$

(si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\tilde{\mathcal{B}}$, on a $\log \det \tilde{A}_z = \log \det A_z + 2 \log |\det P|$).

LEMME 2. – *Soit q une métrique tempérée sur E. Alors $z \frac{\partial}{\partial z} \log \det q$ appartient à $\mathcal{A}$, i.e. est borné sur $\Gamma \times N$.*

Preuve. – Soit $r \in \Gamma \cap \mathbb{R}$, $z \in \Gamma$, $z = r' e^{i\alpha}$, $r' \in \left[\frac{r}{2}, 2r\right]$, $\theta \in N$ et $\mathcal{B}$ une base de E_θ telle que $A_{r'} = \mathrm{Id}$. On a (*voir* la preuve du lemme 1) $|\det A_z - 1| \leq C|\alpha|$ et $\mathrm{Sp}(A_r) \subset \left[\frac{1}{C_0}, C_0\right]$ avec C, C_0 indépendants de r, θ, d'où l'inégalité (indépendante de la base $\mathcal{B}$ choisie)

$$\exists C_1, \ \forall \theta, r, \ \frac{r}{2} \leq |z| \leq 2r \quad \frac{1}{C_1} |\det A_r| \leq |\det A_z| \leq C_1 |\det A_r|. \tag{11}$$

La formule de Cauchy et (11) impliquent (en diminuant Γ) $\left|z \frac{\partial}{\partial z} \det A_z\right| \leq \mathrm{Cte}\, |\det A_z|$, d'où le lemme 2. ◇

DÉFINITION 3. – *Une métrique tempérée q sur E est <u>sous-conique</u> ssi il existe $\nu_0 > 0$, $c > 0$, $\delta \in [0, 1[$ tels que*

(i) *Pour tout $(z, \theta) \in \Gamma \times N$ on a*

$$\left| z \frac{\partial}{\partial z} \log \det q - \nu_0 \right| \leq 2\delta \min\left(1, \frac{c}{2}\right). \tag{12}$$

(ii) *La métrique duale q' de q vérifie pour tout $r \in \Gamma \cap \mathbb{R}$ et $(\theta, e') \in E'$*

$$-\frac{\partial q'}{\partial r}(r, \theta, e') \geq \frac{c}{r} q'(r, \theta, e'). \tag{13}$$

On dira que la métrique q est <u>conique</u> si elle est de la forme $q(z, \theta, e) = z^2 q_0(\theta, e)$ où q_0 est une métrique fixe sur E ; une métrique conique est sous-conique (on a $\nu_0 = 2 \dim E_\theta$, $\delta = 0$ et $c = 2$ dans (12) et (13)).

Plus généralement, on dira que q est <u>quasi-conique</u> si elle est de la forme $q = z^2 q_0 + q_1$, $z^2 q_0$ conique et pour un $\beta > 0$, $q_1 \in \mathcal{O}(r^\beta z^2 q_0)$. On a alors d'après le lemme 1 $q' = \frac{1}{z^2} q_0' + q_1'$, $q_1' \in \mathcal{O}\left(r^\beta \frac{1}{z^2} q_0'\right)$ donc $\frac{\partial q_1'}{\partial r} \in \mathcal{O}\left(r^{\beta - 1} \frac{1}{z^2} q_0'\right)$ et $|\log \det q - \log \det z^2 q_0| \leq C|z|^\beta$ (C indépendant de z, θ) donc q est sous-conique. (q_0' désigne la métrique duale de q_0 sur E').

Remarque. – Dans la définition 3, l'inégalité (ii) (13) $-\frac{\partial q'}{\partial r} \geq \frac{c}{r} q'$ sera essentielle pour étudier la dynamique des rayons dans la région transverse. Par contre, l'hypothèse (12) est purement technique. Elle sera utilisée dans la preuve du théorème de réflexion pour contrôler la variation de la forme volume par déformation complexe. Une hypothèse plus forte et plus naturelle serait

(i)′ Il existe une densité (>0) $d\mu(\theta)$ sur N telle que pour $(r,\theta)\in(\Gamma\cap\mathbb{R})\times N$ on ait

$$(12)' \qquad c r^{\frac{\nu_0}{2}}\, d\mu(\theta) \le \sqrt{\det q(r,\theta)}\,|d\theta| \le \frac{r^{\frac{\nu_0}{2}}}{c}\, d\mu(\theta)$$

qui exprime que la puissance de r dans la forme volume $\sqrt{\det q}\,|d\theta|$ est indépendante de $\theta\in N$, alors que (12) impose une borne sur la variation maximale de cette puissance.

Exemple. – Soit $E=N\times\mathbb{R}^2$ le fibré trivial de rang 2 sur N et q_b la métrique indépendante de θ

$$(14) \qquad q_b = z^{\alpha}x_1^2 + 2b z^{\frac{\nu_0}{2}} x_1x_2 + z^{\gamma}x_2^2, \quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$$

b,α,γ,ν_0 constantes réelles avec $\alpha+\gamma=\nu_0$, $\alpha>0,\gamma>0$, et $|b|<1$. On a $q_0(r,\cdot)(1-|b|)\le q_b(r,\cdot)\le q_0(r,\cdot)(1+|b|)$ et $|q_b(z,\cdot)|\le q_0(|z|,\cdot)(1+|b|)$ donc q_b est tempérée. On a $z\frac{\partial}{\partial z}\log\det q\equiv\nu_0$ et

$$(15) \qquad (1-b^2)q_b' = z^{\gamma-\nu_0}x_1'^2 - 2b z^{-\frac{\nu_0}{2}} x_1'x_2' + z^{\alpha-\nu_0}x_2'^2$$

donc q_b est sous conique ssi on a

$$(16) \qquad b^2 < 4\Big(1-\frac{\alpha}{\nu_0}\Big)\Big(1-\frac{\gamma}{\nu_0}\Big) = \frac{4\alpha\gamma}{(\alpha+\gamma)^2}.$$

◇

LEMME 3. – *Soit q_0 une métrique sous-conique sur E, q_1 une métrique qui vérifie les points i) et ii) de la définition 1. Il existe alors $\varepsilon>0$ tel que si q_1 vérifie*

$$(17) \qquad \forall z,\theta,e \qquad |q_1(z,\theta,e)| \le \varepsilon\,|q_0(z,\theta,e)|$$

la métrique $q=q_0+q_1$ est sous-conique.

Preuve. – Si $\Gamma=\Gamma(r_0,\alpha_0)$, les preuves des lemmes 1 et 2 entraînent qu'il existe une fonction $m(\varepsilon,r_0,\alpha_0)$, ne dépendant que de q_0, de limite nulle quand $\varepsilon,r_0,\alpha_0\to0$ telle que $q'=q_0'+q_1'$, $|q_1'(z,\theta,e)|\le m\,|q_0'(z,\theta,e)|$ et $|\log\det q-\log\det q_0|\le m$, et les inégalités de Cauchy entraînent alors le lemme 3. ◇

II.2. Coordonnées sous-polaires

Soient N une variété analytique réelle, $\dim N=d-1$ et $\Gamma=\Gamma(r,\gamma)$ un secteur complexe ; on pose $\Gamma_{\mathbb{R}}=\Gamma\cap\mathbb{R}$ et on diminuera Γ un nombre fini de fois par la suite.

Pour $x,y\in\mathbb{C}^d$ on note $(x|y)$ la forme quadratique complexe

$$(18) \qquad (x|y) = \Sigma x_j y_j$$

et on pose

$$x^2 = (x|x), \quad |x|^2 = (x|\overline{x}). \tag{19}$$

DÉFINITION 4. – *On appelle « système de coordonnées sous-polaire » une application de* $\Gamma \times N$ *dans* $\mathbb{C}^d$ *de la forme*

$$(z,\theta) \longmapsto zH(z,\theta), \quad H(z,\theta) = H_0(\theta) + z^\beta H_1(z,\theta) \tag{20}$$

avec $\beta > 0$, H_0 *analytique de* N *dans* $\mathbb{R}^d$, $H_1 \in (\mathcal{A}_\Gamma)^d$, *vérifiant*

(i) $(r,\theta) \mapsto rH(r,\theta)$ *est à différentielle injective de* $\Gamma_{\mathbb{R}} \times N$ *dans* $\mathbb{R}^d$.

(ii) $\theta \mapsto |H_0(\theta)|$ *est à valeurs dans un compact de* $\mathbb{R}^*_+$.

(iii) *Il existe* $c_1 \in [0,1[$ *tel que* $\forall z \in \Gamma$, $\forall(\theta,e) \in TN$ *on ait*

$$\big|(H_0(\theta)|u)\big| \leq c_1 |H_0(\theta)||u| \text{ avec } u = \frac{\partial H}{\partial \theta}(z,\theta)[e].$$

(iv) *Il existe* $c_2 > 0$ *tel que* $\forall(\theta,e) \in TN$, $\forall r \in \Gamma_{\mathbb{R}}$, $\forall z \in \Gamma$ *vérifiant* $\frac{r}{2} \leq |z| \leq 2r$ *on ait*

$$\left|\frac{\partial H}{\partial \theta}(z,\theta)[e]\right| \leq c_2 \left|\frac{\partial H}{\partial \theta}(r,\theta)[e]\right|.$$

On notera que, pour le moment, nous n'exigeons pas l'injectivité de $(r,\theta) \mapsto rH(r,\theta)$ *dans* (i).

Un système de coordonnées sous-polaire $(z,\theta) \mapsto zH(z,\theta)$ *sera dit « quasi-polaire » s'il vérifie*

$$\theta \longmapsto H_0(\theta) \quad \textit{est à différentielle injective de} \quad N \quad \textit{dans} \quad \mathbb{R}^d. \tag{21}$$

Exemples.

a) $d = 2$, $N =]-2,2[$

$$(z,\theta) \longmapsto \left(x_1 = z, x_2 = z^{\frac{3}{2}}\theta\right) \text{ est sous-polaire ;}$$

l'image de $\Gamma_{\mathbb{R}} \times [-1,1]$ est (près de 0) le cusp $\{x_1 > 0; |x_2| \leq x_1^{\frac{3}{2}}\}$.

b) $d = 2$, $N =]-2\pi, 2\pi[$

$$(z,\theta) \longmapsto \left(x_1 = z\cos\theta, x_2 = z\sin\theta + z^{\frac{3}{2}}\sin\frac{\theta}{2}\right) \text{ est quasi-polaire ;}$$

l'image de $\Gamma_{\mathbb{R}} \times [-\pi,\pi]$ est (près de 0) le complémentaire du cusp $\{(0,0)\} \cup \{x_1 < 0, |x_2| < |x_1|^{\frac{3}{2}}\}$.

c) $d = 2$, $N =]-2\pi, 2\pi[$

$$(z,\theta) \longmapsto \left(x_1 = z\cos\theta, x_2 = z\sin\theta + z^2\sin\frac{\theta}{2}\right) \text{ est quasi-polaire ;}$$

l'image de $\Gamma_{\mathbb{R}} \times [0,\pi]$ est (près de 0) $\{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\} \cup \{x_1 \leq 0, x_2 \geq x_1^2\} \setminus (0,0)$, dont le bord est formé de deux demi-courbes tangentes à l'origine.

d) $d = 3$, $N = \{(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2, \theta_1^2 + \theta_2^2 < 2\}$

$$(z, \theta) \longmapsto \left(x_1 = z,\, x_2 = z\theta_1,\, x_3 = z^{\frac{3}{2}}\theta_2\right) \text{ est sous-polaire ;}$$

l'image de $\Gamma_{\mathbb{R}} \times \{\theta_1^2 + \theta_2^2 \leq 1\}$ est le cône quasi-homogène $\{x_1 > 0; x_1 x_2^2 + x_3^2 \leq x_1^3\}$.

LEMME 4. – *Soit* $(z, \theta) \mapsto zH(z, \theta)$ *un système de coordonnées sous-polaire,* $(z, \theta) \in \Gamma \times N$, $\Gamma = \Gamma(r_0, \gamma_0)$. *Il existe un changement de variable à la source de la forme*

$$(w, \theta) \longmapsto (z, \theta); \quad z = wG(w, \theta); \quad G = G_0(\theta) + w^\beta G_1(w, \theta) \tag{22}$$

défini sur $\Gamma' \times N$, $\Gamma' = \Gamma(r_0', \gamma_0')$, $r_0' \ll r_0$, $\gamma_0' \ll \gamma_0$, *avec* G_0 *analytique de* N *dans* $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$, $G_1 \in \mathcal{A}_{\Gamma'}$, $G_1(\rho, \theta) \in \mathbb{R}$ *pour* $\rho \in \Gamma_{\mathbb{R}}'$, *tel que si on pose*

$$j(w, \theta) = wV(w, \theta); \quad V(w, \theta) = G(w, \theta) H(wG(w, \theta), \theta) \tag{23}$$

on ait

(i) $(w, \theta) \mapsto wV(w, \theta)$ *est un système de coordonnées sous-polaire et* $(V(w, \theta) | V(w, \theta)) \equiv 1$.

(ii) *Si* dx^2 *désigne la métrique euclidienne sur* $\mathbb{R}^d$, *on a*

$$j^*(dx^2) = d\rho^2 + q(\rho, \cdot) + \mathcal{O}(\rho^\beta (d\rho^2 + q(\rho, \cdot))) \tag{24}$$

où $q(w, \theta, e)$ *est la métrique tempérée sur* TN *définie par*

$$q(w, \theta, e) = \frac{w^2}{|H_0(\theta)|^2} (\Pi_\theta u | \Pi_\theta u), \quad u = \frac{\partial H}{\partial \theta}(wG(w, \theta), \theta)[e] \tag{25}$$

Π_θ *désignant le projecteur orthogonal*

$$\Pi_\theta(u) = u - \frac{H_0(\theta)}{|H_0(\theta)|^2} (H_0(\theta) | u). \tag{26}$$

(Pour définir le $\mathcal{O}$ *dans (24), on considère* $d\rho^2 + q$ *comme métrique tempérée sur* $\mathbb{R} \oplus TN$.*)*

(iii) *D'après* (i) j *induit un isomorphisme* $\tilde{j}$ *de* $T^*(\Gamma_{\mathbb{R}}' \times N)$ *sur* $(\Gamma_{\mathbb{R}}' \times N) \overset{j}{\times} T^*\mathbb{R}^d$.

Alors, si ξ_k *désigne la* $k^{ème}$ *fonction coordonnée sur la fibre de* $T^*\mathbb{R}^d$, *on a*

$$\xi_k \circ \tilde{j}(\rho, \theta, \sigma, e') = \xi_k^0(\rho, \theta)\sigma + \ell_k(\rho, \theta, e') \tag{27}$$

où $\xi_k^0 \in \mathcal{A}_{\Gamma'}$, ℓ_k *est linéaire en* e', *s'étend holomorphiquement en* ρ *à* $w \in \Gamma'$ *et vérifie,* q' *désignant la métrique duale de* q *sur* T^*N

$$\begin{gathered} \exists M, \quad \forall (\theta, e') \in T^*N, \quad \forall w, \rho, \quad \tfrac{\rho}{2} \leq |w| \leq 2\rho \\ |\ell_k(w, \theta, e')| \leq M(q'(\rho, \theta, e'))^{\frac{1}{2}}. \end{gathered} \tag{28}$$

Preuve.

1. On commence par déterminer la fonction $G = G_0 + w^\beta G_1$ comme solution de l'équation implicite

$$G(w,\theta) = \big(H(wG(w,\theta),\theta)\big|H\big(wG(w,\theta),\theta)\big)^{-\frac{1}{2}}. \tag{29}$$

Comme on a $H(z,\theta) = H_0(\theta) + z^\beta H_1(z,\theta)$, on définit G_0 par

$$G_0(\theta) = \big(H_0(\theta)\big|H_0(\theta)\big)^{-\frac{1}{2}}. \tag{30}$$

Avec $U(z,\theta) = \big(H(z,\theta)\big|H(z,\theta)\big)^{-\frac{1}{2}}$, on a alors $U(z,\theta) = G_0(\theta)+z^\beta U_1(z,\theta)$, $U_1 \in \mathcal{A}_\Gamma$. Soit $||U_1||_\infty = \sup\big\{|U_1(z,\theta)|, (z,\theta) \in \Gamma\times N\big\}$ et $B(\theta,\varepsilon_0) = \big\{G \in \mathbb{C};\, |G-G_0(\theta)| \le \varepsilon_0\big\}$. Pour $w \in \Gamma' = \Gamma(r'_0, \gamma'_0)$, $r'_0 \ll r_0$, $\gamma'_0 \ll \gamma_0$, et $G \in B(\theta,\varepsilon_0)$, on a $wG \in \Gamma$ pour tout $\theta \in N$ si $\varepsilon_0, r'_0, \gamma'_0$ sont petits et $|U(wG,\theta) - G_0(\theta)| = |wG|^\beta |U_1(wG,\theta)| \le$ Cte $||U_1||_\infty |w|^\beta \le \frac{\varepsilon_0}{2}$ quitte à diminuer r'_0. Donc l'application $G \mapsto \phi_{w,\theta}(G) = U(wG,\theta)$ envoie $B(\theta,\varepsilon_0)$ dans $B\big(\theta, \frac{\varepsilon_0}{2}\big)$ et $\frac{\partial}{\partial G}\phi_{w,\theta} = w\frac{\partial U}{\partial z}(wG,\theta)$ vérifie $\big|\frac{\partial}{\partial G}\phi_{w,\theta}\big| \le$ Cte $|w|^\beta \le$ Cte $r_0'^\beta \ll 1$, donc $\phi_{w,\theta}$ a un unique point fixe $G(w,\theta) \in B(\theta,\varepsilon_0)$, holomorphe en w, analytique en θ. Comme $G_0(\theta)$ est bornée, G est borné sur $\Gamma' \times N$ et vérifie

$$G(w,\theta) = U\big(wG(w,\theta),\theta\big) = G_0(\theta) + w^\beta G^\beta U_1(wG,\theta) = G_0(\theta) + w^\beta G_1(w,\theta) \tag{31}$$

avec $G_1 \in \mathcal{A}_{\Gamma'}$ et (29) est satisfait. Posons

$$\tilde{H}(w,\theta) = H(wG(w,\theta),\theta). \tag{32}$$

On a $G = (\tilde{H}|\tilde{H})^{-\frac{1}{2}}$ donc pour $e \in T_\theta N$

$$\frac{\partial G}{\partial\theta}(w,\theta)[e] = -G^3(\tilde{H}|\delta\tilde{H}), \quad \delta\tilde{H} = \frac{\partial H}{\partial\theta}(wG,\theta)[e] + w\frac{\partial H}{\partial z}(wG,\theta)\frac{\partial G}{\partial\theta}(w,\theta)[e]$$

d'où $\big(1 + G^3(\tilde{H}|w\frac{\partial H}{\partial z}(wG,\theta)\big)\frac{\partial G}{\partial\theta}[e] = -G^3\big(\tilde{H}\big|\frac{\partial H}{\partial\theta}(wG,\theta)[e]\big)$, donc

$$\Big|\frac{\partial G}{\partial\theta}(w,\theta)[e]\Big| \le \text{Cte}\,\Big|\frac{\partial H}{\partial\theta}(wG(w,\theta),\theta)[e]\Big| \tag{33}$$

car $\big|w\frac{\partial H}{\partial z}(wG,\theta)\big| \in \mathcal{O}(|w|^\beta)$.

2. On calcule $j^*(dx^2)$.

Pour $(\delta w, e) \in T_{(w,\theta)}(\Gamma' \times N)$, posons $u = \frac{\partial H}{\partial\theta}(wG(w,\theta),\theta)[e]$. Avec $V = G\tilde{H}$ et $x = j(w,\theta) = wV(w,\theta)$ on obtient

$$\delta x = \Big(V + w\frac{\partial V}{\partial w}\Big)\delta w + w\frac{\partial V}{\partial\theta}[e]. \tag{34}$$

On a

$$|V - G_0H_0| \le \text{Cte}\,|w|^\beta; \quad \Big|w\frac{\partial V}{\partial w}\Big| \le \text{Cte}\,|w|^\beta. \tag{35}$$

De plus on a $\left|\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \theta}[e] - \frac{\partial H}{\partial \theta}[e]\right| \leq \text{Cte}\,|w|^{\beta}|u|$ d'après (32) et (33), ainsi que $\left|\frac{\partial G}{\partial \theta}[e] + G^3(\tilde{H}|u)\right| \leq \text{Cte}\,|w|^{\beta}|u|$. Il en résulte

$$(36)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial \theta}[e] = G\dfrac{\partial \tilde{H}}{\partial \theta}[e] + \tilde{H}\dfrac{\partial G}{\partial \theta}[e] \\ \qquad\quad \equiv Gu - \tilde{H}G^3(\tilde{H}|u) \qquad (\text{mod}\,.\,\text{Cte}\,|w|^{\beta}|u|) \\ \qquad\quad \equiv G_0\Big[u - \dfrac{H_0}{|H_0|^2}(H_0|u)\Big] = G_0\Pi_\theta(u) \qquad (\text{mod}\,.\,\text{Cte}\,|w|^{\beta}|u|)\,. \end{cases}$$

Comme on a $G_0^2(H_0|H_0) \equiv 1$ et $(H_0(\theta)|\Pi_\theta(u)) \equiv 0$, on déduit de (34), (35), (36)

$$(37)\quad (\delta x|\delta x) \equiv (\delta w)^2 + w^2 G_0^2(\Pi_\theta(u)|\Pi_\theta(u)) \quad \Big(\text{mod}\,.\,\text{Cte}\,|w|^{\beta}\,[|\delta w|^2 + |w|^2|u|^2]\Big)\,.$$

3. On vérifie que $(w,\theta) \mapsto wV(w,\theta)$ est sous-polaire.

Les points (i) et (ii) de la définition 4 sont clairement satisfaits. Avec les notations précédentes, soit $v = \frac{\partial V}{\partial \theta}(w,\theta)[e]$; on a d'après (36) $|v - G_0\Pi_\theta(u)| \leq \text{Cte}\,|w|^{\beta}|u|$ et (d'après (iii) pour $(z,\theta) \mapsto zH$)

$$(38)\qquad \exists\delta > 0,\quad \forall w \in \Gamma',\quad \forall(\theta,e) \in TN \qquad |\Pi_\theta(u)| \geq \delta\,|u|$$

donc quitte à diminuer r_0', on obtient

$$(39)\qquad \exists C_1, C_2,\quad \forall w,\theta,e \qquad C_1\,|u| \leq |v| \leq C_2\,|u|$$

donc

$$(40)\qquad \Big|(V_0(\theta)|v)\Big| = \Big|(G_0H_0(\theta)|G_0\Pi_\theta(u) + v - G_0\Pi_\theta(u))\Big| \leq \text{Cte}\,|w|^{\beta}|v|$$

d'où le point (iii). Pour $\alpha > 0$ petit et $\frac{\rho}{1+\alpha} \leq |w| \leq (1+\alpha)\rho$ on a $\frac{r}{2} \leq |z| \leq 2r$ avec $z = wG(w,\theta)$ et $r = \rho G(\rho,\theta)$, donc d'après (36), (38), (39)

$$(41)\qquad \left|\frac{\partial V}{\partial \theta}(w,\theta)[e]\right| = |v| \leq \text{Cte}\,|u| \leq \text{Cte}\left|\frac{\partial H}{\partial \theta}(r,\theta)[e]\right| \leq \text{Cte}\left|\frac{\partial V}{\partial \theta}(\rho,\theta)[e]\right|$$

d'où le point (iv).

4. La relation (24) résulte de (37) et (38). Posons $v_w = \frac{\partial V}{\partial \theta}(w,\theta)[e]$ et $u_w = \frac{\partial H}{\partial \theta}(wG(w,\theta),\theta)[e]$. On a $\Pi_\theta(u_\rho) \neq 0$ pour $e \neq 0$ pour $\rho \in \Gamma_{\mathbf{R}}'$ d'après (38) et (i), et pour $\frac{\rho}{2} \leq |w| \leq 2\rho$ d'après (36), (39), (41)

$$(42)\qquad |\Pi_\theta(u_w)| \leq \text{Cte}\,|G_0\Pi_\theta(u_w)| \leq \text{Cte}\,|v_w| \leq \text{Cte}\,|v_\rho| \leq \text{Cte}\,|\Pi_\theta(u_\rho)|$$

donc la métrique q définie par (25) est tempérée.

5. On vérifie le point (iii) du lemme 4.

Soit $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d)$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$. On a

$$\xi_k \circ \tilde{j}(\rho, \theta, \sigma, e') = \sigma\delta\rho + e'(e) = \xi_k^0(\rho, \theta)\sigma + \ell_k(\rho, \theta, e') \quad \text{avec} \quad d(\rho V(\rho, \theta))[\delta\rho, e] = \varepsilon_k . \tag{43}$$

Pour $(w, \theta) \in \Gamma' \times N$, on pose $a(w, \theta) = V(w, \theta) + w\frac{\partial V}{\partial w}(w, \theta)$; on a $a \equiv G_0 H_0$ modulo Cte $|w|^\beta \mathcal{A}^d_{\Gamma'}$; on note $\varphi_a(b)$ la forme linéaire sur $\mathbb{C}^d$

$$\varphi_a(b) = \frac{(a|b)}{(a|a)} . \tag{44}$$

Pour $\delta w \in \mathbb{C}$, $e = e_1 + ie_2 \in T_\theta N \otimes \mathbb{C}$, l'équation

$$d(j(w, \theta))[\delta w, e] = \varepsilon_k \tag{45}$$

équivaut à

$$\begin{cases} b - a\varphi_a(b) = f_k = \varepsilon_k - \varphi_a(\varepsilon_k)a \in \mathcal{A}^d_{\Gamma'} \\ \delta w = \varphi_a(\varepsilon_k) - \varphi_a(b); \quad b = w\dfrac{\partial V}{\partial \theta}(w, \theta)[e] . \end{cases} \tag{46}$$

On pose $J = J(w, \theta) = \frac{\partial V}{\partial \theta}(w, \theta)$; alors J est $\mathbb{R}$–linéaire de $T_\theta N$ dans $\mathbb{C}^d$ et on écrit $J = J_1 + iJ_2$ avec J_k $\mathbb{R}$–linéaire de $T_\theta N$ dans $\mathbb{R}^d$. Comme $(w, \theta) \mapsto wV$ est sous-polaire, d'après le point (iv) de la définition 4, on a, en recopiant la preuve des inégalité II.1 (4)

$$\begin{cases} \exists C, \quad \forall \rho \in \Gamma'_{\mathbb{R}}, \quad \forall (\theta, e) \in TN, \quad \forall \alpha, \ (|\alpha| \text{ petit}) \\ |J(\rho e^{i\alpha}, \theta)[e] - J(\rho, \theta)[e]| \leq C|\alpha||J(\rho, \theta)[e]| . \end{cases} \tag{47}$$

Il en résulte $|J_2(e)| \leq$ Cte $|\alpha||J_1(e)|$, J_1 injectif, donc le $\mathbb{C}-$espace

$$E(w, \theta) = \left\{ J(w, \theta)[e_1 + ie_2]; e_1 + ie_2 \in T_\theta N \otimes \mathbb{C} \right\} \tag{48}$$

est de dimension $d - 1$. On a aussi $|J(e_1)| + |J(e_2)| \leq$ Cte $|J(e_1 + ie_2)|$ donc d'après (40) $\left|(V_0(\theta)|J(e_1 + ie_2))\right| \leq$ Cte $|w|^\beta |J(e_1 + ie_2)|$ et par suite pour $b \in E(w, \theta)$, $|\varphi_a(b)| \leq$ Cte $|w|^\beta |b|$. L'équation $b - a\varphi_a(b) = f_k$ possède donc une unique solution $b_k(w, \theta) \in E(w, \theta)$ et on a $b_k \in \mathcal{A}^d_{\Gamma'}$. On a donc

$$\xi_k^0(w, \theta) = \varphi_a(\varepsilon_k) - \varphi_a(b_k) \in \mathcal{A}_{\Gamma'} . \tag{49}$$

D'après (43), (46) on a

$$\ell_k(w, \theta, e') = e'(e_1 + ie_2); \quad wJ(e_1 + ie_2) = b_k . \tag{50}$$

Soit $\tilde{q}$ la métrique sur TN définie par

$$\tilde{q}(w, \theta, e) = w^2(Je|Je) . \tag{51}$$

D'après (36), (38), (42), on a $\tilde{q} - q \in \mathcal{O}(\rho^\beta q)$, donc $\tilde{q}$ est tempérée et les métriques duales sur T^*N vérifient d'après le lemme 1

$$\tilde{q}' - q' \in \mathcal{O}(\rho^\beta q') . \tag{52}$$

D'après ce qui précède, la restriction de la forme quadratique complexe $(\cdot|\cdot)$ à $E_{w,\theta}$ est non dégénérée. Notons Ψ l'isomorphisme de $(E_{w,\theta})'$ sur $E_{w,\theta}$ défini par $(\Psi(x)|y) = x(y)$ et $\underline{J}$ l'isomorphisme de $T_\theta N \otimes \mathbb{C}$ sur $E_{w,\theta}$ défini par J. D'après (51) et par définition de la métrique duale, on a

$$\tilde{q}'(w, \theta, e') = \frac{1}{w^2} \left(\Psi^t \underline{J}^{-1}(e') \middle| \Psi^t \underline{J}^{-1}(e')\right) \tag{53}$$

et d'après (50)

$$\ell_k(w, \theta, e') = \frac{1}{w} \left(\Psi^t \underline{J}^{-1}(e') \middle| b_k\right) . \tag{54}$$

Or d'après (47) et quitte à diminuer Γ', le vecteur de $\mathbb{C}^d$ $x = \Psi^t \underline{J}^{-1}(e')$, avec $e' \in T^*_\theta N$ vérifie $|\operatorname{Im} x| \leq 0,1 |\operatorname{Re} x|$; en particulier, on a $|x|^2 \leq 1,1 \left|(x|x)\right|$; l'inégalité (28) en résulte, d'après (53), (54), $b_k \in \mathcal{A}^d_{\Gamma'}$ et (52), ce qui achève la vérification du lemme 4. $\diamondsuit$

DÉFINITION 5. – *Avec les notations du lemme 4, on appelle métrique angulaire associée au système de coordonnées sous-polaires $zH(z,\theta)$ la métrique tempérée sur TN,* $q = \frac{w^2}{|H_0(\theta)|^2} (\Pi_\theta u | \Pi_\theta u)$ (voir (25)).

DÉFINITION 6. – *Le système de coordonnées sous-polaires $(z,\theta) \mapsto zH(z,\theta)$ est dit strict si on a l'identité $(H(z,\theta)|H(z,\theta)) \equiv 1$. Dans ce cas, si $\tilde{q}$ est la métrique tempérée sur TN*

$$\tilde{q}(z, \theta, e) = z^2 (u|u), \quad u = \frac{\partial H}{\partial \theta}(z, \theta)[e] \tag{55}$$

et q la métrique angulaire, on a $\tilde{q} - q \in \mathcal{O}(r^\beta q)$ d'après la preuve du lemme 4.

II.3. Géométries admissibles

On reprend les notations de l'introduction. Soit $m \in \overline{\omega} \setminus \omega$, g_m la métrique induite par g sur la fibre L_m en m du fibré normal à la strate $\mathcal{S}_{i(m)}$, $\bar{\omega}' = \bigcup_{i \in I(m)} \mathcal{S}'_i$ la stratification fournie par l'hypothèse (H.1). Quitte à effectuer un changement de variable linéaire en x', on peut supposer que g_m est la métrique euclidienne standard sur $\mathbb{R}^d$, ce que nous ferons.

DÉFINITION 7. – *On dit que le couple $\left(\bar{\omega}' = \bigcup_{i \in I(m)} \mathcal{S}'_i, g_m\right)$ est sous-conique s'il existe une variété analytique N, un compact K de N, un système de coordonnées sous-polaire $(z,\theta) \mapsto j(z,\theta) = zH(z,\theta)$ de $\Gamma \times N$ dans $\mathbb{C}^d$, un voisinage U de l'origine dans $\bar{\omega}'$ et un $r_0 > 0$ tels que*

(i) *j induit une bijection de* $]0, r_0[\times K$ sur $(\bar{\omega}' \cap U) \setminus 0$.

(ii) $\forall i \in I(m) \setminus i(m)$ $\exists \Sigma_i \subset K$ *vérifiant* $]0, r_0[\times \Sigma_i = j^{-1}(\mathcal{S}'_i \cap U)$.

(iii) *La métrique angulaire associée à $(z,\theta) \mapsto zH(z,\theta)$ est sous-conique* (voir *les définitions* 3 *et* 5).

L'hypothèse (ii) signifie que les strates $\mathcal{S}'_i$ (différentes de la strate $\mathcal{S}'_{i(m)} = \{x' = 0\}$) sont des réunions de courbes $\theta = \mathrm{Cte}$, paramétrées par r. Comme la restriction de j à $\Gamma_{\mathbf{R}} \times N$ est à différentielle injective, et que j induit une bijection de $]0, r_0[\times \Sigma_i$ sur $\mathcal{S}'_i \cap U$, les Σ_i sont des sous-variétés de N de codimension $\mathrm{codim}(\Sigma_i) = \mathrm{codim}(\mathcal{S}'_i)$, Σ_0 est ouverte, $K = \overline{\Sigma}_0$ et $U\Sigma_i$ est une stratification de $\overline{\Sigma}_0$.

Remarque 1. – D'après le lemme 4, on peut toujours supposer dans la définition 7 que $(z, \theta) \mapsto zH(z, \theta)$ est strict, *i.e.* vérifie $(H|H) \equiv 1$. Le point (iii) est alors équivalent à (iii)'

(iii)' la métrique $q(z, \theta, e) = z^2(u|u)$, $u = \dfrac{\partial H}{\partial \theta}(z, \theta)[e]$, est sous-polaire

et on a alors

$$j^*(dx^2) = dr^2 + q + \mathcal{O}(r^\beta(dr^2 + q)). \tag{56}$$

Remarque 2. – Soit g_m^2 une autre métrique sur L_m. Alors si $(\bar{\omega}', g_m)$ est sous-conique, $(\bar{\omega}', g_m^2)$ l'est si g_m^2 est assez voisine de g_m. En effet, on peut supposer $(z, \theta) \mapsto zH(z, \theta)$ strict pour g_m et appliquer le lemme 4 avec comme produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$ $(x|y)_2 = (Mx|My)$, $M = \mathrm{Id} + o(1)$, $g_m^2 = |Mx|^2$. On a alors $G(w, \theta) - 1 \in o(1)$, $\big||H_0(\theta)|_2^2 - 1\big| \in o(1)$, et si on pose (*voir* (25)) $u = \frac{\partial H}{\partial \theta}(w, \theta)[e]$, $u_2 = \frac{\partial H}{\partial \theta}(wG(w, \theta), \theta)[e]$, on a (d'après le point (iv) de la définition 4) $|u_2 - u| \leq o(1)|u|$, et $|\Pi_\theta^2(u_2) - u| \leq o(1)|u|$ et on peut alors appliquer le lemme 3.

Remarque 3. – Si dans la définition 7, le système $(x, \theta) \mapsto zH(z, \theta)$ est quasi-polaire, alors (iii) est automatique car la métrique angulaire $q = w^2 q_0 + q_1$ est quasi-conique, avec

$$q_0(\theta, e) = \frac{1}{|H_0(\theta)|^2}(\Pi_\theta u|\Pi_\theta u), \quad u = \frac{\partial H_0}{\partial \theta}[e]; \qquad q_1 \in \mathcal{O}(\rho^\beta w^2 q_0) \tag{57}$$

de sorte que dans ce cas, $(\bar{\omega}', g_m)$ est sous-conique pour toute métrique g_m.

Dans les exemples suivant, on choisit la stratification évidente.

Exemple 1. – Soit ω' l'ouvert de $\mathbb{R}^3$

$$\omega' = \{x_3 > 0\} \setminus \{x_1 = 0 \text{ et } x_2 \geq 0\}$$

représentant un demi-espace privé d'un écran. Cette situation est quasi-conique ; en effet, il suffit de choisir pour N la sphère $\mathbb{S}^2$ et d'utiliser les vraies coordonnées polaires.

Exemple 2. – Soit ω' l'ouvert de $\mathbb{R}^2$, représentant un cusp

$$\omega' = \{x_1 > 0; |x_2| \leq x_1^{\frac{3}{2}}\}$$

En utilisant le système sous-polaire de l'exemple a), (§. II.2), on vérifie que $(\bar{\omega}', g)$ est sous-conique pour tout g.

Exemple 3. – Soit ω' le cône quasi-homogène de $\mathbb{R}^3$

$$\omega' = \{x_1 > 0, x_1 x_2^2 + x_3^2 \leq x_1^3\}.$$

En utilisant le système sous-polaire de l'exemple d) (§. II.2) et l'exemple du §. II.1, on vérifie que $(\bar{\omega}', g)$ est sous-conique si g est proche de la structure euclidienne standard.

Exemple 4. – On choisit $N = \{\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2; |\theta| < \frac{1}{2}\}$ et on pose, avec $a > 2$

$$j(r, \theta) = \left(x_1 = r,\ \ x_2 = \frac{r^{\theta_1 + a}}{\log r},\ \ x_3 = \frac{r^{\theta_2 + a}}{\log r}\right) \in \mathbb{R}^3$$

$$\omega' = \left\{j(r, \theta);\ \ 0 < r < \frac{1}{2};\ \ |\theta| < \frac{1}{4}\right\}.$$

Alors j est un système de coordonnées sous-polaires, et la métrique angulaire associée $q = r^{2(\theta_1 + a)}|d\theta_1|^2 + r^{2(\theta_2 + a)}|d\theta_2|^2$ est sous-conique. On a

$$\sqrt{\det q(r, \theta)}\,|d\theta| = r^{\theta_1 + \theta_2 + 2a}\, d\theta_1\, d\theta_2$$

de sorte que (12) est satisfait, mais pas (12)'.

III. Rayons

Rappelons que π désigne la projection $T^*M|_{\bar{\Omega}} \setminus T^*_{\bar{\Omega}} \to \dot{T}^*_b\Omega$, $\hat{\pi}$ la restriction de π à $\operatorname{Car} P$, et $\Sigma_b = \pi(\operatorname{Car} P)$. Si A est une partie de Σ_b, $\pi^{-1}(A)$ est fermé ssi $\hat{\pi}^{-1}(A) = \pi^{-1}(A) \cap \operatorname{Car} P$ est fermé, donc π et $\hat{\pi}$ définissent la même topologie sur Σ_b. Σ_b est séparé. Près d'un point d'une strate S, plaçons nous dans le système de coordonnées fourni par l'hypothèse (H.1) ; alors les coordonnées x et ξ'' ($S = \{x' = 0\}$) sont des fonctions sur $\dot{T}^*_b\Omega$ et $\operatorname{Car} P \cap \{|x| \leq a, \frac{1}{b} \leq |\xi''| \leq b\}$ est compact (voir §. I (8)). Il en résulte que $\Sigma_b \cap \{|x| \leq a, \frac{1}{b} \leq |\xi''| \leq b\}$ est un espace compact métrisable (Bourbaki, Topologie Générale, §. IX, proposition 17), et par suite Σ_b est un espace localement compact métrisable.

Rappelons que les rayons sont définis au §. I, que pour $\rho \in \Sigma_b$, on a $K_\rho = \pi^{-1}(\rho) \cap \operatorname{Car} P$ et $\mathcal{F}_\rho$ désigne l'espace des fonctions définies au voisinage de K_ρ dans $\operatorname{Car} P$, et $\pi-$invariantes.

PROPOSITION 1. – *Soit* $\gamma : I \to \Sigma_b$ *un rayon,* $s_0 \in I$, $\rho_0 = \gamma(s_0)$. *Il existe deux éléments uniques* q_g, q_d *de* K_{ρ_0} *tels que pour tout* $f \in \mathcal{F}_{\rho_0}$, $s \mapsto f_\pi[\gamma(s)]$ *est dérivable à gauche et à droite en* s_0 *et*

$$\left(\frac{d}{ds}\right)_{g,d}(f_\pi \circ \gamma)(s_0) = \{p, f\}(q_{g,d}). \tag{1}$$

Preuve. – En se plaçant dans un système de coordonnées donné par l'hypothèse (H.1) qui redresse la stratification, on peut supposer $\rho_0 = (x' = 0, x'' = 0; \xi''_0)$ avec $x(\rho_0) \in S$, strate de codimension d et $(0, \xi''_0) \in \dot{T}^*S \cap \mathcal{T}$. Le symbole principal p de P est (voir §. I (8), (10)) $p = {}^t(\xi' - \nu)A(x)(\xi' - \nu) + R(x, \xi'')$ avec $\nu|_{x'=0} \equiv 0$, $R|_{x'=0} = R_0$, $A|_{x'=0} = A_0$. On supposera $A_0(0) = \operatorname{Id}$ et on pose

$$R_0(0, \xi''_0) = -\mu^2, \quad \mu > 0 \tag{2}$$

les éléments $q_{g,d} \in K_{\rho_0}$ cherchés sont de la forme

$$q_{g,d} = (x' = 0, x'' = 0; \xi'_{g,d}, \xi''_0), \quad p(q_{g,d}) = 0. \tag{3}$$

Comme $x' \in \mathcal{F}_{\rho_0}$, si (1) est satisfait, on a

$$\left(\frac{d}{ds}\right)_{g,d}(x'[\gamma(s)])(s_0) = \frac{\partial p}{\partial \xi'}(q_{g,d}) = 2A_0(0)\xi'_{g,d} = 2\xi'_{g,d} \tag{4}$$

donc $q_{g,d}$ sont uniques. D'après l'hypothèse (H.2), il existe un système de coordonnées sous-polaires strict $(z,\theta) \mapsto zH(z,\theta) = j(z,\theta)$ vérifiant les conditions de la définition 7 du §. II. Si on note $q'(r,\theta,e')$ la métrique duale sous-conique sur T^*N de la métrique q associée à j par la formule (56) du §. II, on a d'après les lemmes 1 et 4 du §. II, en notant σ la variable duale de r

$$j^*((\xi')^2) = \sigma^2 + q' + \mathcal{O}(r^\beta(\sigma^2 + q')) \tag{5}$$

$$j^*(\xi_j) = \xi_j^0\sigma + \ell_j, \ \ \xi_j^0(z,\theta) \in \mathcal{A}, \ \ |\ell_j| \le \text{Cte}\,|q'|^{\frac{1}{2}}, \ \ 1 \le j \le d. \tag{6}$$

En écrivant $p = \xi'^2 + {}^t\xi'(A - \mathrm{Id})\xi' - 2{}^t\xi' A\nu + {}^t\nu A\nu + R_0 + R - R_0$, et en notant $\tilde{p} = j^*(p)$ le symbole de P dans le système de coordonnées (r,θ,x''), on obtient

$$\tilde{p} = \sigma^2 + q' + R_0 + \tilde{h} \tag{7}$$

où le reste $\tilde{h}(r,\theta,x'';\sigma,e',\xi'')$ est de la forme, avec $0 < \beta < 1$

$$\begin{aligned}\tilde{h} =& r^\beta(a\sigma^2 + b\sigma + c) + \sum_{j>d} x''_j(a_j\sigma^2 + b_j\sigma + c_j)\\ &+ r\sum_{j>d}\xi''_j(d_j\sigma + e_j) + r\sum_{j,\ell>d}\xi''_j\xi''_\ell f_{j,\ell}\end{aligned} \tag{8}$$

où les coefficients sont des fonctions holomorphes en $z \in \Gamma$, analytiques en $\theta \in N$, x'' proche de 0 vérifiant les estimations, où les constantes sont indépendantes de z,θ,x'' et $e' \in T^*_\theta N$

- a, a_j, d_j, $f_{j,\ell}$ fonctions de la forme $g_0(z,\theta,x'')$,
- b, b_j, e_j, fonctions de la forme $g_1(z,\theta,x'',e')$ linéaires en e' et

$$|g_1(z,\theta,x'',e')| \le \text{Cte}\,|q'(z,\theta,e')|^{\frac{1}{2}}$$

- c, c_j, fonctions de la forme $g_2(z,\theta,x'',e')$ quadratiques en e' et

$$|g_2(z,\theta,x'',e')| \le \text{Cte}\,|q'(z,\theta,e')|.$$

On réécrit $\tilde{p}$ sous la forme

$$\tilde{p} = -\Theta + (q' + \tilde{h}) \qquad \Theta = -(\sigma^2 + R_0) \tag{9}$$

d'après (8) on a pour $|x| + |\xi'' - \xi''_0|$ petit,

$$|\tilde{h}| \leq \mathrm{Cte}\left[(r^\beta + |x''|)(\sigma^2 + q') + r(\sigma^2 + q')^{1/2} + r\right], \tag{10}$$

pour $(r, \theta, x'', \sigma, e', \xi'')$ réels et sur la variété caractéristique $\tilde{p} = 0$

$$|\sigma^2 + q' - \mu^2| \leq |\tilde{h}| + |R_0 + \mu^2|. \tag{11}$$

De (10) et (11) il résulte
(12)

$$\begin{cases} \tilde{p} = 0 \quad \text{et} \quad |x| + |\xi'' - \xi''_0| \quad \text{petit entraînent (pour} \quad (r, \theta, x'', \sigma, e', \xi'') \quad \text{réels)} \\ 0 \leq \sigma^2 + q' \leq \mathrm{Cte}; \quad |\tilde{h}| \leq \mathrm{Cte}(r^\beta + |x''|); \quad |R_0 + \mu^2| \leq \mathrm{Cte}(|x''| + |\xi'' - \xi''_0|). \end{cases}$$

Nous allons vérifier la proposition pour la dérivation à droite, avec $s_0 = 0$, l'autre cas étant identique. Comme $\rho_0 \in \mathcal{T}$, on a $0 < r(s)$ pour $0 < s \leq \varepsilon_0$, sur le rayon $\gamma(s)$, par la définition 2 du §. I, (21) d'un rayon. Or d'après la définition 7 du §. II, (r, θ, x'') est un système de coordonnées locales près de chaque point de $\overline{\Omega}$ tel que $0 < r < r_0$, et les variables cotangentes $(r, \theta, x'', \sigma, \xi'')$ sont π−invariantes. Comme nous supposons que la proposition 1 est démontrée sur les strates de codimension au plus $d-1$, on a dans $s \in]0, \varepsilon_0[$ en notant $q_{g,d}(s) = \big(x(s); \xi'_{g,d}(s), \xi''(s)\big) = \big(r(s), \theta(s), x''(s); \sigma(s), e'_{g,d}(s), \xi''(s)\big)$

$$\begin{cases} \dot{x}''_{g,d}(s) = \dfrac{\partial p}{\partial \xi''}(q_{g,d}(s)); \quad \dot{\xi}''_{g,d}(s) = -\dfrac{\partial p}{\partial x''}(q_{g,d}(s)) \\ \dot{x}'_{g,d}(s) = \dfrac{\partial p}{\partial \xi'}(q_{g,d}(s)) = 2A(x(s))\big(\xi'_{g,d}(s) - \nu(x(s), \xi''(s))\big) \\ \dot{r}_{g,d}(s) = \dfrac{\partial \tilde{p}}{\partial \sigma}(q_{g,d}(s)) = 2\sigma + \dfrac{\partial \tilde{h}}{\partial \sigma}(q_{g,d}(s)) \\ \dot{\sigma}_{g,d}(s) = -\dfrac{\partial \tilde{p}}{\partial r}(q_{g,d}(s)) = -\dfrac{\partial q'}{\partial r}(q_{g,d}(s)) - \dfrac{\partial \tilde{h}}{\partial r}(q_{g,d}(s)). \end{cases} \tag{13}$$

En particulier, $x(s)$, $\xi''(s)$ sont uniformément Lipschitzienne sur $]0, \varepsilon_0]$. D'après (8), et (12) on a $\left|\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \sigma}(q_{g,d}(s))\right| \leq \mathrm{Cte}(r^\beta + |x''|)$ et $\left|\frac{\partial \tilde{h}}{\partial r}(q_{g,d}(s))\right| \leq \frac{\mathrm{Cte}}{r}(r^\beta + |x''|)$ et puisque q' est sous-conique

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{g,d}(s) &\geq \frac{c}{r(s)} q'(r(s), \theta(s), e'_{g,d}(s)) - \frac{\mathrm{Cte}}{r}(r^\beta + |x''|) \\ &\geq \frac{1}{r(s)}\big(c\Theta(s) - \mathrm{Cte}(r^\beta + |x''|\big). \end{aligned} \tag{14}$$

On a donc le système différentiel pour $r = r(s)$, $\sigma = \sigma(s)$, $\Theta = \Theta(s) = \Theta(x''(s); \sigma(s), \xi''(s))$, $x'' = x''(s)$, $\xi'' = \xi''(s)$, dans $0 < s < \varepsilon_0$

$$\begin{cases} \big|\dot{r}_{g,d} - 2\sigma\big| \leq \mathrm{Cte}(r^\beta + |x''|) \\ \dot{\sigma}_{g,d} \geq \dfrac{1}{r}\big(c\Theta(s) - \mathrm{Cte}(r^\beta + |x''|)\big) \\ |\Theta + \sigma^2 - \mu^2| \leq \mathrm{Cte}(|x''| + |\xi'' - \xi''_0|) \\ \Theta \geq -\mathrm{Cte}(r^\beta + |x''|) \quad \text{et} \quad |\sigma| \leq \mathrm{Cte} \end{cases} \tag{15}$$

où la dernière ligne de (15) résulte de $q' \geq 0$, $\sigma^2 + q' \leq$ Cte et sur $\tilde{p} = 0$, $\Theta = q' + \tilde{h} \geq \tilde{h}$. Comme $x(s)$, $\xi''(s)$ sont uniformément Lipschitz, on a $|x(s)| + |\xi''(s) - \xi_0''| \leq \text{Cte}\, s$, donc aussi $r(s) \leq \text{Cte}\, s$.

On désigne par $\varepsilon_n > 0$ des constantes petites indépendantes de $s > 0$ proche de $s = 0$. Pour $\sigma \in]-\mu+\varepsilon_1, \mu-\varepsilon_1[$, on a, d'après $(15)_3$, $\Theta \geq \varepsilon_2$ donc par $(15)_2$, $\dot{\sigma}_{g,d} \geq \frac{\varepsilon_3}{r} \geq \frac{\varepsilon_4}{s}$ donc σ croît ; donc si en s_1 on a $\sigma(s_1) \leq -\mu+\varepsilon_1$, on a par continuité de σ, pour tout $s_2 \in]0, s_1]$, $\sigma(s_2) \leq -\mu+\varepsilon_1 < 0$ donc par $(15)_1$ r décroît près de $s = 0$ ce qui contredit $\lim\limits_{s\to 0} r(s) = 0$. On a donc $\sigma \geq -\mu + \varepsilon_1$ pour s petit. Soient $0 < s_2 < s_1$ vérifiant $\sigma(s_i) < \mu - \varepsilon_1$; pour tout $s \in [s_2, s_1]$, on aura également $\sigma(s) < \mu - \varepsilon_1$ d'après ce qui précède, donc $\dot{\sigma}_{g,d} \geq \frac{\varepsilon_4}{s}$, d'où $\sigma(s_1) - \sigma(s_2) \geq \varepsilon_4 \ell n(\frac{s_1}{s_2})$, d'où $\mu - \varepsilon_1 \geq \varepsilon_4 \ell n(\frac{s_1}{s_2}) - \mu + \varepsilon_1$, donc s_2 ne peut être trop petit et on peut donc supposer $\mu - \varepsilon_1 \leq \sigma \leq$ Cte pour s petit. Alors $(15)_1$ entraîne que s et $r(s)$ sont des variables équivalentes près de $s = 0$ et on a $\liminf_{s\to 0} \sigma \geq \mu$. Or d'après $(15)_4$, $\liminf \Theta \geq 0$, et d'après $(15)_3$ $\lim |\Theta + \sigma^2 - \mu^2| = 0$, d'où

$$\lim_{s\to 0} \sigma = \mu \qquad \lim_{s\to 0} \Theta = 0. \tag{16}$$

On a $\dot{\Theta}_{g,d} = -\dot{R}_{0,g,d} - 2\sigma\dot{\sigma}_{g,d}$ et d'après (13) et $(15)_2$, $\dot{R}_{0,g,d} \in \mathcal{O}(1)$, $\dot{\sigma}_{g,d} \geq -\frac{\text{Cte}}{r}(r^\beta + s)$ donc puisque r et s sont des variables équivalentes, $\dot{\Theta}_{g,d} \leq \text{Cte}\, r^{\beta-1}$ et $\lim \Theta = 0$ implique $\Theta \leq C r^\beta$ donc par $(15)_3$

$$\sigma = \mu + \mathcal{O}(r^\beta) = \mu + \mathcal{O}(s^\beta) \quad \text{et} \quad \Theta \in \mathcal{O}(r^\beta). \tag{17}$$

Reprenons les notations du §. II, en particulier q' qui est définie par §. II (53).

Si $b(r, \theta, e')$ est linéaire en e' et vérifie $|b| \leq \text{Cte}(q')^{1/2}$, on a $b = \langle e', \ell\rangle$, $\ell = \ell(r, \theta, e)$ section de $]0, r_0[\times TN$, c'est-à-dire avec $\underline{J} = \frac{\partial H}{\partial \theta}(r, \theta) : T_\theta N \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} E_{r,\theta}$

$$b = \left(\Psi^t \underline{J}^{-1}(e') | \underline{J}(\ell)\right) \quad \text{et} \quad |\underline{J}(\ell)| \leq \frac{\text{Cte}}{r}. \tag{18}$$

De même, si $c(r, \theta, e')$ est quadratique en e', et vérifie $|c| \leq \text{Cte}\, q'$, on a $c = \langle e', B_{r,\theta}(e')\rangle$ où $B = B_{r,\theta}$ est symétrique de $T_\theta^* N$ dans $T_\theta N$. Avec $x = \Psi^t \underline{J}^{-1}(e')$, on a $\left|(x | \underline{J} B^t \underline{J} \Psi^{-1} x)\right| \leq \frac{\text{Cte}}{r^2}|x|^2$ pour tout $x \in \underline{J}(T_\theta N)$ donc

$$\frac{\partial c}{\partial e'} = 2B(e'), \quad |\underline{J}B(e')| \leq \frac{\text{Cte}}{r^2}|\Psi^t \underline{J}^{-1}(e')| = \frac{\text{Cte}}{r}[q'(\cdot, e')]^{1/2}. \tag{19}$$

On a pour $s > 0$ petit

$$\dot{\theta}_{g,d}(s) = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial e'}\Big(r(s), \theta(s), x''(s); \sigma(s), e'_{g,d}(s), \xi''(s)\Big) \tag{20}$$

et d'après (7) $\frac{\partial \tilde{p}}{\partial e'} = \frac{\partial q'}{\partial e'} + \frac{\partial \tilde{h}}{\partial e'}$. En utilisant (8), (18) et (19), on obtient $\left|\underline{J}\left(\frac{\partial \tilde{h}}{\partial e'}\right)\right| \leq \text{Cte}\, r^{\beta-1}(1 + \sqrt{q'})$ et d'après §. II (53) et (17), $\left|\underline{J}\left(\frac{\partial q'}{\partial e'}\right)\right| = \frac{2}{r}\sqrt{q'} \in \mathcal{O}\left(r^{\frac{\beta}{2}-1}\right)$ donc par (20)

$$\underline{J}(\dot{\theta}_{g,d}(s)) \in \mathcal{O}\left(r^{\frac{\beta}{2}-1}\right). \tag{21}$$

Si $v(s) \in \mathbb{R}^d$ est le vecteur $v(s) = H(r(s), \theta(s))$, $(H = H_0(\theta) + r^\beta H_1(r,\theta))$, (21) implique $\dot{v}_{g,d}(s) \in \mathcal{O}\big(s^{\frac{\beta}{2}-1}\big)$, donc $v(s)$ converge vers v_0 et on a

$$(22) \qquad |v(s) - v_0| \leq \text{Cte}\, s^{\frac{\beta}{2}}.$$

Comme on a

$$(23) \qquad \dot{x}'_{g,d} = \dot{r}_{g,d}\Big[H(r,\theta) + r\frac{\partial H}{\partial r}(r,\theta)\Big] + r\frac{\partial H}{\partial \theta}(r,\theta)[\dot{\theta}_{g,d}] = 2A(x)\big[\xi'_{g,d} - \nu\big]$$

(22) et (23) impliquent que $\xi'_d(s)$ converge vers un $\xi'_d(0)$ et on a

$$(24) \qquad |\xi'_d(s) - \xi'_d(0)| \in \mathcal{O}\big(s^{\frac{\beta}{2}}\big)$$

ce qui définit $q_d(0)$, et on a $q_d(s) - q_d(0) \in \mathcal{O}\big(s^{\frac{\beta}{2}}\big)$.

Soit maintenant $f(x,\xi) \in \mathcal{F}_{\rho_0}$; comme f est $\hat{\pi}-$ invariante, $f_0 = f|_{x'=0}$ est indépendant de ξ', donc f est de la forme

$$(25) \qquad f = f_0(x'',\xi'') + x' f_1(x'',\xi) + \mathcal{O}(x'^2)|_{\mathrm{Car}\, P}.$$

Alors (1) est vrai pour $f = f_0$ car on a dans $s > 0$ d'après (13)

$$\big(\dot{x}''_d(s), \dot{\xi}''_d(s)\big) = \Big(\frac{\partial p}{\partial \xi''}(q_d(0)), -\frac{\partial p}{\partial x''}(q_d(0))\Big) + \mathcal{O}\big(s^{\frac{\beta}{2}}\big);$$

(1) est vrai pour $f = x' f_1(x'',\xi)$, car comme f est $\pi-$ invariante on a $f_\pi \circ \gamma(s) = x'(s) f_1(x''(s), \xi'_d(s), \xi''(s))$ et $\lim\limits_{s\to 0} f_1(x''(s), \xi'_d(s), \xi''(s)) = f_1(0, \xi'_d(0), \xi''_0)$ et d'après (23)

$$\dot{x}'_d(s) = 2A(x)\big[\xi'_d(s) - \nu\big] = \frac{\partial p}{\partial \xi'}(q_d(0)) + \mathcal{O}\big(s^{\frac{\beta}{2}}\big);$$

enfin (1) est trivial pour $f \in \mathcal{O}(x'^2)$, ce qui achève la preuve de la proposition. ◇

COROLLAIRE 2. – *Si K est un compact de Σ_b, il existe M tel que pour tout rayon $\gamma : I \to K$, et toute fonction f $\pi-$invariante définie au voisinage de $\pi^{-1}(K)$ dans* Car P *on ait*

$$(26) \qquad \big|f_\pi \circ \gamma(s_1) - f_\pi \circ \gamma(s_2)\big| \leq M\,||f||_{C^1}\,|s_1 - s_2| \qquad \forall s_1, s_2 \in I.$$

En particulier les fonctions $x(\gamma(s))$ et $\xi''(\gamma(s))$ sont lipschitziennes sur les rayons.

LEMME 3. – *Soit S une strate de $\overline{\Omega} \setminus \Omega$, $\rho_0 \in \dot{T}^*S \cap \mathcal{T}$, $x = (x', x'')$ un système de coordonnée centré en $x(\rho_0)$ qui redresse la stratification, dans lequel $\rho_0 = (0, \xi''_0)$. Il existe $\delta_0 \in]0,1]$, $\varepsilon_0 > 0$, tels que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$ et tout rayon $\gamma : [0, T[\to \Sigma_b$ vérifiant (avec $x(\gamma(s)) = x(s)$, $\xi''(\gamma(s)) = \xi''(s)$)*

$$(27) \qquad |x''(0)| \leq \varepsilon_0, \quad |x'(0)| \leq \delta_0 \varepsilon, \quad |\xi''(0) - \xi''_0| \leq \varepsilon_0$$

on ait

$$(28) \qquad |x'(s)| \geq \delta_0 s \ \ \textit{pour tout} \ \ s \in [0, T[\cap[\varepsilon, \varepsilon_0].$$

Preuve. – On reprend les notations de la preuve de la proposition 1 ; en particulier si ε_0 et δ_0 sont assez petits, les inégalités (12) et le système différentiel (15) sont satisfaits pour $s \in [0, \varepsilon_0]$ dès que $x'(s) \neq 0$, et dans ce cas, pour $\varepsilon_1 > 0$ petit devant μ, $\sigma(s) \in [-\mu + \varepsilon_1, \mu - \varepsilon_1]$, $\mu = (-R_0(0, \xi''))^{1/2}$, entraîne $\Theta(s) \geq \varepsilon_2$ pourvu qu'on ait $\varepsilon_0 \ll \varepsilon_1$, donc aussi $\dot{\sigma}_d(s) \geq \frac{\varepsilon_3}{r(s)}$ car pour $s \in [0, \varepsilon_0]$ on a $(|x''(s)| + r^\beta(s)) \leq M\varepsilon_0^\beta$ d'après le corollaire 2.

1) Si pour un $s_0 \in \left[0, \frac{\varepsilon}{2}\right[$ on a $\sigma(s_0) \geq \varepsilon_1$ et $x'(s_0) \neq 0$ alors cela reste vrai pour $s \in [s_0, \varepsilon_0]$ et on a d'après $(15)_1$ $\dot{r}_d(s) \geq 2\sigma(s) - \text{Cte}\, M\varepsilon_0^\beta \geq \varepsilon_1$ donc $r(s) \geq \varepsilon_1(s - s_0) \geq \frac{\varepsilon_1}{2} s$ pour $s \geq \varepsilon \geq 2s_0$ d'où (28).

2) Si pour un $s_0 \in \left[0, \frac{\varepsilon}{2}\right[$ on a $r(s_0) = 0$, alors pour $\alpha > 0$ petit on a $r(s_0 + \alpha) > 0$ par définition d'un rayon et $\sigma(s_0 + \alpha)$ est proche de $\mu > \varepsilon_1$ d'après (16), donc on est ramené au point 1).

3) On peut donc supposer $r(s) \neq 0$ et $\sigma(s) < \varepsilon_1$ pour $s \in \left[0, \frac{\varepsilon}{2}\right[$. Supposons qu'il existe $s_1 \in \left[0, \frac{\varepsilon}{4}\right]$ tel que $\dot{r}_d(s_1) \geq 0$; d'après (12) et $(15)_1$ on a $|r(s_1) - r(0)| \leq \text{Cte}\, s_1$ donc $r(s_1) \leq \text{Cte}\, \varepsilon$. Toujours d'après $(15)_1$, $\dot{r}_d(s_1) \geq 0$ implique $\sigma(s_1) \geq -\text{Cte}\, M\varepsilon_0^\beta > -\mu + \varepsilon_1$ donc $\sigma(s)$ croît sur $\left[s_1, \frac{\varepsilon}{2}\right[$ et pour $s \in \left[0, \frac{\varepsilon}{4}\right]$,

$$\dot{\sigma}_d(s_1 + s) \geq \frac{\varepsilon_3}{r(s_1 + s)} \geq \frac{\varepsilon_3}{r(s_1) + \text{Cte}\, s} \geq \frac{\varepsilon_5}{\varepsilon} \tag{29}$$

avec ε_5 indépendant de ε_0, $\delta_0 \leq 1$, ce qui entraîne pour $\varepsilon_0 \ll \varepsilon_5$,

$$\sigma\Big(s_1 + \frac{\varepsilon}{5}\Big) \geq \sigma(s_1) + \frac{\varepsilon_5}{5} \geq \frac{\varepsilon_5}{5} - \text{Cte}\, M\varepsilon_0^\beta \geq \frac{\varepsilon_5}{6} \qquad (\text{si } \varepsilon_0 \text{ est petit}) \tag{30}$$

et on est ramené au cas 1) avec ε_1 remplacé par $\frac{\varepsilon_5}{6}$. On peut donc supposer que $r(s)$ décroît sur $\left[0, \frac{\varepsilon}{4}\right]$. Il existe $s_1 \in \left[0, \frac{\varepsilon}{8}\right]$ tel que $\sigma(s_1) \geq -\mu + \varepsilon_1$ (sinon d'après $(15)_1$, on a $\dot{r}_d \leq -\mu$ sur $\left[0, \frac{\varepsilon}{8}\right]$; d'où $r\left(\frac{\varepsilon}{8}\right) \leq r(0) - \mu\frac{\varepsilon}{8} < 0$ si $\delta_0 < \frac{\mu}{8}$ ce qui est absurde), donc $\sigma(s) \in [-\mu + \varepsilon_1, \varepsilon_1]$ pour tout $s \in \left[\frac{\varepsilon}{8}, \frac{\varepsilon}{4}\right]$, donc $\dot{\sigma}_d(s) \geq \frac{\varepsilon_3}{r(s)} \geq \frac{\varepsilon_3}{\delta_0 \varepsilon}$ car $r(s)$ décroît, donc $\sigma\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) \geq -\mu + \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_3}{8\delta_0} > \varepsilon_1$ si δ_0 est choisi assez petit, ce qui est impossible. ◇

LEMME 4. – *Soit S une strate, $x = (x', x'')$ un système de coordonnées centré en $m_0 \in S$ qui redresse la stratification près de m_0, $p = {}^t(\xi' - \nu)A(\xi' - \nu) + R$ le symbole de P dans ces coordonnées, $\mathcal{G}_S = \{R_0(x'', \xi'') = 0\}$, et K un compact de $\mathcal{G}_S$. Il existe $\delta_0 > 0$, $s_0 > 0$, $A_0 > 0$ tels que pour tout rayon $\gamma : 0 \in I \to \Sigma_b$ et tout $\delta \in [0, \delta_0]$, s'il existe $\rho_0 = (x''_0, \xi''_0) \in K$ vérifiant*

$$\max\Big(|x'(0)|, |x''(0) - x''_0|, |\xi''(0) - \xi''_0|\Big) \leq \delta^2 \tag{31}$$

avec $x(s) \equiv x(\gamma(s))$, $\xi''(s) \equiv \xi''(\gamma(s))$, alors pour $s \in I$, $|s| < s_0$, on a

$$\max\Big(|x'(s)|, |x''(s) - y''(s)|, |\xi''(s) - \eta''(s)|\Big) \leq (\delta + A_0|s|)^2 \tag{32}$$

avec $(y''(s), \eta''(s)) = \exp sH_{R_0}(x''_0, \xi''_0)$.

Preuve. – Rappelons (*voir* [L.2], §. I, lemme 1) que si f est une fonction positive continue dérivable à droite telle que $f(0) \leq \delta^2$ et $\dot{f}_d \leq C_0 f^{1/2} + C_1 s$ dans $s \geq 0$, on a

$f(s) \leq (\delta + A_0 s)^2$ dès que $2A_0^2 > C_0 A_0 + C_1$. Soit $F(s) = -R(x(s), \xi''(s)) \geq 0$; on a $-\dot{F}_d = \dot{x}'_d \frac{\partial R}{\partial x'} + \dot{x}''_d \frac{\partial R}{\partial x''} + \dot{\xi}''_d \frac{\partial R}{\partial \xi''}$ et d'après la proposition 1, $|\dot{x}'_d| = \left|\frac{\partial p}{\partial \xi'}(q_d)\right| \leq M_1 F^{1/2}$,

$$\left|(\dot{x}''_d, \dot{\xi}''_d) - \left(\frac{\partial R}{\partial \xi''}, -\frac{\partial R}{\partial x''}\right)\right| \leq M_1 F^{1/2},$$

et d'après (31) $F(0) \leq M_1 \delta^2$, où M_1 ne dépend que de K, donc pour $s \geq 0$ $F(s) < M_2(\delta + s)^2$, donc $|\dot{x}'_d| \leq M_3(\delta + s)$, d'où par (31) $|x'(s)| \leq (\delta + M_4 s)^2$. On a aussi

$$|\dot{x}''_d - \dot{y}''| + |\dot{\xi}''_d - \dot{\eta}''| \leq M_5\big(|x'| + F^{1/2} + |x'' - y''| + |\xi'' - \eta''|\big)$$

d'où

$$\max\Big(|x''(s) - y''(s)|, |\xi''(s) - \eta''(s)|\Big) \leq (\delta + M_6 s)^2. \qquad \diamondsuit$$

PROPOSITION 5. – *Soit K un compact de Σ_b, $\gamma_n : [a,b] \to K$ une suite de rayons qui converge uniformément vers γ. Alors γ est un rayon.*

Preuve. – La convergence uniforme signifie que si $\Delta = \operatorname{diag}(K \times K)$, pour tout voisinage V de Δ, il existe N tel que $(\gamma_n(s), \gamma(s)) \in V$ pour tout s et tout $n \geq N$. En particulier γ est continue et on peut utiliser n'importe quelle distance définissant la topologie pour caractériser la limite uniforme. Si $\gamma(s_0) \in \mathcal{G}$, on applique le lemme 4 aux γ_n avec $K = \{\gamma(s_0)\} = \{(x''_0, \xi''_0)\}$, qui entraîne (on normalise à $s_0 = 0$)

$$|x'(\gamma(s))| \leq A_0 s^2, \qquad \left|\Big(x''(\gamma(s)), \xi''(\gamma(s)) - \exp s H_{R_0}(x''_0, \xi''_0)\Big)\right| \leq A_0 s^2$$

ce qui prouve le point (ii) de la définition 2 du §. I, les fonctions f $\pi-$invariantes étant de la forme (25).

Si $\gamma(s_0) \in \mathcal{T}$, d'après le lemme 3 on a $|x'(\gamma_n(s))| \geq \delta_0 |s - s_0|$ pour $\varepsilon \leq |s - s_0| \leq \varepsilon_0$ dès que $|x'(\gamma_n(s_0))| \leq \delta_0 \varepsilon$ donc $x'(\gamma(s)) \neq 0$ pour $0 < |s - s_0| \leq \varepsilon_0$ d'où le (iii) de la définition 2 du §. I. $\diamondsuit$

PROPOSITION 6. – *Soit K un compact de Σ_b, $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et $\mathcal{R} = \big\{$rayons $\gamma : [a,b] \to K\big\}$. Si $\mathcal{R}$ est non vide, il est compact pour la topologie de la convergence uniforme.*

Preuve. – On suppose $\mathcal{R} \neq \phi$. Vérifions que $\mathcal{R}$ est équicontinue, *i.e.* pour tout voisinage V de $\Delta = \operatorname{diag}(K \times K)$, il existe $\alpha > 0$ tel que $|s_1 - s_2| \leq \alpha$ et $\gamma \in \mathcal{R}$ implique $(\gamma(s_1), \gamma(s_2)) \in V$. En effet, soit dist une distance définissant la topologie de Σ_b et supposons par l'absurde $\exists \varepsilon_0 > 0$, s_1^k, s_2^k, $\gamma_k \in \mathcal{R}$ avec $|s_1^k - s_2^k| \leq \frac{1}{k}$ et $\operatorname{dist}(\gamma_k(s_1^k), \gamma_k(s_2^k)) \geq \varepsilon_0$; K étant compact, quitte à extraire on peut supposer $\gamma_k(s_j^k) \to \rho_j$ et $\rho_1 \neq \rho_2$. Or d'après le corollaire 2 on a $f_\pi(\rho_1) = f_\pi(\rho_2)$ pour tout f $\pi-$invariante définie au voisinage de $\pi^{-1}(K)$, donc $x(\rho_1) = x(\rho_2)$, donc aussi pour tout f $\pi-$invariante définie au voisinage de $x(\rho_1) = x(\rho_2)$ donc $\rho_1 = \rho_2$: contradiction. La proposition 6 est donc conséquence du théorème d'Ascoli et de la proposition 5. $\diamondsuit$

COROLLAIRE 7. – *Soit $\gamma :]a,b[\to K$ un rayon. Alors γ se prolonge à $[a,b]$.*

Preuve. – On peut supposer $a < 0 < b$. D'après la proposition 6 on peut extraire de la suite de rayons $\gamma_n : [0,b] \to K$, $\gamma_n(s) = \gamma\big(s - \frac{1}{n}\big)$ une sous-suite qui converge vers un rayon $\tilde{\gamma} : [0,b] \to K$, et on a $\tilde{\gamma}|_{[0,b[} = \gamma|_{[0,b[}$. $\diamondsuit$

IV. Régularité elliptique

IV.1. Rappels de calcul pseudo-différentiel à valeurs dans les Banach

Nous rappelons dans ce paragraphe les éléments de la théorie de Sjöstrand qui nous seront utiles par la suite (*voir* [S.1] et [G-L]).

Si E est un espace de Banach, on note $||x; E||$ la norme de $x \in E$. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des opérateurs bornés de E dans F, muni de la norme $||A; E \to F|| = \sup\left\{||Ax; F||;\, ||x; E|| \le 1\right\}$.

Pour $h \in]0, h_0]$, soit E_h une famille d'espaces de Banach. Pour U ouvert de $\mathbb{C}^k$ et $\varphi \in C^1(U; \mathbb{R})$, on note $H_\varphi(U, E_h)$ l'espace de Sjöstrand des fonctions $f(z, h)$ définies pour $z \in U$, $h > 0$ petit telles que

$$f(\cdot, h) \quad \text{est holomorphe en} \quad z \in U \quad \text{à valeurs dans} \quad E_h \tag{1}$$

$$\exists A, B,\ \forall h \qquad |f; E_h|_{\varphi, U} \overset{\text{def}}{=} \sup_{z \in U}\left\{||f(z, h); E_h||\, e^{-\frac{\varphi(z)}{h}}\right\} \le A h^{-B}. \tag{2}$$

Soient E_h^1, E_h^2 deux familles de Banach. Pour W ouvert de $T^*\mathbb{C}^k$ on note $\mathcal{E}(W; E_h^1 \to E_h^2)$ l'espace des séries formelles $p = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{h}{i}\right)^n p_n(z, \zeta, h)$ qui vérifient

$$p_n(\cdot, \cdot, h) \quad \text{est holomorphe en} \quad (z, \zeta) \in W \quad \text{à valeurs dans} \quad \mathcal{L}(E_h^1, E_h^2). \tag{3}$$

$$\exists A, B,\ \forall (z, \zeta) \in W,\ \forall h,\ \forall n, \quad ||p_n(z, \zeta, h); E_h^1 \to E_h^2|| \le A B^n n^n. \tag{4}$$

Pour $p \in \mathcal{E}(W; E_h^1 \to E_h^2)$, $q \in \mathcal{E}(W; E_h^2 \to E_h^3)$ on définit $q \sharp p$ par

$$q \sharp p = \sum \left(\frac{h}{i}\right)^n (q \sharp p)_n; \quad (q \sharp p)_n = \sum_{j+k+|\alpha|=n} \frac{1}{\alpha!} \partial_\zeta^\alpha q_j \circ \partial_z^\alpha p_k. \tag{5}$$

Les inégalités de Cauchy entraînent $q \sharp p \in \mathcal{E}(W'; E_h^1 \to E_h^3)$ si $W' \subset\subset W$, et le produit $\sharp$ est associatif. Lorsque $E_h^1 = E_h^2$, on notera Id l'unité de $\mathcal{E}(W; E_h^1 \to E_h^1)$ définie par $p_0 \equiv \mathrm{Id}$, $p_n \equiv 0$, $n \ge 1$.

Un élément $p = \sum \left(\frac{h}{i}\right)^n p_n \in \mathcal{E}(W; E_h^1 \to E_h^2)$ est dit elliptique en $\rho_0 = (z_0, \zeta_0) \in W$ s'il existe un voisinage W_0 de ρ_0 et pour h petit, $q_0(z, \zeta, h)$ holomorphe en $(z, \zeta) \in W_0$ à valeurs dans $\mathcal{L}(E_h^2, E_h^1)$, tel que

$$\begin{cases} \exists A,\ \forall (z, \zeta),\ \forall h \qquad ||q_0(z, \zeta, h); E_h^2 \to E_h^1|| \le A \\ \forall z, \zeta, h, \quad q_0 \circ p_0 = \mathrm{Id}_{E_h^1}, \quad p_0 \circ q_0 = \mathrm{Id}_{E_h^2}. \end{cases} \tag{6}$$

Pour $W' \subset\subset W_0$, il existe alors $q \in \mathcal{E}(W'; E_h^2 \to E_h^1)$ tel que $p \sharp q = \mathrm{Id}$, $q \sharp p = \mathrm{Id}$.

Pour $\zeta \in \mathbb{C}^k$ on note $||\zeta|| = \sup |\zeta_j|$. Soit U un ouvert borné de $\mathbb{C}^k$, $\varphi \in C^1(\overline{U};\mathbb{R})$, $\zeta_0 \in \mathbb{C}^k$. On pose

$$(7) \quad \Lambda_\varphi = \left\{\left(z, \frac{2}{i}\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}(z)\right); z \in \overline{U}\right\} \qquad D = D(\zeta_0,\varphi,U) = \sup_{z\in U}\left|\left|\frac{2}{i}\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}(z) - \zeta_0\right|\right|.$$

Soit W un voisinage de $\overline{U} \times \{||\zeta - \zeta_0|| \leq D\}$ dans $T^*\mathbb{C}^k$; W contient Λ_φ. Pour $f \in H_\varphi(U, E_h^1)$ on pose

$$(8) \qquad f_\alpha^{\zeta_0}(z,h) = \left(\frac{h}{i}\partial_z - \zeta_0\right)^\alpha f(z,h) = e^{i\frac{z\cdot\zeta_0}{h}}\left(\frac{h}{i}\partial_z\right)^\alpha e^{-i\frac{z\cdot\zeta_0}{h}} f(z,h)$$

et pour $p \in \mathcal{E}(W; E_h^1 \to E_h^2)$

$$(9) \qquad \operatorname{Op}(p)(\zeta_0, C_1, C_2)(f)(z,h) = \sum_{\substack{C_2 hn \leq 1 \\ C_1 h|\alpha| \leq 1}} \left(\frac{h}{i}\right)^n \frac{1}{\alpha!}\partial_\zeta^\alpha p_n(z,\zeta_0,h)\left[f_\alpha^{\zeta_0}(z,h)\right].$$

Avec les notations de (4) on a $\left|\left|\frac{1}{\alpha!}\partial_\zeta^\alpha p_n(z,\zeta_0,h); E_h^1 \to E_h^2\right|\right| \leq AB^n D_1^{-|\alpha|} n^n$ pour un $D_1 > D$ et pour $U' \subset\subset U$ les inégalités de Cauchy appliquées au polydisque de polyrayon $\rho_j = \alpha_j h D_2^{-1}$ avec $D_1 > D_2 > D$, la formule de Stirling et

$$\operatorname{Re}\left[\varphi(w) - \varphi(z) - i(w-z)\zeta_0\right] = -\operatorname{Im}\left(\int_0^1 \left(\frac{2}{i}\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}(z + \theta(w-z)) - \zeta_0\right) d\theta(w-z)\right)$$

impliquent $\left|f_\alpha^{\zeta_0}; E_h^1\right|_{\varphi,U'} \leq \text{Cte}\ D_2^{|\alpha|}\langle\alpha\rangle |f; E_h^1|_{\varphi,U}$ pourvu qu'on ait $\left\{z \in U' \text{ et } ||w-z|| \leq (C_1D_2)^{-1}\right\} \Rightarrow w \in U$ et que α vérifie $C_1 h|\alpha| \leq 1$, Cte désignant une constante universelle et $\langle\alpha\rangle = \Pi(1+\alpha_j)^{1/2}$. Il en résulte

$$(10) \qquad \begin{cases} \text{Il existe } M,\ C_{1,0},\ C_{2,0} \text{ tels que pour tout } C_1 \geq C_{1,0},\ C_2 \geq C_{2,0} \\ \text{et tout } f \in H_\varphi(U; E_h^1) \text{ on ait } \operatorname{Op}(p)(\zeta_0, C_1, C_2)(f) \in H_\varphi(U'; E_h^2) \text{ et} \\ |\operatorname{Op}(p)(\zeta_0, C_1, C_2)(f); E_h^2|_{\varphi,U'} \leq M|f; E_h^1|_{\varphi,U} \qquad (\forall h). \end{cases}$$

Il suffit en effet de choisir $C_{2,0} > B$, $C_{1,0} > \left[D_2 \operatorname{dist}(U', U^c)\right]^{-1}$. Aussi, pour $C_1, C_1' \geq C_1^0$ et $C_2, C_2' \geq C_2^0$, il existe M, $\varepsilon > 0$ tel que

(11)
$$\left|\operatorname{Op}(p)(\zeta_0, C_1, C_2)(f) - \operatorname{Op}(p)(\zeta_0, C_1', C_2')(f); E_h^2\right|_{\varphi,U'} \leq Me^{-\frac{\varepsilon}{h}}|f; E_h^1|_{\varphi,U} \ (\forall f, h).$$

De plus, si ζ_0' est un autre point de $\mathbb{C}^k$, $D' = D(\zeta_0', \varphi, U)$ et si W contient également un voisinage de $\overline{U} \times \{||\zeta - \zeta_0'|| \leq D'\}$ en notant $C_{1,0}'$, $C_{2,0}'$ des constantes associées à ζ_0', alors pour tout $C_j \geq C_{j,0}$, $C_j' \geq C_{j,0}'$, il existe M, $\varepsilon > 0$ tels que pour tout f, h on ait (*voir* [G-L], lemme 3.2)

$$(12) \qquad \left|\operatorname{Op}(p)(\zeta_0, C_1, C_2)(f) - \operatorname{Op}(p)(\zeta_0', C_1', C_2')(f); E_h^2\right|_{\varphi,U'} \leq Me^{-\frac{\varepsilon}{h}}|f; E_h^1|_{\varphi,U}.$$

Enfin, si $q \in \mathcal{E}(W; E_h^2 \to E_h^3)$, il existe $C_{j,0}$ tels que pour $C_j \geq C_{j,0}$, il existe M, $\varepsilon > 0$ tels que pour tout f, h, on ait (*voir* [G-L], lemme 3.3)

$$\left|\mathrm{Op}(q\sharp p)(\zeta_0, C_1, C_2)(f) - \mathrm{Op}(q)(\zeta_0, C_1, C_2)\left[\mathrm{Op}(p)(\zeta_0, C_1, C_2)(f)\right]; E_h^3\right|_{\varphi, U'} \tag{13}$$
$$\leq M e^{-\frac{\varepsilon}{h}} |f; E_h^1|_{\varphi, U}.$$

Lorsque aucune confusion n'est à craindre, on notera $\mathrm{Op}(p)$ l'un, quelconque, des opérateurs différentiels en z, $\mathrm{Op}(p)(\zeta_0, C_1, C_2)$. On a toujours

$$\mathrm{Op}(\mathrm{Id}) = \mathrm{Id}. \tag{14}$$

Pour $r_0 > 0$, soit $\mathcal{E}'_{r_0}(\mathbb{R}^k, E_h)$ l'espace des familles $f(x, h)$ de distributions à support dans le pavé de $\mathbb{R}^m$ $\{||x|| = \sup |x_j| \leq r_0\}$, à valeurs dans E_h qui vérifient

$$\exists A, B, \nu, \qquad ||\langle f(x,h), \psi\rangle; E_h|| \leq A h^{-B} ||\psi||_{C^\nu(||x|| \leq r_0)}. \tag{15}$$

Soit T la transformation de F.B.I

$$(Tf)(z, h) = \left\langle f(x, h), e^{\frac{1}{h}(xz - \frac{x^2}{2})}\right\rangle \tag{16}$$

associée à la transformation canonique complexe

$$(x, \xi) \mapsto (z, \zeta), \quad z = x - i\xi, \quad \zeta = -ix. \tag{17}$$

Pour $f \in \mathcal{E}'_{r_0}(\mathbb{R}^k; E_h)$, U ouvert borné de $\mathbb{C}^k$, on a $Tf \in H_\varphi(U; E_h)$ avec $\varphi = \frac{1}{2}(\mathrm{Re}\, z)^2$ et $\Lambda_\varphi = \{(z, -i\,\mathrm{Re}\, z)\}$.

Si $M(z, x, h) \in \mathcal{L}(E_h^1, E_h^2)$ est une famille holomorphe en z au voisinage de $\overline{U}$ et x au voisinage de $\{x \in \mathbb{C}^k, ||x|| \leq r_0\}$, telle que $\sup\limits_{z,x,h} ||M; E_h^1 \to E_h^2|| < +\infty$, si on pose $p(z, \zeta, h) = p_0(z, \zeta, h) = M(z, i\zeta, h)$, on a $p \in \mathcal{E}(W; E_h^1 \to E_h^2)$ avec W voisinage de $\overline{U} \times \{||\zeta|| \leq r_0\}$ et pour $U \subset\subset \{||\mathrm{Re}\, z|| < r_0\}$

$$\exists \varepsilon > 0, \ \ \forall f \in \mathcal{E}'_{r_0}(\mathbb{R}^k, E_h^1) \left\langle Mf, e^{\frac{1}{h}(xz - \frac{x^2}{2})}\right\rangle - \mathrm{Op}(p)(Tf) \in H_{\varphi - \varepsilon}(U, E_h^2) \tag{18}$$

ce qui résulte de $h\partial_{z_j} Tf = T(x_j f)$, où on peut choisir $\zeta_0 = 0$ dans la réalisation de $\mathrm{Op}(p)$.

IV.2. Microlocalisation de l'équation

Rappelons que dans le §. I, on a posé $\mathcal{M}' = \{|x'| < \varepsilon_0\}$, $B_0 = \{|y''| < \varepsilon_0 \text{ et } |t - t_0| < \varepsilon_0\}$, $\Omega_0 = \Omega \cap (\mathcal{M}' \times B_0) = \omega' \times \{B_0\}$.

On désigne par u une distribution sur $B_0 \times \omega'$ qui vérifie (§. I (1')), c'est-à-dire, quitte à diminuer ε_0

$$\begin{cases} u, \ \nabla_{x'} u \in \mathcal{D}'(B_0, L^2(\omega')) \\ \forall \psi(x') \in C_0^\infty(\mathcal{M}') \quad \psi u \in \mathcal{D}'(B_0; H_0^1(\omega')) \\ \forall f \in C_0^\infty(B_0, H_0^1(\omega')) \quad \displaystyle\int_{\Omega_0} \left[(du|df) - \partial_t u \partial_t f\right] d_g y\, dt = 0. \end{cases} \tag{19}$$

On notera $\kappa(x', x'')$ la densité telle que $d_g y\, dt = \kappa(x', x'')\, dx'\, dx''$, $L^2 = L^2(\omega'; dx')$ H_h^1 l'espace $H^1(\omega')$ muni de la norme hilbertienne $|f|_{L^2}^2 + \sum_{j=1}^{d} |h\partial_{x_j} f|_{L^2}^2$, $H_{0,h}^1$ l'espace $H_0^1(\omega')$ muni de la norme de H_h^1 et H_h^{-1} le dual de $H_{0,h}^1$, *i.e.* l'espace $H^{-1}(\omega')$ muni de la norme

$$||f; H_h^{-1}|| = \sup \left\{ \left| \int_{\omega'} fg\, dx' \right|,\ g \in C_0^\infty(\omega'), ||g; H_h^1|| \le 1 \right\}. \tag{20}$$

On notera $\langle , \rangle$ la dualité entre $H_{0,h}^1$ et son dual H_h^{-1}. Pour $f \in H^1(\omega')$ on posera

$$[f] = \left(f, \frac{h}{i}\partial_{x_1} f, \ldots, \frac{h}{i}\partial_{x_d} f\right) \in [L^2(\omega')]^{d+1}. \tag{21}$$

On se donne $\chi(x'') \in C_0^\infty(B_0)$, égal à 1 pour $|x''| \le \frac{\varepsilon_0}{2}$ et on pose, pour $z \in U_0$ ouvert borné de $\mathbb{C}^k$, $(k = m + 1 - d)$

$$v(z, h) = T[\chi u \kappa](z, h) = \left\langle u(x', x''), \chi(x'')\kappa(x', x'')e^{\frac{1}{h}(x''z - \frac{(x'')^2}{2})} \right\rangle. \tag{22}$$

On a $v \in H_\varphi(U_0; H_h^1)$.

On se donne $\xi_0'' \in \mathbb{R}^k \setminus 0$, $V_1 \subset\subset V_0 \subset\subset \mathbb{R}^k \setminus 0$ deux voisinages ouverts de ξ_0'', r_0, r_1 deux réels vérifiant $0 < r_1 \ll \varepsilon_0 \ll r_0 \ll 1$, on pose $U_j = \{z \in \mathbb{C}^k; |\operatorname{Re} z| < r_j,\ \operatorname{Im} z \in -iV_j\}$ et on note $W \subset T^*\mathbb{C}^k$ un petit voisinage de $\overline{U}_0 \times \{||\zeta|| \le r_0\}$.

PROPOSITION IV.1. – *Il existe $S \in \mathcal{E}(W; H_h^1 \to H_h^{-1})$ de la forme $S = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{h}{i}\right)^n S_n$ avec*

$$\langle S_n(f), g\rangle = \int_{\omega'} b_n(z, \zeta, x', h)([f], [g])\, dx' \qquad f \in H_h^1,\ g \in H_{0,h}^1 \tag{23}$$

où $b_n(z, \zeta, x', h)(\cdot, \cdot)$ est une forme $\mathbb{C}-$bilinéaire sur $\mathbb{C}^{d+1}$, holomorphe en (z, ζ, x') au voisinage de $\overline{W} \times \{x' \in \mathbb{C}^d, ||x'|| \le r_0\}$, avec

$$\exists A, B,\ \forall z, \zeta, x', h, n \qquad ||b_n(z, \zeta, x', h)|| \le AB^n n^n \tag{24}$$

tel qu'on ait

$$\exists \varepsilon > 0 \qquad \operatorname{Op}(S)[v] \in H_{\varphi - \varepsilon}(U_1, H_h^{-1}). \tag{25}$$

En posant $[f] = (f_0, f')$, $f' = (f_1, \ldots, f_d)$, $[g] = (g_0, g')$, $g' = (g_1, \ldots, g_d)$, le symbole principal S_0 de S, défini par b_0 est donné par

$$\begin{cases} b_0([f], [g]) = {}^t(f' - f_0\tilde{\nu})\tilde{A}(-g' - g_0\tilde{\nu}) + f_0 g_0 \tilde{R} \\ \tilde{A} = A(x', i\zeta);\ \ \tilde{\nu} = \nu(x', i\zeta; iz + \zeta);\ \ \tilde{R} = R(x', i\zeta; iz + \zeta). \end{cases} \tag{26}$$

Preuve. – On note $\phi(z, x'') = x''z - \frac{x''^2}{2}$ et on pose $R(x, \xi'') = \sum_{j,\ell > d} R_{j,\ell}(x)\xi_j\xi_\ell$. On applique (19) aux fonctions f de la forme

$$f(x', x'') = g(x')\chi(x'')e^{\frac{\phi}{h}}, \quad g \in H_0^1(\omega'). \tag{27}$$

On obtient pour tout $g \in H_0^1(\omega')$, f étant définie par (27)

$$(28)\quad O = \int_{\omega'} dx' \int_{B_0} \Big[{}^t\Big(\frac{h}{i}\partial_{x'}u - \nu\Big(x, \frac{h}{i}\partial_{x''}\Big)u\Big)(-A(x))\Big(\frac{h}{i}\partial_{x'}f - \nu\Big(x, \frac{h}{i}\partial_{x''}\Big)f\Big) - \sum_{j,\ell>d} R_{j,\ell}(x)\Big(\frac{h}{i}\partial_{x_j}u\Big)\Big(\frac{h}{i}\partial_{x_\ell}f\Big)\Big]\kappa\, dx''.$$

On a

$$(29)\quad \int_{\omega'\times B_0} (-R_{j,\ell})\Big(\frac{h}{i}\partial_j u\Big)\Big(\frac{h}{i}\partial_\ell f\Big)\kappa\, dx = \int_{\omega'} g(x')\, dx' \Big\langle u, \frac{h}{i}\partial_j\Big[R_{j,\ell}\frac{h}{i}\partial_\ell[\chi e^{\phi/h}]\kappa\Big]\Big\rangle.$$

Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\sup\{\phi(x'', z); x'' \in \text{support}(\nabla\chi)\} \leq \varphi(z) - \varepsilon$ pour tout $z \in U_1$ car $r_1 \ll \varepsilon_0$. Les termes qui dérivent $\chi(x'')$ dans (28) et (29) vont donc contribuer à un reste $H_{\varphi-\varepsilon}(U_1, H_h^{-1})$ dans (25) d'après $(19)_1$; on a

$$(30)\quad \Big\langle \chi u\kappa, \frac{h}{i\kappa}\partial_j\Big[R_{j,\ell}\frac{h}{i}\partial_\ell(e^{\phi/h})\kappa\Big]\Big\rangle = \big\langle M(\chi u\kappa), e^{\phi/h}\big\rangle$$

avec $M(z, x'', h) = \sum_{\text{finie}} \left(\frac{h}{i}\right)^n M_n(z, x'')$, où les opérateurs M_n sont de la forme $M_n(z, x'')[a(x')] = \hat{M}_n(z, x', x'')\, a(x')$, les fonctions $\hat{M}_n$ étant holomorphes en z, x, le terme principal M_0 étant

$$(31)\quad M_0(z, x'')[a(x')] = R_{j,\ell}(x)\Big(\frac{1}{i}\partial_j\phi\Big)\Big(\frac{1}{i}\partial_\ell\phi\Big)\, a(x')$$

d'où le terme $\tilde{R}$ de la formule (26) en utilisant (18) avec $E_h^1 = E_h^2 = L^2$, car $\frac{1}{i}\partial_{x''}\phi = -(iz - ix'')$. On a aussi

$$(32)\quad \frac{h}{i}\partial_{x'}f - \nu\Big(x, \frac{h}{i}\partial_{x''}\Big)f = \chi(x'')e^{\phi/h}\Big[\frac{h}{i}\partial_{x'}g - \nu\Big(x, \frac{1}{i}\partial_{x''}\phi\Big)g\Big] - e^{\phi/h} g \cdot \nu\Big(x, \frac{h}{i}\partial_{x''}\chi\Big).$$

Dans (32), le deuxième terme du membre de droite contribue à un reste négligeable dans (25) et il reste à étudier dans (28) le terme

$$(33)\quad \int_{\omega'\times B_0} {}^t\Big(\frac{h}{i}\partial_{x'}u - \nu\Big(x, \frac{h}{i}\partial_{x''}\Big)u\Big) A(x)\Big(-\frac{h}{i}\partial_{x'}g + \nu\Big(x, \frac{1}{i}\partial_{x'}\phi\Big)g\Big)e^{\phi/h}\chi\kappa\, dx = I - II.$$

$$(34)\quad \begin{cases} I = \displaystyle\int {}^t\frac{h}{i}\partial_{x'}u A G e^{\phi/h}\chi\kappa\, dx; \quad G = -\frac{h}{i}\partial_{x'}g + \nu\Big(x, \frac{1}{i}\partial_{x''}\phi\Big)g \\ II = \displaystyle\int u\, {}^t\nu\Big(x, \frac{h}{i}\partial_{x''}\Big)\Big[A G e^{\phi/h}\chi\kappa\Big]\, dx. \end{cases}$$

Négligeant à nouveau les dérivées de $\chi(x'')$, et en notant

$$\hat{\nu} = \nu\big(x, \frac{h}{i}\partial_{x''}\big) = (\hat{\nu}_1, \dots, \hat{\nu}_d), {}^t\hat{\nu} = \begin{bmatrix} {}^t\hat{\nu}_1 \\ \vdots \\ {}^t\hat{\nu}_d \end{bmatrix},$$

on peut remplacer II par

$$II' = \int_{\omega'} dx' \Big\langle \chi u \kappa, \frac{1}{\kappa} {}^t\hat{\nu} \cdot \Big[A G e^{\phi/h}\kappa\Big]\Big\rangle = \sum_{j,\ell \le d} II'_{j,\ell} \tag{35}$$

$$\begin{aligned} II'_{j,\ell} = &- \int_{\omega'} \Big(\frac{h}{i}\partial_\ell g\Big) dx' \Big\langle \chi u \kappa, \frac{1}{\kappa} {}^t\hat{\nu}_j \Big[A_{j,\ell} e^{\phi/h}\kappa\Big]\Big\rangle \\ &+ \int_{\omega'} g\, dx' \Big\langle \chi u \kappa, \frac{1}{\kappa} {}^t\hat{\nu}_j \Big[A_{j,\ell} e^{\phi/h} \nu_\ell\Big[x, \frac{1}{i}\partial_{x''}\phi\Big]\kappa\Big]\Big\rangle \end{aligned} \tag{36}$$

avec $A(x) = (A_{j,\ell}(x))_{j,\ell}$. En utilisant à nouveau (18) et $e^{-\phi/h}\, {}^t\hat{\nu}_j(e^{\phi/h}) = \nu_j(x, iz - ix'') + \mathcal{O}(h)$, on obtient que $-II'$ contribue au terme $f_0 \tilde{\nu} \tilde{A}(g' + g_0 \tilde{\nu})$ dans (26). Enfin, on a $I = \sum I_{j,\ell}$

$$\begin{aligned} I_{j,\ell} = &- \int_{\omega'} \Big(\frac{h}{i}\partial_\ell g\Big) dx' \Big\langle \chi \kappa \frac{h}{i}\partial_j u, A_{j,\ell} e^{\phi/h}\Big\rangle \\ &+ \int_{\omega'} g\, dx' \Big\langle \chi \kappa \frac{h}{i}\partial_j u, A_{j,\ell}\nu_\ell\Big(x, \frac{1}{i}\partial_{x''}\phi\Big) e^{\phi/h}\Big\rangle. \end{aligned} \tag{37}$$

Comme pour $1 \le j \le d$, $B = B(x', x'')$ on a

$$\Big\langle \chi\kappa \frac{h}{i}\partial_j u, B e^{\phi/h}\Big\rangle = \frac{h}{i}\partial_j \langle \chi\kappa u, B e^{\phi/h}\rangle - \Big\langle \chi\kappa u, \frac{h}{i}\Big(\partial_j B + \frac{\partial_j \kappa}{\kappa} B\Big) e^{\phi/h}\Big\rangle \tag{38}$$

on obtient que I contribue au terme ${}^t f' \tilde{A}(-g' - g_0 \tilde{\nu})$ dans (26), et à des termes d'ordre inférieur S_n, $n \ge 1$ de S. $\diamondsuit$

Nota. – Si on pose $g = \overline{f}$ (fonction conjuguée), on a $-g' - g_0\tilde{\nu} = \bar{f}' - \bar{f}_0\tilde{\nu}$, ce qui explique le signe dans l'expression (26).

IV.3. Régularité elliptique

Soit S une strate de $\overline{\Omega} \setminus \Omega$, de codimension d, redressée par (H.1) en $S = \{x' = 0\}$. On note $(0, \xi_0'')$ un élément de $\dot{T}^* S|_{x_0 = 0}$ et on conserve les notations du §. IV.2.

PROPOSITION IV.2. – *On suppose* $(0, \xi_0'') \in \mathcal{E}$ *(i.e.* $R_0(0, \xi_0'') > 0$*). Il existe* $\varepsilon > 0$, U *voisinage de* $z_0 = -i\xi_0''$ *et* $\psi(x') \in C_0^\infty(|x'| < \varepsilon_0)$, $\psi \equiv 1$ *près de* $x' = 0$ *tels que*

$$\psi v \in H_{\varphi - \varepsilon}(U; H^1_{0,h}). \tag{39}$$

Preuve. – On pose $\tilde{v} = e^{-\frac{\alpha x'^2}{h}} v \in H_\varphi(U_0, H_h^1)$ avec $\alpha > 0$ et on note $\tilde{S}$ l'opérateur conjugué de S défini par

$$(40) \qquad \langle \tilde{S}_n(f), g\rangle = \left\langle S_n\big(f e^{\frac{\alpha x'^2}{h}}\big), g e^{-\frac{\alpha x'^2}{h}} \right\rangle \qquad f \in H_h^1, \ g \in H_{0,h}^1 .$$

Comme on a $\big[f e^{\frac{\alpha x'^2}{h}}\big] = e^{\frac{\alpha x'^2}{h}}(f_0, f' \mp 2i\alpha x_j f_0)$ on a $\tilde{S} \in \mathcal{E}(W; H_h^1 \to H_h^{-1})$ et en notant $\tilde{b}_0$ la forme $\mathbb{C}-$bilinéaire définissant $\tilde{S}_0$ par (23)

$$(41) \qquad \tilde{b}_0 = b_0 + \mathcal{O}(\alpha).$$

Comme $g \mapsto g e^{-\frac{\alpha x'^2}{h}}$ est borné sur $H_{0,h}^1$, on a d'après (25)

$$(42) \qquad \exists \varepsilon > 0 \qquad \operatorname{Op}(\tilde{S})[\tilde{v}] \in H_{\varphi-\varepsilon}(U_1, H_h^{-1}).$$

Soit $\psi(x') \in C_0^\infty(|x'| < \varepsilon_1)$, $0 < \varepsilon_1 \ll \varepsilon_0$, $\psi \equiv 1$ près de $x' = 0$. Posons $w = \psi \tilde{v}$, et notons $E_h = H_{0,h}^1(\omega' \cap \{|x'| < \varepsilon_1\})$, et $E_h' = H_h^{-1}(\omega' \cap \{|x'| < \varepsilon_1\})$ le dual de E_h. Comme le support de $\nabla_{x'}\psi(x')$ ne contient pas $x' = 0$, et $\alpha > 0$, on a d'après $(19)_2$

$$(43) \qquad w \in H_\varphi(U_0, E_h), \qquad \operatorname{Op}(\tilde{S})[w] \in H_{\varphi-\varepsilon}(U_1, E_h').$$

Comme (39) est conséquence de $w \in H_{\varphi-\varepsilon}(U; E_h)$ (le poids $\alpha x'^2$ est nul en $x' = 0$) pour vérifier la proposition IV.2, il suffit donc de vérifier que $\tilde{S}$, considéré comme élément de $\mathcal{E}(W; E_h \to E_h')$ est elliptique en $\big(z_0, \zeta_0 = \frac{2}{i}\frac{\partial \varphi}{\partial z}(z_0)\big)$, *i.e.* que la forme $\mathbb{C}-$bilinéaire sur E_h

$$(44) \qquad a_h(f, g) = \int_{\omega'} \tilde{b}_0(z_0, \zeta_0, x')([f], [g])\, dx'$$

définit un isomorphisme (uniforme en h) de E_h sur E_h'. Or on a $i\zeta_0 = 0$, $iz_0 + \zeta_0 = \xi_0''$, $A(x', 0) \gg 0$, $\nu(x', 0; \xi_0'') \in \mathbb{R}$, $R(x', 0, \xi'') > 0$ pour $|x'| \leq \varepsilon_1$ petit et avec $g = \bar{f}$, $-g' - g_0 \nu(x', 0; \xi_0'') = \overline{f' - f_0 \nu(x', 0, \xi_0'')}$. Pour α et ε_1 petits, on a donc d'après (26), (41)

$$(45) \qquad \exists c > 0, \ \forall f \in E_h, \ \forall h \qquad \operatorname{Re} a_h(f, \bar{f}) \geq c\|f\|_{E_h}^2$$

et la proposition résulte du lemme de Lax-Milgram.

La proposition suivante permet de caractériser $SS_b(u)$ à partir de la transformation de F.B.I tangentielle T.

PROPOSITION IV.3. – *Les propriétés suivantes sont équivalentes*

$$(46) \qquad (0, \xi_0'') \notin SS_b(u).$$

(47) Il existe $\varepsilon > 0$, U voisinage de $z_0 = -i\xi_0''$ et $\psi(x') \in C_0^\infty(|x'| < \varepsilon_0)$ $\psi \equiv 1$ près de $x' = 0$ tels que $\psi v \in H_{\varphi-\varepsilon}(U; H_{0,h}^1)$.

Preuve. – On a $\xi_0'' \neq 0$ et par définition du spectre (*voir* §. I (17))

$$(0, \xi_0'') \notin SS_b(u) \Longleftrightarrow \forall \xi'; \quad (x' = 0, x'' = 0; \xi', \xi_0'') \notin SS(\underline{u}).$$

Comme on a $v(z, x', h) = \int_{\omega' \times B_0} \chi(x'') u(x', x'') e^{\frac{1}{h}(x'' z - \frac{x''^2}{2})} \kappa(x', x'') dx''$ on a, en notant $\underline{v}(z, x', h)$ le prolongement de v par zéro pour $x' \notin \bar{\omega}'$, et avec $w \in \mathbb{C}^d$

$$\int \psi(x') \underline{v}(z, x', h) e^{\frac{1}{h}(x'w - \frac{x'^2}{2})} dx' = \int \psi \chi \underline{u} e^{\frac{\Theta}{h}} \kappa dx = J \tag{48}$$

avec $\Theta = x'w + x''z - \frac{x^2}{2}$. Si (47) est satisfait on a $|J| \in \mathcal{O}\big(\exp \frac{1}{2h}\left[(\operatorname{Re} w)^2 + (\operatorname{Re} z)^2 - \varepsilon\right]\big)$ pour (z, w) près de (z_1, w_1), $z_1 \in U$, $w_1 \in \mathbb{C}^d$, car $\psi \underline{v} \in H_{\varphi - \varepsilon}(U, L^2)$ donc $(0; \xi', \xi_0'') \notin SS(\underline{u})$ pour tout ξ' d'après la caractérisation de $SS(\underline{u})$ par transformation FBI (*voir* [S.1]) d'où $(0, \xi_0'') \notin SS_b(u)$.

Vérifions à présent l'implication (46) $\Rightarrow$ (47). Comme dans la preuve de la proposition IV.2 on pose $\tilde{v} = e^{-\frac{\alpha x'^2}{h}} v \in H_\varphi(U_0, H_h^1)$, $w = \psi(x')\tilde{v} \in H_\varphi(U_0, E_h)$ avec $\psi(x') \in C_0^\infty(|x'| < \varepsilon_1)$ égal à 1 près de $x' = 0$. Si $\tilde{S}$ est l'opérateur conjugué de S défini par (40), on a toujours

$$\operatorname{Op}(\tilde{S})[w] \in H_{\varphi - \varepsilon}(U_1, E_h'). \tag{49}$$

Soit $\underline{w}(z, x', h)$ l'extension de w par zéro pour $x' \notin \bar{\omega}'$; on a

$$\underline{w} \in H_\varphi(U_0, L^2(|x'| < 1)), \qquad \text{support}_{x'}(\underline{w}) \subset \{|x'| < \varepsilon_1\} \tag{50}$$

et

$$\int \underline{w}(z, x', h) e^{\frac{1}{h}(x'z' - \frac{x'^2}{2})} dx' = \int \psi(x') \underline{u}(x) e^{\frac{\phi}{h}} \chi \kappa dx \stackrel{\text{def}}{=} F(z', z, h) \tag{51}$$

avec cette fois $\phi = x'z' + x''z - (1 + 2\alpha)\frac{x'^2}{2} - \frac{x''^2}{2}$, phase de FBI associée à la transformation canonique complexe

$$(x, \xi) \mapsto (z', z; \zeta', \zeta), \ z' = x'(1 + 2\alpha) - i\xi', \ z = x'' - i\xi'', \ \zeta' = -ix', \ \zeta = -ix''. \tag{52}$$

Soit R une grande constante positive, K_R le compact de $\mathbb{C}^d$

$$K_R = \Big\{z' \in \mathbb{C}^d; \ |\operatorname{Re} z'| \leq 2, \ |\operatorname{Im} z'| \leq 2R\Big\}. \tag{53}$$

Il existe alors $\varepsilon > 0$, $B > 0$ et V voisinage de $K_R \times \{z_0 = -i\xi_0''\}$ dans $\mathbb{C}^{m+1}$ tels que

$$\forall h, \ \forall (z', z) \in V \quad |F(z', z, h)| \leq B e^{\frac{1}{2h}\left[(\operatorname{Re} z')^2 + (\operatorname{Re} z)^2 - \varepsilon\right]}. \tag{54}$$

En effet, près de $\operatorname{Re} z' = 0$, cela résulte de (51) et de l'hypothèse $\forall \xi'$, $(x = 0, \xi', \xi_0'') \notin SS(\underline{u})$ d'après la caractérisation par transformation FBI du spectre, et pour $\operatorname{Re} z' \neq 0$ du fait que $\underline{w} \in H_{\varphi - \alpha r^2}(U_0, L^2(r < |x'| < \varepsilon_1))$. Posons

$$\underline{w}_{h,a}(z, x', h) = e^{-\frac{1}{2h}(x' - a)^2} \underline{w}(z, x', h) \qquad a \in \mathbb{R}^d. \tag{55}$$

Alors la formule (51) s'écrit

$$F(a+ib,z,h)=e^{\frac{a^2}{2h}}\,\hat{\underline{w}}_{h,a}\Big(z,-\frac{b}{h},h\Big) \tag{56}$$

où $\widehat{\ }$ désigne la transformée de Fourier partielle en x', d'où par inversion de Fourier

$$\underline{w}(z,x',h)=(2\pi h)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}e^{i\frac{x'b}{h}-\frac{x'^2}{2h}}\,F(x'-ib,z,h)\,db. \tag{57}$$

On pose alors

$$\begin{cases}(\Pi_1^R\underline{w})(z,x',h)=(2\pi h)^{-d}\displaystyle\int_{|b|\le R}e^{i\frac{x'b}{h}-\frac{x'^2}{h}}\,F(x'-ib,z,h)\,db\\ \Pi_2^R\underline{w}=\underline{w}-\Pi_1^R\underline{w}.\end{cases} \tag{58}$$

Si U est un petit voisinage de z_0, on a d'après (50), (54), (58)

$$\Pi_1^R\underline{w}\big|_{|x'|<1}\in H_{\varphi-\varepsilon}\big(U;H_h^1(|x'|<1)\big)\,;\quad \Pi_2^R\underline{w}\big|_{|x'|<1}\in H_{\varphi}\big(U;L^2(|x'|<1)\big) \tag{59}$$

où le $\varepsilon>0$ de (59) dépend de R. Soit $\beta>0$ une grande constante et posons $\tilde{S}_\beta=\tilde{S}+\beta\,\mathrm{Id}$, c'est-à-dire, avec $\omega_1'=\omega'\cap\{|x'|<\varepsilon_1\}$ et $\delta_{n,0}=1$ si $n=0$, $\delta_{n,0}=0$ si $n>0$

$$\big\langle\tilde{S}_{\beta,n}(f),g\big\rangle=\big\langle\tilde{S}_n(f),g\big\rangle+\beta\,\delta_{n,0}\int_{\omega_1'}fg\,dx'\,;\quad \forall f,g\in E_h=H_{0,h}^1(\omega_1'). \tag{60}$$

D'après (26) et (41) si α et ε_1 sont fixés assez petits, on peut choisir β tel que $\tilde{S}_\beta$, vu comme élément de $\mathcal{E}(W;E_h\to E_h')$ soit elliptique en $\big(z_0,\zeta_0=\frac{2}{i}\frac{\partial\varphi}{\partial z}(z_0)\big)$. Or on a d'après (49), (59)

$$\exists\varepsilon=\varepsilon(R)\qquad \mathrm{Op}(\tilde{S}_\beta)[w]-\beta(\Pi_2^R\underline{w})\big|_{\omega_1'}\in H_{\varphi-\varepsilon}(U,E_h'). \tag{61}$$

Si pour $g\in H^1(\omega_1')$ on pose $Q^R(g)=(\Pi_2^R\underline{g})\big|_{\omega_1'}$, où Π_2^R est définit par les formules (58) (où z est un paramètre) alors Q^R envoie $H^1(\omega_1')$ dans $L^2(\omega_1')\subset H^{-1}(\omega_1')$, et on est ramené à vérifier l'ellipticité de $\tilde{S}_\beta-\beta Q^R$ en (z_0,ζ_0) pour R grand dans $\mathcal{E}(W;E_h\to E_h')$, ce qui va résulter de

$$\lim_{R\to\infty}\ \sup_{h\in]0,h_0]}\ \big|\big|Q^R;H_{0,h}^1(\omega_1')\to H_h^{-1}(\omega_1')\big|\big|=0. \tag{62}$$

Vérifions donc (62). Comme

$$\int e^{\frac{1}{h}(z'x'-\frac{x'^2}{2})}\,\underline{g}(x')\,dx'=(2\pi h)^{-\frac{d}{2}}\int e^{\frac{1}{2h}(z'+i\xi')^2}\,\hat{\underline{g}}\Big(\frac{\xi'}{h}\Big)\,d\xi',$$

(58) entraîne

$$\begin{cases}Q^R(g)=(2\pi)^{-d}\displaystyle\int e^{ix'\cdot\xi'}\,\hat{\underline{g}}(\xi')\,\Theta_h^R(\xi')\,dx'\big|_{x'\in\omega_1'}\\ \Theta_h^R(\xi')=(2\pi h)^{-\frac{d}{2}}\displaystyle\int_{|b|\ge R}e^{-\frac{1}{2h}(h\xi'-b)^2}\,db.\end{cases} \tag{63}$$

Si on note $Q^R_\lambda(g) = (2\pi)^{-d} \int e^{ix'\xi'}\, \underline{\hat{g}}(\xi')\, \mathbf{1}_{|\xi'|\geq\frac{\lambda}{h}}\, \Theta^R_h(\xi')\, d\xi'\big|_{x'\in\omega'_1}$ on a pour tout $\lambda > 0$

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{h\in]0,h_0]} \sup_{\xi'} \mathbf{1}_{|\xi'|\leq\frac{\lambda}{h}}\, \Theta^R_h(\xi') = 0$$

donc

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{h\in]0,h_0]} ||Q^R - Q^R_\lambda ; L^2(\omega'_1) \to L^2(\omega'_1)|| = 0.$$

Comme on a $\Theta^R_h(\xi') \leq 1$, il suffit à présent de vérifier

$$||\underline{\hat{g}}(\xi')\,\mathbf{1}_{|\xi'|\geq\frac{\lambda}{h}}||_{L^2(\xi')} \leq c(\lambda)\, ||g||_{H^1_{0,h}(\omega'_1)} \tag{64}$$

avec $c(\lambda)$ indépendant de h et $\lim\limits_{\lambda\to\infty} c(\lambda) = 0$, ce qui est évident ici avec la condition de Dirichlet, car pour $g \in H^1_{0,h}(\omega'_1)$, $\underline{g} \in H^1(\mathbb{R}^d)$ et $||g||^2_{H^1_{0,h}} \simeq \int (1 + h^2\xi'^2)\, |\underline{\hat{g}}(\xi')|^2 d\xi'$, ce qui fournit $c(\lambda) \simeq \frac{1}{\lambda}$. $\diamondsuit$

Preuve du Théorème 1. – Comme $SS(\underline{u})$ est homogène, $SS_b(u)$ l'est par construction. On a $SS_b(u)$ contenu dans $\Sigma_b = \dot{T}^*_b\Omega \setminus \mathcal{E}$ d'après les propositions IV.2 et IV.3. Le fait que $SS_b(u)$ est fermé résulte de la proposition IV.3 ; en effet, par définition, il s'agit de vérifier que $\pi^{-1}(SS_b(u))$ est fermé dans $T^*M|_{\bar{\Omega}} \setminus T^*_{\bar{\Omega}} = Z$. Soit donc $\rho_n \in Z \cap \pi^{-1}(SS_b(u))$ convergeant vers $\rho_0 \in Z$; on peut supposer $\rho_n = (x_n, \xi_n)$, $x_n \to x_0 \in S$, S strate de $\overline{\Omega} \setminus \Omega$ redressée en $x' = 0$ et $\xi_n \to (\xi'_\infty, \xi''_\infty)$, $\xi''_\infty \neq 0$. Si $\rho_0 \notin \pi^{-1}(SS_b(u))$ on a $\pi(\rho_0) = (x_0, \xi''_\infty) \notin SS_b(u)$ donc avec les notations de la proposition IV.3 $\psi v \in H_{\varphi-\varepsilon}(U; H^1_{0,h})$ et en utilisant (48) ceci implique pour n grand $(x'_n, x''_n, \xi', \xi''_n) \notin SS(\underline{u})$ pour tout ξ' donc a fortiori $\pi(\rho_n) \notin SS_b(u)$: contradiction.

IV.4. Application aux équations du second ordre

Dans ce paragraphe, nous donnons une application des constructions précédentes à la régularité analytique tangentielle des solutions d'équations du second ordre avec condition de Dirichlet.

Soit

$$P(x,D) = \Sigma D_i a_{i,j}(x) D_j + \Sigma D_\ell c_\ell(x) + c_0(x), \quad D_j = \frac{1}{i}\, \frac{\partial}{\partial x_j} \tag{65}$$

un opérateur du second ordre à coefficients analytiques à valeurs complexes près de $x = 0$ dans $\mathbb{R}^n$. On écrit $x = (x', x'')$, $x' \in \mathbb{R}^d$ et on se donne ω' un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ tel que $0 \in \bar{\omega}'$ et ω'' un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^{n-d}$. Soit $u(x', x'')$ une distribution sur $\omega' \times \omega''$ qui vérifie, pour un $a > 0$,

$$\begin{cases} u, \nabla_{x'} u \in \mathcal{D}'(\omega''; L^2(\omega')) \\ \forall \psi(x') \in C^\infty_0(|x'| < a) \quad \psi u \in \mathcal{D}'(\omega'', H^1_0(\omega')) \\ P(x,D)u = 0. \end{cases} \tag{66}$$

En particulier, on a

$$\int_{\omega'\times\omega''} \Big[\Sigma(-a_{ij}) D_j u D_i f + u\Big(\Sigma(-c_\ell) D_\ell f + c_0 f\Big)\Big]\, dx = 0 \tag{67}$$

pour tout $f \in C_0^\infty\big(\omega'', H_0^1(\omega' \cap \{|x'| \le \frac{a}{2}\}\big)$.

On pose, avec $\chi \in C_0^\infty(\omega'')$, $\chi \equiv 1$ près de $x'' = 0$, $z \in \mathbb{C}^{n-d}$

$$v(z,x',h) = \int u(x',x'')\chi(x'')e^{\frac{1}{h}(x''z - \frac{x''^2}{2})}\,dx'' \tag{68}$$

de sorte que $v \in H_\varphi(U, H_h^1(\omega'))$ pour $U \subset\subset \mathbb{C}^{n-d}$.

On suppose que le symbole principal $p(x,\xi)$ de P s'écrit sous la forme

$$p(x,\xi) = {}^t(\xi' - \nu)\,A'(x)(\xi' - \nu) + {}^t\xi''\,A''(x)\,\xi'' \tag{69}$$

où $\nu(x,\xi'')$ est linéaire en ξ'' et où la matrice symétrique complexe $A'(x)$ vérifie

$$\exists c > 0 \qquad \mathrm{Re}\, A'(0) \ge c\,\mathrm{Id}\,. \tag{70}$$

On peut appliquer la procédure de microlocalisation de la proposition IV.1 à l'équation (67) les termes d'ordre inférieur de P rentrant dans les termes d'ordre inférieur de l'opérateur S construit dans la proposition IV.1. Notons B_p la forme bilinéaire associée à p

$$B_p(x,\xi,\eta) = {}^t(\xi' - \nu(x,\xi''))\,A'(x)(\eta' - \nu(x,\eta'')) + {}^t\xi''\,A''(x)\,\eta'' \tag{71}$$

et pour $\xi_0'' \in \mathbb{R}^{n-d} \setminus 0$, introduisons l'hypothèse d'ellipticité forte en $(0,\xi_0'')$

$$\exists c > 0 \quad \mathrm{Re}\,\big[B_p(0,\xi,\bar\xi)\big] \ge c|\xi|^2 \text{ pour tout } \xi = (\xi', \alpha\xi_0''),\ \ \xi' \in \mathbb{C}^d,\ \ \alpha \in \mathbb{C}. \tag{72}$$

Alors si (72) est satisfait, S considéré comme élément de $\mathcal{E}(W; E_h \to E_h')$,$E_h = H_{0,h}^1(\omega' \cap \{|x'| < \varepsilon_1\})$, ε_1 petit, est elliptique en $\big(z_0, \zeta_0 = \frac{2}{i}\frac{\partial\varphi}{\partial z}(z_0)\big)$, $z_0 = -i\xi_0''$, et la preuve de la proposition IV.2 fournit la

PROPOSITION IV.4. – *Soit u solution de l'équation (66), et $\xi_0'' \in \mathbb{R}^{n-d} \setminus 0$ vérifiant l'hypothèse d'ellipticité (72). Il existe $\varepsilon > 0$, U voisinage de $z_0 = -i\xi_0''$ et $\psi(x') \in C_0^\infty$, $\psi \equiv 1$ près de $x' = 0$ tels que*

$$\psi v \in H_{\varphi-\varepsilon}(U, H_{0,h}^1(\omega'))\,. \tag{73}$$

Soit $\underline{u}(x',x'')$ le prolongement de u par zéro pour $x' \notin \bar\omega'$, et $\xi_0'' \in \mathbb{R}^{n-d} \setminus 0$. Pour β réel, grand, (70) entraîne que $S + \beta\,\mathrm{Id}$ est elliptique en $\big(z_0, \zeta_0 = \frac{2}{i}\frac{\partial\varphi}{\partial z}(z_0)\big)$, $z_0 = -i\xi_0''$, dans $\mathcal{E}(W; E_h \to E_h')$, et en reprenant la preuve de la proposition IV.3, on obtient la

PROPOSITION IV.5. – *Soit u solution de l'équation (66) et $\xi_0'' \in \mathbb{R}^{n-d} \setminus 0$. Les propriétés suivantes sont équivalentes*

$$\forall \xi' \in \mathbb{R}^d \qquad (0,\xi',\xi_0'') \notin SS(\underline{u})\,. \tag{74}$$

$$\begin{cases} \text{Il existe } \varepsilon > 0,\ U \text{ voisinage de } z_0 = -i\xi_0'' \text{ et } \psi(x') \in C_0^\infty \\ \text{égal à 1 près de } x' = 0 \text{ tels que } \psi v \in H_{\varphi-\varepsilon}(U, H_{0,h}^1(\omega'))\,. \end{cases} \tag{75}$$

Enfin, dans le cas uniformément elliptique, on a la

PROPOSITION IV.6. – *On suppose*

(76) $$\exists c > 0 \qquad \mathrm{Re}\, p(0,\xi) \geq c|\xi|^2 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n .$$

Il existe ρ_1, $a_1 > 0$ tels que pour toute solution u de (66) et tout $\psi(x') \in C_0^\infty(|x'| < a_1)$, on ait

(77) $$\psi u \ \text{ est holomorphe en } \ x'' \in \mathbb{C}^{n-d}, \ |x''| < \rho_1 \ \text{ à valeurs dans } \ H_0^1(\omega').$$

Preuve. – D'après (76), l'hypothèse (72) est satisfaite pour tout $\xi_0'' \in \mathbb{R}^{n-d} \setminus 0$; en utilisant la proposition IV.4 on a alors pour $\psi \in C_0^\infty(|x'| < a_1)$, a_1 petit, ρ_1 petit

(78) $$\begin{gathered}\exists \varepsilon > 0, \ W \ \text{ voisinage de } \ \{z = a + ib, |a| \leq 2\rho_1, |b| = 1\} \\ \text{tels que } \ \psi v \in H_{\varphi - \varepsilon}(W; H_0^1(\omega')).\end{gathered}$$

La proposition est alors conséquence de la formule d'inversion classique de la transformation FBI (78) (*voir* [L.1])

(79) $$\begin{aligned}\psi\chi u(\cdot, x'') = (2\pi)^{-(n-d)} &\int_{\mathbb{R}^{n-d}} e^{-\frac{|\xi''|}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2|\xi''|} \frac{\xi''}{|\xi''|}\partial_z\right) \\ &\times [e^{-\frac{z^2}{2h}} \psi v(z,h)] \left[x'' - i\frac{\xi''}{|\xi''|}, |\xi''|\right] d\xi''\end{aligned}$$

qui prouve l'extension holomorphe en x'' près de 0 de ψu. ◇

V. Réflexion

Ce paragraphe est consacré à la preuve du théorème 2 avec le signe $\sigma = -1$, *i.e.* sous l'hypothèse d'absence de singularités entrantes en ρ_0 le cas $\sigma = +1$ s'obtenant en remplaçant u par sa conjuguée $\overline{u}$. Soit donc S une strate de $\overline{\Omega} \setminus \Omega$, et $\rho_0 \in \dot{T}^* S \cap \mathcal{T} = \mathcal{T}_S$; on supposera $\operatorname{codim} S = d \geq 2$, le théorème de réflexion étant connu aux points $x_0 \in \partial\Omega$ près desquels Ω est un demi-espace (on remarquera que si près de x_0, Ω est de la forme $\{x_n \neq 0\}$, le théorème de réflexion appliqué aux demi-espaces $\Omega_= \{x_n > 0\}$ implique *a fortiori* le théorème 2). On choisit un système de coordonnées locales (x', x'') avec $S = \{x' = 0\}$, $\rho_0 = (0, \xi_0'')$; on a $R_0(0, \xi_0'') < 0$, $\nu_0 = \nu|_{x'=0} \equiv 0$, et par changement de variable linéaire en x', on suppose $A_0(0) = \mathrm{Id}$. On se donne $(z, \theta) \mapsto x' = j(z, \theta) = zH(z, \theta)$, $z \in \Gamma \times N$ un système de coordonnées sous-polaires strict vérifiant les conditions de la définition II.7 ; on a $\dim N = \operatorname{codim} S - 1 \geq 1$. D'après II. (56) on a

(1) $$\begin{cases} j^*(dx'^2) = dr^2 + q + \mathcal{O}(r^\beta(dr^2 + q)) \\ q(z, \theta, e) = z^2(u|u), \ \ u = \dfrac{\partial H}{\partial \theta}(z, \theta)[e], \ \text{ est une métrique sous-conique}. \end{cases}$$

On distingue la coordonnée temporelle de $x'' = (y'', t)$, de sorte que $\rho_0 = (y'' = 0, t = 0; \eta_0'', \tau_0)$ avec $|\tau_0| > ||\eta_0''||$ (= longueur du covecteur η_0'' dans $T^*\mathcal{S}$, $S = \mathcal{S} \times \mathbb{R}_t$, $\mathcal{S}$ muni de la métrique induite). Pour vérifier le théorème 2, nous procédons en quatre étapes.

1. On effectue une réduction semi-classique pour remplacer $u(t,y)$ solution de I. (1) par $\tilde{u}(t,y,h) \in H_{\varphi_0}(V, H_0^1(\omega))$ solution de $(\partial_t^2 - \Delta)\tilde{u} = 0$ avec $\varphi_0(t) = \frac{1}{2}(\operatorname{Im} t)^2$ et V petit voisinage de $-i\tau_0$.

2. En utilisant l'équation elliptique $(\partial_s^2 + \Delta)[\tilde{u}(t+is,\cdot)] = 0$, $\tilde{u}|_\partial = 0$ on vérifie que $w(t,y'',r,\theta,h) = \tilde{u}(t,y'',x' = j(r,\theta),h)$ se prolonge holomorphiquement en r à $z \in \Gamma$, si le cône Γ est assez petit, et on établit des estimations sur le prolongement de w.

3. Si $\tilde{v}(t,z'',r,\theta,h) = e^{\frac{t^2}{2h}} \int e^{\frac{1}{h}(y''z'' - \frac{y''^2}{2})}\chi(y'')\, w\,\kappa(x',y'',t)\, dy''\, dt$ est la transformée de FBI en variables y'' de w, on montre que l'absence de singularités entrantes pour u en ρ_0, implique la décroissance exponentielle de v sur les axes $z = re^{i\alpha}$, $\alpha > 0$ petit, dans « $H^1_{x'}$" par rapport au poids tangentiel $\frac{1}{2}\left[(\operatorname{Re} z'')^2 + (\operatorname{Re} t)^2\right]$ près de $(z_0'', t_0) = (-i\eta_0'', -i\tau_0)$.

4. On conclut à $\rho_0 \notin SS_b(u)$.

V.1. Réduction semi-classique

Soit $\chi_0(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, égal à 1 près de $t = 0$. Posons

$$u_1(t,x,h) = \int e^{-\frac{1}{2h}(t-t')^2} u(t',y)\chi_0(t')\, dt'. \tag{2}$$

Comme on a $u \in C^0(\mathbb{R}_t; H_0^1(\omega)) \cap C^1(\mathbb{R}_t, L^2(\omega))$ et $(\partial_t^2 - \Delta)u = 0$, si on pose $\varphi_0(t) = \frac{1}{2}(\operatorname{Im} t)^2$, pour V petit voisinage complexe de $t_0 = -i\tau_0$ on a, pour un $\varepsilon > 0$

$$\begin{gathered} u_1 \in H_{\varphi_0}(V; H_0^1(\omega));\ \ ||u_1(t,\cdot); H_0^1(\omega))|| \leq C e^{\frac{\varphi_0(t)}{h}}; \\ (\partial_t^2 - \Delta)u_1 = u_2 \in H_{\varphi_0 - \varepsilon}(V; L^2(\omega)). \end{gathered} \tag{3}$$

Soit $s_0 > 0$ petit, $X_{s_0} =]-\tau_0 - s_0, -\tau_0 + s_0[\times \omega$, et $r(s,y,h)$ la solution de

$$(\partial_s^2 + \Delta)r = -u_2(is,y,h);\ \ r \in H_0^1(X_{s_0}). \tag{4}$$

Comme d'après (3) on a $||\partial_s^\ell u_2||_{L^2(X_{s_0})} \in \mathcal{O}\big(e^{\frac{1}{2h}(|\tau_0|^2 - \varepsilon)}\big)$ (s_0 petit) on a pour tout ℓ, avec $J = \left]-\tau_0 - \frac{s_0}{2}, -\tau_0 + \frac{s_0}{2}\right[$

$$\sup_{s \in J} ||\partial_s^\ell r(s,\cdot)||_{H_0^1(\omega)} \in \mathcal{O}\big(e^{\frac{1}{2h}(|\tau_0|^2 - \varepsilon)}\big). \tag{5}$$

Soit alors $g(s,t,y,h)$ la solution du problème d'évolution où $s \in \left]-\tau_0 - \frac{s_0}{2}, -\tau_0 + \frac{s_0}{2}\right[$ est un paramètre

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta)g(t,s,y,h) = u_2(t+is,y,h);\ \ g|_{y \in \partial\omega} = 0 \\ g(0,s,y,h) = r(s,y,h);\ \ \dfrac{\partial g}{\partial t}(0,s,y,h) = -i\dfrac{\partial r}{\partial s}(s,y,h). \end{cases} \tag{6}$$

Ce problème mixte est bien posé d'après le théorème de Hille-Yosida, et pour $t \in I$, petit voisinage de zéro, on a d'après (3) et (5)

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \sup_{s,t \in I} ||g(s,t,\cdot)||_{H_0^1(\omega)} \in \mathcal{O}\big(e^{\frac{1}{2h}(|\tau_0|^2 - \varepsilon)}\big). \tag{7}$$

Par ailleurs, avec $\overline{\partial} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\frac{\partial}{\partial s}\right)$, on a $\overline{\partial} u_2 = 0$, $\overline{\partial} g|_{t=0} = 0$ et $2\frac{\partial}{\partial t}[\overline{\partial} g]|_{t=0} = \Delta r + u_2(is,\cdot) + \partial_s^2 r \equiv 0$, donc g est holomorphe en $t + is$ et d'après (7)

$$g \in H_{\varphi_0-\varepsilon}(V, H_0^1(\omega)) \tag{8}$$

et on pose

$$\tilde{u}(t,y,h) = u_1(t,y,h) - g(t,y,h). \tag{9}$$

On a donc

$$(\partial_t^2 - \Delta)\tilde{u} = 0; \quad \tilde{u} \in H_{\varphi_0}(V, H_0^1(\omega)). \tag{10}$$

V.2. Prolongement holomorphe en variable radiale r

Rappelons que d'après la définition II.7, il existe un compact $K = \overline{\Sigma}_0$ de N, stratifié par $K = \cup\Sigma_i$, et un voisinage U de l'origine dans $\bar{\omega}'$ tel que j induit une bijection de $]0, r_0[\times K$ sur $(\bar{\omega}' \cap U) \setminus 0$, $j^{-1}(\mathcal{S}_i' \cap U) =]0, r_0[\times \Sigma_i$ pour toute strate $\mathcal{S}_i'$ distincte de $\{x' = 0\}$ et $(r,\theta) \mapsto j(r,\theta)$ est à différentielle injective pour $r \neq 0$, $\theta \in N$. On a $j^{-1}(\omega' \cap U) =]0, r_0[\times\Sigma_0$. Pour $(r,\theta) \in]0, r_0[\times\Sigma_0$, y'' près de 0 et $t \in V$ on pose

$$w(t, y'', r, \theta; h) = \tilde{u}(t, y'', x' = j(r,\theta), h) \tag{11}$$

et pour $t_0 \in V$ proche de $-i\tau_0$, et $s \in \mathbb{R}$ petit

$$w_{t_0}(s, y'', r, \theta, h) = w(t_0 + is, y'', r, \theta; h). \tag{12}$$

On note $\tilde{Q}$ l'opérateur elliptique d'ordre 2 à coefficients analytiques au voisinage de $]0, r_0[\times K \times \{|y''| \leq \varepsilon_0\} \times \{|s| \leq \varepsilon_0\}$ dans $]0, r_0[\times N \times \mathbb{R}^{n-d} \times \mathbb{R}$ défini par le changement de variable j

$$[(-\Delta - \partial_s^2) f](s, y'', x' = j(r,\theta)) = \tilde{Q}[f(s, y'', x' = j(r,\theta)]. \tag{13}$$

L'opérateur $\tilde{Q}$ est le Laplacien positif associé à la métrique $\tilde{j}(g(dy) + ds^2))$, $\tilde{j}(s, y'', r, \theta) = (s, y''; j(r,\theta))$; ses coefficients se prolongent holomorphiquement en r à $z \in \Gamma = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq r_0, |\operatorname{Im} z| \leq \gamma \operatorname{Re} z\}$ pourvu que r_0 et γ soient petits et d'après III. (7) à (10), le symbole principal $\tilde{q}$ de $\tilde{Q}$ est

$$\tilde{q}(r, \theta, y'', s; \sigma, e', \eta'', \tau) = \sigma^2 + q'(r, \theta, e') + R_0(y'', \eta''; \tau = 0) + \tau^2 + \tilde{h} \tag{14}$$

où le reste $\tilde{h}$ vérifie d'après III. (10), pour $z \in \Gamma$, $r = |z|$

$$\tilde{h} \in \mathcal{O}\Big((r^\beta + |y''|)(\sigma^2 + q') + r(\sigma^2 + q')^{\frac{1}{2}}|\eta''| + r|\eta''|^2\Big) \tag{15}$$

q' désignant la métrique duale de q définie par (1). On remarquera que $\tilde{q}$ ne dépend pas de s et que $\tilde{q} - \tau^2$ est la forme métrique sur $T^*(]0, r_0[\times N \times \{y''\})$ définie par la métrique initiale g de $\mathcal{M}$. On notera $\langle\, ,\rangle$ la forme bilinéaire associée à $\tilde{q}$, d la différentielle extérieure en les variables r, θ, y'', s de sorte qu'on a

$$\langle df, df\rangle = \tilde{q}(\cdot, df). \tag{16}$$

Soit $d_g(y) = \kappa(x', y'')\, dx'\, dy''$ l'élément de volume Riemannien sur $\mathcal{M}$. On a d'après $(1)_1$

$$\tilde{j}^*(d_g y \cdot ds) = \tilde{\kappa} \cdot \sqrt{\det q}\, |d\theta|\, dr\, ds\, dy'' \tag{17}$$

où $\tilde{\kappa}(r, \theta, y'') = \kappa(j(r,\theta), y'')[1 + r^\beta a(r,\theta)]$, $a \in \mathcal{A}$, $\sqrt{\det q}\, |d\theta|$ étant la forme volume sur N associée à la métrique $q(r, \cdot)$ sur TN. On posera

$$d\mu = \sqrt{\det q}\, |d\theta|\, dr \tag{18}$$

$$\tilde{\omega} =]0, r_0[\times \Sigma_0 . \tag{19}$$

On notera $\tilde{L}^2 = L^2(\tilde{\omega}; d\mu)$ et $\tilde{H}^1$ désignera l'espace H^1 pour la métrique $dr^2 + q$, de sorte qu'on a

$$\|f; \tilde{H}^1\|^2 = \int_{\tilde{\omega}} \left[\left| \frac{\partial f}{\partial r} \right|^2 + q'\Big(r, \theta, \frac{\partial f}{\partial \theta}\Big) + |f|^2 \right] d\mu \tag{20}$$

et $\tilde{H}^1_0$ désignera l'adhérence de $C_0^\infty(\tilde{\omega})$ dans $\tilde{H}^1$.

Par construction, si $f(x')$ est une fonction sur ω' à support contenu dans $\omega'_\alpha = \{x' \in \omega';\, |x'| < \alpha\}$, on a les équivalences pour $\alpha \ll r_0$

$$\begin{cases} f \in L^2(\omega'_\alpha) \Longleftrightarrow f \circ j \in \tilde{L}^2 \\ f \in H^1(\omega'_\alpha) \Longleftrightarrow f \circ j \in \tilde{H}^1 \\ f \in H^1_0(\omega'_\alpha) \Longleftrightarrow f \circ j \in \tilde{H}^1_0 . \end{cases} \tag{21}$$

D'après (10), (11), (12), si $\chi(y'')$, $\psi(x')$ sont C_0^∞ à support près de l'origine on a

$$\begin{cases} \chi\psi w_{t_0} \text{ est } C^\infty \text{ en } s \text{ à valeurs dans } L^2(y''; \tilde{H}^1_0) \text{ et pour tout } \ell, \\ \text{il existe } C_\ell \text{ tel que } \forall h, t_0, s, \\ \displaystyle\int \|\chi\psi\partial_s^\ell w_{t_0}, \tilde{H}^1\|^2 + \|\nabla_{y''}\partial_s^\ell \chi\psi w_{t_0}; \tilde{L}^2\|^2 dy'' \le C_\ell h^{-2\ell} e^{\frac{1}{h}|\mathrm{Im}\, t_0 + s|^2} . \end{cases} \tag{22}$$

$$\begin{cases} \tilde{Q} w_{t_0} = 0 \text{ et pour tout } f(s, y'', r, \theta) \in C_0^\infty(s, y'', \tilde{H}^1_0) \text{ à support} \\ \text{près de } (s, y'') = (0,0) \text{ on a } \displaystyle\int \langle dw_{t_0}, df\rangle\, \tilde{\kappa}\, d\mu\, ds\, dy'' = 0 . \end{cases} \tag{23}$$

Pour assurer la conservation de la condition de Dirichlet par déformation complexe en variable r, nous utiliserons le résultat suivant.

LEMME V.1. – *Soit $f \in H^1(\omega')$, à support dans $\omega'_{\frac{\alpha}{2}} = \{x' \in \omega'; |x'| \le \frac{\alpha}{2}\}$. On a l'équivalence*

(24) $$f \in H^1_0(\omega'_\alpha)$$

(25) *Pour toute strate $\mathcal{S}'_i$ de codimension 1,* $f|_{\mathcal{S}'_i} = 0$.

Preuve. – Pour vérifier que (25) $\Rightarrow$ (24), on remarque que pour $\chi(y'') \in C_0^\infty$, $\chi \ge 0$, $\chi \equiv 1$ près de $y'' = 0$, on a $g(y) = \chi(y'')f(y') \in H^1(\omega)$, $g|_{\mathcal{S}_i} = 0$ pour toute strate $\mathcal{S}_i$ de codimension 1 de la stratification $\cup\mathcal{S}_j$ de $\overline{\omega}$ et qu'il suffit de vérifier $g \in H^1_0(\omega)$. Posons

(26) $$\mathcal{F} = \Big\{g \in H^1(\omega),\ g|_{\mathcal{S}_i} = 0,\ \forall \mathcal{S}_i \text{ de codimension } 1\Big\}.$$

Pour $g \in \mathcal{F}$, soit $\underline{g} \in L^2(\mathcal{M})$ définit par $\underline{g}(x) = g(x)$ si $x \in \omega$, $\underline{g}(x) = 0$ si $x \notin \underline{\omega}$. On a $\nabla\underline{g} = \underline{\nabla g} + f$ avec $f \in H^{-1}(\mathcal{M})$, support$(f) \subset \{\cup\mathcal{S}_j, \operatorname{codim}(\mathcal{S}_j) \ge 2\}$, donc $f = 0$, et par suite $\nabla(\underline{g}) \in L^2(\mathcal{M})$, donc $\underline{g} \in H^1(\mathcal{M})$, support$(\underline{g}) \subset \overline{\omega}$. Notons $(H)_k$ la propriété

$$(H)_k \qquad \begin{cases} \text{pour tout } g \in \mathcal{F} \text{ tel que } \operatorname{support}(\underline{g}) \cap \mathcal{S}_i \ne \phi \\ \text{implique } \operatorname{codim}(\mathcal{S}_i) \le k, \text{ on a } g \in H^1_0(\omega). \end{cases}$$

Par partition de l'unité et récurrence sur k, pour vérifier $(H)_k$, on peut supposer que $g \in \mathcal{F}$ est à support près de $x_0 \in S$, avec $\operatorname{codim}(S) = k$. Alors $(H)_0$ et $(H)_1$ sont évidents, et on a $(H)_k \Rightarrow (H)_{k+1}$ pour $k \ge 2$: en effet, si $\operatorname{codim} S = d = (k+1) \ge 3$, $S = \{x' = 0\}$ et $g \in \mathcal{F}$ on a avec $\psi_\varepsilon(x') = \psi(\frac{x'}{\varepsilon})$, $\psi \in C_0^\infty$, $\psi = 1$ près de $x' = 0$, $g(x', x'') = \psi_\varepsilon g + (1-\psi_\varepsilon)g$, $(1-\psi_\varepsilon)g \in H^1_0(\omega)$ d'après $(H)_k$ et $\lim_{\varepsilon\to 0} ||\psi_\varepsilon g||_{H^1} = 0$ $\Big($puisque avec $\alpha = d - 1 \ge 2$, on a en coordonnées polaires $|\underline{g}(r,\theta) - \underline{g}(r_0,\theta)| \le \big(\int_0^{r_0} |\underline{g}'(r)|^2 r^\alpha\, dr\big)^{\frac{1}{2}} \big(\int_r^{r_0} \frac{d\sigma}{\sigma^\alpha}\big)^{\frac{1}{2}}$, donc $\int_{a\varepsilon \le r \le b\varepsilon} \varepsilon^{-2} |\underline{g}|^2 r^\alpha\, dr\, d\theta \le \text{Cte}\big[\varepsilon^{d-2} \int |\underline{g}(r_0,\theta)|^2 d\theta + \int_0^{r_0} |\underline{g}'(r)|^2 r^\alpha\, dr\, d\theta\big]\Big)$ d'où $g \in H^1_0(\omega)$. Il reste donc à vérifier $(H)_2$. Près de x_0, on a $\omega = \{(x', x''); x' \in \omega' \subset \mathbb{R}^2\}$ et $S = \{x' = 0\}$; si $\omega' = \mathbb{R}^2 \setminus 0$ (ce qui correspond à une strate fictive) il n'y a rien à démontrer puisque $H^1_0(\mathbb{R}^2 \setminus x' = 0) = H^1(\mathbb{R}^2)$ car $f \in H^{-1}(\mathbb{R}^2)$ et support$(f) \subset \{x' = (x_1, x_2) = 0\}$ implique $f = 0$; sinon il existe au moins une courbe $\gamma : r \mapsto r[H_0 + r^\beta H_1(r)] = x'$ dans $\partial\omega'$ et on a $\underline{g}|_{\gamma\times\{x''\}} = 0$. Si (ρ,θ) est le système de coordonnées polaires standard dans $\mathbb{R}^2$, on a donc $|\underline{g}(\rho,\theta,x'')|^2 \le 2\pi \int_0^{2\pi} \big|\frac{\partial \underline{g}}{\partial\theta}(\rho,\sigma,x'')\big|^2 d\sigma$ d'où

$$\varepsilon^{-2} \int_{|x'| \le \varepsilon a} |\underline{g}|^2\, dx'\, dx'' \le 4\pi^2 a^2 \int_{\rho \le \varepsilon a} \left|\frac{1}{\rho}\frac{\partial \underline{g}}{\partial\theta}\right|^2 \rho\, d\rho\, d\theta\, dx'' \longrightarrow 0 \quad (\varepsilon \to 0)$$

et on conclut comme précédemment. ◇

Nous allons effectuer des déformations en variables radiales de la forme

(27) $$(s, y'', \theta, r) \mapsto \mathcal{L}(s, y'', \theta, r) = \big(s, y'', \theta, r' = e^{iL(s,y'',r)} r\big)$$

où la fonction L est indépendante de $\theta \in N$, C^∞ en s, r, y'' à support en (s, y'') près de $(0,0)$ et à support en r dans un compact de $]0, r_0[$. Si $A\big(s, y'', \theta, r; \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial y''}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial r}\big)$ est un opérateur différentiel à coefficients holomorphes en $r \in \Gamma$, on note $A^{\mathcal{L}}$ l'opérateur induit par A sur la déformation $\mathcal{L}$ défini par le changement de variable $\mathcal{L}$, c'est-à-dire

$$A^{\mathcal{L}}[f \circ \mathcal{L}] = (Af) \circ \mathcal{L} \tag{28}$$

pour $f(s, y'', \theta, r)$ fonction holomorphe de $r \in \Gamma$. On a donc

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial r}\right)^{\mathcal{L}} = e^{-iL}\left(1 + ir\dfrac{\partial L}{\partial r}\right)^{-1}\dfrac{\partial}{\partial r} \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial s}\right)^{\mathcal{L}} = \dfrac{\partial}{\partial s} - ir\dfrac{\partial L}{\partial s}\left(1 + ir\dfrac{\partial L}{\partial r}\right)^{-1}\dfrac{\partial}{\partial r} \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial y_j}\right)^{\mathcal{L}} = \dfrac{\partial}{\partial y_j} - ir\dfrac{\partial L}{\partial y_j}\left(1 + ir\dfrac{\partial L}{\partial r}\right)^{-1}\dfrac{\partial}{\partial r} \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial \theta}\right)^{\mathcal{L}} = \dfrac{\partial}{\partial \theta} \end{cases} \tag{29}$$

et $(A \circ B)^{\mathcal{L}} = A^{\mathcal{L}} \circ B^{\mathcal{L}}$. Posons

$$\begin{cases} q^{\mathcal{L}}(r, s, y'', \theta, e) = q(r\,e^{iL}, \theta, e), \quad \tilde{\kappa}^{\mathcal{L}}(r, \theta, s, y'') = \tilde{\kappa}(r\,e^{iL}, \theta, y'') \\ d\nu = \tilde{\kappa}\sqrt{\det q}\,|d\theta|\,dr\,ds\,dy'', \quad d\nu^{\mathcal{L}} = \tilde{\kappa}^{\mathcal{L}}\sqrt{\det q^{\mathcal{L}}}\,|d\theta|\,e^{iL}\left(1 + ir\dfrac{\partial L}{\partial r}\right)dr\,ds\,dy'' \end{cases} \tag{30}$$

de sorte que la densité $d\nu$ est holomorphe en $r \in \Gamma$, et $d\nu^{\mathcal{L}}$ est l'image inverse de $d\nu$ par $\mathcal{L}$. Si A est un opérateur comme précédemment, on définit son transposé pour une densité $d\beta$, $A^{t,\beta}$ par

$$\int_D Af \cdot g\,d\beta = \int_D f\,A^{t,\beta}(g)\,d\beta \tag{31}$$

où $D = \{|s|^2 + |y''|^2 < a; \theta \in \Sigma_0, r \in]0, r_0[\}$, et $f, g \in C_0^\infty(D)$. L'opérateur $A^{t,\nu}$ est à coefficients holomorphes en r, et avec $f_{\mathcal{L}} = f \circ \mathcal{L}^{-1}$, $g_{\mathcal{L}} = g \circ \mathcal{L}^{-1}$ on a $\int_{\mathcal{L}(D)} A[f_{\mathcal{L}}]g_{\mathcal{L}}\,d\nu = \int_{\mathcal{L}(D)} f_{\mathcal{L}}(A^{t,\nu})[g_{\mathcal{L}}]\,d\nu$ d'où

$$(A^{\mathcal{L}})^{t,\nu^{\mathcal{L}}} = (A^{t,\nu})^{\mathcal{L}}. \tag{32}$$

Alors si on note $\tilde{q}^{\mathcal{L}}$ le symbole principal de $\tilde{Q}^{\mathcal{L}}$, et $\langle , \rangle_{\mathcal{L}}$ la forme $\mathbb{C}-$bilinéaire associée à $\tilde{q}^{\mathcal{L}}$ on a la formule d'intégration par parties

$$\int_D \tilde{Q}^{\mathcal{L}}(f)\,g\,d\nu^{\mathcal{L}} = \int_D \langle df, dg\rangle_{\mathcal{L}}\,d\nu^{\mathcal{L}} \tag{33}$$

valable pour $f \in \mathcal{D}'(s, y''; \tilde{H}_0^1)$ et $g \in C_0^\infty(s, y''; \tilde{H}_0^1)$. D'après (14) et (29), le symbole principal $\tilde{q}^{\mathcal{L}}$ vaut

$$\begin{aligned} \tilde{q}^{\mathcal{L}} = e^{-2iL}\left(1 + ir\frac{\partial L}{\partial r}\right)^{-2}\sigma^2 + q'(r\,e^{iL}, \theta, e') \\ + R_0\left(y'', \eta'' - ir\frac{\partial L}{\partial y''}\left(1 + ir\frac{\partial L}{\partial r}\right)^{-1}\sigma, \tau = 0\right) \\ + \left(\tau - ir\frac{\partial L}{\partial s}\left(1 + ir\frac{\partial L}{\partial r}\right)^{-1}\sigma\right)^2 + \tilde{h}^{\mathcal{L}} \end{aligned} \tag{34}$$

donc on a en utilisant (15) et le fait que q' est tempérée (*voir* II. (1))

$$\frac{\tilde{q}}{C_0} \leq \mathrm{Re}(\tilde{q}^{\mathcal{L}}) \leq C_0\tilde{q} \tag{35}$$

dès que la fonction L vérifie

$$||L||_\infty + \Big|\Big|r\frac{\partial L}{\partial r}\Big|\Big|_\infty + \Big|\Big|r\frac{\partial L}{\partial y''}\Big|\Big|_\infty + \Big|\Big|r\frac{\partial L}{\partial s}\Big|\Big|_\infty \overset{\text{def}}{=} |||L||| \ll 1. \tag{36}$$

En particulier, (36) implique l'ellipticité de $\tilde{Q}^{\mathcal{L}}$ dans $r > 0$. Par ailleurs le lemme II.2 et (30) impliquent

$$\Big|\Big|\frac{d\nu^{\mathcal{L}}}{d\nu} - 1\Big|\Big|_\infty \leq C|||L|||. \tag{37}$$

Soit alors $\mathcal{L}$ une déformation à support en $r \in \left[r_1, \frac{r_0}{4}\right]$, $r_1 > 0$ satisfaisant (36) et pour $\alpha \in [0,1]$, $\alpha\mathcal{L}$ la déformation associée à la fonction αL. Alors on a

$$\begin{cases} w_{t_0}(s,y'',r,\theta,h) \text{ s'étend en fonction } C^\infty \text{ de } (s,y'',r) \in D \\ D = \left\{(s,y'',r);\, |s|+|y''| \leq \varepsilon_0,\, \exists\rho \in]0,r_0],\, \exists\alpha \in [0,1],\, r = e^{i\alpha L(s,\rho,y'')}\rho\right\}, \\ \text{à valeurs dans } H_0^1(\Sigma_0), \text{ holomorphe en } r, \text{ et avec} \\ w_{t_0}^{\alpha\mathcal{L}} = w_{t_0}\big|_{\mathrm{Im}(\alpha\mathcal{L})}, \text{ on a } \psi(r)w_{t_0}^{\alpha\mathcal{L}} \circ (\alpha\mathcal{L}) \in C^\infty(s,y'';H_0^1(\tilde{\omega})) \\ \text{pour } \psi \in C_0^\infty(]-1,r_0[). \end{cases} \tag{38}$$

En effet, dans $r > 0$, r est une variable tangentielle, et on peut appliquer la proposition IV.6 à la famille d'opérateur $\tilde{Q}^{\alpha\mathcal{L}}$, $\alpha \in [0,1]$, qui vérifient l'hypothèse d'ellipticité IV. (77) d'après (35). Si $\tilde{Q}^{\alpha\mathcal{L}}(w_{t_0}^{\alpha\mathcal{L}} \circ (\alpha\mathcal{L})) = 0$ pour un $\alpha \in [0,1]$, la proposition IV.6 implique qu'il existe un voisinage complexe U de $\{|s|+|y''| \leq \varepsilon_0\} \times \left\{r \in \left[\frac{r_1}{2}, \frac{r_0}{2}\right]\right\}$ indépendant de α, tel que $w_{t_0}^{\alpha\mathcal{L}}$ soit holomorphe sur U à valeurs dans $H_0^1(\Sigma_0)$, ce qui compte tenu de l'hypothèse sur le support de $\mathcal{L}$, et de (22), (23) implique (38) (la condition $\psi w_{t_0}^{\alpha\mathcal{L}} \in C^\infty(\cdot;H_0^1(\tilde{\omega}))$ étant conservée le long de la déformation d'après le lemme V.1, (25) étant invariant par déformation complexe en r puisque $j^{-1}(\mathcal{S}_i') \simeq]0,r_0[\times\Sigma_i$).

Il nous reste à estimer la croissance en h de $w_{t_0}^{\mathcal{L}}$. Pour $|y_0''| \leq \frac{\varepsilon_0}{2}$, on choisit $\chi^\varepsilon = \chi_1(r)\chi_2^\varepsilon(s,y'')$, $\varepsilon \in]0,\varepsilon_0]$, $\chi_1 \in C_0^\infty(-1,r_0)$, $\chi_1(r) = 1$ pour $r \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{r_0}{2}\right]$, $\chi_2^\varepsilon(s,y'') = \chi_2\left(\frac{(s,y''-y_0'')}{\varepsilon}\right)$; $\chi_2 \in C_0^\infty(|s|+|y''| \leq 1)$, $\chi_2 \equiv 1$ sur $\left\{|s|+|y''| \leq \frac{1}{2}\right\}$ et la déformation $\mathcal{L}$ tel que le support de L soit contenu dans $\left[r_1, \frac{r_0}{4}\right] \times \left\{|s|+|y''-y_0''| \leq \frac{\varepsilon}{4}\right\}$. Pour $g \in C_0^\infty(\{|s|+|y''| < \varepsilon_0\}; \tilde{H}_0^1(\tilde{\omega}))$ on a avec $\tilde{w}_{t_0}^{\mathcal{L}} = w_{t_0}^{\mathcal{L}} \circ \mathcal{L}$

$$\left\langle d\tilde{w}_{t_0}^{\mathcal{L}}, d(\chi^\varepsilon g)\right\rangle_{\mathcal{L}} = \left\langle d(\chi^\varepsilon \tilde{w}_{t_0}^{\mathcal{L}}), dg\right\rangle_{\mathcal{L}} + \left\langle d\tilde{w}_{t_0}^{\mathcal{L}}, g\,d\chi^\varepsilon\right\rangle_{\mathcal{L}} - \left\langle \tilde{w}_{t_0}^{\mathcal{L}}\,d\chi^\varepsilon, dg\right\rangle_{\mathcal{L}} \tag{39}$$

d'où d'après $\tilde{Q}^{\mathcal{L}}(\tilde{w}_{t_0}^{\mathcal{L}}) = 0$, (33), (38) et $d\chi \equiv 0$ sur le support de L

$$\int_D \left\langle d(\chi^\varepsilon\tilde{w}_{t_0}^{\mathcal{L}}), dg\right\rangle_{\mathcal{L}} d\nu^{\mathcal{L}} = \int_D \Big[\left\langle w_{t_0}\,d\chi^\varepsilon, dg\right\rangle - \left\langle dw_{t_0}, g\,d\chi^\varepsilon\right\rangle\Big]\,d\nu \tag{40}$$

avec $D = \{|s|+|y''| < \varepsilon_0\} \times \tilde{\omega}$. D'après (14), (15), (22), en utilisant $\left|\langle d\chi^\varepsilon, d\chi^\varepsilon\rangle\right|_\infty^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour $\langle\,,\rangle$, et $L^2(d\nu)$, le second membre de (40) est majoré par $\frac{\text{Cte}}{(h\varepsilon)} ||g||_{H_0^1(D)} e^{\frac{1}{2h}[|\operatorname{Im} t_0|+\varepsilon]^2}$. Comme on a l'inégalité de Poincaré $||f; \tilde{H}^1||^2 \leq \text{Cte} \int_{\tilde{\omega}} \left[\left|\frac{\partial f}{\partial r}\right|^2 + q'\left(r, \theta, \frac{\partial f}{\partial \theta}\right)\right] d\mu$ pour $f \in \tilde{H}_0^1$ (car $f(r,\theta) = -\int_r^{r_0} \frac{\partial f}{\partial \rho}(\rho, \theta)\, d\rho$), en utilisant (35), (37), (40) et le lemme de Lax-Milgram, on obtient

$$||\chi^\varepsilon \tilde{w}_{t_0}^{\mathcal{L}}; H_0^1(D)|| \leq \frac{\text{Cte}}{h\varepsilon} e^{\frac{1}{2h}[|\operatorname{Im} t_0|+\varepsilon]^2} \tag{41}$$

où la constante est indépendante de y_0'' et de la déformation $\mathcal{L}$ vérifiant (36) et les conditions de support précédentes, d'où finalement le

LEMME V.2. – *Pour ε_0, r_0, γ_0 petits, V petit voisinage de $-i\tau_0$, la fonction $w(t, y'', z, \theta, h)$ est holomorphe en t, $z \in \Gamma$, $\Gamma = \{0 < |z| < r_0; |\operatorname{Arg} z| < \gamma_0\}$, L^2 en y'', à valeurs dans $H_0^1(\Sigma_0)$ et si on pose pour $|\gamma| < \gamma_0$*

$$w^\gamma(t, y'', r, \theta, h) = w(t, y'', r\,e^{i\gamma}, \theta, h) \tag{42}$$

il existe, $A, B > 0$, tels que pour tout $t \in V$, $\ell < r_0$, $0 < |\gamma| < \gamma_0$ et tout $h \in]0, h_0]$, on ait

$$\left|\left| w^\gamma(t, \cdot); L^2\left(|y''| < \frac{\varepsilon_0}{2}; \tilde{H}^1(]0, \ell[\times \Sigma_0)\right)\right|\right| \leq \frac{A}{(h\ell\gamma)^B}\; e^{\frac{1}{2h}[|\operatorname{Im} t|+A\ell|\gamma|]^2}. \tag{43}$$

De plus, on a

$$\tilde{P}^\gamma w^\gamma = 0 \qquad \tilde{P}^\gamma = \tilde{\Delta}^\gamma - \partial_t^2 \tag{44}$$

où $\tilde{\Delta}^\gamma$ est le « Laplacien » associé à la forme quadratique complexe

$$\tilde{q}^\gamma = e^{-2i\gamma} \sigma^2 + q'(r\,e^{i\gamma}, \theta, e') + R_0(y'', \eta'', \tau = 0) + \tilde{h}^\gamma \tag{45}$$

le reste $\tilde{h}^\gamma$ vérifiant (15).

Preuve. – On peut se restreindre à $\gamma > 0$. On choisit deux fonctions $\phi_1(r) \in C^\infty$, $\phi_1(r) = 0$ si $r \leq 1$, $\phi_1(r) = 1$ si $r \geq 2$ et $\phi_2(s, y'', r) \in C_0^\infty$, $\phi_2 \equiv 1$ près de 0. Pour $|y_0''| \leq \frac{\varepsilon_0}{2}$ on pose

$$L(s, y'', r) = \gamma\, \phi_1\left(\frac{r}{\alpha}\right) \phi_2\left(\frac{(s, y'' - y_0'')}{\ell\gamma C}, \frac{r}{\ell}\right) \tag{46}$$

où C est grand, $\gamma > 0$ petit et $0 < \alpha \ll \ell \ll r_0$. On a $|||L||| \in \mathcal{O}\left(\gamma + \frac{1}{C}\right)$, et le support de L est contenu dans $\left[r_1, \frac{r_0}{4}\right] \times \left\{|s| + |y'' - y_0''| \leq \frac{\varepsilon}{4}\right\}$ dès que $r_1 \leq \alpha$, $\ell \leq \text{Cte}\, r_0$, $\ell\gamma C \leq \text{Cte}\, \varepsilon$ et pour $2\alpha \leq r \leq \text{Cte}\, \ell$, $|s| + |y'' - y_0''| \leq \text{Cte}\, \ell\gamma C$ on a $L \equiv \gamma$. Le lemme V.2 est donc conséquence de (41) qui estime $s \mapsto w^\gamma(t + is, \cdot)$ uniformément pour $t \in V$, et des estimations de Cauchy pour la fonction holomorphe $t \mapsto w^\gamma(t)$. $\diamondsuit$

V.3. « Complex Scaling »

On effectue à présent la microlocalisation tangentielle en variables y'' en posant (avec $\chi \in C_0^\infty$, $\chi \equiv 1$ près de $y'' = 0$)

$$\tilde{v}(t, z'', r, \theta, h) = e^{\frac{t^2}{2h}} \int e^{\frac{1}{h}(y''\cdot z'' - \frac{y''^2}{2})} \chi(y'') w(t, y'', r, \theta, h) \kappa(x', y'') \, dy''. \tag{47}$$

On note $z = (t, z'')$, $\varphi(z)$ le poids

$$\varphi = \frac{1}{2} (\operatorname{Re} z)^2 \tag{48}$$

et avec $\xi_0'' = (\eta_0'', \tau_0)$, U_0 désignera un petit voisinage de $z_0 = (-i\tau_0, -i\eta_0'')$. On notera aussi

$$\tilde{v}^\gamma(z, r, \theta, h) = \tilde{v}(t, z'', r e^{i\gamma}, \theta, h). \tag{49}$$

On a donc, (en utilisant le lemme V.2 pour (51) quitte à modifier la constante A)

$$\tilde{v} \in H_\varphi(U_0; \tilde{H}^1(]0, r_0[\times \Sigma_0) \tag{50}$$

$$\tilde{v}^\gamma \in H_{\varphi + A\ell\gamma}(U_0; \tilde{H}^1(]0, \ell[\times \Sigma_0)) \text{ pour } \ell \in]0, r_0], \quad 0 < |\gamma| \leq \gamma_0 \tag{51}$$

(52) les restrictions de $\tilde{v}, \tilde{v}^\gamma$ aux strates de codimension 1 sont nulles.

On remarquera que $\tilde{v}(\cdot, r, \theta, h) = v(\cdot, x' = j(r, \theta), h)$, où v est définit par la formule IV. (22).

On notera $\tilde{\omega}_\ell =]0, \ell[\times \Sigma_0$, $\tilde{L}_\ell^2 = L^2(\tilde{\omega}_\ell; d\mu)$, $\tilde{H}_{\ell,h}^1$ l'espace $H^1(\tilde{\omega}_\ell)$ munit de la norme

$$||f; \tilde{H}_{\ell,h}^1||^2 = \int_{\tilde{\omega}_\ell} \left(\left| h \frac{\partial f}{\partial r} \right|^2 + q'\left(r, \theta, h \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + |f|^2 \right) d\mu. \tag{53}$$

$\tilde{H}_{\ell,h,0}^1$ l'adhérence de $C_0^\infty(\tilde{\omega}_\ell)$ dans $\tilde{H}_{\ell,h}^1$, $\tilde{H}_{\ell,h}^{-1}$ le dual de $\tilde{H}_{\ell,h}^1$ munit de la norme duale

$$||f; \tilde{H}_{\ell,h}^{-1}|| = \sup \left\{ \left| \int_{\tilde{\omega}_\ell} f g \, d\mu \right| ; g \in C_0^\infty(\tilde{\omega}_\ell); ||g; \tilde{H}_{\ell,h}^1|| \leq 1 \right\}. \tag{54}$$

On notera W un petit voisinage de $\overline{U}_0 \times \{||\zeta|| \leq \alpha_0\}$, α_0 petit, et $\tilde{S} \in \mathcal{E}(W; \tilde{H}_{r_0,h}^1 \to \tilde{H}_{r_0,h}^{-1})$, $\tilde{S} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{h}{i}\right)^n \tilde{S}_n$ l'opérateur S introduit dans la proposition IV.1, sur lequel on a effectué le changement de variables normales $x' = j(r, \theta)$ (*voir* (21)). D'après IV. (26) le symbole principal $\tilde{S}_0$ vérifie

$$\langle \tilde{S}_0(f), g \rangle = \int_{\tilde{\omega}_{r_0}} \tilde{b}_0(z, \zeta)(\{f\}, \{g\}) m \, d\mu; \quad f \in \tilde{H}_{r_0,h}^1, \quad g \in \tilde{H}_{r_0,h,0}^1 \tag{55}$$

avec $m\,d\mu = j^*(dx')$, $m \in 1 + r^\beta \mathcal{A}$ d'après (17), (18), et où $\{f\} = \left(f, \frac{h}{i}\partial_r f, \frac{h}{i}\partial_\theta f\right)$ (*voir* IV. (21), $[f] = \left(f, \frac{h}{i} d_{x'} f\right)$). Dans IV. (26) on a $\tilde{\nu}|_{x'=0} \equiv 0$, $\tilde{A} = \mathrm{Id} + O(|x'| + |\zeta|)$, $\tilde{R}|_{x'=0} = R_0(i\zeta, iz + \zeta)$, donc en utilisant (14) et (15), avec $\tilde{R}_0(z,\zeta) = R_0(i\zeta, iz+\zeta)$

$$\tag{56} \begin{aligned} \tilde{b}_0(z,\zeta)(\{f\},\{g\}) = &- \left(\frac{h}{i}\partial_r f\right)\left(\frac{h}{i}\partial_r f\right) \\ &- q'\left(r, \theta, \frac{h}{i}\partial_\theta f, \frac{h}{i}\partial_\theta g\right) + f\,g\,\tilde{R}_0 + \tilde{h}(\{f\},\{g\}) \end{aligned}$$

où on a noté par abus $q'(r,\theta,\cdot,\cdot)$ la forme $\mathbb{C}-$bilinéaire associée à $q'(r,\theta,e')$ et où le reste $\tilde{h}(z,\zeta,r,\theta)(\cdot,\cdot)$ est une forme $\mathbb{C}-$bilinéaire, holomorphe en $r \in \Gamma$, telle que

$$\tag{57} \begin{cases} \bullet \quad \tilde{h}(z,\zeta,r,\theta)(\cdot,\cdot) \text{ est réelle pour } (z,\zeta) \in \Lambda_\varphi = \left(z, \frac{2}{i}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) \text{ et } r \in \mathbb{R} \\ \bullet \quad \left|\tilde{h}(z,\zeta,r,\theta)(\{u\},\{v\})\right| \le \mathrm{Cte}(|r|^\beta + |\zeta|)\,|||\{u\}|||_r\,|||\{v\}|||_r \\ \quad\ \text{pour } r \in \Gamma,\ (z,\zeta) \in W, \\ \quad\ |||\{u\}|||_r^2 = |u_0|^2 + |u_r|^2 + q'(|r|,\theta,u_\theta),\ \{u\} = (u_0,u_r,u_\theta). \end{cases}$$

On notera aussi $\tilde{S}^\gamma$, $\tilde{b}_0^\gamma$, $\tilde{h}^\gamma$, m^γ, $d\mu^\gamma$ les objets précédents où on a effectué la déformation $r = e^{i\gamma}r'$, $r' \in \mathbb{R}$.

Pour $U_1 \subset\subset U_0$, on a d'après IV. (25)

$$\tag{58} \exists \varepsilon > 0 \quad \mathrm{Op}(\tilde{S})[\tilde{v}] \in H_{\varphi-\varepsilon}(U_1, \tilde{H}^{-1}_{r_0,h})$$

et en utilisant (43), (44), (51) et la preuve de la proposition IV.1

$$\tag{59} \exists \varepsilon > 0 \qquad \mathrm{Op}(\tilde{S}^\gamma)[\tilde{v}^\gamma] \in H_{\varphi + A\ell\gamma - \varepsilon}(U_1, \tilde{H}^{-1}_{\ell,h}) \quad \forall \ell \in]0, r_0],\ \forall\gamma,\ 0 < |\gamma| \le \gamma_0$$

où dans (59), $\varepsilon > 0$ est indépendant de ℓ, γ, la microlocalisation (47) étant purement tangentielle.

Rappelons que d'après l'hypothèse (H.2), la métrique tempérée $q(r_0,\theta,e)$ est sous-conique et donc (*voir* II. définition 3) il existe $\nu_0 > 0$, $c > 0$, $\delta \in [0,1[$ tels qu'on ait

$$\tag{60} \forall (r,\theta) \in \Gamma \times N \qquad \left| r\frac{\partial}{\partial r} \log \det q - \nu_0 \right| \le 2\delta \min\left(1, \frac{c}{2}\right)$$

$$\tag{61} \forall r \in \Gamma \cap \mathbb{R},\ \forall (\theta, e') \in T^*N \qquad -\frac{\partial q'}{\partial r}(r,\theta,e') \ge \frac{c}{r} q'(r,\theta,e').$$

LEMME V.3. – *Il existe* $\gamma_0 > 0$, $\ell_0 > 0$, $c_0 > 0$, $c_1 > 0$, *tels que pour tout* $\gamma \in]0,\gamma_0]$, $\ell \in]0,\ell_0]$, *et tout* (z,ζ) *vérifiant* $|z - z_0| + |\zeta| \le c_1$ *et* $\mathrm{dist}((z,\zeta);\Lambda_\varphi) \le c_0\gamma$ *on ait*

$$\tag{62} \left| \int_{\tilde{\omega}_\ell} \tilde{b}_0^\gamma(z,\zeta)(\{f\},\{\overline{f}\})\, m^\gamma\, d\mu^\gamma \right| \ge c_0\gamma \|f; \tilde{H}^1_{\ell,h}\|^2, \quad \forall f \in \tilde{H}^1_{\ell,h,0}.$$

Preuve. – Notons $\hat{q}'(r,\theta,e') = q'(r,\theta,e',\bar{e}')$ pour $(\theta,e') \in T^*N \otimes \mathbb{C}$, et $r \in \Gamma$. Pour $r \in \Gamma \cap \mathbb{R}$, $(\theta,e') \in T^*N \otimes \mathbb{C}$, on a en utilisant II. (4)

$$\left|\hat{q}'(re^{i\gamma},\theta,e') - \hat{q}'(r,\theta,e') - i\gamma r\frac{\partial \hat{q}'}{\partial r}(r,\theta,e')\right| \leq \text{Cte } |\gamma|^2 \hat{q}'(r,\theta,e') \tag{63}$$

et en utilisant (61)

$$-r\frac{\partial \hat{q}'}{\partial r}(r,\theta,e') \geq c\hat{q}'(r,\theta,e'). \tag{64}$$

En utilisant le caractère tempéré du déterminant déduit des inégalités II. (11), et (60) on obtient qu'il existe $\nu = \nu(r,\theta,\gamma)$ tel que

$$\left|\frac{\sqrt{\det q(re^{i\gamma},\cdot)}\,|d\theta|}{\sqrt{\det q(r,\cdot)}\,|d\theta|} - 1 - i\gamma\frac{\nu}{2}\right| \leq \text{Cte } |\gamma|^2, \quad \text{et} \quad |\nu - \nu_0| \leq 2\delta \min\left(1,\frac{c}{2}\right). \tag{65}$$

On écrit

$$\begin{cases} \tilde{b}_0^\gamma(z,\zeta)(\{f\},\{\overline{f}\}) = I + II \\ I = e^{-2i\gamma}|h\partial_r f|^2 + \hat{q}'(re^{i\gamma},\theta,h\partial_\theta f) + |f|^2\tilde{R}_0; \quad II = \tilde{h}^\gamma(\{f\},\{\overline{f}\}). \end{cases} \tag{66}$$

Comme $\frac{m^\gamma}{m} \in 1 + \mathcal{O}(r^\beta\gamma)$, en choisissant ℓ_0 petit, et en remplaçant δ par un $\delta' \in]\delta,1[$, $d\mu^\gamma = \sqrt{\det q(re^{i\gamma},\cdot)}\,|d\theta|e^{i\gamma}dr$ et (65) entraînent

$$\begin{cases} m^\gamma d\mu^\gamma = e^{i\gamma(1+\frac{\nu}{2})}m\,d\mu(1+O(\gamma^2)) \\ \nu = \nu(r,\theta,\gamma), \quad |\nu-\nu_0| \leq 2\delta \min\left(1,\frac{c}{2}\right). \end{cases} \tag{67}$$

Aussi pour $(z,\zeta) \in \Lambda_\varphi$, on a $\tilde{R}_0(z,\zeta) \in [-a_1,-a_0]$, $a_i > 0$ donc pour $\operatorname{dist}((z,\zeta);\Lambda_\varphi) \leq c_0\gamma$, on a pour γ_0 petit

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(\tilde{R}_0(z,\zeta)) \in \left[-2a_1, -\frac{a_0}{2}\right] \\ |\operatorname{Im}(\tilde{R}_0(z,\zeta))| \leq \text{Cte } c_0\gamma. \end{cases} \tag{68}$$

Avec $\delta' \in]\delta,1[$ on pose $d = \frac{-\nu_0}{2} + \delta' \min\left(1,\frac{c}{2}\right)$; il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall \nu(r,\theta,\gamma) = \nu \qquad \alpha \leq d + \frac{\nu}{2} \leq (1-\alpha)\min(2,c) \tag{69}$$

d'où pour c_0 petit, d'après (68)

$$-\operatorname{Im}\left(e^{i\gamma(d+\frac{\nu}{2})}\tilde{R}_0\right) \geq c_0\gamma. \tag{70}$$

Alors de (63), (64), (66), (67), (69), (70) on déduit pour c_0, γ_0 petits

$$-\operatorname{Im}\left(e^{i(d-1)\gamma}\int_{\tilde{\omega}_\ell} I m^\gamma d\mu^\gamma\right) \geq c_0\gamma\,||f;\tilde{H}^1_{\ell,h}||^2. \tag{71}$$

Or, d'après (57), le terme de reste vérifie

$$\left|\operatorname{Im}\left(e^{i(d-1)\gamma}\int_{\tilde{\omega}_\ell} IIm^\gamma\, d\mu^\gamma\right)\right| \leq \mathrm{Cte}\ \gamma(\ell^\beta + c_1)||f;\tilde{H}^1_{\ell,h}||^2 \tag{72}$$

et le lemme résulte donc de (71) et (72) en choisissant ℓ_0 et c_1 assez petits. ◇

Nous allons à présent utiliser l'absence de singularités entrantes en ρ_0.

LEMME V.4. – *Il existe* $\ell_0 > 0$, $c_1 > 0$, *tels que pour tout* $\ell \in]0, \ell_0]$, *il existe* $\varepsilon(\ell) > 0$, $\gamma(\ell) > 0$ *tels que pour tout* $\gamma \in]0, \gamma(\ell)]$ *on ait*

$$\tilde{v}^\gamma \in H_{\varphi-\varepsilon(\ell)\gamma}\left(|z - z_0| < c_1\,;\tilde{H}^1\left(\left]\frac{\ell}{4}, \ell\right[\times \Sigma_0\right)\right). \tag{73}$$

Preuve. – Rappelons que dans $r > 0$, r est une variable tangentielle, donc $\pi-$invariante, et que σ désigne la variable duale de r. D'après le théorème 1, on a $SS_b(u) \subset \Sigma_b$, donc pour $\rho \in SS_b(u)$ avec $0 < |x'(\rho)| < r_0$, on a $|\sigma(\rho)| \leq \mathrm{Cte}\,|\xi''(\rho)|$. Alors (73) est conséquence de

$$\exists c > 0 \text{ tel que pour } \rho \in SS_b(u) \text{ vérifiant } |(x''(\rho), \xi''(\rho)) - (0, \xi''_0)| \leq c \tag{74}$$
$$\text{et } 0 < r(\rho) \leq c \text{ on ait } \sigma(\rho) \geq c.$$

(Rappelons brièvement l'argument classique qui prouve que (74) entraîne (73). Supposons (74) ; d'après la caractérisation de $SS_b(u)$ par transformation F.B.I fournie par la proposition IV.5, la fonction $F(w,h) = \int e^{-\frac{1}{h}\phi}\chi u(x)\, d_g x\, dt$, où $\phi = \left(w''x'' - \frac{x''^2}{2}\right) + \left(w_0 r - \frac{r^2}{2}\right)$, $\chi(r,x'') = \chi_1(r)\chi_2(x'')$, $\chi_2 \in C_0^\infty$, $\chi_2 = 1$ près de x''_0, $\chi_1 \in C_0^\infty(0,c)$, $\chi_1 \equiv 1$ près de $\left[\frac{\ell}{2}, \ell\right]$ vérifie $F \in H_{\psi-\varepsilon}(\cdot, H_0^1(\Sigma_0))$, $\psi = \frac{1}{2}(\operatorname{Re} w)^2$, près des points $w = (w_0, w'')$, $\operatorname{Re} w_0 \in \left[\frac{\ell}{2}, \ell\right]$, $\operatorname{Re} w'' = x''_0$, $|\operatorname{Im} w_0|^2 + |\operatorname{Im} w''|^2 = 1$, $\operatorname{Im} w'' = -\xi''_0$, $\operatorname{Im} w_0 \leq c$. En utilisant la formule d'inversion IV. (74) ceci permet d'écrire près de $(r, x'') \in \left[\frac{\ell}{2}, \ell\right] \times \{x''_0\}$, $u = u_0 + \sum_j u_j$ où u_0 est analytique en (r, x'') à valeurs dans $H_0^1(\Sigma_0)$, et les u_j holomorphes en $(r, x'') \in \mathcal{C}_j$ à valeurs dans $H_0^1(\Sigma_0)$, où les $\mathcal{C}_j$ sont des cônes dont les polaires évitent les directions (σ, ξ''_0) pour tout $\sigma \leq c$. On obtient alors (73) en appliquant la transformation de F.B.I en x'' seul, à la décomposition $u = u_0 + \sum_j u_j$).

Montrons (74) : si (74) est faux, il existe une suite $\rho_n \in SS_b(u)$ avec $\rho_n \to \rho_0$ $\overline{\lim}\,\sigma(\rho_n) \leq 0$, et $r(\rho_n) > 0$. Si $\gamma_n : [-\varepsilon_0, 0] \to \Sigma_b$ est un rayon avec $\gamma_n(0) = \rho_n$, on a $r[\gamma_n(s)] > 0$ pour tout $s \in [-\varepsilon_0, 0]$ (en effet d'après la preuve de III. lemme 3, avec $\mu = (-R_0(0, \xi''_0))^{1/2}$, on a $\dot{\sigma} > 0$ dès que $\sigma \in [-\mu + \varepsilon_1, \mu - \varepsilon_1]$ et si $r(s_0) = 0$, alors $\sigma(s_0)$ est proche de μ). On peut donc (par induction sur la codimension des strates) appliquer le théorème de propagation pour obtenir des rayons $\gamma_n : [-\varepsilon_0, 0] \to \Sigma_b$, $\gamma_n(0) = \rho_n$ et $\gamma_n(s) \in SS_b(u)$ pour tout s. Comme $SS_b(u)$ est fermé, en utilisant la proposition III.6, on en déduit l'existence d'un rayon $\gamma : [-\varepsilon_0, 0] \to \Sigma_b$ tel que $\gamma(0) = \rho_0$ et $\gamma(s) \in SS_b(u)$ pour tout s, ce qui contredit l'hypothèse du théorème 2. ◇

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal du §. V.3.

LEMME V.5. – *Il existe* ε_1, ℓ_1, $\gamma_1 > 0$ *et* V *voisinage de* z_0, *tels que pour tout* $\gamma \in]0, \gamma_1]$ *on ait*

$$\tilde{v}^\gamma \in H_{\varphi - \gamma\varepsilon_1}(V; \tilde{H}^1(]0, \ell_1[\times \Sigma_0)) . \tag{75}$$

Preuve. – Le fait que le voisinage V de z_0 peut être choisi indépendamment de l'angle de déformation γ résultera de ce que les estimations des lemmes V.3 et 4 sont uniformes en z proche de z_0. Posons $U_j = \{|z - z_0| < c_j\}$, $j = 2, 3$, avec $0 < c_3 < c_2 \ll c_1$ et $U_2 \subset\subset U_1$ de sorte que (50), (51), (58), (59) sont satisfaits avec $\mathrm{Op}(\tilde{S}^\gamma) = \mathrm{Op}(\tilde{S}^\gamma)(0, C_1^0, C_2^0)$ (*voir* IV.1(9)). Soit $g(z) \in C^\infty(U_2, [0, 1])$ telle que $g(z_0) = 0$ et $g(z) \equiv 1$ au voisinage de $|z - z_0| \geq \frac{c_3}{2}$. Posons pour $\alpha \in [-1, 1]$, $0 \leq \gamma \leq \gamma_0$

$$\varphi_\alpha^\gamma(z) = (1 - \alpha)[\varphi + A\ell_1\gamma g] + \alpha[\varphi + A\ell_1\gamma] = \varphi + A\ell_1\gamma[\alpha + (1 - \alpha)g] . \tag{76}$$

On a $\varphi_\alpha^\gamma \leq \varphi_{\alpha'}^\gamma$ pour $\alpha \leq \alpha'$, $\varphi_1^\gamma = \varphi + A\ell_1\gamma$ et si ℓ_1 est fixé assez petit, on aura, c_0 désignant la constante du lemme V.3

$$\forall z \in U_1 , \ \forall \alpha \in [-1, 1] \quad \mathrm{dist}\left[\left(z, \frac{2}{i}\frac{\partial \varphi_\alpha^\gamma}{\partial z}(z)\right), \Lambda_\varphi\right] \leq c_0\gamma ; \quad \forall \gamma \in]0, \gamma_1] . \tag{77}$$

Posons $\gamma_1 = \gamma(\ell_1)$ (lemme V.4), $E = \tilde{H}^1(]0, \ell_1[\times \Sigma_0)$ et pour ψ fonction poids, soit $H_\psi^a(U_2, E)$ l'espace de Sjöstrand « analytique »

$$H_\psi^a(U_2, E) = \bigcap_{\varepsilon > 0} H_{\psi + \varepsilon}(U_2, E) . \tag{78}$$

Définissons J_γ pour $\gamma \in]0, \gamma_1]$ par

$$J_\gamma = \left\{\alpha \in [-1, 1], \tilde{v}^\gamma \in H_{\varphi_\alpha^\gamma}^a(U_2, E)\right\} ; \tag{79}$$

Alors $1 \in J_\gamma$ d'après (51), J_γ est de la forme $[\alpha_\gamma, 1]$, et (75) est conséquence de

$$\exists \varepsilon_1 \in]0, 1[\quad \forall \gamma \in]0, \gamma_1] \quad \alpha_\gamma \leq -\varepsilon_1 . \tag{80}$$

Vérifions (80). D'après (51), (59) et les résultats du §. IV.1 (*voir* §. IV.1 (7) à (11)), quitte à diminuer ℓ_1, γ_1, il existe ε_0, C_1^0, C_2^0 indépendants de $\gamma \in]0, \gamma_1]$ tels que

$$\mathrm{Op}(\tilde{S}^\gamma)(0, C_1^0, C_2^0)(\tilde{v}^\gamma) \in H_{\varphi - \varepsilon_0}\big(|z - z_0| < c_1, \tilde{H}_{2\ell_1, h}^{-1}\big) \quad (\forall \gamma) . \tag{81}$$

$\Big($En effet, les constantes B et D des formules IV.1. (4) et IV.1. (7) sont uniformes en γ ; avec les notations du §. IV.1, on choisit $C_2^0 \geq 2B$ et $C_1^0 \geq 2[D_2 \,\mathrm{dist}(U_3, U_2^c)]^{-1}\Big)$. En particulier, pour un $\varepsilon_1 > 0$ petit, indépendant de γ, on a

$$\mathrm{Op}(\tilde{S}^\gamma)(0, C_1^0, C_2^0)(\tilde{v}^\gamma) \in H_{\varphi_{(-2\varepsilon_1)}^\gamma}\big(|z - z_0| < c_1, \tilde{H}_{2\ell_1, h}^{-1}\big) \quad (\forall \gamma) . \tag{82}$$

Soit $\psi(\ell) \in C^\infty$, $\psi(\ell) \equiv 1$ pour $\ell \leq \frac{2}{3}\ell_1$, $\psi(\ell) \equiv 0$ pour $\ell \geq \frac{3}{4}\ell_1$. D'après (73) en choisissant $2\ell_1 \ll \ell_0$ et en diminuant au besoin ε_1, on a

$$\tilde{v}^\gamma \in H_{\varphi^\gamma_{(-2\varepsilon_1)}}\left(|z-z_0| < c_1, \tilde{H}^1\left(\left]\frac{\ell_1}{2}, 2\ell_1\right[\times \Sigma_0\right)\right) \quad (\forall \gamma) \tag{83}$$

donc en reprenant l'argument de localisation (39), (40) on obtient

$$\mathrm{Op}(\tilde{S}^\gamma)(0, C_1^0, C_2^0)[\psi \tilde{v}^\gamma] \in H_{\varphi^\gamma_{(-2\varepsilon_1)}}\left(|z-z_0| < c_1, \tilde{H}^{-1}_{\ell_1,h}\right) \quad (\forall \gamma). \tag{84}$$

Soit alors $\alpha > -\varepsilon_1$ tel que $\tilde{v}^\gamma \in H^\alpha_{\varphi^\gamma_\alpha}(U_2, E)$; on a $\psi \tilde{v}_\gamma \in H^\alpha_{\varphi^\gamma_\alpha}(U_2, \tilde{H}^1_{\ell_1,h,0})$. Pour $z_1 \in U_3$ et $\zeta_1 = \frac{2}{i}\frac{\partial \varphi^\gamma_\alpha}{\partial z}(z_1)$, d'après le lemme V.3 et (77), $\tilde{S}^\gamma$ est elliptique en (z_1, ζ_1), et d'après IV.1. (12) et le choix des C_j^0 on a $\mathrm{Op}(\tilde{S}^\gamma)(\zeta_1, C_1^0, C_2^0)(\psi \tilde{v}^\gamma) \in H_{\varphi^\gamma_\alpha - \varepsilon}(U_3, \tilde{H}^{-1}_{\ell_1,h})$, donc pour un voisinage V^γ de z_1 et un $\varepsilon(z_1, \gamma) > 0$ on obtient

$$\psi \tilde{v}^\gamma \in H_{\varphi^\gamma_\alpha - \varepsilon(z_1,\gamma)}\left(V^\gamma, \tilde{H}^1_{\ell_1,h,0}\right), \tag{85}$$

donc comme $\varphi^\gamma_\alpha(z) = \varphi + A\ell_1\gamma$ pour $|z - z_0| \geq \frac{c_3}{2}$ tout α, on a en réutilisant (83)

$$\exists \varepsilon(\gamma) > 0, \quad \tilde{v}^\gamma \in H_{\varphi^\gamma_{(\alpha-\varepsilon(\gamma))}}(U_2, E). \tag{86}$$

On a donc vérifié que $\alpha \in J_\gamma$, $\alpha > -\varepsilon_1$ entraîne $\alpha' \in J_\gamma$ pour un $\alpha' < \alpha$, donc comme J_γ est de la forme $[\alpha_\gamma, 1]$, on a $\alpha_\gamma \leq -\varepsilon_1$. $\diamondsuit$

V.4. Fin de la preuve du théorème 2

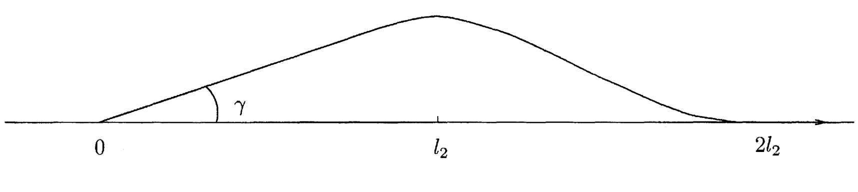
Par définition de $SS_b(u)$ il s'agit de vérifier $(x' = 0, x'' = 0, \xi', \xi''_0) \notin SS(\underline{u})$ pour tout ξ'. Posons

$$F(w,h) = \int e^{\frac{1}{h}(w\cdot x - \frac{x^2}{2})} \chi_1(x')\chi_2(x'')\underline{u}(x', x'')\, d_g(y)\, dt \tag{87}$$

avec $\chi_j \in C_0^\infty$, $\chi_j \equiv 1$ près de 0, $w = (w', w'')$, $w'' = z = (t, z'')$. Par construction on a

$$F(w', z, h) = \int e^{\frac{1}{h}(w'\cdot x' - \frac{x'^2}{2})} \chi_1(x')\tilde{v}(z, r, \theta, h)\, m\, d\mu \tag{88}$$

où dans l'intégrale on a effectué le changement de variable $x' = j(r, \theta)$. Dans (88), on déforme pour $z \sim z_0$ l'intégrale en r sur le contour $r = g(\ell)$, $\ell \in \mathbb{R}$

(86) 

de sorte que $\chi_1 \equiv 1$ pour $r \in]0, 2\ell_2]$ et on note $\tilde{v}^g(z, \ell, \theta, h) = \tilde{v}(z, g(\ell), \theta, h)$. D'après la preuve du lemme V.2, on a si U est un petit voisinage de z_0, $\tilde{v}^g \in$

$H_{\varphi+A\ell_2\gamma}(U, \tilde{H}^1(]0, 2\ell_2[\times\Sigma_0)$ et d'après le lemme V.5 $\tilde{v}^g \in H_{\varphi-\varepsilon_1\gamma}(U, \tilde{H}^1(]0, \ell_2[\times\Sigma_0)$ pourvu que $\ell_2 \leq \ell_1$. Comme pour $|\operatorname{Re} w'| \leq a$, $|\operatorname{Im} w'| \leq C_0$ on a sur le contour déformé

$$\operatorname{Re}\left(w' \cdot x' - \frac{x'^2}{2}\right) \leq C_1(a+\gamma)\ell - c_2\ell^2 \tag{90}$$

en remarquant que $\sup\limits_{\ell\geq 0}\left[C_1(a+\gamma)\ell - c_2\ell^2\right] \leq C_3(a+\gamma)^2$, et en choisissant $\gamma > 0$ petit tel que $\gamma^2 \ll \varepsilon_1\gamma$, $a < \gamma$ et ℓ_2 tel que $c_2\ell_2^2 > C_1(a+\gamma)\ell_2 + A\ell_2\gamma$ on obtient en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à (88), $|F(w,h)| \leq C e^{\frac{1}{h}[\varphi(z)-\varepsilon]}$, $\varepsilon > 0$, pour $z \sim z_0$ et $|\operatorname{Re} w'| \leq a$, $|\operatorname{Im} w'| \leq C_0$, donc $(x = 0, \xi', \xi_0'') \notin SS(\underline{u})$ pour $|\xi'| \leq C_0$, ce qui termine la preuve du théorème 2. $\diamondsuit$

VI. Microhyperbolicité

Soit X une variété analytique complexe de dimension n, $X^{\mathbb{R}}$ la variété réelle sous-jacente, $TX = TX^{\mathbb{R}}$ le fibré tangent à X, $T^*X^{\mathbb{R}}$ le fibré cotangent à $X^{\mathbb{R}}$, T^*X le fibré cotangent à X identifié à $T^*X^{\mathbb{R}}$ par $\zeta \in T^*_xX \to \{u \mapsto -\operatorname{Im}(\zeta(u))\} \in T^*_xX^{\mathbb{R}}$. Si σ est la 2−forme canonique sur T^*X, $\operatorname{Re}\sigma$ et $\operatorname{Im}\sigma$ sont des 2−formes symplectiques sur $T^*X^{\mathbb{R}}$ et $-\operatorname{Im}\sigma$ est la 2−forme canonique de $T^*X^{\mathbb{R}}$. Si φ est une fonction à valeurs réelles sur X, $d\varphi(x) \in T^*_xX^{\mathbb{R}}$ est identifié à $\frac{2}{i}\partial\varphi(x) \in T^*_xX$, où ∂ désigne la différentielle holomorphe $\left(\partial\varphi(u) = \frac{1}{2}(d\varphi(u) - id\varphi(iu)),\ \overline{\partial}\varphi(u) = \frac{1}{2}(d\varphi(u) + id\varphi(iu))\right)$, et si g est une fonction holomorphe de X dans $\mathbb{C}$, $\partial g(x) \in T^*_xX$ est identifié à $d(-\operatorname{Im} g(x)) \in T^*_xX^{\mathbb{R}}$. Pour φ fonction à valeurs réelles sur X on note

$$\Lambda_\varphi = \left\{\left(x, \frac{2}{i}\partial\varphi(x)\right)\right\} \subset T^*X. \tag{1}$$

Alors Λ_φ est identifié à $\{(x, d\varphi(x))\} \subset T^*X^{\mathbb{R}}$, donc est $\operatorname{Im}\sigma$−Lagrangien. Si de plus φ est strictement pluri-sous-harmonique (s.p.s.h) ce que nous supposerons dans la suite, alors Λ_φ est $\operatorname{Re}\sigma$−symplectique, (T^*X, σ) est un complexifié de $(\Lambda_\varphi, \operatorname{Re}\sigma)$ et si on identifie Λ_φ à X par la projection canonique $\pi(x,\zeta) \to x$, alors X est muni de la structure symplectique définie par la 2−forme $\frac{2}{i}\overline{\partial}\partial\varphi = \pi_*(\operatorname{Re}\sigma|_{\Lambda_\varphi})$.

Si E_h est une famille d'espaces de Banach, on note comme dans le §. IV.1 $H_\varphi(X, E_h)$ l'espace de Sjöstrand correspondant et $H^a_\varphi(X, E_h)$ l'espace « analytique » des fonctions $f(x,h)$ holomorphes en $x \in X$ à valeurs dans E_h définies pour $h \in]0, h_0]$ vérifiant

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists C_\varepsilon,\ \forall h \qquad |f; E_h|_{\varphi,X} = \sup_{x\in X}\left\{||f(x,h); E_h||\, e^{-\frac{\varphi(x)}{h}}\right\} \leq C_\varepsilon e^{\frac{\varepsilon}{h}}. \tag{2}$$

On a donc $H^a_\varphi(X, E_h) = \bigcap\limits_{\varepsilon>0} H_{\varphi+\varepsilon}(X, E_h)$. Pour $f \in H^a_\varphi(X, E_h)$, son spectre analytique, $SS_\varphi(f; E_h)$ est le fermé de Λ_φ défini par

$$\left(x_0, \zeta_0 = \frac{2}{i}\partial\varphi(x_0)\right) \notin SS_\varphi(f; E_h) \text{ ssi il existe } U \text{ voisinage de } x_0 \text{ et } \varepsilon > 0 \text{ tels que } f \in H_{\varphi-\varepsilon}(U, E_h). \tag{3}$$

Rappelons à présent la définition de la microhyperbolicité et le théorème de Kashiwara-Kawai.

Soit $\rho_0 = \big(x_0, \zeta_0 = \frac{2}{i}\partial\varphi(x_0)\big) \in \Lambda_\varphi$, $\nu_0 \in T_{\rho_0}\Lambda_\varphi$, W un voisinage de ρ_0 dans T^*X et $p = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{h}{i}\right)^n p_n(x,\zeta,h) \in \mathcal{E}(W; E_h^1 \to E_h^2)$ un opérateur pseudo-différentiel analytique de E_h^1 dans E_h^2 défini près de ρ_0.

DÉFINITION VI.1. – *On dit que p est microhyperbolique en* (ρ_0, ν_0) *s'il existe un voisinage* V *de* (ρ_0, ν_0) *dans* $T\Lambda_\varphi$ *et* $\varepsilon_0 > 0$ *tel que p soit elliptique en tout point de* T^*X *de la forme* $\rho + is\nu$, $(\rho, \nu) \in V$, $0 < s \leq \varepsilon_0$.

Comme T^*X est complexifié de Λ_φ, la notation $\rho + is\nu$ suppose un choix de coordonnées locales sur Λ_φ, la définition étant indépendante de ce choix. La microhyperbolicité en $(\rho_0, 0 = \nu_0)$ est équivalente à l'ellipticité. Le théorème de Kashiwara-Kawai s'énonce alors

THÉORÈME (K.-K). – *Soit* $\rho_0 \in \Lambda_\varphi$, *et* Θ *une fonction réelle définie au voisinage de* ρ_0 *dans* Λ_φ, *vérifiant* $\Theta(\rho_0) = 0$, $d\Theta(\rho_0) \neq 0$. *Soit* $p \in \mathcal{E}(W; E_h^1 \to E_h^2)$ *microhyperbolique en* (ρ_0, ν_0) *avec* $\nu_0 = H_\Theta(\rho_0) =$ *champ hamiltonien (pour* $\mathrm{Re}\,\sigma$*) de* Θ *en* ρ_0. *Alors si* $f \in H_\varphi(X; E_h^1)$ *vérifie*

$$(4) \qquad \rho_0 \notin SS_\varphi\big(\mathrm{Op}(p)f; E_h^2\big) \quad et \quad SS_\varphi(f; E_h^1) \cap \{\Theta < 0\} = \phi \quad près\ de \quad \rho_0$$

on a $\rho_0 \notin SS_\varphi(f; E_h^1)$.

(Ce résultat est démontré dans les espaces H_φ à valeurs scalaires dans [S.1], le cas Banachique s'obtenant en remplaçant les valeurs absolues par les normes).

Nous pouvons à présent entamer la preuve du théorème 3. La transformation de F.B.I. (§. IV. (22)) est associée à la transformation canonique complexe (§. IV. (17)) et au poids φ s.p.s.h., $\varphi = \frac{1}{2}(\mathrm{Re}\, z)^2$. Si $\rho_0 = (x_0'', \xi_0'') \in T^*S$ est le point du cotangent à la strate S près duquel on travaille, on posera $(z_0, \zeta_0) = (x_0'' - i\xi_0'', -ix_0'')$, on notera à nouveau (par abus) $(z_0, \zeta_0) = \rho_0$, et on identifie la fonction Θ de l'énoncé du théorème 3 à la fonction définie sur Λ_φ, $\Theta(\mathrm{Re}\, z, -\mathrm{Im}\, z)$, qu'on note à nouveau Θ. Nous conservons les notations du §. IV.2, et U_0 désigne un petit voisinage de z_0. La fonction $v(z,h) \in H_\varphi(U_0, H_h^1)$ est définie par IV. (22) et d'après la proposition IV.3, le théorème 3 sera conséquence de

$$(5) \qquad \exists \psi(x') \in C_0^\infty, \ \ \psi \equiv 1 \text{ près de } x' = 0 \text{ t.q. } \rho_0 \notin SS_\varphi(\psi v; H_{0,h}^1).$$

Soit S l'opérateur construit dans la proposition IV.1, b_0 la forme définie par §. IV. (26) et $\tilde{R}_0 = R(0, i\zeta; iz + \zeta)|_{\Lambda_\varphi}$. On a

$$(6) \qquad \{\tilde{R}_0, \Theta\}_{\rho_0} = -d\tilde{R}_0(H_\Theta)_{\rho_0} \neq 0; \quad \tilde{R}_0(\rho_0) = 0.$$

Rappelons que $\omega' = \{x' \in \mathcal{S}_0' \subset \mathbb{R}^d; |x'| < \varepsilon_0\}$ et que $H_{0,h}^1$ est l'espace $H_0^1(\omega')$ muni de la norme $|f|_{L^2}^2 + \sum\limits_{j=1}^{d} |h\partial_{x_j} f|_{L^2}^2$, et H_h^{-1} est son dual. Dans la suite, ε_0 est supposé assez petit.

LEMME VI.1. – *L'opérateur S, vu comme élément de $\mathcal{E}(\cdot, H^1_{0,h} \rightarrow H^{-1}_h)$ est microhyperbolique en $(\rho_0, \nu_0 = H_\Theta(\rho_0))$.*

Preuve. – Pour (x'', ξ'') près de (x''_0, ξ''_0) dans T^*S, (y'', η'') près de $\big(\frac{\partial\Theta}{\partial\xi''}(x''_0, \xi''_0), -\frac{\partial\Theta}{\partial x''}(x''_0, \xi''_0)\big) = H_\Theta(x''_0, \xi''_0)$, et $s > 0$, notons $m = (x'', \xi''; y'', \eta'')$ et $m_s = (x'' + isy'', \xi'' + is\eta'')$. Pour $f, g \in H^1_{0,h}$, posons (*voir* §. IV. (26))

$$(7) \qquad a_{s,m}(f, g) = \int_{\omega'} \Big\{ {}^t(f' - f_0 \nu_{s,m}) A_{s,m}(-g' - g_0 \nu_{s,m}) + f_0 g_0 R_{s,m} \Big\} dx'$$

où $f_0 = f$, $f' = \big(\frac{h}{i}\partial_{x_1} f, \ldots, \frac{h}{i}\partial_{x_d} f\big)$ et $\nu_{s,m} = \nu(x', m_s)$, $A_{s,m} = A(x', m_s)$, $R_{s,m} = R(x', m_s)$. D'après le lemme de Lax-Milgram, il suffit de vérifier qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de $m_0 = (x''_0, \xi''_0; H_\Theta(x''_0, \xi''_0))$ et $s_0 > 0$ tel que

$$(8) \qquad \forall m \in \mathcal{V},\ \forall s \in]0, s_0],\ \exists c > 0 \quad |a_{s,m}(f, \overline{f})| \geq c||f; H^1_{0,h}||, \quad \forall f \in H^1_{0,h}.$$

On écrit $A_{s,m} = A^1_{s,m} + iA^2_{s,m}$, $A^j_{s,m}$ symétriques réelles ; il existe $c_0 > 0$, $c_1 > 0$ tels qu'on ait pour tout ε_0 assez petit

$$(9) \qquad \begin{cases} A^1_{s,m} \geq c_0 \,\mathrm{Id};\ ||A^2_{s,m}|| \leq c_1 s;\ ||A_{s,m}|| \leq c_1 \\ |\nu_{s,m} - \overline{\nu}_{s,m}| \leq c_1 s \\ |\operatorname{Im} R_{s,m}| \geq c_0 s;\ |\operatorname{Re} R_{s,m}| \leq c_1(\alpha(x'', \xi'') + \varepsilon_0 + s_0^2) \end{cases}$$

pour tout $(m, s) \in \mathcal{V}_0 \times]0, s_0]$, où $\mathcal{V}_0$ est un petit voisinage de m_0, et $\alpha(x'', \xi'') > 0$ tend vers zéro quand $(x'', \xi'') \rightarrow (x''_0, \xi''_0)$ d'après $R_0(x''_0, \xi''_0) = 0$. Si on pose $g = \overline{f}$ dans (7), on a $g_0 = \overline{f}_0$, $g' = -\overline{f}'$. En notant

$$(10) \qquad u_0 = \Big(\int_{\omega'} |f_0|^2 dx'\Big)^{\frac{1}{2}}, \quad u_1 = \Big(\int_{\omega'} |f' - f_0 \nu_{s,m}|^2 dx'\Big)^{\frac{1}{2}}$$

on obtient d'après (9) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$(11) \qquad \begin{cases} |\operatorname{Im} a_{s,m}(f, \overline{f})| \geq c_0 s u_0^2 - c_1^2 s u_0 u_1 - c_1 s u_1^2 \\ \operatorname{Re} a_{s,m}(f, \overline{f}) \geq c_0 u_1^2 - c_1^2 s u_0 u_1 - c_1(\alpha + \varepsilon_0 + s_0^2) u_0^2 \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned} |\operatorname{Im} a_{s,m}(f, \overline{f})| + sM \operatorname{Re} a_{s,m} \geq c_0 s[u_0^2 + M u_1^2] - c_1^2 s u_0 u_1 (1 + Ms) \quad (12) \\ -c_1 s\big[u_1^2 + M(\alpha + \varepsilon_0 + s_0^2) u_0^2\big]. \end{aligned}$$

En choisissant d'abord $M \geq 1$ tel que $c_0\sqrt{M} \gg c_1 + c_1^2$, puis α, ε_0 et s_0 tels que $M s_0 \leq \frac{1}{2}$ et $c_1 M(\alpha + \varepsilon_0 + s_0^2) \ll c_0$, on obtient d'après (12) pour un $c_2 > 0$

$$(13) \qquad |a_{s,m}(f, \overline{f})| \geq c_2 s(u_0^2 + u_1^2)$$

et (8) résulte de $u_0^2 + u_1^2 \approx ||f; H^1_{0,h}||^2$. ◇

LEMME VI.2. – *Soient u, $\rho_0 = (x''_0, \xi''_0)$, Θ, vérifiant les hypothèses du théorème 3. Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\rho \in \Sigma_b$ vérifiant $0 < |x'(\rho)| \leq \varepsilon_0$, $(x''(\rho), \xi''(\rho)) = (x''_0, \xi''_0)$ on ait $\rho \notin SS_b(u)$.*

Preuve. – Soit $\gamma : 0 \in I \to \Sigma_b$ un rayon tel que $\gamma(0) = \rho$; on a $\Theta(\gamma(0)) = 0$ et en notant $x(s) = x(\gamma(s))$, $\xi''(s) = \xi''(\gamma(s))$, d'après la proposition III.1

$$(14)\quad \frac{d}{ds}\Theta(\gamma(s))_{g,d} = \{R_0, \Theta\}(x''(s), \xi''(s)) + \mathcal{O}\Big(|x'(s)| + |R|^{\frac{1}{2}}(x'(s), x''(s), \xi''(s))\Big).$$

Si ε_0 est assez petit, il existe donc un signe $\sigma = 1$ et $s_0 > 0$ tels que pour $\sigma s \in]0, s_0]$, on ait $\Theta(\gamma(s)) < 0$ donc $\gamma(s) \notin SS_b(u)$. Or pour $|s|$ petit, on a $|x'(s)| > 0$, donc $\gamma(s)$ appartient à une strate de codimension au plus $d - 1$. On peut donc appliquer le théorème de propagation (proposition VII.1) qui entraîne $\gamma(0) \notin SS_b(u)$. $\diamondsuit$

Preuve du théorème 3. – Soit ε_0 assez petit pour avoir les conclusions des lemmes VI.1 et 2, et $\psi \in C_0^\infty\big(|x'| < \frac{\varepsilon_0}{2}\big)$ tel que $\psi \equiv 1$ près de $x' = 0$. On peut aussi supposer que $\rho \in \Sigma_b$, $\Theta(\rho) < 0$ et $\max\big(|x'(\rho)|; |x''(\rho) - x''_0|; |\xi''(\rho) - \xi''_0|\big) \leq 4\varepsilon_0$ entraînent $\rho \notin SS_b(u)$. En particulier pour $(z, \zeta) \in \Lambda_\varphi$, $|(z, \zeta) - (z_0, \zeta_0)| \leq \varepsilon_0$ on a

$$(15)\qquad \Theta(z, \zeta) < 0 \Longrightarrow (z, \zeta) \notin SS_\varphi(\psi v; H^1_{0,h}).$$

En effet, fixons un tel (z, ζ). Pour tout $x'_0 \in \text{support}(\psi) \cap \omega'$, en utilisant la proposition IV.5, on obtient qu'il existe des voisinages $W_{x'_0}$ de (z, ζ), $U_{x'_0}$ de x'_0, $\varepsilon(x'_0) > 0$ et $\psi_{x'_0}(x') \in C_0^\infty$ égal à 1 sur $U_{x'_0}$ tels que

$$(16)\qquad \psi_{x'_0} v \in H_{\varphi - \varepsilon(x'_0)}(W_{x'_0}; H^1_{0,h})$$

et on obtient (15) en extrayant un sous-recouvrement fini de support $(\psi) \cap \omega'$ par des $U_{x'_j}$, en utilisant une partition de l'unité.

Dans les formules IV. (23) à (26) qui définissent S, on a posé pour $f \in H^1_h$, $[f] = \big(f_0, \frac{h}{i}\partial_{x'} f\big)$; avec $[\tilde{\psi}] = \big(0, \frac{h}{i}\partial_{x'}\psi\big)$, on a donc $[\psi f] = \psi[f] + f[\tilde{\psi}]$ donc si b est une quelconque des formes $\mathbb{C}$−bilinéaires sur $\mathbb{C}^{d+1}$ qui définissent S, on a pour $g \in H^1_{0,h}$

$$(17)\qquad b\big([\psi v], [g]\big) = b\big([v], [\psi g]\big) + v\, b\big([\tilde{\psi}], [g]\big) - g\, b\big([v], [\tilde{\psi}]\big).$$

Comme le support de $\tilde{\psi}$ évite $x' = 0$, l'équation IV. (25), le lemme VI.2, (17) et la proposition IV.5 entraînent

$$(18)\qquad (z_0, \zeta_0) \notin SS_\varphi\big(\mathrm{Op}(S)[\psi v]; H_h^{-1}\big).$$

Le théorème 3 est alors conséquence du théorème de Kashiwara-Kawai, du lemme VI.1, et de (15) et (18) qui entraînent $(z_0, \zeta_0) \notin SS_\varphi(\psi v; H^1_{0,h})$. $\diamondsuit$

Nous terminons ce paragraphe par la preuve d'une estimation près de $\mathcal{G}$ qui sera utilisée dans la preuve du théorème de propagation. Soit S une strate redressée localement en $x' = 0$, K un compact de $\mathcal{G}_S$ vérifiant pour un $\alpha > 0$

$$(19)\qquad K \subset \Big\{(x'', \xi''); R_0(x'', \xi'') = 0; |x''| \leq \alpha, \alpha \leq |\xi''| \leq \frac{1}{\alpha}\Big\}.$$

Pour $\rho_0 = (x''_0, \xi''_0)$ dans K on note

$$(20) \qquad B(\rho_0, \varepsilon) = \Big\{\rho \in \Sigma_b,\ \max\Big\{|x'(\rho)|, |x''(\rho) - x''_0|, |\xi''(\rho) - \xi''_0|\Big\} \le \varepsilon\Big\}.$$

PROPOSITION VI.1. – *Il existe $\varepsilon_0 > 0$, $\delta_0 > 0$ tels que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$ et tout $\rho_0 = (x''_0, \xi''_0) \in K$ on ait*

$$(21) \qquad B(\rho_0, \varepsilon^2) \cap SS_b(u) = \phi \Longrightarrow \exp sH_{R_0}(\rho_0) \notin SS_b(u)\ \forall s,\ |s| \le \delta_0 \varepsilon.$$

Preuve. – L'uniformité de ε_0, δ_0 par rapport à $\rho_0 \in K$ résultera de la preuve, de sorte qu'on travaille avec $K = \{\rho_0\}$. On se restreint également aux valeurs positives de s, l'autre cas étant analogue. Soit (y, η) un système de coordonnées symplectiques sur T^*S près de ρ_0 tel que $R_0 = \eta_1$ et $\rho_0 = (y = 0, \eta = 0)$. Pour $t \ge 0$, $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 > 0$ petit, $a > 0$ petit posons

$$(22) \qquad \Theta_{\varepsilon,t}(x'', \xi'') = y_1 + \frac{t}{a^2 \varepsilon^4}(y'^2 + \eta^2) - t; \quad y = (y_1, y')$$

$$K_{t,\varepsilon} = \Big\{\rho \in \Sigma_b,\ |x'(\rho)| \le a\varepsilon^2,\ \Theta_{\varepsilon,t}(\rho) \le 0,\ y_1(\rho) \ge -a\varepsilon^2, \qquad (23)$$
$$y'^2(\rho) + \eta^2(\rho) \le a^2 \varepsilon^4\Big\}.$$

Les ensembles $K_{t,\varepsilon}$ sont croissants en t. Soit

$$(24) \qquad I = \Big\{t \ge 0,\ K_{t,\varepsilon} \cap SS_b(u) = \phi\Big\}.$$

Si a est assez petit, on a $K_{a\varepsilon^2,\varepsilon} \subset B(\rho_0, \varepsilon^2)$ pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$. Désignons par M une constante géométrique telle que pour $\rho \in \Sigma_b$ proche de ρ_0 on ait

$$(25) \qquad \rho \in B\Big(\exp y_1(\rho) H_{R_0}(\rho_0),\ M \max\Big(|x'(\rho)|, (y'^2(\rho) + \eta^2(\rho))\Big)^{\frac{1}{2}}\Big).$$

Soit alors $\rho \in K_{t,\varepsilon}$ avec $|x'(\rho)| = a\varepsilon^2$. On a $y_1(\rho) \in [-a\varepsilon^2, t]$ et d'après (25) $\rho \in B\big(\exp y_1(\rho) H_{R_0}(\rho_0), Ma\varepsilon^2\big)$. Si $s \mapsto \gamma(s)$ est un rayon passant par $\rho = \gamma(0)$, le lemme III.4 entraîne

$$(26) \qquad \gamma(s) \in B\Big(\exp(s + y_1(\rho)) H_{R_0}(\rho_0),\ (\varepsilon\sqrt{Ma} + A_0|s|)^2\Big)$$

pour tout s tel que $|s| \le s_0$. Choisissons alors a, δ_0, ε_0 tels que $\sqrt{Ma} + A_0\delta_0 \le \frac{1}{2}$, $\delta_0\varepsilon_0 \le s_0$, $a\varepsilon_0 \le \delta_0$. Pour $t \le \delta_0\varepsilon$, on aura $y_1(\rho) \in [-a\varepsilon^2, \delta_0\varepsilon]$, donc $|y_1(\rho)| \le \delta_0\varepsilon \le s_0$ donc $\gamma(-y_1(\rho)) \in B\big(\rho_0, \frac{\varepsilon^2}{4}\big)$ donc $\gamma(-y_1(\rho)) \notin SS_b(u)$. Aussi d'après (26), pour s entre 0 et $-y_1(\rho)$, on a $|R(\gamma(s))| \in \mathcal{O}\big((\varepsilon\sqrt{Ma} + A_0|s|)^2\big)$, donc (*voir* la preuve du lemme III.4) $\big|\frac{d}{ds}x'(\gamma(s))_{g,d}\big| \le \mathrm{Cte}\, R^{\frac{1}{2}}(\gamma(s))$ implique $|x'(\gamma(s))| \ge a\varepsilon^2 - C_0(\sqrt{Ma} + A_0\delta_0)\varepsilon \cdot \delta_0\varepsilon$ où C_0 ne dépend que de la géométrie, donc quitte à remplacer δ_0, ε_0 par $\alpha\delta_0$, $\alpha\varepsilon_0$,

$0 < \alpha \ll 1$, on aura $|x'(\gamma(s))| \geq \frac{a}{2}\varepsilon^2$ pour tout s entre 0 et $-y_1(\rho)$. Le rayon $\gamma(s)$ ne rencontre donc pas la strate S entre 0 et $-y_1(\rho)$, et le théorème de propagation en codimension inférieure (proposition VII.1) entraîne

$$\rho \in K_{t,\varepsilon}\,,\;\; t \leq \delta_0\varepsilon \text{ et } |x'(\rho)| = a\varepsilon^2 \Longrightarrow \rho \notin SS_b(u)\,. \tag{27}$$

La proposition étant conséquence de $\delta_0\varepsilon \in I$, supposons par l'absurde $\delta_0\varepsilon \notin I$. On a alors $I = [0, t[$ avec $a\varepsilon^2 \leq t \leq \delta_0\varepsilon$ car $a\varepsilon^2 \in I$, $SS_b(u)$ est fermé dans Σ_b, et $K_{t,\varepsilon}$ est compact dans Σ_b. Il suffit donc de vérifier

$$\rho \in K_{t,\varepsilon} \text{ et } \Theta_{\varepsilon,t}(\rho) = 0 \Rightarrow \rho \notin SS_b(u) \tag{28}$$

puisque on a d'après $I = [0, t[$

$$\rho \in K_{t,\varepsilon} \text{ et } \Theta_{\varepsilon,t}(\rho) < 0 \Longrightarrow \rho \notin SS_b(u)\,. \tag{29}$$

Montrons (28). Comme on a $t \geq a\varepsilon^2$ on peut supposer $y_1(\rho) > 0$, donc $y'^2(\rho) + \eta^2(\rho) < a^2\varepsilon^4$ ainsi que $|x'(\rho)| < a\varepsilon^2$ d'après (27). Comme de plus $\{R_0, \Theta_{\varepsilon,t}\} \equiv 1$, si $\gamma(s)$ est un rayon passant par $\rho = \gamma(0)$, on a d'après la proposition III.1

$$\left(\frac{d}{ds}\right)_{g,d} \Theta_{\varepsilon,t}(\gamma(s))\big|_{s=0} = 1 + \mathcal{O}\Big(|\nabla\theta_{\varepsilon,t}|\big(|R|^{\frac{1}{2}}(\rho) + |x'(\rho)|\big)\Big)\,. \tag{30}$$

Or on a $|R|^{\frac{1}{2}}(\rho) + |x'(\rho)| \in \mathcal{O}(\sqrt{a}\varepsilon)$ et $|\nabla\theta_{\varepsilon,t}| \in \mathcal{O}\big(1 + \frac{t}{a\varepsilon^2}\big) \in \mathcal{O}\big(1 + \frac{\delta_0}{a\varepsilon}\big)$. Quitte à remplacer à nouveau δ_0, ε_0 par $\alpha\delta_0$, $\alpha\varepsilon_0$, $\alpha \ll 1$ on a donc

$$\left(\frac{d}{ds}\right)_{g,d} \Theta_{\varepsilon,t}(\gamma(s))\big|_{s=0} \geq \frac{1}{2} \tag{31}$$

et par suite, tout rayon passant par ρ rentre dans le passé dans $\Theta_{\varepsilon,t} < 0$ donc dans $K_{t',\varepsilon}$ pour un $t' < t$ puisque $|x'(\rho)| < a\varepsilon^2$, $y_1(\rho) > 0$ et $y'^2(\rho) + \eta^2(\rho) < a^2\varepsilon^4$.

Par suite, (28) est conséquence du théorème de propagation en codimension inférieure si $x'(\rho) \neq 0$, du théorème 2 de réflexion transverse si $x'(\rho) = 0$, et $\rho \in \mathcal{T}_S$, et du théorème 3 microhyperbolique si $x'(\rho) = 0$ et $\rho \in \mathcal{G}_S$ d'après (29) et $\{R_0, \Theta_{\varepsilon,t}\} \neq 0$. ◊

VII. Propagation

Ce chapitre est consacré à la preuve du théorème 4. Soit donc u une solution (§. I. (1')) (formulation locale de l'équation §. I. (1)) ; rappelons que $B_0 = \{|y''| < \varepsilon_0 \text{ et } |t - t_0| < \varepsilon_0\}$, $\mathcal{M}' = \{|x'| < \varepsilon_0\}$ et $\Omega \cap (\mathcal{M}' \times B_0) = \omega' \times B_0$. Soit K un compact de Σ_b tel que pour $\rho \in K$ on ait $|x'(\rho)| \leq \frac{\varepsilon_0}{2}$, $|y''(\rho)| \leq \frac{\varepsilon_0}{2}$ et $|t(\rho) - t_0| \leq \frac{\varepsilon_0}{2}$. Le théorème 4 est conséquence de sa version locale, c'est-à-dire de la

PROPOSITION VII.1. – *Soit* $\rho_0 \in \overset{\circ}{K} \cap SS_b(u)$, s_+, s_- *deux réels strictement positifs. Il existe un rayon* $\gamma : [a, b] \to K \cap SS_b(u)$ *tel que* $0 \in]a, b[$, $\gamma(0) = \rho_0$ *et soit* $b = s_+$ *(resp.* $a = -s_-$*) soit* $\gamma(b) \in \partial K$ *(resp.* $\gamma(a) \in \partial K$*).*

Preuve. – (On a noté $\overset{\circ}{K}$ l'intérieur de K dans Σ_b et $\partial K = K \setminus \overset{\circ}{K}$). Si J est l'application antipodale $J(x,\xi) = J(x,-\xi)$, J laisse stable $p^{-1}(0)$ et pour $q, q' \in p^{-1}(0)$ vérifiant $\pi(q) = \pi(q')$, on a $\pi(J(q)) = \pi(J(q'))$, donc J agit sur Σ_b ; si $\overline{u}$ est la conjuguée de u, on a $SS_b(\overline{u}) = J(SS_b(u))$, et si $\gamma(s)$ est un rayon, $s \mapsto J(\gamma(-s))$ est un rayon, de sorte qu'on peut se restreindre à travailler sur les rayons $\gamma : [0,b] \to K \cap SS_b(u)$. Posons

$$(1) \qquad \mathcal{C}_{\rho_0,s_+} = \Big\{\text{rayons } \gamma : [0,\delta[\to K \cap SS_b(u),\ \ \gamma(0) = \rho_0,\ \ 0 < \delta \le s_+\Big\}.$$

L'ensemble $\mathcal{C}_{\rho_0,s_+}$ est muni de la relation de bon ordre évidente : pour $\gamma_j : [0,\delta_j[\to K \cap SS_b(u)$, $\gamma_1 \le \gamma_2$ signifie $\delta_1 \le \delta_2$ et $\gamma_2|_{[0,\delta_1[} = \gamma_1$. Supposons $\mathcal{C}_{\rho_0,s_+} \ne \phi$; d'après le lemme de Zorn, il existe dans $\mathcal{C}_{\rho_0,s_+}$ (au moins) un élément maximal $\gamma : [0,\delta[\to K \cap SS_b(u)$. D'après le corollaire III.8, γ se prolonge à $[0,\delta]$, et $SS_b(u)$ étant fermé, $\gamma(\delta) \in SS_b(u)$. Si $\gamma(\delta) \in \partial K$ ou $\delta = s_+$ on a gagné. Sinon $\gamma(\delta) \in \overset{\circ}{K} \cap SS_b(u)$ et puisque γ est maximal $\mathcal{C}_{\gamma(\delta),s_+-\delta} = \phi$ (car par définition des rayons, deux rayons γ_1, γ_2 définis respectivement sur $[a_1,a_2]$ et $[a_2,a_3]$, vérifiant $\gamma_1(a_2) = \gamma_2(a_2)$, se recollent en un rayon γ défini sur $[a_1,a_3]$). La proposition est donc équivalente à vérifier

$$(2) \qquad \forall \rho_0 \in \overset{\circ}{K} \cap SS_b(u), \qquad \mathcal{C}_{\rho_0,s_+} \ne \phi.$$

Par induction sur la codimension des strates, on peut supposer $\rho_0 = (x_0'', \xi_0'') \in T^*S$, S étant la strate de codimension d, $S = \{x' = 0\}$. Si $\rho_0 \in \mathcal{T}_S$ (*i.e.* $R_0(x_0'', \xi_0'') < 0$) (2) est conséquence du théorème 2 de réflexion transverse et du théorème de propagation en codimension au plus $d-1$ (*voir* la fin de la preuve du lemme V.4). On peut donc supposer $\rho_0 \in \mathcal{G}_S$ (*i.e.* $R_0(x_0'', \xi_0'') = 0$). Pour $\rho \in K$ et $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, ε_0 petit, posons

$$(3) \quad \mathcal{R}^1_{\rho,\varepsilon} = \Big\{\text{rayons } \gamma : [0,\varepsilon] \to SS_b(u),\ \ \gamma(0) = \rho,\ \ \gamma(s) \notin \mathcal{G}_S \text{ pour } s \in [0,\varepsilon[\Big\}$$

$$(4) \quad \mathcal{R}^2_{\rho,\varepsilon} = \Big\{\text{rayons } \gamma : [0,\delta] \to SS_b(u),\ \ \delta \in]0,\varepsilon[,\ \ \gamma(0) = \rho,\ \ \gamma(s) \notin \mathcal{G}_S \\ \text{pour } s \in [0,\delta[\text{ et } \gamma(\delta) \in \mathcal{G}_S[\Big\}$$

Rappelons que pour $\rho \in T^*S$, la « boule » $B(\rho,\varepsilon) \subset \Sigma_b$ est définie en VI. (20). Soit A une grande constante positive ; pour $\rho \in K \cap SS_b(u)$ soit $D_\varepsilon(\rho)$ le sous-ensemble de $SS_b(u)$ défini par

$$(5) \quad \text{Si } \rho \in \mathcal{G}_S : D_\varepsilon(\rho) = B\big(\exp \varepsilon H_{R_0}(\rho), A\varepsilon^2\big) \cap SS_b(u)$$

$$(6) \quad \text{Si } \rho \notin \mathcal{G}_S : D_\varepsilon(\rho) = \big\{\gamma(\varepsilon), \gamma \in \mathcal{R}^1_{\rho,\varepsilon}\big\} \cup \\ \Big\{B\Big(\exp(\varepsilon-\delta) H_{R_0}(\gamma(\delta)), A(\varepsilon-\delta)^2\Big) \cap SS_b(u) ; \gamma \in \mathcal{R}^2_{\rho,\varepsilon}\Big\}.$$

Si A est choisi assez grand, pour $\rho \in \mathcal{G}_S \cap SS_b(u)$, $D_\varepsilon(\rho)$ est non vide d'après la proposition VI.1 ; si $\rho \in SS_b(u) \setminus \mathcal{G}_S$, $\mathcal{R} = \big\{\text{rayons } \gamma : [0,\delta[\to SS_b(u), \delta \in]0,\varepsilon], \gamma(0) = \rho, \gamma(s) \notin \mathcal{G}_S\ \forall s\big\}$ est non vide (car (2) est acquis pour $\rho \notin \mathcal{G}_S$), bien ordonné, donc possède un élément maximal, ce qui prouve $\mathcal{R}^1_{\rho,\varepsilon} \cup \mathcal{R}^2_{\rho,\varepsilon} \neq \phi$ donc à nouveau d'après la proposition VI.1, $D_\varepsilon(\rho) \neq \phi$. On a donc

$$(7) \qquad \forall \rho \in K \cap SS_b(u), \qquad D_\varepsilon(\rho) \neq \phi.$$

Les fonctions $x = (x', x'')$, ξ'', étant $\pi-$invariantes, le corollaire III.2, et les définitions 5 et 6 entraînent qu'il existe une constante $C_0 > 0$ telle que

$$(8)\ \forall \rho \in K \cap SS_b(u),\ \ \rho' \in D_\varepsilon(\rho) \Longrightarrow \max\Big\{|x(\rho) - x(\rho')|, |\xi''(\rho) - \xi''(\rho')|\Big\} \leq C_0\,\varepsilon.$$

Soit $\rho_0 \in \mathcal{G}_S \cap \overset{\circ}{K} \cap SS_b(u)$. Pour tout entier $N \geq 1$, soit $\rho_{j,N}$, $0 \leq j \leq 2^N$ des points de $SS_b(u) \cap K$ vérifiant

$$(9) \qquad \rho_{0,N} = \rho_0, \quad \rho_{j+1,N} \in D_\varepsilon(\rho_{j,N}), \quad \varepsilon = \varepsilon_0 2^{-N}$$

dont l'existence est assurée pour ε_0 petit d'après (7) et (8). Si $\mathcal{J}_N = \big\{j\,\varepsilon_0 2^{-N}, 0 \leq j \leq 2^N\big\} \subset [0, \varepsilon_0]$, on définit $\gamma_N(t)$ pour $t = j\,\varepsilon_0 2^{-N} \in \mathcal{J}_N$ par $\gamma_N(t) = \rho_{j,N}$. En tout point t de $\mathcal{J} = \bigcup\limits_N \mathcal{J}_N$, la suite $\gamma_N(t)$, définie pour N grand, reste dans le compact $K \cap SS_b(u)$ de Σ_b ; quitte à extraire une sous-suite, on peut donc supposer $\gamma_{N_k}(t) \to \gamma(t) \in K \cap SS_b(u)$ pour tout $t \in \mathcal{J}$, et on a d'après (8)

$$(10) \quad \forall t, t' \in \mathcal{J}, \quad \max\Big\{|x(\gamma(t)) - x(\gamma(t'))|, |\xi''(\gamma(t)) - \xi''(\gamma(t'))|\Big\} \leq C_0|t - t'|.$$

Vérifions que γ se prolonge en application continue de $[0, \varepsilon_0]$ dans $K \cap SS_b(u)$. Il suffit de vérifier que si $\{t^1_k\}$, $\{t^2_k\}$ sont deux suites d'éléments de $\mathcal{J}$ de limite $t_0 \in [0, \varepsilon_0]$, telles que $\gamma(t^1_k) \to \rho_1$, $\gamma(t^2_k) \to \rho_2$, on a $\rho_1 = \rho_2$; d'après (10), on a $x(\rho_1) = x(\rho_2) = \underline{x}$, $\xi''(\rho_1) = \xi''(\rho_2)$; si $\underline{x} \in S$, on a donc $\rho_1 = \rho_2$; si $\underline{x} \notin S$, pour tout (j, N_k) tel que $\varepsilon_0 j 2^{-N_k}$ soit proche de t_0, on a $x(\rho_{j,N_k})$ proche de $\underline{x}$ donc $D_\varepsilon(\rho_{j,N_k}) = \{\rho'; \exists \text{ rayon } g : [0, \varepsilon] \to SS_b(u) \text{ t.q. } g(0) = \rho_{j,N_k}, g(\varepsilon) = \rho'\}$ pour ε petit ; si $\underline{x} \in S'$, strate de codimension $d' < d$, on peut redresser, près de $\underline{x}$, S' sous la forme $S' = \{x_1 = \ldots = x_{d'} = 0\}$ et les fonctions $\xi_{d'+1}, \ldots, \xi_d$ sont $\pi-$invariantes près de $\underline{x}$, donc à nouveau par le corollaire III.2, on obtient $|\xi_j(\gamma(t)) - \xi_j(\gamma(t'))| \leq C_0|t - t'|$ pour $t, t' \in \mathcal{J}$ proches de t_0, $d' + 1 \leq j \leq d$, d'où $\rho_1 = \rho_2$.

Vérifions que γ est un rayon, ce qui achèvera la preuve. Soit $t_0 \in [0, \varepsilon_0]$. Pour $\gamma(t_0) \notin \mathcal{G}_S$, il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que si $t = \varepsilon_0 j 2^{-N_k}$ est proche de t_0, on a $\mathcal{R}^2_{\rho_{j,N_k},\varepsilon} = \phi$ pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_1]$; il en résulte $\rho_{j+1,N_k} = \tilde{\gamma}(\varepsilon_0 2^{-N_k})$, où $\tilde{\gamma} \in \mathcal{R}^1_{\rho_{j,N_k},\varepsilon_0 2^{-N_k}}$. Par recollement de rayons, il existe donc des rayons $\tilde{\gamma}_{N_k}$ définis sur un voisinage fixe I' de t_0 tels que $\mathrm{Im}(\tilde{\gamma}_{N_k}) \subset SS_b(u)$ et $\gamma_{N_k}(t) = \tilde{\gamma}_{N_k}(t)$ pour $t \in I' \cap \mathcal{J}_{N_k}$, donc d'après la proposition III.6, γ est un rayon près de t_0. Vérifions à présent que

$$(11) \quad \begin{array}{l} \text{il existe } \sigma_0 > 0,\ A' > 0, \text{ tel que pour tout } \rho_0 \in \mathcal{G}_S \cap K, \text{ on ait} \\ \rho \in B(\rho_0, \sigma^2) \text{ et } \rho' \in D_\varepsilon(\rho) \Rightarrow \rho' \in B\big(\exp \varepsilon H_{R_0}(\rho_0), (\sigma + A'\varepsilon)^2\big) \end{array}$$

pour tout $\sigma \in]0, \sigma_0]$, et $\varepsilon \in]0, \varepsilon_1]$, ε_1 petit. En effet, si $\rho \in \mathcal{G}_S$ on a par (5) $\rho' \in B(\exp \varepsilon H_{R_0}(\rho), A\varepsilon^2)$ et, d'après le lemme III.4, $\exp \varepsilon H_{R_0}(\rho) \in B(\exp \varepsilon H_{R_0}(\rho_0),$

$(\sigma + A\varepsilon)^2)$; si $\rho \notin \mathcal{G}_S$ on a soit $\rho' = \tilde{\gamma}(\varepsilon)$, $\tilde{\gamma} \in \mathcal{R}^1_{\rho,\varepsilon}$ donc, d'après le lemme III.4, $\rho' \in B(\exp \varepsilon H_{R_0}(\rho), (\sigma + A_0\varepsilon)^2)$, soit $\rho' \in B(\exp(\varepsilon - \delta) H_{R_0}(\tilde{\gamma}(\delta)), A(\varepsilon-\delta)^2)$, $\tilde{\gamma} \in \mathcal{R}^2_{\rho,\varepsilon}$ donc (loc. cit) $\tilde{\gamma}(\delta) \in B(\exp \delta H_{R_0}(\rho_0), (\sigma + A_0\delta)^2)$, d'où $\rho' \in B(\exp \varepsilon H_{R_0}(\rho_0), (\sigma + A'\varepsilon)^2)$ si A' est assez grand. De (11) on déduit, si $\gamma(t_0) \in \mathcal{G}_S \cap K$

$$(12) \quad t, t' \in \mathcal{J}_{N_k} \text{ et } \gamma_{N_k}(t) \in B(\gamma(t_0), \sigma^2) \\ \Longrightarrow \gamma_{N_k}(t') \in B\Big(\exp(t'-t) H_{R_0}(\gamma(t_0)), (\sigma + A'|t'-t|)^2\Big).$$

Passant à la limite sur N_k, faisant tendre t vers t_0 puis σ vers 0 on en déduit pour t' proche de t_0

$$(13) \qquad \gamma(t') \in B\big(\exp(t'-t_0) H_{R_0}(\gamma(t_0)), A'^2(t'-t_0)^2\big)$$

donc $x'(\gamma(t))$, $x''(\gamma(t))$, $\xi''(\gamma(t))$ sont dérivables en t_0, et on a

$$\dot{x}'(\gamma(t_0)) = 0, \quad \Big(\dot{x}''\big(\gamma(t_0), \dot{\xi}''(\gamma(t_0))\big)\Big) = H_{R_0}(\gamma(t_0));$$

or toute fonction f $\hat{\pi}-$invariante près de $q_0 = \hat{\pi}^{-1}(\gamma(t_0))$ est de la forme $f = f_0(x'', \xi'') + x' \cdot f_1(x'', \xi'') + \mathcal{O}(x'^2)|_{\mathrm{Car}\, P}$, d'où $\{p, f\}(q_0) = \{R_0, f\}(q_0)$, donc la définition I.2 ii) est satisfaite en t_0. ◇

VIII. Condition de Neumann

Pour étudier le problème de Neumann, nous commençons par rappeler la construction de la solution du problème mixte

$$(1)_N \qquad \begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta) u = 0 & "\partial_n u|_{\partial\omega} = 0" \\ u|_{t=0} = u_0, \quad \partial_t u|_{t=0} = u_1, & (u_0, u_1) \in H^1(\omega) \oplus L^2(\omega). \end{cases}$$

Notons $H = H^1(\omega) \oplus L^2(\omega)$, où $H^1(\omega)$ est muni de la norme $||f||^2_{H^1} = \int_\omega (||df||^2 + |f|^2)\, d_g y$, et soit A l'opérateur non borné sur H

$$(2) \qquad \begin{cases} D(A) = \Big\{(u_0, u_1) \in H, \ u_1 \in H^1(\omega), \ \Delta u_0 \in L^2(\omega), \\ \qquad\qquad \forall v \in H^1(\omega) \ \displaystyle\int_\omega -\Delta u_0\, v\, d_g y = \int_\omega (du_0 | dv)\, d_g y\Big\} \\ A\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \Delta u_0 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Alors A et $-A$ vérifient les hypothèses du théorème de Hille-Yosida car on a

$$(3) \qquad \forall u = (u_0, u_1) \in D(A) \qquad |\operatorname{Re}(Au|u)_H| \le ||u||^2_H$$

$$(4) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus 0 \quad \lambda + A \ \text{ est bijectif de } D(A) \text{ sur } H.$$

En effet, (3) résulte de $\mathrm{Re}(Au|u)_H = \mathrm{Re}\int_\omega u_1 \overline{u}_0 \, d_g y$, et l'unique solution $u \in D(A)$ de l'équation $(\lambda + A)u = v$, où $v = (v_0, v_1) \in H$ est donnée par $u_1 = v_0 - \lambda u_0$, u_0 vérifiant

$$(5) \qquad \forall w \in H^1(\omega) \qquad a(u_0, w) = \int_\omega \Big[(du_0|dw) + \lambda^2 u_0 w\Big] \, d_g y = \int_\omega hw \, d_g y$$

avec $h = -v_1 + \lambda v_0 \in L^2(\omega)$, l'existence et l'unicité de la solution $u_0 \in H^1(\omega)$ de (5) étant assurée par le lemme de Lax-Milgram puisque $a(u_0, \overline{u}_0) \simeq ||u_0||^2_{H^1}$. On a alors $-\Delta u_0 + \lambda^2 u_0 = h$, donc $\Delta u_0 \in L^2(\omega)$, et pour $w \in H^1$, $\int -\Delta u_0 w = \int (h - \lambda^2 u_0) w = \int (du_0|dw)$, donc $u \in D(A)$.

Le théorème de Hille-Yosida fournit alors une unique solution $u(t,y) \in C^0(\mathbb{R}_t, H^1(\omega)) \cap C^1(\mathbb{R}_t, L^2(\omega))$ au problème $(1)_N$; si les données sont telles que $(u_0, u_1) \in D(A)$, on a de plus $u(t,y) \in C^1(\mathbb{R}_t, H^1(\omega)) \cap C^2(\mathbb{R}_t, L^2(\omega))$, $\Delta u \in C^0(\mathbb{R}_t, L^2(\omega))$ et

$$(6) \qquad \forall t, \ \forall v \in H^1(\omega) \qquad \int_\omega -\Delta u(t,y) v(y) \, d_g y = \int_\omega (d_y u(t,y)|dv) \, d_g y$$

de sorte que sur $\partial\omega_{\mathrm{reg}}$, réunion des strates de codimension 1 de $\partial\omega$, on a, ∂_n désignant la normale extérieure

$$(7) \qquad \partial_n u|_{\partial\omega_{\mathrm{reg}}} \equiv 0 .$$

Alors pour la solution ainsi construite de $(1)_N$, avec données $(u_0, u_1) \in H$ on a

$$(8) \qquad \begin{cases} u \in H^1_{\mathrm{loc}(t)}(\mathbb{R}_t \times \omega) \\ \forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}_t, H^1(\omega)) \qquad \displaystyle\int_{\mathbb{R}}\int_\omega \big[(d_y u|d_y f) - \partial_t u \partial_t f\big] \, d_g y \, dt = 0 \end{cases}$$

car $(8)_2$ est vrai pour $(u_0, u_1) \in D(A)$ d'après (6), $D(A)$ est dense dans H, et sur tout intervalle borné I de $\mathbb{R}$, $\sup\big\{t \in I; ||e^{tA}; H \to H||\big\} < +\infty$.

L'objet de ce paragraphe est de vérifier que les théorèmes 1 à 4 sont valables pour les solutions de (8) sous l'hypothèse (H.3) du paragraphe 1. On note toujours $\underline{u}$ le prolongement de u par zéro hors de $\overline{\Omega}$ et

$$(9) \qquad SS_b(u) = \pi(SS(\underline{u}) \setminus T^*_\Omega).$$

On n'a plus la régularité H^1 de $\underline{u}$, mais $\underline{u} \in L^2_{\mathrm{loc}(t)}$ subsiste.

Près d'un point $z_0 = (m_0, t_0) \in \partial\overline{\Omega}$, avec $z_0 \in S$ strate de codimension $d \geq 1$, dans un système de coordonnées $x = (x', x'')$ centré en z_0, fourni par l'hypothèse (H.1), qui redresse S en $x' = 0$, avec $x'' = (y'', t - t_0)$ $\mathcal{M}' = \{|x'| < \rho_0\}$, $B_0 = \{|y''| < \rho_0, |t - t_0| < \rho_0\}$, $\Omega_0 = \Omega \cap (\mathcal{M}' \times B_0) = \omega' \times B_0$, nous noterons pour $\rho \in]0, \rho_0[$

$$(10) \qquad H^1_{[\rho]}(\omega') = \Big\{f(x') \in H^1(\omega'), \ \text{support}(f) \subset \{|x'| \leq \rho\}\Big\}.$$

D'après (8), on a pour tout $\rho \in]0, \rho_0[$

$$(11) \qquad \begin{cases} \forall \chi(x') \in C_0^\infty(|x'| < \rho) \qquad \chi u \in \mathcal{D}'\big(B_0; H^1_{[\rho]}(\omega')\big) \\ \forall f \in C_0^\infty\big(B_0, H^1_{[\rho]}(\omega')\big) \qquad \displaystyle\int_{\Omega_0} \big[(d_y u|d_y f) - \partial_t u \partial_t f\big] \, d_g y \, dt = 0 . \end{cases}$$

Nous allons prouver les théorèmes 1 à 4 pour les solutions de (11), sous l'hypothèse (H.3).

VIII.1. Régularité elliptique

Comme dans le §. IV.4, nous allons ici travailler dans un cadre un peu plus général. On note

$$P(x,D) = \Sigma D_i a_{i,j}(x) D_j + \Sigma D_\ell c_\ell(x) + c_0(x) \quad D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j} \tag{12}$$

un opérateur du second ordre à coefficients analytiques, à valeurs complexes, définis près de $x = 0$ dans $\mathbb{R}^n$, $x = (x', x'')$, $x' \in \mathbb{R}^d$. On suppose le symbole principal de P de la forme

$$p(x,\xi) =^t (\xi' - \nu) A'(x)(\xi' - \nu) +^t \xi'' A''(x)\xi'' \tag{13}$$

(avec $\nu = \nu(x, \xi'')$ linéaire en ξ'') avec

$$\exists c > 0 \quad \mathrm{Re}\, A'(0) \geq c\,\mathrm{Id}\,. \tag{14}$$

On se donne ω' un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ tel que $0 \in \bar\omega'$ et ω'' un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^{n-d}$. Pour un $\rho > 0$ petit, on note $\omega'_\rho = \omega' \cap \{|x'| < \rho\}$, et $H^1_{[\rho]}(\omega')$ le sous-espace fermé de $H^1(\omega')$ défini par (10).

DÉFINITION VIII.1. – *Soit $u(x', x'')$ une distribution sur $\omega' \times \omega''$. On dira que u est solution du problème de Neumann pour P (en $x = 0$)*

$$Pu = 0, \qquad \text{"}\partial_n^p u|_{\partial\omega'} = 0\text{"} \tag{15}$$

si on a (pour un $\rho_0 > 0$)

$$\begin{cases} u, \nabla_{x'} u \in \mathcal{D}'(\omega''; L^2(\omega')) \\ \displaystyle\int_{\omega'\times\omega''} \Big[\Sigma(-a_{i,j}) D_j u D_i f + u(\Sigma(-c_\ell) D_\ell f + c_0 f)\Big]\, dx = 0 \\ \qquad\qquad \forall f \in C_0^\infty(\omega''; H^1_{[\rho_0]}(\omega')). \end{cases} \tag{16}$$

On notera que la condition $(16)_2$ dépend du choix de la densité dx, et que changer dx en $\rho(x)\,dx$ revient à multiplier par $\rho(x)$ les coefficients $a_{i,j}$, c_ℓ, c_0 de P. Si $(g^{i,j}(y))$ est la métrique cotangente sur $T^*\mathcal{M}$, $g(y) = (g_{i,j}(y))$ la métrique sur $T\mathcal{M}$, on a $d_g y = \sqrt{\det(g)}\,dy$, donc $(11)_2$ n'est autre que $(16)_2$ avec le choix des coefficients $c_0 = 0$, $c_\ell = 0$, $a_{i,j} = \sqrt{\det g}\, g^{i,j}$, $1 \leq i,j \leq m$, $a_{i,m+1} = 0$, $1 \leq i \leq m$, $a_{m+1,m+1} = -\sqrt{\det g}$. Si $(16)_2$ est satisfait, on a $Pu = 0$ dans $\mathcal{D}'(\omega' \times \omega'')$ et aux points où $\partial\omega' = \{\psi = 0\} = S$ est une hypersurface lisse, avec $\omega'_\pm = (\mathrm{loc})\omega' \cap \{\pm\psi > 0\}$, $D_j \mathbf{1}_{\omega_\pm} = \pm d_j \delta_S$, les conditions aux limites déduites de $(16)_2$ sont

$$\sum_{i,j} d_i a_{i,j} D_j u + (\Sigma c_\ell d_\ell) u|_{\psi=\pm 0} = 0\,. \tag{17}$$

Pour $\chi(x'') \in C_0^\infty(\omega'')$, égal à 1 près de $x'' = 0$, on pose à nouveau

$$v(z, x', h) = \int e^{\frac{1}{h}\left(x''z - \frac{x''^2}{2}\right)} \chi(x'') u(x', x'')\, dx''\,. \tag{18}$$

On note encore H_h^1 l'espace $H^1(\omega')$ muni de la norme $||f; H_h^1||^2 = \int_{\omega'} \big(|f|^2 + \sum_{j=1}^{d} |h\partial_{x_j} f|^2\big)\, dx'$, $H_{[\rho],h}^1$ le sous-espace fermé de H_h^1 des fonctions à support dans $\{|x'| \leq \rho\}$, et $\big(H_{[\rho],h}^1\big)'$ son dual. (On ne cherche pas ici à interpréter le dual $\big(H_{[\rho],h}^1\big)'$ en terme de quotient d'espace de distributions sur $\bar{\omega}'$, cela étant inutile pour la suite).

On pose $\varphi(z) = \frac{1}{2}(\operatorname{Re} z)^2$; on a

$$v \in H_\varphi(U_0, H_h^1) \quad \text{pour} \quad U_0 \subset\subset \mathbb{C}^{n-d}. \tag{19}$$

On se donne $\xi_0'' \in \mathbb{R}^{n-d} \setminus 0$, $V_1 \subset\subset V_0 \subset\subset \mathbb{R}^{n-d} \setminus 0$ deux voisinages ouverts de ξ_0'', r_0, r_1 deux réels vérifiant $0 < r_1 \ll r_0 \ll 1$, avec $\chi(x'') \equiv 1$ pour $|x''| \leq 2r_1$, on pose $U_j = \big\{z \in \mathbb{C}^{n-d};\, |\operatorname{Re} z| < r_j, \operatorname{Im} z \in -iV_j\big\}$ et on note W un petit voisinage de $\overline{U}_0 \times \{||\zeta|| \leq r_0\}$. En reprenant la preuve de la proposition IV.1, on obtient la

PROPOSITION VIII.2. – *Soit $\rho \in]0, \rho_0[$. Il existe $S \in \mathcal{E}\big(W; H_h^1 \to \big(H_{[\rho],h}^1\big)'\big)$ de la forme $S = \sum_{n=0}^{\infty} \big(\frac{h}{i}\big)^n S_n$ avec*

$$\langle S_n(f), g\rangle = \int_{\omega'} b_n(z, \zeta, x', h)([f], [g])\, dx', \quad f \in H_h^1,\ g \in H_{[\rho],h}^1 \tag{20}$$

où les b_n satisfont à IV. (24), tel que

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \operatorname{Op}(S)[v] \in H_{\varphi-\varepsilon}\big(U_1, (H_{[\rho],h}^1)'\big). \tag{21}$$

Le symbole principal S_0 de S, défini par b_0 est donné par

$$\begin{cases} b_0([f],[g]) =^t (f' - f_0\tilde{\nu})\tilde{A}'(-g' - g_0\tilde{\nu}) + f_0 g_0 \tilde{R} \\ \tilde{A}' = A'(x', i\zeta);\ \ \tilde{\nu} = \nu(x', i\zeta; iz + \zeta);\ \ \tilde{R} =^t (iz + \zeta)A''(x', i\zeta)(iz + \zeta). \end{cases} \tag{22}$$

En procédant comme dans le §. IV.4, on obtient la

PROPOSITION VIII.3. – *Soit u solution du problème de Neumann (16), et $\xi_0'' \in \mathbb{R}^{n-d} \setminus 0$ vérifiant l'hypothèse d'ellipticité IV. (72). Il existe $\varepsilon > 0$, U voisinage de $z_0 = -i\xi_0''$ et $\psi(x') \in C_0^\infty$, $\psi \equiv 1$ près de $x' = 0$ tels que*

$$\psi v \in H_{\varphi-\varepsilon}(U, H_h^1), \tag{23}$$

ainsi que la

PROPOSITION VIII.4. – *On suppose*

$$\exists c > 0, \quad \operatorname{Re} p(0, \xi) \geq c|\xi|^2 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{24}$$

Il existe $a_0, a_1 > 0$, tels que pour u solution du problème de Neumann (16), et $\psi(x') \in C_0^\infty(|x'| < a_1)$ on ait

$$\psi u \text{ est holomorphe en } x'' \in \mathbb{C}^{n-d},\ |x''| < a_0, \text{ à valeurs dans } H^1(\omega'). \tag{25}$$

Notons encore $\underline{u} \in \mathcal{D}'(\omega'', L^2(\mathbb{R}^d))$ le prolongement de u par zéro pour $x' \notin \bar{\omega}'$ et introduisons l'hypothèse

$$(26) \qquad \begin{cases} \exists \rho > 0 \text{ et } c(\lambda) \text{ indépendant de } h \text{ avec } \lim\limits_{\lambda \to +\infty} c(\lambda) = 0 \text{ tel que} \\ \forall g(x') \in H^1_{[\rho],h} \quad \big|\big|\hat{\underline{g}}(\xi')\mathbf{1}_{|\xi'| \geq \frac{\lambda}{h}}\big|\big|_{L^2(\xi')} \leq c(\lambda)\,||g; H^1_{[\rho],h}||. \end{cases}$$

Alors en reprenant la preuve de la proposition IV.3 on obtient la

PROPOSITION VIII.5. – *On suppose (26) satisfait. Alors pour u solution du problème de Neumann (16), les propriétés suivantes sont équivalentes*

$$(27) \qquad \forall \xi' \in \mathbb{R}^d, \quad (0, \xi', \xi''_0) \notin SS(\underline{u}).$$

$$(28) \qquad \begin{cases} \textit{Il existe } \varepsilon > 0,\ U \textit{ voisinage de } z_0 = -i\xi''_0 \textit{ et } \psi(x') \in C_0^\infty \textit{ égal à 1} \\ \textit{près de } x' = 0 \textit{ tels que } \psi v \in H_{\varphi-\varepsilon}(U, H^1_h). \end{cases}$$

Le théorème 1 étant conséquence des propositions VIII.3 et VIII.5, il nous reste à vérifier que l'hypothèse (26) est satisfaite ; pour cela nous allons utiliser l'hypothèse (H.3). Il suffit de vérifier la propriété

$$(29) \qquad \begin{cases} \text{pour } \varepsilon \in]0,1], \text{ il existe } C(\varepsilon) > 0,\ \lim\limits_{\varepsilon \to 0} C(\varepsilon) = 0, \text{ tel que} \\ \forall h \in]0,1],\ \forall g \in H^1_{[\rho],h},\ \displaystyle\int_{\mathrm{dist}(x',\partial\omega') \leq \varepsilon h} |g|^2\,dx' \leq C(\varepsilon)||g; H^1_{[\rho],h}||^2. \end{cases}$$

En effet, soit $\psi(x') = \mathrm{dist}(x', \partial\omega')$, $\chi(t) \in C_0^\infty(]-1,1[)$ avec $\chi(t) = 1$ pour $|t| \leq \frac{1}{2}$, et $g \in H^1_{[\rho],h}$; posons $g_1(x') = \chi\big(\frac{\psi(x')}{\varepsilon h}\big)g(x')$ et $g_2 = g - g_1$; on a $||g_2; H^1_{[\rho],h}|| \leq \frac{\mathrm{Cte}}{\varepsilon}||g; H^1_{[\rho],h}||$ et support$(g_2) \subset \big\{\psi(x') \geq \frac{\varepsilon h}{2} > 0\big\}$ donc $\underline{g}_2 \in H^1_0[\omega'_\rho]$ d'où $\big|\big|\hat{\underline{g}}_2(\xi')\mathbf{1}_{|\xi'| \geq \frac{\lambda}{h}}\big|\big|_{L^2(\xi')} \leq \frac{\mathrm{Cte}}{\lambda\varepsilon}\big|\big|g; H^1_{[\rho],h}\big|\big|$. Si (29) est satisfait, on a aussi $||\underline{g}_1||^2_{L^2} \leq C(\varepsilon)||g; H^1_{[\rho],h}||^2$. On a donc (26) avec $c(\lambda) = \inf_\varepsilon \big[\sqrt{C(\varepsilon)} + \frac{\mathrm{Cte}}{\lambda\varepsilon}\big]$ qui vérifie bien $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} c(\lambda) = 0$.

La propriété (29) est clairement conséquence du

LEMME VIII.6. – *Soit ω un ouvert relativement compact d'une variété Riemannienne $(\mathcal{M}, g)$, vérifiant les hypothèses (H.1) et (H.3). Il existe une constante $C = C(\omega)$ telle que*

$$(30) \qquad \forall h \in]0,1],\ \varepsilon > 0,\ f \in H^1(\omega) \quad \int_{\mathrm{dist}(x,\partial\omega) \leq \varepsilon h} |f|^2\,d_g x \leq C\varepsilon \int_\omega \{|h\,df|^2 + |f|^2\}\,d_g x.$$

Preuve. – On procède par récurrence sur la dimension de $\mathcal{M}$. Par partition de l'unité, on peut supposer que f est à support près de $x_0 \in S$, strate de codimension $d \geq 1$, redressée en $S = \{(x', x''); x' = 0\}$, et qu'on dispose d'un système de coordonnées quasi-polaires (*voir* le §.II. (21))

$$(31) \qquad x' = j(r, \theta) = r\big[H_0(\theta) + r^\beta H_1(r, \theta)\big]; \quad (r, \theta) \in]0, r_0] \times N$$

avec $\dim N = d-1 < \dim \mathcal{M}$, et près de x_0, $\omega = j(]0, r_0[\times \Sigma_0) \times \{x''\}$ où Σ_0 est un ouvert relativement compact de N, qui vérifie les hypothèses du lemme VIII.6. On a

$$dx'^2 = dr^2 + r^2 g_0(\theta) + \mathcal{O}(r^\beta (dr^2 + r^2 g_0)) \tag{32}$$

où g_0 est la métrique sur N induite par le plongement H_0 donc

$$\mathrm{dist}(x, \partial\omega) \simeq \inf[r; r\, \mathrm{dist}(\theta, \partial\Sigma_0)] \overset{\mathrm{def}}{=} \psi(r,\theta) \tag{33}$$

et x'' jouant un rôle de paramètre, (30) sera conséquence de ($|d\theta|$ désigne la forme volume sur (N, g_0))

$$\int_{\psi \le \varepsilon h} |f(r,\theta)|^2 r^{d-1} dr\, |d\theta| \le C\varepsilon \int \left[\left| h \frac{\partial f}{\partial r} \right|^2 + \left| \frac{h}{r} d_\theta f \right|^2 + |f|^2 \right] r^{d-1} dr\, |d\theta| \tag{34}$$

pour f à support dans $r \le r_0$. Avec $\tilde\psi(\theta) = \mathrm{dist}(\theta, \partial\Sigma_0)$, on a par hypothèse de récurrence pour tout $\varepsilon > 0$, $h \in]0,1]$

$$\int_{\tilde\psi \le \varepsilon h} |g(\theta)|^2 |d\theta| \le \tilde C \varepsilon \int_{\Sigma_0} \{ |h\, d_\theta g|^2 + |g|^2 \} |d\theta|. \tag{35}$$

Soit $\chi(t) \in C_0^\infty(]-2,2[)$, $\chi(t) = 1$ pour $|t| \le 1$. Si on pose $f = f_1 + f_2$, avec $f_1 = \chi\left(\frac{r}{h}\right) f$, il suffit de vérifier (34) séparément pour f_1 et f_2.

Pour $(r,\theta) \in \mathrm{support}(f_2)$, on a $\frac{h}{r} \le 1$ et $\psi \le \varepsilon h$ implique $\tilde\psi(\theta) \le \varepsilon \frac{h}{r}$ pour $\varepsilon \le 1$, donc d'après (35) pour $\varepsilon \le 1$, en posant $h' = \frac{h}{r} \in]0,1]$

$$\int_{\psi \le \varepsilon h} |f_2|^2 r^{d-1} dr\, d\theta \le \int r^{d-1} dr \left[\tilde C \varepsilon \int_{\Sigma_0} \left[\left| \frac{h}{r} d_\theta f_2 \right|^2 + |f_2|^2 \right] |d\theta| \right] \tag{36}$$

d'où (34) pour f_2 car (34) est trivial pour $\varepsilon \ge 1$. Comme $f_1(r,\theta)$ est à support dans $r \le 2h$, en effectuant le changement de variable $hr' = r$, on est ramené à prouver (34) avec $f = f_1$ et $h = 1$. On a alors

$$|f(r,\theta)|^2 = \left| \int_r^{r_0} \frac{\partial f}{\partial \sigma}(\sigma,\theta)\, d\sigma \right|^2 \le \left(\int \left| \frac{\partial f}{\partial r} \right|^2 r^{d-1} dr \right) \int_r^{r_0} \frac{d\sigma}{\sigma^{d-1}}$$

donc avec $\alpha(r) = r^{d-1} \int_r^{r_0} \frac{d\sigma}{\sigma^{d-1}}$

$$\begin{aligned} \int_{r \le \varepsilon} |f(r,\theta)|^2 r^{d-1} dr\, |d\theta| &\le \int_{r \le \varepsilon} \left[\int \left| \frac{\partial f}{\partial \sigma}(\sigma,\theta) \right|^2 \sigma^{d-1} d\sigma \right] \alpha(r)\, dr\, |d\theta| \\ &\le \varepsilon \sup_{r \le r_0} (\alpha(r)) \int \left| \frac{\partial f}{\partial r} \right|^2 r^{d-1} dr\, |d\theta| \end{aligned} \tag{37}$$

ce qui prouve déjà (34) dans le cas $d = 1$ (pas de variable θ). Aussi, d'après (33) et (37), il ne reste plus qu'à estimer $\int_{\tilde\psi(\theta) \le \frac{\varepsilon}{r}} |f(r,\theta)|^2 r^{d-1} dr\, |d\theta|$ avec $d \ge 2$. Or en réutilisant (35) avec $h = 1$ on obtient

$$\int_{\tilde\psi(\theta) \le \frac{\varepsilon}{r}} |f(r,\theta)|^2 r^{d-1} dr\, |d\theta| \le \tilde C \varepsilon \int \left(\frac{1}{r} |d_\theta f|^2 + \frac{1}{r} |f|^2 \right) r^{d-1} dr\, |d\theta| \tag{38}$$

et (34) avec $h = 1$ résulte donc de $\int_0^{r_0} \frac{\alpha(r)}{r} dr < +\infty$ ($d \ge 2$), puisqu'on a

$$\int |f|^2 r^{d-2} dr\, |d\theta| \le \int_0^{r_0} \frac{\alpha(r)}{r} dr \int \left| \frac{\partial f}{\partial r} \right|^2 r^{d-1} dr\, |d\theta|. \qquad \diamond$$

VIII.2. Réflexion

Pour vérifier le théorème 2 de réflexion pour les solutions du problème de Neumann (8), nous reprenons la stratégie et les notations du §. V. Rappelons qu'on travaille près d'une strate de codimension ≥ 2.

1. Réduction semi-classique

On remarque que si u vérifie (8) et $\theta(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, la moyenne $v(y) = \int \theta(t) u(t,y)\, dt$ vérifie

$$\forall f(y) \in H^1(\omega) \quad \int_\omega (d_y v | d_y f)\, d_g y = \iint_{\omega \times \mathbb{R}} \partial_t u(t,y) \theta'(t) f(y)\, d_g y\, dt \tag{39}$$

donc en appliquant (39) à $f \in C_0^\infty(\omega)$ on obtient $\Delta v(y) = \int \theta''(t) u(t,y)\, dt$ d'où $\Delta v \in H^1(\omega)$, et en réutilisant (39) on obtient

$$\forall f(y) \in H^1(\omega) \quad \int_\omega (d_y v | d_y f)\, d_g y = \int_\omega -\Delta v\, f\, d_g y. \tag{40}$$

En posant $u_1(t,x,h) = \int e^{-\frac{1}{2h}(t-t')^2} u(t',y) \chi_0(t')\, dt'$, la formule V. (3) devient donc

$$\begin{cases} u_1 \in H_{\varphi_0}(V, H^1(\omega)), \ \ \Delta u_1 \in H_{\varphi_0}(V, H^1(\omega)) \\ (\partial_t^2 - \Delta) u_1 = u_2 = -\displaystyle\int \Big[2\partial_{t'} \big(e^{-\frac{1}{2h}(t-t')^2}\big) \partial_{t'} \chi_0 \\ \qquad\qquad + e^{-\frac{1}{2h}(t-t')^2} \partial_{t'}^2 \chi_0 \Big] u(t',y)\, dt' \in H_{\varphi_0 - \varepsilon}(V, H^1(\omega)) \\ \forall f \in H^1(\omega), \ \forall t, \ \displaystyle\int_\omega -\Delta u_1(t,y) f(y)\, d_g y = \int_\omega (d_y u_1(t,y) | d_y f)\, d_g y. \end{cases} \tag{41}$$

On élimine alors u_2 comme dans le §. V.1 en choisissant cette fois r solution de

$$\int_{X_{s_0}} \big\{ \partial_s r\, \partial_s f + (d_y r | d_y f) \big\}\, d_g y\, ds = \int_{X_{s_0}} u_2(is, y, h) f(s,y)\, d_g y\, ds \tag{42}$$
$$\forall f \in H^1_{\{s_0\}}(X_{s_0})$$

où $H^1_{\{s_0\}}(X_{s_0}) = \big\{ f \in H^1(X_{s_0+1}), \ \text{support}(f) \subset [-\tau_0 - s_0, -\tau_0 + s_0] \times \omega \big\}$ est muni de la structure Hilbertienne $\int_{X_{s_0}} \{ |\partial_s f|^2 + |d_y f|^2 \}\, d_g y\, ds$. On a $(\partial_s^2 + \Delta) r = -u_2(is, y, h)$ dans $\mathcal{D}'$, et d'après $(41)_2$

$$||\partial_s^\ell u_2||_{L^2(X_{s_0})} \in \mathcal{O}\big(e^{\frac{1}{2h}(|\tau_0|^2 - \varepsilon)}\big)$$

donc avec $J = \big] -\tau_0 - \frac{s_0}{2}, -\tau_0 + \frac{s_0}{2} \big[$, $\sup_{s \in J} ||\partial_s^\ell r(s,\cdot)||_{H^1(\omega)} \in \mathcal{O}\big(e^{\frac{1}{2h}(|\tau_0|^2 - \varepsilon)}\big)$, et pour $\theta \in C_0^\infty(J)$, $f \in H^1(\omega)$, $\int \theta(s)\, ds \int_\omega -\Delta r(s,y) f(y)\, d_g y = \int \theta(s)\, ds \int_\omega (d_y r | d_y f)\, d_g y$, d'où

$$\Big(r(s,\cdot), -i \frac{\partial r}{\partial s}(s,\cdot) \Big) \in D(A) \qquad \forall s \in J. \tag{43}$$

Si $\begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \end{bmatrix}$ est la solution fournie par le théorème de Hille-Yosida du problème d'évolution, où $s \in J$ est un paramètre

$$\partial_t \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \end{bmatrix} - A \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ u_2(t+is,\cdot) \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} r(s,\cdot) \\ -i\frac{\partial r}{\partial s}(s,\cdot) \end{bmatrix} \tag{44}$$

d'après $(41)_2$ et (43), on a $\begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \end{bmatrix} \in C^0(\mathbb{R}_t, D(A))$, et comme dans le §. V.1, si on pose

$$\tilde{u}(t,y,h) = u_1(t,y,h) - g(t,y,h) \tag{45}$$

on est ramené à étudier $\tilde{u}$ qui vérifie

$$\begin{cases} \tilde{u} \in H_{\varphi_0}(V, H^1(\omega)); \ (\partial_t^2 - \Delta)\tilde{u} = 0 \\ \forall f \in H^1(\omega), \ \forall t, \ \displaystyle\int_\omega -\Delta\tilde{u}(t,y) f(y)\, d_g y = \int_\omega (d_y \tilde{u}(t,y) | d_y f)\, d_g y. \end{cases} \tag{46}$$

2. Prolongement holomorphe en variable r

En conservant les notations du §. V.2, on définit à nouveau w et w_{t_0} par les formules V. (11) et (12), et $\langle\, , \rangle$ désigne la forme métrique sur $T^*(]0,r_0[\times N \times \{y''\} \times \{s\})$, et pour $\rho > 0$ on note

$$\tilde{H}^1_{[\rho]} = \Big\{ f(r,\theta) \in \tilde{H}^1 ; \text{support}(f) \subset \{r \le \rho\} \Big\} \tag{47}$$

l'espace $\tilde{H}^1$ étant défini en §. V. (20). Les estimées V. (22) restent valables (avec $L^2(y''; \tilde{H}^1)$ au lieu de $L^2(y'', \tilde{H}^1_0)$), ainsi que V. (23) qui devient

$$\forall f \in C_0^\infty(s, y'', \tilde{H}^1_{[\rho]}) \quad \int \langle dw_{t_0}, df \rangle \tilde{\kappa}\, d\mu\, ds\, dy'' = 0 \tag{48}$$

(avec ρ petit), qui assure $\tilde{Q}(w_{t_0}) = 0$ et la condition de Neumann.

En suivant les constructions des déformations $\mathcal{L}$ du §. V, (définis en V. (25), avec L à support dans $\left[r_1, \frac{r_0}{4}\right]$, r_0 petit), V. (38) devient

$$\begin{cases} w_{t_0}(s,y'',r,\theta,h) \text{ s'étend en fonction } C^\infty \text{ de } (s,y'',r) \in \mathcal{D} \\ \mathcal{D} = \Big\{ (s,y'',r); \ |s| + |y''| \le \varepsilon_0, \ \exists \rho \in]0,r_0], \ \exists \alpha \in [0,1], \ r = e^{i\alpha L(s,\rho,y'')}\rho \Big\}, \\ \text{à valeurs dans } H^1(\Sigma_0), \text{ holomorphe en } r; \quad \text{avec } w_{t_0}^{\alpha\mathcal{L}} = w_{t_0}|_{\mathrm{Im}(\alpha\mathcal{L})}, \text{ on a} \\ \psi(r)\big[w_{t_0}^{\alpha\mathcal{L}} \circ (\alpha\mathcal{L})\big] \in C^\infty(s,y''; \tilde{H}^1_{[\rho]}) \text{ pour } \psi \in C_0^\infty(]-1,\rho[) \end{cases} \tag{49}$$

et de plus avec $\tilde{w}_{t_0}^{\mathcal{L}} = w_{t_0}^{\mathcal{L}} \circ \mathcal{L}$, $w_{t_0}^{\mathcal{L}} = w_{t_0}|_{\mathrm{Im}(\mathcal{L})}$

$$\int_D \langle d\tilde{w}_{t_0}^{\mathcal{L}}, df \rangle_{\mathcal{L}}\, d\nu^{\mathcal{L}} = 0 \qquad \forall f \in C_0^\infty(s,y''; \tilde{H}^1_{[r_0]}). \tag{50}$$

En effet, pour obtenir les estimations de prolongement holomorphe (49), (50), il suffit ici d'utiliser la proposition VIII.4, sous réserve qu'on ait vérifié la conservation de la condition de Neumann (50) le long de la déformation. Or soit $J = \{\alpha \in [0,1]$ tels que (50) soit vrai pour $\beta\mathcal{L},\ \forall \beta \leq \alpha\}$ J est de la forme $[0,\alpha_0]$ et la proposition VIII.4 entraîne que $\tilde{w}_{t_0}^{\alpha_0\mathcal{L}}$ s'étend holomorphiquement en r au voisinage de $\left[r_1, \frac{r_0}{4}\right]$. Si f est holomorphe en r au voisinage de $\left[r_1, \frac{r_0}{4}\right]$, $\int_D \left\langle d\tilde{w}_{t_0}^{\alpha\mathcal{L}}, df\right\rangle_{\alpha\mathcal{L}} d\nu^{\alpha\mathcal{L}} = \int_{\mathrm{Im}(\alpha\mathcal{L})}\langle dw_{t_0}, dg\rangle\, d\nu$ $(g \circ \alpha\mathcal{L} = f)$ est indépendant de α proche de α_0 comme intégrale d'une forme holomorphe en r, et tout $f \in C_0^\infty(s, y'', \tilde{H}^1_{[r_0]})$ est limite pour la topologie H^1 de tels f, d'où $\alpha_0 = 1$. Alors la formule V. (40) reste valable pour tout $g \in C_0^\infty\big(\{|s| + |y''| \leq \varepsilon_0\}, \tilde{H}^1_{[r_0]}\big)$ donc par les propriétés de support (χ_ε), pour tout $g \in H^1_{[r_0]}(D)$, où $H^1_{[r_0]}(D) = \big\{g(s,y'',r,\theta) \in H^1(|s| + |y''| \leq \varepsilon_0; \theta \in \Sigma_0, r \leq r_0 + 1)$; support $(g) \subset \{r \leq r_0\}\big\}$ qui est munit de la norme $\left(\int_D \langle dg, dg\rangle\, d\nu\right)^{1/2}$. D'où à nouveau

$$(51) \qquad ||\chi^\varepsilon \tilde{w}_{t_0}^{\mathcal{L}}; H^1_{[r_0]}(D)|| \leq \frac{\mathrm{Cte}}{h\varepsilon} e^{\frac{1}{2h}[|\operatorname{Im} t_0| + \varepsilon]^2}$$

et le lemme V.2 devient le

LEMME VIII.7. – *Pour ε_0, r_0, γ_0 petits, V petit voisinage de $-i\tau_0$, la fonction $w(t,y'',z,\theta,h)$ est holomorphe en t, $z \in \Gamma$, $\Gamma = \{0 < |z| < r_0; |\mathrm{Arg} z| < \gamma_0\}$, L^2 en y'', à valeurs dans $H^1(\Sigma_0)$ et si on pose pour $|\gamma| < \gamma_0$*

$$(52) \qquad w^\gamma(t,y'',r,\theta,h) = w(t,y'',r\,e^{i\gamma},\theta,h)$$

il existe $A, B > 0$ tels que pour tout $t \in V$, $\ell \leq r_0$, $0 < |\gamma| < \gamma_0$ et tout $h \in]0,h_0]$ on ait

$$(53) \qquad \left|\left|w^\gamma(t,\cdot), L^2\Big(|y''| < \frac{\varepsilon_0}{2}; \tilde{H}^1(]0,\ell[\times\Sigma_0)\Big)\right|\right| \leq \frac{A}{(h\ell\gamma)^B} e^{\frac{1}{2h}[|\operatorname{Im} t| + A\ell\gamma]^2}.$$

De plus, si on note $(\ |\ )_\gamma$ la forme $\mathbb{C}-$bilinéaire associée à la forme quadratique complexe $\tilde{q}^\gamma$ définie en V. (45) on a

$$(54) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int \Big[(dw^\gamma|df)_\gamma - \partial_t w^\gamma\, \partial_t f\Big]\, e^{i\gamma}\, \tilde{\kappa}(r\,e^{i\gamma},\cdot)\sqrt{\det q(r\,e^{i\gamma},\cdot)}\,|d\theta|\, dr\, dt\, dy'' = 0 \\ \forall f \in C_0^\infty\big(t,y''; \tilde{H}^1_{[r_0]}\big) \end{cases}$$

où dans $(54)_1$, d est la différentielle en r,θ,y''.

La preuve du lemme VIII.7 est analogue à celle du lemme V.2, (54) étant vrai pour f à support dans $r \geq r_1 > 0$ d'après (50), donc pour tout $f \in C_0^\infty(t,y''; \tilde{H}^1_{[r_0]})$, par densité, puisqu'on travaille près d'une strate de codimension ≥ 2, en utilisant le

LEMME VIII.8. – *Soit $\alpha \geq 1$. Pour tout $\varepsilon \in]0,1]$, il existe une fonction $\chi_\varepsilon(r)$ Lipschitzienne, vérifiant $0 \leq \chi_\varepsilon \leq 1$, $\chi_\varepsilon(r) = 1$ pour $r \leq 1$, $\chi_\varepsilon(r) = 0$ pour $r \geq \beta_\varepsilon$, avec $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon\beta_\varepsilon = 0$, telle que*

$$(55) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \int \frac{1}{\varepsilon^2}\left|\chi'_\varepsilon\Big(\frac{r}{\varepsilon}\Big)\right|^2 |f(r,\theta)|^2 r^\alpha\, dr\, |d\theta| = 0$$

pour tout f tel que $\int \left(\left|\frac{\partial f}{\partial r}\right|^2 + |f|^2\right) r^\alpha\, dr\, d\theta < +\infty$.

Preuve. – Pour $\alpha > 1$, il suffit de choisir $\chi_\varepsilon = \chi$ indépendant de ε (*voir* la preuve du lemme V.1). Pour $\alpha = 1$, on définit χ_ε par

$$\chi_\varepsilon = \begin{cases} 1 \quad \text{si} \quad r \leq 1 \\ 1 - \gamma_\varepsilon \log r, \quad \gamma_\varepsilon = \dfrac{1}{\log \beta_\varepsilon}, \quad \text{si} \quad 1 \leq r \leq \beta_\varepsilon \\ 0 \quad \text{si} \quad r \geq \beta_\varepsilon \end{cases} \tag{56}$$

et il suffit de vérifier, avec $\gamma_\varepsilon^2 \int_\varepsilon^{\varepsilon \beta_\varepsilon} |f|^2 \frac{dr}{r} |d\theta| = A_\varepsilon$, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} A_\varepsilon = 0$.

En écrivant $|f(r,\theta)|^2 \leq 2|f(r_0,\theta)|^2 + 2\left|\int_r^{r_0} \left|\frac{\partial f}{\partial r}\right|^2 (\sigma,\theta)\sigma\, d\sigma \cdot \log \frac{r_0}{r}\right|$; avec le choix $r_0 = 1$, on obtient pour $r \leq \frac{1}{2}$, $\int |f(r,\theta)|^2 |d\theta| \leq C_1 |\log r|$, où C_1 dépend de f, puis en choisissant $r_0 = \varepsilon \beta_\varepsilon$ dépendant de ε

$$A_\varepsilon \leq 2 C_1 \gamma_\varepsilon |\log \varepsilon \beta_\varepsilon| + 2 \int_{r \leq \varepsilon \beta_\varepsilon} \left|\frac{\partial f}{\partial r}\right|^2 r\, dr\, |d\theta| \tag{57}$$

car $\gamma_\varepsilon^2 \int_\varepsilon^{\varepsilon \beta_\varepsilon} \log\left(\frac{\varepsilon \beta_\varepsilon}{r}\right) \frac{dr}{r} \leq 1$ et on conclut en choisissant $\beta_\varepsilon = (\varepsilon |\log \varepsilon|)^{-1}$.

3. Fin de la preuve du théorème de réflexion

Le lemme VIII.7 permet d'utiliser la même stratégie que celle du §. V.3, en remplaçant la dualité $\left(\tilde{H}^1_{\ell,h,0}, \tilde{H}^{-1}_{\ell,h}\right)$ par la dualité $\left(\tilde{H}^1_{[\ell]}, (\tilde{H}^1_{[\ell]})'\right)$, le lemme de coercivité V.3 (62) restant valable pour $f \in \tilde{H}^1_{[\ell]}$ (il est bien sûr plus simple ici dans le cas quasi-conique) ; le lemme V.4 est inchangé (en utilisant, pour sa preuve, la proposition VIII.5 au lieu de la proposition IV.5), ainsi que le lemme V.5. On conclut alors comme dans la section V.4.

VIII.3. – Fin du cas Neumann

Pour achever la vérification du cas Neumann, il suffit de reprendre les arguments du §. VI, en remplaçant la dualité $\left(H^1_{0,h}, H^{-1}_h\right)$ par la dualité $\left(H^1_{[\rho]}, (H^1_{[\rho]})'\right)$, les lemmes VI.1 et VI.2 étant inchangés et de constater que les preuves des propositions VI.1 et VII.1 ne font intervenir que des arguments géométriques. ◇

BIBLIOGRAPHIE

[C-T] CHEEGER-TAYLOR, *Diffraction by conical singularities*, I, II, (*Comm. Pure Applied Math.*, vol. 35, 1982, p. 275-331, p. 487-529).

[G-L] GÉRARD P., LEBEAU G., *Diffusion d'une onde par un coin*, (*Journal A.M.S.*, vol. 6, 1993, p. 341-423).

[K-K] M. KASHIWARA et T. KAWAI, *Microhyperbolic pseudo-differentials operators*, (*J. Math. Soc. Japan*, vol. 27, 1975, p. 359-404).

[L.1] G. LEBEAU, *Deuxième microlocalisation sur les sous-variétés isotropes*, (*Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, vol. 35, 1985, p. 145-216).

[L.2] G. LEBEAU, *Propagation des ondes dans les dièdres*, (*Mémoire SMF*, n° 60, 1995, p. 1-124).

[M-S] R.-B. MELROSE et J. SJÖSTRAND, *Singularities of boundary value problems*, I, II, (*Comm. Pure Applied. Math.*, vol. 31, 1978, p. 593-617, vol. 35, 1982, p. 129-168).

[R] M. Rouleux, *Diffraction analytique sur une variété singularités coniques,* (*C.P.D.E.*, vol. 11, 1986, p. 947-988).

[S.1] J. Sjöstrand, *Singularités analytiques microlocales,* (*Astérisque* n° 95, 1982).

[S.2] J. Sjöstrand, *Propagation of analytic singularities for second order Dirichlet problems I,* (*C.P.D.E.*, , vol. 5, 1980, p. 41-94).

[S.3] J. Sjöstrand, *Analytic singularities and microhyperbolic boundary value problems,* (*Math. Ann.*, vol. 254, 1980, p. 211-256).

[S-K-K] M. Sato, T. Kawaï et M. Kashiwara, *Microfonctions and Pseudo-differential Equations,* (*Lecture Notes in Maths.*, n° 287, 1971).

(Manuscrit reçu le 1er mars 1996.)

G. Lebeau
Université de Paris-Sud,
Département de Mathématiques, Bât. 425,
91405 Orsay Cedex, France.
Gilles.Lebeau@math.u-psud.fr