

# EXISTENCE GLOBALE ET COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE POUR L'ÉQUATION DE KLEIN–GORDON QUASI LINÉAIRE À DONNÉES PETITES EN DIMENSION 1

PAR JEAN-MARC DELORT

RÉSUMÉ. – Soit  $v$  une solution de l'équation de Klein–Gordon quasi linéaire en dimension 1 d'espace  $\square v + v = F(v, \partial_t v, \partial_x v, \partial_t \partial_x v, \partial_x^2 v)$  à données de Cauchy régulières à support compact, de taille  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Supposons que  $F$  s'annule au moins à l'ordre 2 en 0. On sait alors que la solution  $v$  existe sur un intervalle de temps de longueur supérieure ou égale à  $e^{c/\varepsilon^2}$  pour une constante positive  $c$ , et que pour une non-linéarité générale  $F$  elle explose en temps fini de l'ordre de  $e^{c'/\varepsilon^2}$  ( $c' > 0$ ). Nous avons conjecturé dans [7] une condition nécessaire et suffisante sur  $F$  sous laquelle la solution devrait exister globalement en temps, pour  $\varepsilon$  assez petit. Nous prouvons dans cet article la suffisance de cette condition. De plus, nous obtenons le premier terme d'un développement asymptotique de  $v$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . © 2001 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

ABSTRACT. – Let  $v$  be a solution to a quasilinear Klein–Gordon equation in one space dimension  $\square v + v = F(v, \partial_t v, \partial_x v, \partial_t \partial_x v, \partial_x^2 v)$  with smooth compactly supported Cauchy data of size  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Assume that  $F$  vanishes at least at order 2 at 0. It is known that the solution  $v$  exists over an interval of time of length larger than  $e^{c/\varepsilon^2}$  for a positive  $c$ , and that for a general  $F$  it blows up in finite time  $e^{c'/\varepsilon^2}$  ( $c' > 0$ ). We conjectured in [7] a necessary and sufficient condition on  $F$  under which the solution should exist globally in time for small enough  $\varepsilon$ . We prove in this paper the sufficiency of that condition. Moreover, we get a one term asymptotic expansion for  $v$  when  $t \rightarrow +\infty$ . © 2001 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

## Introduction

Cet article est consacré au problème de l'existence globale et du comportement asymptotique de solutions à données petites de l'équation de Klein–Gordon quasi linéaire en dimension 1 d'espace. Plus précisément, si  $\square = \partial_t^2 - \partial_x^2$  sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  nous considérons une solution  $v$  du problème

$$(0.1) \quad \begin{aligned} \square v + v &= F(v, \partial_t v, \partial_x v, \partial_t \partial_x v, \partial_x^2 v), \\ v|_{t=0} &= \varepsilon f, \\ \partial_t v|_{t=0} &= \varepsilon g, \end{aligned}$$

où  $f$  et  $g$  sont régulières à support compact et à valeurs réelles,  $\varepsilon > 0$  est un petit paramètre, et  $F$  est une non-linéarité  $C^\infty$ , à valeurs réelles, nulle au moins à l'ordre 2 à l'origine, affine en ses deux derniers arguments.

Il est bien connu depuis les travaux de Klainerman [12] et de Shatah [20] que le problème analogue à (0.2) en dimension d'espace  $d \geq 3$  admet pour  $\varepsilon$  assez petit une solution régulière globale. Le même résultat est vrai en dimension 2 d'espace, d'après Simon et Taflin [21] et Ozawa, Tsutaya et Tsutsumi [19]. Mentionnons également le travail de Lindblad et Sogge [16] qui concerne des non-linéarités non nécessairement régulières à l'origine, s'annulant en 0 à un ordre strictement supérieur à  $1 + 2/d$ . Dans le cas de la dimension 1, qui nous intéresse ici, Moriyama, Tonegawa et Tsutsumi ont prouvé que la solution existe sur un intervalle de temps de longueur supérieure ou égale à  $e^{c/\varepsilon^2}$ , sous la restriction supplémentaire que la non-linéarité est nulle au moins à l'ordre 3 en 0, ou bien est semi-linéaire, résolvant ainsi partiellement une conjecture d'Hörmander [9]. Le fait que, en général, la solution n'existe pas sur un intervalle de longueur plus grande a été prouvé par Yordanov [23] et indépendamment par Keel et Tao [11]. Il y a toutefois des exemples de non-linéarités pour lesquelles (0.2) admet des solutions globales : d'une part, lorsque  $F$  ne dépend que de  $v$  et pas des dérivées ; d'autre part, pour sept non-linéarités particulières pour lesquelles Moriyama [17] a obtenu l'existence globale (cf. également Yagi [22]). Une question naturelle, soulevée par Hörmander dans [9], [10] se pose alors : peut-on déterminer une condition de structure sur la non-linéarité qui entraîne l'existence globale, analogue à la condition nulle de Christodoulou [6] et Klainerman [13], qui a permis à ces auteurs de prouver l'existence globale à données petites pour l'équation des ondes quasi linéaire en dimension 3 ? Nous avons dans [7], à l'aide de construction de solutions asymptotiques, conjecturé une telle condition, portant sur les termes quadratiques et cubiques de  $F$ . Le premier des deux théorèmes principaux du présent article établit que, sous cette hypothèse, le problème (0.2) admet une solution globale pour  $\varepsilon > 0$  assez petit. Ce résultat englobe les résultats partiels précédemment mentionnés, et est probablement optimal puisque lorsque l'hypothèse de structure que nous faisons sur  $F$  est violée, nous avons construit dans [7] des solutions approchées explosant en temps de l'ordre  $e^{A/\varepsilon^2}$ , pour une constante explicite  $A$ . Cela laisse supposer que la vraie solution du problème explose également en temps équivalent à  $e^{A/\varepsilon^2}$ . Nous ne savons toutefois pas prouver un tel résultat, qui serait pour l'équation de Klein-Gordon l'analogue des résultats d'explosion pour l'équation des ondes en dimension 2 dus à Alinhac [1], [2] (cf. également Ladhari [15]).

À partir du moment où nous disposons de solutions globales, la question de leur comportement asymptotique se pose naturellement. En dimension d'espace supérieure ou égale à deux, les solutions globales ont à l'infini un comportement de solution libre. En revanche, en dimension 1 d'espace, peu de résultats semblent être connus, même pour l'équation

$$(0.2) \quad \square v + v = \alpha v^2 + \beta v^3 + \text{termes d'ordre 4 en } v.$$

L'existence globale pour (0.2) est élémentaire, mais les seuls résultats concernant le comportement asymptotique des solutions que nous connaissons sont ceux de Georgiev et Yordanov [8] qui, lorsque  $\alpha = 0$ , prouvent que la distance entre  $v$  et toute solution linéaire ne peut pas tendre vers 0 lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . Ces deux auteurs n'obtiennent toutefois pas une description asymptotique de la solution, excepté dans le cas très particulier de l'équation de sine-Gordon  $\square v + \sin v = 0$  pour laquelle peuvent être utilisées des méthodes de « scattering non linéaire ». Le seul autre cas où le comportement asymptotique soit connu en dimension 1 est celui des non-linéarités étudiées par Moriyama [17], pour lesquelles cet auteur prouve qu'il y a comportement asymptotique libre.

Le deuxième but de cet article est d'obtenir l'allure du comportement asymptotique des solutions de (0.2) lorsque  $F$  vérifie les hypothèses générales sous lesquelles nous prouvons l'existence globale. Nous obtenons une expression de la forme

$$(0.3) \quad v(t, x) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{t}} a_\varepsilon(x/t) \exp \left[ i \sqrt{t^2 - x^2} + \frac{i}{2} \Psi(x/t) (1 - (x/t)^2)^{1/2} |a_\varepsilon(x/t)|^2 \varepsilon^2 \log t \right] \\ + \text{terme conjugué} + \varepsilon t^{-1+0} r(t, x),$$

avec

$$|r(t, x)| \leq C_M \left[ \left( 1 - \frac{|x|}{t} \right)_+ + \frac{1}{t} \right]^M$$

pour tout  $M$ . Dans cette expression,  $a_\varepsilon$  est une fonction  $C_0^\infty$  à support dans  $[-1, 1]$  et  $\Psi$  est une fonction  $C^\infty$  sur  $] -1, 1[$  s'exprimant explicitement à partir des non-linéarités. Dans le cas particulier de (0.2), nous avons  $\Psi \equiv -\frac{10}{3}\alpha^2 - 3\beta$ . Nous retrouvons en particulier que la solution n'a pas en général (i.e. lorsque  $\Psi \neq 0$ ) un comportement de solution linéaire à l'infini.

Indiquons dans la suite de cette introduction la stratégie générale que nous employons. Rappelons d'abord qu'en dimension d'espace supérieure ou égale à 2, ou en dimension 1 mais pour des temps  $t \leq e^{c/\varepsilon^2}$ , l'un des ingrédients essentiels des preuves d'existence en temps grand est l'utilisation des « champs de Klainerman » pour contrôler la norme  $L^\infty$  de la solution. Plus précisément, en dimension 1, si  $X$  désigne soit la dérivée usuelle  $\partial/\partial x$ , soit  $t\partial_x + x\partial_t$ , et si pour  $\alpha \in \mathbb{N}$ ,  $X^\alpha$  indique l'itéré de  $\alpha$  champs de cette forme, on dispose d'un contrôle de la forme

$$(0.4) \quad \|v(t, \cdot)\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{\sqrt{t}} \sum_{\alpha \leq M} \|X^\alpha v(t, \cdot)\|_{L^2}$$

si  $M$  est un entier assez grand. En dimension  $d \geq 2$  l'analogue de cette inégalité permet de contrôler  $\|v(t, \cdot)\|_{L^\infty}$  par la puissance optimale de  $t$ , en prouvant que les normes  $L^2$  du membre de droite restent uniformément bornées. La représentation (0.3) de la solution du problème qui nous intéresse ici montre que nous ne pouvons pas espérer obtenir l'estimation optimale  $\|v(t, \cdot)\|_{L^\infty} \leq C\varepsilon/\sqrt{t}$  comme conséquence de (0.4) : en effet, à cause du terme logarithmique dans la phase de (0.3), les  $\|X^\alpha v(t, \cdot)\|_{L^2}$  ne peuvent se contrôler que par une puissance de la quantité non bornée  $\varepsilon^2 \log t$ . Nous devons donc obtenir une estimation  $L^\infty$  directe de la solution, en faisant usage de l'hypothèse de structure sur la non-linéarité.

L'ingrédient de base dans la preuve des résultats de cet article est l'utilisation de « formes normales paradifférentielles ». L'utilisation de formes normales dans ce type de question n'est pas nouvelle : elle a été introduite initialement par Shatah [20], et a été employée en dimension 2 par Ozawa, Tsutaya et Tsutsumi [19], et en dimension 1 par Moriyama, Tonegawa et Tsutsumi [18] et par Moriyama [17]. L'idée principale de ces auteurs consiste à rechercher une perturbation quadratique en  $v$  et ses dérivées de l'inconnue de manière à éliminer les termes quadratiques du membre de droite de (0.2). Cette méthode appliquée brutalement a deux inconvénients : d'une part, elle donne lieu à la perte d'une dérivée, et ne permet donc pas de traiter en dimension 1 des non-linéarités quadratiques quasi linéaires ; d'autre part, elle ramène la non-linéarité à une expression cubique qui est non locale et très peu explicite. Il semble désespéré d'essayer de lire sur celle-ci les conséquences de toute hypothèse de structure sur  $F$ .

La voie que nous empruntons est plus proche de la méthode des formes normales usuelle pour les équations différentielles, et permet d'éviter les deux écueils précédents. Rappelons l'idée de celle-ci sur l'exemple de l'équation différentielle ordinaire

$$(0.5) \quad (D_t \mp 1)u_\pm = \frac{1}{\sqrt{t}} Q_\pm(u_+, u_-) + \frac{1}{t} P_\pm(u_+, u_-),$$

où  $D_t = (1/i)\partial_t$ ,  $Q_\pm$  est quadratique et  $P_\pm$  cubique, et où on suppose  $\bar{u}_+ = -u_-$  (et la condition nécessaire que cela impose sur  $Q_\pm$ ,  $P_\pm$ ). La difficulté pour obtenir l'existence globale à données

petites pour une telle équation provient du fait que les puissances de  $t$  dans le membre de droite ne sont pas intégrables à l'infini. On contourne cette difficulté en recherchant d'abord une perturbation quadratique  $t^{-1/2}\tilde{Q}_\pm(u_+, u_-)$  de  $u_\pm$  telle que

$$(0.6) \quad (D_t \mp 1) \left( u_\pm - \frac{1}{\sqrt{t}} \tilde{Q}_\pm(u_+, u_-) \right) = \frac{1}{t} P_\pm^1(u_+, u_-) + \text{reste},$$

où  $P_\pm^1$  est une nouvelle expression cubique dépendant de  $Q_\pm$ ,  $P_\pm$ , et où le reste, polynomial en  $u_+$ ,  $u_-$  est  $O(t^{-3/2})$ , donc ne causera pas de difficulté dans l'obtention de l'existence globale. Pour déduire de (0.6) une estimation uniforme de  $u_\pm$ , on souhaiterait de même modifier  $u_\pm$  par une expression cubique permettant de compenser le terme  $t^{-1}P_\pm^1$  du membre de droite de (0.6). Cela n'est pas possible en général ; en fait, procédant ainsi, on arrive à éliminer tous les termes cubiques, à l'exception de celui en  $u_\pm^2 u_-$  (resp. en  $u_+ u_-^2$ ) dans la première (resp. la deuxième) équation (0.6). Il n'est possible de déduire de l'équation une estimation uniforme de la solution que si ces deux monômes sont affectés de coefficients réels. L'hypothèse à faire pour pouvoir obtenir une solution globale est que les parties imaginaires des coefficients de ces monômes sont nulles. Il s'agit là d'une condition portant sur les coefficients des non-linéarités  $Q_\pm$ ,  $P_\pm$ , qui est l'analogie, pour l'équation différentielle considérée d'une « condition nulle ».

Afin de ramener le problème de Klein–Gordon à une forme susceptible d'un traitement analogue, nous commençons par passer en coordonnées hyperboliques  $(T, X)$  et nous prenons comme nouvelle inconnue  $w(T, X) = T^{1/2}v(t, x)$ . Cela permet de se ramener essentiellement à une équation quasi linéaire de la forme

$$(0.7) \quad D_T^2 w - \sum_{\substack{i+j=2 \\ j < 2}} a_{ij} \left( T, X, w, D_T w, \frac{D_X}{T} w \right) \left( \frac{D_X}{T} \right)^i D_T^j w - w \\ = G \left( T, X, w, D_T w, \frac{D_X}{T} w \right)$$

dont la partie principale est pour  $w$  petit une perturbation de

$$\left( D_T^2 - \frac{D_X^2}{T^2} - 1 \right) w.$$

Si, dans les expressions précédentes, on fait formellement  $\frac{D_X}{T} = 0$ , on s'aperçoit que l'on obtient une équation différentielle ordinaire analogue au système (0.5). Le cœur de la méthode que nous employons consiste à réduire essentiellement (0.7) à une telle équation lorsque le temps est grand devant la fréquence. Nous utilisons pour cela le calcul paradifférentiel de Bony [3] et des espaces de Sobolev adaptés. Plus précisément, considérons un terme cubique typique de  $G$ , par exemple  $T^{-1}w^2 \left( \frac{D_X}{T} w \right)$ . Si nous écrivons la décomposition de Bony de ce produit, nous obtenons

$$(0.8) \quad \frac{1}{T} T w^2 \left( \frac{D_X}{T} w \right) + \frac{1}{T} T_{(D_X w/T)} w^2 + \frac{1}{T} R \left( w^2, \frac{D_X}{T} w \right).$$

Si  $w$  est dans un espace de Sobolev d'indice assez élevé,  $D_X w \in L^\infty$ , et on a alors pour tout  $s$

$$\|T_{(D_X w/T)} w^2\|_{H^s} \leq \frac{C}{T} \|D_X w\|_{L^\infty} \|w^2\|_{H^s}.$$

Par conséquent la norme  $H^s$  du second terme de (0.8) est en  $T^{-2}$ , donc intégrable lorsque  $T \rightarrow +\infty$ , ce qui fait de ce terme un reste qui ne cause aucune difficulté dans l'obtention de

solutions globales. Il en est de même du dernier terme de (0.8). Le premier terme de (0.8) est également un reste, mais de manière plus subtile. La transformée de Fourier de celui-ci est en effet en  $O(|\xi|/T^2)$ , donc est intégrable pour  $T > |\xi|$ . Pour traiter également le cas  $|\xi| \gg T$ , on supposera que  $\widehat{w}(T, \xi)$  vérifie dans ce régime une condition du type

$$(0.9) \quad |\widehat{w}(T, \xi)| \left( \frac{|\xi|}{T} \right)^{-\alpha+1} (1 + |\xi|)^s \in L^2,$$

avec  $\alpha < 0$  proche de 0. Alors  $T_{w^2}(\frac{D_X}{T} w)$  vérifie une condition du même type avec  $\alpha$  remplacé par  $\alpha + 1$ , ce qui permet de montrer que la primitive de  $\frac{1}{T} T_{w^2}(\frac{D_X}{T} w)$  est de nouveau dans l'espace défini par (0.9). Le raisonnement précédent montre donc que toutes les contributions cubiques au membre de droite de (0.7) dans lesquelles intervient au moins une fois la dérivation  $D_X/T$  ne causent pas de difficulté dans l'obtention de l'existence globale. Cela permet de réduire les termes cubiques de  $G$  à ceux ne dépendant que de  $w$  et  $D_T w$ , i.e. ceux intervenant dans une équation différentielle ordinaire. Lorsqu'on applique ce type de raisonnement aux termes quadratiques, on n'obtient pas une réduction immédiate analogue, car ceux-ci sont affectés de la puissance  $T^{-1/2}$  au lieu de  $T^{-1}$ . Leur traitement repose sur l'écriture de (0.2) sous forme d'un système paradifférentiel du premier ordre dont la partie principale est une perturbation de  $D_T \mp \sqrt{1 + D_X^2}/T^2$ , qui se réduit au membre de gauche de (0.5) si  $D_X/T = 0$ . On applique à ce système une version paradifférentielle de la méthode des formes normales, qui permet comme en (0.6) de se ramener à une non-linéarité cubique, modulo des restes de la forme de ceux précédemment évoqués. Cela conduit à l'obtention d'une estimation  $L^2$  dans des espaces de la forme (0.9). L'estimation  $L^\infty$  s'obtient ensuite à partir de l'équation, de manière semblable au cas de l'équation différentielle ordinaire. La « condition nulle » n'intervient dans la démonstration qu'à ce niveau-là. L'obtention du comportement asymptotique de la solution est une conséquence des réductions permettant d'établir l'existence globale.

*Notation.* – Dans l'ensemble de l'article, nous désignerons par  $\|\cdot\|$  la norme  $L^2$ .

## 1. L'équation de Klein–Gordon quasi linéaire en dimension 1

### 1.1. Énoncé des résultats

Désignons par  $(t, x)$  les coordonnées sur  $\mathbb{R}^2$ , par

$$D_t = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t}, \quad D_x = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x}, \quad \square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Considérons l'équation de Klein–Gordon quasi linéaire à données petites de taille  $\varepsilon$

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \square v + v &= F(v, \partial_t v, \partial_x v, \partial_t \partial_x v, \partial_x^2 v), \\ v|_{t=0} &= \varepsilon f, \\ \partial_t v|_{t=0} &= \varepsilon g, \end{aligned}$$

où  $f$  et  $g$  sont régulières à support compact et à valeurs réelles,  $\varepsilon > 0$  est un petit paramètre, et  $F$  est une non-linéarité  $C^\infty$ , à valeurs réelles, nulle au moins à l'ordre 2 à l'origine, affine en ses deux derniers arguments. Il est bien connu que si  $F$  est nulle au moins à l'ordre 4 en zéro, la solution du problème (1.1) est définie globalement en temps si  $\varepsilon > 0$  est assez petit. Pour cette

raison, nous nous limiterons ici au cas où  $F$  s'écrit

$$(1.2) \quad F = Q(v, \partial_t \partial_x v, \partial_x^2 v; \partial_t v, \partial_x v) + P(v, \partial_t \partial_x v, \partial_x^2 v; \partial_t v, \partial_x v)$$

avec  $Q$  (resp.  $P$ ) polynôme homogène de degré 2 (resp. 3), à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 1 en  $\partial_t \partial_x v$  et  $\partial_x^2 v$ . Désignons par  $]T_*(\varepsilon), T^*(\varepsilon)[$  l'intervalle maximal d'existence d'une solution régulière de (1.1). Moriyama, Tonegawa et Tsutsumi [18] ont prouvé que  $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \log T^*(\varepsilon) > 0$  et  $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \log(-T_*(\varepsilon)) > 0$ . Nous avons précisé ce résultat dans [7] en prouvant que  $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \log T^*(\varepsilon) \geq A$ , où  $A$  est une constante explicite, calculable à partir de  $f$ ,  $g$  et de la non-linéarité. L'expression de cette constante entraîne que si la non-linéarité vérifie une condition de structure convenable  $A = +\infty$ . Cela nous a conduit à conjecturer dans [7] que sous cette condition de structure, la solution de (1.1) existe globalement en temps. Le premier des deux principaux résultats de cet article établit cette conjecture. Avant de l'énoncer, introduisons un certain nombre de notations. Décomposons  $Q$  selon que ses termes dépendent ou non des dérivées secondes :

$$(1.3) \quad Q(v, \partial_t \partial_x v, \partial_x^2 v; \partial_t v, \partial_x v) = Q'(v; \partial_t v, \partial_x v) + Q''(v, \partial_t \partial_x v, \partial_x^2 v; \partial_t v, \partial_x v),$$

où  $Q'(T_1; Z_1, Z_2)$  est homogène de degré 2 et  $Q''(T_1, T_2, T_3; Z_1, Z_2)$  est linéaire en  $(T_2, T_3)$  et en  $(Z_1; Z_1, Z_2)$ . Nous écrirons de plus

$$(1.4) \quad \begin{aligned} Q'(T_1; Z_1, Z_2) &= Q'_0(T_1) + iQ'_1(T_1; -iZ_1, -iZ_2) - Q'_2(-iZ_1, -iZ_2), \\ Q''(T_1, T_2, T_3; Z_1, Z_2) &= Q''_0(T_1, -T_2, -T_3) + iQ''_1(-T_2, -T_3; -iZ_1, -iZ_2), \end{aligned}$$

où  $Q'_0$  est homogène de degré 2 en  $T_1$ ,  $Q'_1$  linéaire en  $T_1$  et en  $(Z_1, Z_2)$ ,  $Q'_2$  homogène de degré 2,  $Q''_0$  linéaire en  $T_1$  et en  $(T_2, T_3)$ ,  $Q''_1$  linéaire en  $(T_2, T_3)$  et en  $(Z_1, Z_2)$ . La normalisation a été choisie de telle manière que

$$\begin{aligned} Q'(v; \partial_t v, \partial_x v) &= Q'_0(v) + iQ'_1(v; D_t v, D_x v) - Q'_2(D_t v, D_x v), \\ Q''(v, \partial_t \partial_x v, \partial_x^2 v; \partial_t v, \partial_x v) &= Q''_0(v, D_t D_x v, D_x^2 v) + iQ''_1(D_t D_x v, D_x^2 v; D_t v, D_x v). \end{aligned}$$

De même la partie cubique de la non-linéarité sera décomposée en

$$(1.5) \quad P(v, \partial_t \partial_x v, \partial_x^2 v; \partial_t v, \partial_x v) = P'(v; \partial_t v, \partial_x v) + P''(v, \partial_t \partial_x v, \partial_x^2 v; \partial_t v, \partial_x v),$$

où  $P'$  et  $P''$  sont homogènes de degré 3,  $P''$  étant linéaire en  $(\partial_t \partial_x v, \partial_x^2 v)$ . Nous écrirons de plus

$$(1.6) \quad \begin{aligned} P'(T_1; Z_1, Z_2) &= \sum_{k=0}^3 i^k P'_k(T_1; -iZ_1, -iZ_2), \\ P''(T_1, T_2, T_3; Z_1, Z_2) &= \sum_{k=0}^2 i^k P''_k(T_1, -T_2, -T_3; -iZ_1, -iZ_2), \end{aligned}$$

où  $P'_k$  (resp.  $P''_k$ ) est homogène de degré  $k$  en  $(Z_1, Z_2)$  et  $3 - k$  en  $T_1$  (resp. en  $(T_1, T_2, T_3)$ ), le degré de  $P''_k$  en  $(T_2, T_3)$  étant en outre égal à 1. Si  $(\omega_0, \omega_1) \in \mathbb{R}^2$  notons

$$(1.7) \quad \begin{aligned} q'_k(\omega_0, \omega_1) &= Q'_k(1; \omega_0, \omega_1), \quad k = 0, 1, 2, \\ q''_k(\omega_0, \omega_1) &= Q''_k(1, \omega_0\omega_1, \omega_1^2; \omega_0, \omega_1), \quad k = 0, 1, \\ p'_k(\omega_0, \omega_1) &= P'_k(1; \omega_0, \omega_1), \quad k = 0, \dots, 3, \\ p''_k(\omega_0, \omega_1) &= P''_k(1, \omega_0\omega_1, \omega_1^2; \omega_0, \omega_1), \quad k = 0, 1, 2, \end{aligned}$$

les fonctions obtenues en substituant  $(1, -\omega_0\omega_1, -\omega_1^2; i\omega_0, i\omega_1)$  à  $(T_1, T_2, T_3; Z_1, Z_2)$  dans (1.4), (1.6). Nous noterons aussi  $p_k = p'_k + p''_k$ . Pour  $y \in ]-1, 1[$ , posons

$$(1.8) \quad \begin{aligned} \omega_0(y) &= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \\ \omega_1(y) &= \frac{-y}{\sqrt{1-y^2}}, \end{aligned}$$

définissons

$$(1.9) \quad \begin{aligned} \Phi(y) &= p_1(\omega_0(y), \omega_1(y)) + 3p_3(\omega_0(y), \omega_1(y)) \\ &\quad + q'_1(q'_0 + q'_2)(\omega_0(y), \omega_1(y)) - q''_1(q''_0 + 2q''_2)(\omega_0(y), \omega_1(y)) \end{aligned}$$

et introduisons :

*Définition 1.1.* – On dit que la non-linéarité (1.2) vérifie la condition nulle si  $\Phi \equiv 0$ .

Le premier théorème de cet article s'énonce alors :

**THÉORÈME 1.2.** – *Supposons que  $F$  vérifie la condition nulle. Soient  $B > 0$ ,  $\sigma \in \mathbb{N}$ ,  $\sigma > 7/2$ . Il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que, pour toutes fonctions  $f \in H^\sigma(\mathbb{R})$ ,  $g \in H^{\sigma-1}(\mathbb{R})$  à valeurs réelles, supportées dans  $[-B, B]$ , vérifiant  $\|f\|_{H^\sigma}^2 + \|g\|_{H^{\sigma-1}}^2 \leq 1$ , le problème (1.1) admette, lorsque  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$ , une unique solution globale  $v \in C^0(\mathbb{R}, H^\sigma) \cap C^1(\mathbb{R}, H^{\sigma-1})$ .*

*Remarque 1.1.* – L'existence globale à données petites n'était connue que dans deux cas particuliers du théorème : d'une part, lorsque  $F$  ne dépend pas des dérivées de  $v$ , auquel cas une preuve élémentaire reposant sur la conservation de l'énergie est possible ; d'autre part, lorsque  $F$  est combinaison linéaire de sept non-linéarités cubiques particulières, déterminées par Moriyama [17] (cf. également Yagi [22]). Ces non-linéarités, qui vérifient la condition nulle de la définition 1.1, n'épuisent pas l'ensemble des non-linéarités cubiques pour lesquelles le théorème précédent fournit l'existence globale. En effet, nous avons montré dans [7] que l'espace des non-linéarités cubiques satisfaisant à la condition nulle est un sous-espace vectoriel de dimension 18 de l'espace des polynômes homogènes de degré 3 en  $(T_1, T_2, T_3; Z_1, Z_2)$ .

*Remarque 1.2.* – Comme nous l'avons signalé en introduction, les constructions de solutions asymptotiques de [7] laissent penser que lorsque la condition nulle n'est pas satisfaite, la solution explose en temps fini de l'ordre de  $e^{A/\varepsilon^2}$  pour une constante explicite  $A$ . Nous ne savons toutefois pas prouver une telle assertion.

Notre second objectif concerne le comportement asymptotique de la solution globale obtenue dans l'énoncé précédent. Définissons pour  $y \in ]-1, 1[$

$$(1.10) \quad \Psi(y) = \left[ - (q'_0 + q''_0) \left( \frac{10}{3} q'_0 + \frac{1}{3} q''_0 \right) - q'_2 \left( \frac{10}{3} q'_0 + \frac{7}{3} q''_0 \right) \right. \\ \left. - \frac{4}{3} q_2'^2 - (q'_1 + q''_1) \left( \frac{1}{3} q'_1 - \frac{2}{3} q''_1 \right) - 3p_0 - p_2 \right] (\omega_0(y), \omega_1(y)).$$

THÉORÈME 1.3. – Supposons que  $F$  vérifie la condition nulle. Soient  $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ , à support dans  $[-B, B]$ , à valeurs réelles, et  $v$  la solution fournie par le théorème 1.2 pour  $\varepsilon$  assez petit. Il existe alors, pour  $\varepsilon < \varepsilon_0$  assez petit, une fonction  $C^\infty$ ,  $a_\varepsilon(y)$ , supportée dans  $|y| \leq 1$ , bornée uniformément en  $\varepsilon$ , ainsi que ses dérivées, telle que si l'on pose

$$(1.11) \quad v_a(t, x) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{t}} a_\varepsilon\left(\frac{x}{t}\right) \exp \left[ i\sqrt{t^2 - x^2} + \frac{i}{2} \Psi\left(\frac{x}{t}\right) \left(1 - \left(\frac{x}{t}\right)^2\right)^{1/2} \right] \left| a_\varepsilon\left(\frac{x}{t}\right) \right|^2 \varepsilon^2 \log t \\ + \frac{\varepsilon}{\sqrt{t}} \bar{a}_\varepsilon\left(\frac{x}{t}\right) \exp \left[ -i\sqrt{t^2 - x^2} - \frac{i}{2} \Psi\left(\frac{x}{t}\right) \left(1 - \left(\frac{x}{t}\right)^2\right)^{1/2} \right] \\ \times \left| a_\varepsilon\left(\frac{x}{t}\right) \right|^2 \varepsilon^2 \log t,$$

$$(1.12) \quad v'_a(t, x) = i \frac{\varepsilon}{\sqrt{t}} a_\varepsilon(x/t) (1 - (x/t)^2)^{-1/2} \\ \times \exp \left[ i\sqrt{t^2 - x^2} + \frac{i}{2} \Psi(x/t) (1 - (x/t)^2)^{1/2} \right] \left| a_\varepsilon(x/t) \right|^2 \varepsilon^2 \log t \\ - i \frac{\varepsilon}{\sqrt{t}} \bar{a}_\varepsilon(x/t) (1 - (x/t)^2)^{-1/2} \\ \times \exp \left[ -i\sqrt{t^2 - x^2} - \frac{i}{2} \Psi(x/t) (1 - (x/t)^2)^{1/2} \right] \left| a_\varepsilon(x/t) \right|^2 \varepsilon^2 \log t,$$

les fonctions  $v - v_a$  et  $\partial_t v - v'_a$  soient supportées dans  $|x| \leq t + B$  et vérifient : pour tout  $\mu \in ]0, 1/2[$  et tout  $M > 0$ , il existe  $C > 0$  avec, pour tout  $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ ,

$$(1.13) \quad |(v - v_a)(t, x)| \leq C \frac{\varepsilon}{t^{1-\mu}} \left( \left(1 - \frac{|x|}{t}\right)_+ + \frac{1}{t} \right)^M, \\ |(\partial_t v - v'_a)(t, x)| \leq C \frac{\varepsilon}{t^{1-\mu}} \left( \left(1 - \frac{|x|}{t}\right)_+ + \frac{1}{t} \right)^M.$$

Remarque 1.3. – Les non-linéarités étudiées par Moriyama [17], et pour lesquelles cet auteur prouve l'existence globale sont telles que  $\Psi \equiv 0$  i.e. le comportement asymptotique donné par (1.11) est le même que celui d'une solution linéaire. Ce comportement asymptotique libre avait été obtenu par cet auteur dans son travail.

Remarque 1.4. – Le seul cas, à notre connaissance, où l'existence globale était connue sans que le comportement asymptotique attendu soit celui d'une solution libre est celui où  $F = \alpha v^2 + \beta v^3$ . On a alors  $\Psi(y) \equiv -\frac{10}{3} \alpha^2 - 3\beta$ . Georgiev et Yordanov [8] ont étudié le comportement asymptotique de la solution pour  $\alpha = 0, \beta = 1$ ,  $F$  pouvant en outre être perturbée par un terme d'ordre 4 arbitraire. Ils n'ont pas décrit ce comportement asymptotique sous la forme (1.11), mais ont prouvé que la distance, lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , entre la solution non linéaire et toute solution linéaire ne peut tendre vers 0. Dans le cas particulier de l'équation de sine-Gordon (i.e.  $F = -\sin v + v$ ) ils font remarquer que la méthode du « scattering non linéaire » permet d'obtenir une représentation asymptotique de la solution de la forme (1.11).

## 1.2. Réduction du problème

Nous nous proposons d'effectuer dans ce paragraphe un certain nombre de changements de variable et d'inconnue permettant de réduire le problème.

PROPOSITION 1.4. – Soient  $B > 0$ ,  $T_0 > 2B$ ,  $\sigma$  entier,  $\sigma \geq 3$  donnés. Il existe  $\varepsilon_0 > 0$  et  $C_1 > 0$  tels que, pour tout couple  $(f, g)$  dans la boule unité de  $H^\sigma(\mathbb{R}) \times H^{\sigma-1}(\mathbb{R})$ , supporté dans  $[-B, B]$ , tout  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$ , le problème (1.1) admette une unique solution  $v$ , définie sur

$$(1.14) \quad G_{T_0} = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2; t \geq 0, (t + 2B)^2 - x^2 \leq T_0^2\},$$

continue en temps à valeurs  $H^\sigma$  et  $C^1$  à valeurs  $H^{\sigma-1}$  sur cet ensemble. De plus, on a

$$(1.15) \quad \sum_{\alpha_0 + \alpha_1 \leq \sigma} \int \left| (\partial_t^{\alpha_0} \partial_x^{\alpha_1} v) \left( \sqrt{T_0^2 + x^2} - 2B, x \right) \right|^2 dx \leq C_1^2 \varepsilon^2$$

et la restriction de  $v$  à l'hyperbole  $(t + 2B)^2 - x^2 = T_0^2$  est supportée dans  $|x| \leq (T_0^2 - B^2)/2B$ .

*Démonstration.* – La proposition n'est rien d'autre qu'une version du résultat d'existence locale pour le problème (1.1) : en effet, ce résultat affirme que, sous les hypothèses de la proposition, il existe  $a > 0$ ,  $c > 0$  telles que pour toutes fonctions  $(f, g)$  vérifiant les conditions de l'énoncé, et tout  $\varepsilon \in ]0, 1]$ , l'équation (1.1) a une unique solution  $v$ , définie sur  $[0, a/\varepsilon[ \times \mathbb{R}$ , continue en temps à valeurs  $H^\sigma$  et  $C^1$  à valeurs  $H^{\sigma-1}$ , vérifiant de plus l'inégalité d'énergie

$$(1.16) \quad \sup_{t \in [0, a/\varepsilon[} \sum_{\alpha_0 + \alpha_1 \leq \sigma} \int \left| \partial_t^{\alpha_0} \partial_x^{\alpha_1} v(t, x) \right|^2 dx \leq C \varepsilon^2.$$

Posons alors  $t_0 = (T_0^2 - 3B^2)/2B$ , et choisissons  $\varepsilon_0 > 0$  assez petit pour que la solution ci-dessus soit définie sur  $[0, t_0]$ . L'intersection du domaine d'influence  $\{(t, x); t \geq 0, |x| \leq B + t\}$  et de  $G_{T_0}$  est contenue dans  $[0, t_0] \times \mathbb{R}$  d'où l'existence de la solution sur le domaine voulu. Pour obtenir (1.15), il suffit d'utiliser la méthode usuelle d'intégration par parties sur le domaine  $G_{T_0}$  pour contrôler le membre de gauche de (1.15) par

$$\begin{aligned} & C \int_0^{t_0} \left( \sum_{|\gamma| \leq [\sigma/2] + 1} \|\partial^\gamma v(t, \cdot)\|_{L^\infty} \right) \left( \sum_{|\alpha| \leq \sigma} \|\partial^\alpha v(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \right) dt \\ & + C (\|v(0, \cdot)\|_{H^\sigma}^2 + \|\partial_t v(0, \cdot)\|_{H^{\sigma-1}}^2) \end{aligned}$$

(cf. par exemple [10], pages 171–174). D'après l'injection de Sobolev et l'inégalité (1.16), cette dernière quantité se majore par  $C_1^2 \varepsilon^2$ , où  $C_1$  ne dépend que de  $T_0$ ,  $B$ ,  $\sigma$ , et des normes de  $f, g$  dans  $H^\sigma$  et  $H^{\sigma-1}$  respectivement. Cela achève la preuve de la proposition.  $\square$

Il nous suffit donc désormais de prouver l'existence globale pour l'équation posée dans le domaine  $\{(t + 2B)^2 - x^2 \geq T_0^2, t \geq 0\}$ , avec un couple de données initiales définies sur la courbe  $\{(t + 2B)^2 - x^2 = T_0^2, t \geq 0\}$ , à support compact, de régularité  $H^\sigma \times H^{\sigma-1}$ , de norme dans cet espace majorée par  $C_1 \varepsilon$ . Nous allons pour cela introduire les coordonnées hyperboliques usuelles en posant pour  $T \geq T_0$ ,  $X \in \mathbb{R}$ ,

$$(1.17) \quad t + 2B = T \operatorname{ch} X, \quad x = T \operatorname{sh} X,$$

d'où les expressions

$$(1.18) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T} &= \operatorname{ch} X \frac{\partial}{\partial t} + \operatorname{sh} X \frac{\partial}{\partial x}, & \frac{\partial}{\partial X} &= T \operatorname{sh} X \frac{\partial}{\partial t} + T \operatorname{ch} X \frac{\partial}{\partial x}, \\ \partial_t &= \operatorname{ch} X \partial_T - \operatorname{sh} X \frac{\partial_X}{T}, & \partial_x &= -\operatorname{sh} X \partial_T + \operatorname{ch} X \frac{\partial_X}{T}. \end{aligned}$$

Dans ces coordonnées, l'opérateur de Klein–Gordon s'écrit

$$(1.19) \quad D_t^2 - D_x^2 - 1 = D_T^2 - \frac{D_X^2}{T^2} - \frac{i}{T} D_T - 1.$$

La solution de l'équation de Klein–Gordon linéaire en dimension 1 d'espace décroît comme  $t^{-1/2}$ . De plus, on sait (cf. Klainerman [14]) que cette solution est à décroissance rapide sur le bord du cône d'onde. Cela nous conduit à introduire le changement d'inconnue

$$(1.20) \quad v(t, x) = T^{-1/2} (\operatorname{ch}(\kappa X))^{-1} w(T, X),$$

où  $\kappa > 0$  est un paramètre arbitraire à fixer, qui mesure la décroissance de la solution au bord du cône d'onde. Avec ces notations

$$(1.21) \quad (D_t^2 - D_x^2 - 1)v = T^{-1/2} (\operatorname{ch} \kappa X)^{-1} \left[ D_T^2 - \frac{D_X^2}{T^2} - 2i\kappa \frac{\operatorname{th} \kappa X}{T} \frac{D_X}{T} - 1 - \frac{1}{T^2} \left( \frac{1}{4} + \kappa^2 (1 - 2\operatorname{th}^2(\kappa X)) \right) \right] w.$$

Nous noterons dans la suite, pour  $k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$(1.22) \quad \mathcal{L}_b(\mathbb{C}^k; \mathbb{C}) \quad (\text{resp. } \mathcal{L}_b^{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^k; \mathbb{C}))$$

l'espace des formes linéaires  $\ell(T, X, z)$  en  $z \in \mathbb{C}^k$ , à coefficients complexes (resp. réels),  $C^\infty$  en  $(T, X)$ , chacun de ces coefficients  $a(T, X)$  vérifiant en outre des estimations de la forme :

$$(1.23) \quad |D_T^m D_X^n a(T, X)| \leq C_{m,n} T^{-m}, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Lorsque  $\ell$  ne dépend pas de  $T$ , nous noterons simplement  $\ell(X, z)$ . Le lemme suivant résulte immédiatement des expressions (1.18), (1.20) :

LEMME 1.5. – *On a les expressions suivantes :*

$$(1.24) \quad \begin{aligned} \partial_t v &= T^{-1/2} \frac{\operatorname{ch} X}{\operatorname{ch}(\kappa X)} \left[ \partial_T w + \ell_1 \left( X, \frac{\partial_X}{T} w \right) + \frac{1}{T} \ell_0(X, w) \right], \\ \partial_x v &= T^{-1/2} \frac{\operatorname{ch} X}{\operatorname{ch}(\kappa X)} \left[ -\operatorname{th} X \partial_T w + \ell_1 \left( X, \frac{\partial_X}{T} w \right) + \frac{1}{T} \ell_0(X, w) \right], \end{aligned}$$

où  $\ell_0$  et  $\ell_1$  sont dans  $\mathcal{L}_{\mathbf{b}}^{\mathbb{R}}(\mathbb{C}; \mathbb{C})$  (et ont des valeurs différentes sur chacune des deux lignes),

$$\begin{aligned}
 \partial_t^2 v &= T^{-1/2} \frac{\operatorname{ch}^2 X}{\operatorname{ch}(\kappa X)} \left[ \partial_T^2 w + \ell_2 \left( X, \frac{\partial_X}{T} \partial_T w, \frac{\partial_X^2}{T^2} w \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{T} \ell_1 \left( X, \partial_T w, \frac{\partial_X}{T} w \right) + \frac{1}{T^2} \ell_0(X, w) \right], \\
 \partial_t \partial_x v &= T^{-1/2} \frac{\operatorname{ch}^2 X}{\operatorname{ch}(\kappa X)} \left[ -\operatorname{th} X \partial_T^2 w + \ell_2 \left( X, \frac{\partial_X}{T} \partial_T w, \frac{\partial_X^2}{T^2} w \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{T} \ell_1 \left( X, \partial_T w, \frac{\partial_X}{T} w \right) + \frac{1}{T^2} \ell_0(X, w) \right], \\
 \partial_x^2 v &= T^{-1/2} \frac{\operatorname{ch}^2 X}{\operatorname{ch}(\kappa X)} \left[ \operatorname{th}^2 X \partial_T^2 w + \ell_2 \left( X, \frac{\partial_X}{T} \partial_T w, \frac{\partial_X^2}{T^2} w \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{T} \ell_1 \left( X, \partial_T w, \frac{\partial_X}{T} w \right) + \frac{1}{T^2} \ell_0(X, w) \right],
 \end{aligned}
 \tag{1.25}$$

où  $\ell_0$  est dans  $\mathcal{L}_{\mathbf{b}}^{\mathbb{R}}(\mathbb{C}; \mathbb{C})$  et  $\ell_1, \ell_2$  dans  $\mathcal{L}_{\mathbf{b}}^{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^2; \mathbb{C})$ .

Introduisons les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \tilde{Q}'(X, w, \partial_T w) &= Q'(w(\operatorname{ch} X)^{-1}; \partial_T w, -\operatorname{th} X \partial_T w), \\
 \tilde{Q}''(X, w, \partial_T w) &= Q''(w(\operatorname{ch} X)^{-1}, -\operatorname{th} X, \operatorname{th}^2 X; \partial_T w, -\operatorname{th} X \partial_T w),
 \end{aligned}
 \tag{1.26}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{P}'(X, w, \partial_T w) &= P'(w(\operatorname{ch} X)^{-1}; \partial_T w, -\operatorname{th} X \partial_T w), \\
 \tilde{P}''(X, w, \partial_T w) &= P''(w(\operatorname{ch} X)^{-1}, -\operatorname{th} X, \operatorname{th}^2 X; \partial_T w, -\operatorname{th} X \partial_T w).
 \end{aligned}
 \tag{1.27}$$

Compte tenu des propriétés d'homogénéité de  $Q', Q'', P', P''$ , on constate que  $\tilde{Q}', \tilde{Q}'', \tilde{P}', \tilde{P}''$  sont des polynômes homogènes en  $(w, \partial_T w)$  de degrés respectifs 2, 1, 3, 2, à coefficients  $C^\infty$  bornés ainsi que toutes leurs dérivées en  $X$ . Nous utiliserons les expressions suivantes de (1.26), (1.27) à partir de (1.7), qui résultent immédiatement des propriétés d'homogénéité, et du fait que, avec les notations (1.8),  $\omega_0(\operatorname{th} X) = \operatorname{ch} X$ ,  $\omega_1(\operatorname{th} X) = -\operatorname{sh} X$  :

$$\begin{aligned}
 \tilde{Q}'(X, w, \partial_T w) &= (\operatorname{ch} X)^{-2} [w^2 q'_0 + iw(\operatorname{D}_T w) q'_1 - (\operatorname{D}_T w)^2 q'_2], \\
 \tilde{Q}''(X, w, \partial_T w) &= -(\operatorname{ch} X)^{-3} [w q''_0 + i(\operatorname{D}_T w) q''_1],
 \end{aligned}
 \tag{1.28}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{P}'(X, w, \partial_T w) &= (\operatorname{ch} X)^{-3} [w^3 p'_0 + iw^2(\operatorname{D}_T w) p'_1 - w(\operatorname{D}_T w)^2 p'_2 - i(\operatorname{D}_T w)^3 p'_3], \\
 \tilde{P}''(X, w, \partial_T w) &= (\operatorname{ch} X)^{-4} [-w^2 p''_0 - iw(\operatorname{D}_T w) p''_1 + (\operatorname{D}_T w)^2 p''_2]
 \end{aligned}
 \tag{1.29}$$

(on a noté pour simplifier  $q'_k = q'_k(\omega_0(\operatorname{th} X), \omega_1(\operatorname{th} X))$ , et de même pour  $q''_k, p'_k, p''_k$ ).

Nous désignerons lorsque  $k \in \mathbb{N}^*$  par

$$\mathcal{L}_{\mathbf{b}}^2(\mathbb{C}^k; \mathbb{C}) \quad (\text{resp. } \mathcal{L}_{\mathbf{b}}^3(\mathbb{C}^k; \mathbb{C}))
 \tag{1.30}$$

l'espace des formes quadratiques (resp. cubiques)  $\ell^2(T, X, z)$  (resp.  $\ell^3(T, X, z)$ ) en  $z \in \mathbb{C}^k$ , à coefficients  $C^\infty$  vérifiant les estimations (1.23). Les sous-espaces de formes à coefficients réels

seront désignés par  $\mathcal{L}_b^{2,\mathbb{R}}(\mathbb{C}^k; \mathbb{C})$ ,  $\mathcal{L}_b^{3,\mathbb{R}}(\mathbb{C}^k; \mathbb{C})$ . Avec cette notation, nous pouvons obtenir pour la non-linéarité de l'équation des expressions faisant clairement apparaître la structure de celle-ci.

LEMME 1.6. – (i) *La partie quadratique de la non-linéarité s'écrit*

$$(1.31) \quad Q'(v; \partial_t v, \partial_x v) = T^{-1} \frac{\text{ch}^2 X}{\text{ch}^2 \kappa X} \left[ \tilde{Q}'(X, w, \partial_T w) + \ell \left( X, w, \partial_T w, \frac{\partial_X}{T} w \right) \frac{\partial_X}{T} w + \frac{1}{T} \ell^2 \left( T, X, w, \partial_T w, \frac{\partial_X}{T} w \right) \right],$$

$$(1.32) \quad Q''(v, \partial_t \partial_x v, \partial_x^2 v; \partial_t v, \partial_x v) = T^{-1} \frac{\text{ch}^3 X}{\text{ch}^2 \kappa X} \left[ (\partial_T^2 w) \left( \tilde{Q}''(X, w, \partial_T w) + \ell_1 \left( X, \frac{\partial_X}{T} w \right) + \frac{1}{T} \ell_0(X, w) \right) + \ell_{01} \left( T, X, w, \partial_T w, \frac{\partial_X}{T} w \right) \frac{\partial_X}{T} \partial_T w + \ell_{11} \left( T, X, w, \partial_T w, \frac{\partial_X}{T} w \right) \frac{\partial_X^2}{T^2} w + \frac{1}{T} \ell^2 \left( T, X, w, \partial_T w, \frac{\partial_X}{T} w \right) \right],$$

où  $\ell$ ,  $\ell_{01}$ ,  $\ell_{11}$  désignent des éléments de  $\mathcal{L}_b^{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^3; \mathbb{C})$ ,  $\ell_0$ ,  $\ell_1$  des éléments de  $\mathcal{L}_b^{\mathbb{R}}(\mathbb{C}; \mathbb{C})$  et  $\ell^2$  est une forme quadratique de  $\mathcal{L}_b^{2,\mathbb{R}}(\mathbb{C}^3; \mathbb{C})$ .

(ii) *La partie cubique de la non-linéarité s'écrit*

$$(1.33) \quad P'(v; \partial_t v, \partial_x v) = T^{-3/2} \frac{\text{ch}^3 X}{\text{ch}^3 \kappa X} \left[ \tilde{P}'(X, w, \partial_T w) + \ell^2 \left( X, w, \partial_T w, \frac{\partial_X}{T} w \right) \frac{\partial_X}{T} w + \frac{1}{T} \ell^3 \left( T, X, w, \partial_T w, \frac{\partial_X}{T} w \right) \right],$$

$$(1.34) \quad P''(v, \partial_t \partial_x v, \partial_x^2 v; \partial_t v, \partial_x v) = T^{-3/2} \frac{\text{ch}^4 X}{\text{ch}^3 \kappa X} \left[ (\partial_T^2 w) \left( \tilde{P}''(X, w, \partial_T w) + \ell \left( X, w, \partial_T w, \frac{\partial_X}{T} w \right) \frac{\partial_X}{T} w + \frac{1}{T} \ell^2 \left( T, X, w, \partial_T w, \frac{\partial_X}{T} w \right) \right) + \ell_{11}^2 \left( T, X, w, \partial_T w, \frac{\partial_X}{T} w \right) \frac{\partial_X^2}{T^2} w + \ell_{01}^2 \left( T, X, w, \partial_T w, \frac{\partial_X}{T} w \right) \frac{\partial_X}{T} \partial_T w + \frac{1}{T} \ell^3 \left( T, X, w, \partial_T w, \frac{\partial_X}{T} w \right) \right],$$

où  $\ell$  est dans  $\mathcal{L}_b^{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^3; \mathbb{C})$ ,  $\ell^2$ ,  $\ell_{11}^2$ ,  $\ell_{01}^2$  dans  $\mathcal{L}_b^{2,\mathbb{R}}(\mathbb{C}^3; \mathbb{C})$ ,  $\ell^3$  dans  $\mathcal{L}_b^{3,\mathbb{R}}(\mathbb{C}^3; \mathbb{C})$ .

Le lemme est conséquence directe du lemme 1.5, des propriétés d'homogénéité de  $Q'$ ,  $Q''$ ,  $P'$ ,  $P''$  et des définitions (1.26), (1.27). La manière de comprendre la structure des expressions (1.31) à (1.34) est la suivante : les contributions principales à ces quantités sont les termes en  $\tilde{Q}'$ ,  $\tilde{Q}''$ ,  $\tilde{P}'$ ,  $\tilde{P}''$ . Les autres termes sont des restes qui apparaissent sous deux types : d'une part, les termes affectés d'une puissance de  $T$  inférieure ou égale à  $-2$ , tels la dernière contribution à (1.31), pour lesquels la structure précise n'a pas d'importance ; d'autre part, les termes affectés d'une puissance de  $T$  supérieure ou égale à  $-3/2$ , pour lesquels il est essentiel de savoir que l'on peut factoriser  $\frac{\partial_X}{T} w$ ,  $\frac{\partial_X^2}{T^2} w$  ou  $\frac{\partial_X}{T} \partial_T w$ . Nous reviendrons ultérieurement sur ce type de décompositions.

*Définition 1.7.* – Si  $k \in \mathbb{N}^*$ , nous noterons  $\mathcal{E}_k$  (resp.  $\mathcal{E}_k^{\mathbb{R}}$ ) l'espace des fonctions  $(T, X, z) \mapsto b(T, X, z)$  définies pour  $(T, X) \in [T_0, +\infty[ \times \mathbb{R}$ ,  $z \in \mathbb{D}(0, 1) = \{z \in \mathbb{C}^3; |z| < 1\}$  bornées,  $C^\infty$  en  $(T, X)$ , holomorphes en  $z$  (resp. et de plus réelles sur le réel) et vérifiant des estimations de la forme

$$(1.35) \quad \left| \partial_T^m \partial_X^n b(T, X, z) \right| \leq C_{m,n} T^{-m} |z|^k$$

pour tous  $(T, X, z) \in [T_0, +\infty[ \times \mathbb{R} \times \mathbb{D}(0, 1)$ .

Nous allons utiliser les lemmes précédents pour réécrire l'équation (1.1) dans les nouvelles variables, et pour la nouvelle inconnue. Introduisons les notations suivantes :

$$(1.36) \quad \begin{aligned} K(X) &= 2\kappa \operatorname{th}(\kappa X), \\ A_2(X, w, \partial_T w) &= -\frac{\operatorname{ch}^2 X}{\operatorname{ch} \kappa X} \tilde{Q}'(X, w, \partial_T w) + \frac{\operatorname{ch}^3 X}{\operatorname{ch} \kappa X} w \tilde{Q}''(X, w, \partial_T w), \\ A_3(X, w, \partial_T w) &= -\left[ \frac{\operatorname{ch}^3 X}{\operatorname{ch}^2 \kappa X} (\tilde{P}'(X, w, \partial_T w) - \operatorname{ch} X w \tilde{P}''(X, w, \partial_T w)) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\operatorname{ch}^6 X}{\operatorname{ch}^2 \kappa X} w \tilde{Q}''(X, w, \partial_T w)^2 + \frac{\operatorname{ch}^5 X}{\operatorname{ch}^2 \kappa X} \tilde{Q}' \tilde{Q}''(X, w, \partial_T w) \right]. \end{aligned}$$

Nous fixerons désormais  $\kappa$  avec  $\kappa \geq 3$ . Dans ces conditions  $A_2$  (resp.  $A_3$ ) est une forme quadratique (resp. cubique) en  $(w, \partial_T w)$  à coefficients réels  $C^\infty$  bornés ainsi que toutes leurs dérivées. On remarquera également que  $\Psi(\operatorname{th} X)/\operatorname{ch}^3(\kappa X)$  est aussi  $C^\infty$  bornée ainsi que toutes ses dérivées.

Nous pouvons désormais écrire l'équation dans les nouvelles coordonnées :

**PROPOSITION 1.8.** – *Il existe  $\eta > 0$ , des éléments  $a_{11}, a_{01}$  dans  $\mathcal{E}_1^{\mathbb{R}}$ ,  $a_1, c$  dans  $\mathcal{E}_1$  admettant des décompositions de la forme*

$$(1.37) \quad a_{ij}(T, X, z) = \ell_{ij}(T, X, z) + \frac{1}{\sqrt{T}} b_{ij}(T, X, z), \quad (i, j) = (1, 1) \text{ ou } (0, 1),$$

$$(1.38) \quad a_1(T, X, z) = \ell_1(T, X, z) + \frac{1}{\sqrt{T}} b_1(T, X, z),$$

avec  $\ell_{ij} \in \mathcal{L}_{\mathbf{b}}^{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^3; \mathbb{C})$ ,  $b_{ij} \in \mathcal{E}_1^{\mathbb{R}}$ ,  $(i, j) = (1, 1)$  ou  $(0, 1)$ ,  $\ell_1 \in \mathcal{L}_{\mathbf{b}}(\mathbb{C}^3; \mathbb{C})$ ,  $b_1 \in \mathcal{E}_1$ , tels qu'une fonction  $v(t, x) = T^{-1/2}(\operatorname{ch} \kappa X)^{-1} w(T, X)$ , définie sur un domaine  $\{(T, X); T_0 \leq T \leq T_1\}$ , et y vérifiant l'inégalité

$$(1.39) \quad \sup_{\substack{T_0 \leq T \leq T_1 \\ X \in \mathbb{R}}} \left[ |w(T, X)| + \left| \frac{D_X}{T} w(T, X) \right| + |D_T w(T, X)| \right] < \eta,$$

soit solution de

$$\square v + v = F(v, \partial_t v, \partial_x v, \partial_t \partial_x v, \partial_x^2 v)$$

si et seulement si  $w$  vérifie

$$(1.40) \quad \begin{aligned} D_T^2 w - \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{T}} a_{11} \left( T, X, w, \partial_T w, \frac{\partial_X}{T} w \right) \right) \frac{D_X^2}{T^2} w \\ - \frac{1}{\sqrt{T}} a_{01} \left( T, X, w, \partial_T w, \frac{\partial_X}{T} w \right) \frac{D_X}{T} D_T w - w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= i \frac{K(X)}{T} \frac{D_X}{T} w + \frac{1}{\sqrt{T}} A_2(X, w, \partial_T w) + \frac{1}{T} A_3(X, w, \partial_T w) \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{T}} a_1 \left( T, X, w, D_T w, \frac{D_X}{T} w \right) \frac{D_X}{T} w + \frac{1}{T^{3/2}} c \left( T, X, w, D_T w, \frac{D_X}{T} w \right).
\end{aligned}$$

*Démonstration.* – D'après (1.21) et le lemme 1.6, l'équation  $\square v + v = F$  se réécrit en termes de  $w$  et des coordonnées  $(T, X)$

$$\begin{aligned}
(1.41) \quad &\left[ D_T^2 - \frac{D_X^2}{T^2} - i \frac{K(X)}{T} \frac{D_X}{T} - 1 - \frac{1}{T^2} \left( \frac{1}{4} + \kappa^2 (1 - 2\text{th}^2(\kappa X)) \right) \right] w \\
&= (D_T^2 w) I \left( T, X, w, \partial_T w, \frac{\partial_X}{T} w \right) - \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{\text{ch}^2 X}{\text{ch}(\kappa X)} \tilde{Q}' - \frac{1}{T} \frac{\text{ch}^3 X}{\text{ch}^2(\kappa X)} \tilde{P}' \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{T}} \left[ \tilde{\ell}_{01} \left( T, X, w, \partial_T w, \frac{\partial_X}{T} w \right) + \frac{1}{\sqrt{T}} \tilde{\ell}_{01}^2 \left( T, X, w, \partial_T w, \frac{\partial_X}{T} w \right) \right] \frac{D_X}{T} D_T w \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{T}} \left[ \tilde{\ell}_{11} \left( T, X, w, \partial_T w, \frac{\partial_X}{T} w \right) + \frac{1}{\sqrt{T}} \tilde{\ell}_{11}^2 \left( T, X, w, \partial_T w, \frac{\partial_X}{T} w \right) \right] \frac{D_X^2}{T^2} w \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{T}} \left[ \tilde{\ell}_1 \left( X, w, D_T w, \frac{D_X}{T} w \right) + \frac{1}{\sqrt{T}} \tilde{\ell}_1^2 \left( X, w, D_T w, \frac{D_X}{T} w \right) \right] \frac{D_X}{T} w \\
&\quad + \frac{1}{T^{3/2}} \tilde{c} \left( T, X, w, D_T w, \frac{D_X}{T} w \right),
\end{aligned}$$

où  $\tilde{\ell}_{01}$  et  $\tilde{\ell}_{11}$  sont dans  $\mathcal{L}_{\mathbf{b}}^{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^3; \mathbb{C})$ ,  $\tilde{\ell}_{01}^2$  et  $\tilde{\ell}_{11}^2$  sont dans  $\mathcal{L}_{\mathbf{b}}^{2, \mathbb{R}}(\mathbb{C}^3; \mathbb{C})$ ,  $\tilde{\ell}_1 \in \mathcal{L}_{\mathbf{b}}(\mathbb{C}^3; \mathbb{C})$ ,  $\tilde{\ell}_1^2 \in \mathcal{L}_{\mathbf{b}}^2(\mathbb{C}^3; \mathbb{C})$ ,  $\tilde{c}$  est somme d'un élément de  $\mathcal{L}_{\mathbf{b}}^2(\mathbb{C}^3; \mathbb{C})$  et d'un élément de  $\mathcal{L}_{\mathbf{b}}^3(\mathbb{C}^3; \mathbb{C})$ , donc est en particulier dans  $\mathcal{E}_2$ , et  $I$  est donné par

$$\begin{aligned}
(1.42) \quad I &= \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{\text{ch}^3 X}{\text{ch} \kappa X} \tilde{Q}''(X, w, \partial_T w) + \frac{1}{T} \frac{\text{ch}^4 X}{\text{ch}^2 \kappa X} \tilde{P}''(X, w, \partial_T w) + \frac{1}{\sqrt{T}} \tilde{\ell}_1 \left( X, \frac{\partial_X}{T} w \right) \\
&\quad + \frac{1}{T} \tilde{\ell} \left( X, w, \partial_T w, \frac{\partial_X}{T} w \right) \frac{\partial_X}{T} w + \frac{1}{T^{3/2}} \tilde{c} \left( T, X, w, \partial_T w, \frac{\partial_X}{T} w \right),
\end{aligned}$$

où  $\tilde{\ell}_1 \in \mathcal{L}_{\mathbf{b}}^{\mathbb{R}}(\mathbb{C}; \mathbb{C})$ ,  $\tilde{\ell} \in \mathcal{L}_{\mathbf{b}}^{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^3; \mathbb{C})$  et  $\tilde{c} \in \mathcal{E}_1^{\mathbb{R}}$ . Comme la norme  $L^\infty$  de  $I$  se contrôle à partir de (1.39), on peut choisir  $\eta > 0$  assez petit pour que  $|I| \leq 1/2$ . On a alors

$$\begin{aligned}
(1.43) \quad (1 - I)^{-1} &= 1 + \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{\text{ch}^3 X}{\text{ch} \kappa X} \tilde{Q}'' + \frac{1}{\sqrt{T}} \tilde{\ell}_1 \left( X, \frac{\partial_X}{T} w \right) \\
&\quad + \frac{1}{T} \left[ \frac{\text{ch}^4 X}{\text{ch}^2 \kappa X} \tilde{P}'' + \frac{\text{ch}^6 X}{\text{ch}^2 \kappa X} \tilde{Q}''^2 \right] + \frac{1}{T} \tilde{\ell} \left( X, w, \partial_T w, \frac{\partial_X}{T} w \right) \frac{\partial_X}{T} w \\
&\quad + \frac{1}{T^{3/2}} \tilde{c} \left( T, X, w, \partial_T w, \frac{\partial_X}{T} w \right),
\end{aligned}$$

où  $\hat{\ell} \in \mathcal{L}_{\mathbf{b}}^{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^3; \mathbb{C})$  et  $\hat{c} \in \mathcal{E}_1$ .

Il ne reste plus, dans (1.41), qu'à regrouper les dérivées secondes dans le membre de gauche, et à diviser l'expression ainsi obtenue par  $1 - I$ , pour déduire de (1.43) l'égalité (1.40).  $\square$

Nous utiliserons dans la suite les expressions de  $A_2$  et  $A_3$  en fonction des  $q'_k, q''_k, p'_k, p''_k$  définis par (1.7).

LEMME 1.9. – (i) *Considérons la matrice*

$$(1.44) \quad \tilde{A}_2(X) = -\frac{1}{\operatorname{ch} \kappa X} \begin{bmatrix} -q'_2 & \frac{i}{2}(q'_1 + q''_1) \\ \frac{i}{2}(q'_1 + q''_1) & q'_0 + q''_0 \end{bmatrix} (\omega_0(\operatorname{th} X), \omega_1(\operatorname{th} X)).$$

Alors

$$A_2(X, w, \partial_T w) = [D_T w \quad w] \tilde{A}_2(X) \begin{bmatrix} D_T w \\ w \end{bmatrix}.$$

(ii) *La forme cubique  $A_3$  est donnée par l'expression*

$$(1.45) \quad A_3(X, w, \partial_T w) = -\frac{1}{\operatorname{ch}^2 \kappa X} \left[ w^3 (p_0 - q''_0(q'_0 + q''_0)) + w^2 (D_T w) (ip_1 - iq''_0(q'_1 + q''_1) - iq''_1(q'_0 + q''_0)) \right. \\ \left. + w (D_T w)^2 (-p_2 + q'_2 q''_0 + q''_1(q'_1 + q''_1)) + (D_T w)^3 (-ip'_3 + iq''_1 q'_2) \right],$$

où les  $p_k, q'_k, q''_k$  sont évalués en  $(\omega_0(\operatorname{th} X), \omega_1(\operatorname{th} X))$ .

*Démonstration.* – Il suffit de substituer dans (1.36) les expressions (1.28), (1.29).  $\square$

Le théorème 1.2 peut alors se ramener à la preuve du résultat suivant :

THÉORÈME 1.10. – *Supposons la condition nulle vérifiée par la non-linéarité  $F$  et fixons  $\kappa \geq 3$ ,  $\sigma \in \mathbb{N}$ ,  $\sigma > 7/2$ . Il existe  $T_0 > 0$  et pour tous  $B_0 > 0$ ,  $C_0 > 0$ , il existe  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $C > 0$  tels que pour tout couple  $(w_0, w_1)$  dans la boule de centre 0, de rayon  $C_0$  de  $H^\sigma(\mathbb{R}) \times H^{\sigma-1}(\mathbb{R})$ , supporté dans  $[-B_0, B_0]$ , à valeurs réelles, l'équation (1.40) avec les données initiales  $w|_{T=T_0} = \varepsilon w_0$ ,  $D_T w|_{T=T_0} = \varepsilon w_1$  admette, lorsque  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$ , une unique solution globale  $w \in C^0([T_0, +\infty[, H^\sigma) \cap C^1([T_0, +\infty[, H^{\sigma-1})$ . De plus, on a,*

$$(1.46) \quad \sup_{T \geq T_0} \sum_{m+n \leq 2} \left\| D_T^m \left( \frac{D_X}{T} \right)^n w(T, \cdot) \right\|_{L^\infty} \leq C\varepsilon.$$

*Démonstration du théorème 1.2.* – D'après la proposition 1.4, le problème (1.1) peut être résolu sur  $G_{T_0}$ , où on peut choisir  $T_0$  supérieur à  $2B$  et au  $T_0$  de l'énoncé du théorème 1.20. De plus, la restriction de  $v$  et de ses dérivées à l'hyperbole  $t = \sqrt{T_0^2 + x^2} - 2B$  est à support compact (dans  $|x| \leq t + B$ ) et vérifie les estimations (1.15). Si la constante  $C_0$  du théorème 1.10 est choisie assez grande devant la constante  $C_1$  de (1.15), et si  $w$  est définie à partir de  $v$  par (1.20),  $w|_{T=T_0}$  et  $D_T w|_{T=T_0}$  vérifient les hypothèses du théorème 1.10. Par conséquent, pour  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$ ,  $w$  se prolonge en une solution de (1.40) définie pour  $T \geq T_0$ , et vérifiant (1.46). Quitte à diminuer  $\varepsilon_0$ , la condition (1.39) est satisfaite avec  $T_1 = +\infty$ , et la proposition 1.8 entraîne alors que la fonction  $v$  correspondant à  $w$  par (1.20) est solution de (1.1) pour  $t \geq 0$ . Le fait que  $v \in C^0(\mathbb{R}_+, H^\sigma) \cap C^1(\mathbb{R}_+, H^{\sigma-1})$  ne résulte pas directement des conditions analogues pour  $w$ , puisque ces espaces ne sont pas invariants par le changement de variables  $(t, x) \rightarrow (T, X)$ . Toutefois, l'inégalité (1.46) entraîne que  $\sup_{T_0 \leq T \leq T_1} \|\partial_{(T,X)}^\alpha w(T, \cdot)\|_{L^\infty}$  est finie pour  $|\alpha| \leq 2$ , ce qui entraîne la finitude de  $\sup_{[0, t_1]} \|\partial_{(t,x)}^\alpha v(t, \cdot)\|_{L^\infty}$ ,  $|\alpha| \leq 2$ , pour tout  $t_1 > 0$ . Ce dernier renseignement entraîne classiquement la propagation de la régularité  $H^\sigma$  de  $v$  et  $H^{\sigma-1}$  de  $\partial_t v$ .  $\square$

*Remarque 1.11.* – L'espace de Sobolev  $H^\sigma$  dans les coordonnées  $X$  correspond, dans les coordonnées de départ, à l'espace des  $v$  qui restent dans  $L^2$  lorsqu'on leur applique  $\sigma$  itérés

des champs  $t\partial_x + x\partial_t$  ou  $\partial_x$ . En d'autres termes, les coordonnées  $(T, X)$  nous permettent d'exploiter directement les classiques « champs de Klainerman » [12] tout en étant capables de microlocaliser facilement leur action, comme on le verra dans la section suivante.

## 2. Calcul paradifférentiel et applications

La preuve du théorème 1.10 va reposer en partie sur l'écriture de (1.40) sous forme d'un système paradifférentiel, auquel pourra s'appliquer une version paradifférentielle de la méthode des formes normales de Shatah [20]. Nous devons pour cela introduire des classes de symboles convenables, adaptées à la forme du membre de gauche de (1.40), et des espaces sur lesquels agissent les opérateurs associés à ces symboles. Dans la mesure où nous n'utiliserons dans la suite (sauf au paragraphe 3.2) que les coordonnées hyperboliques introduites dans le paragraphe précédent, nous revenons pour celles-ci à la notation  $(t, x)$ .

### 2.1. Espaces de Sobolev et opérateurs paradifférentiels

Nous allons définir des classes de symboles d'opérateurs paradifférentiels adaptées à nos besoins. Pour ce qui est des opérateurs paradifférentiels usuels, nous renvoyons à l'article original de Bony [3], au chapitre 10 de la monographie d'Hörmander [10] et, en ce qui concerne le paraproduit, au chapitre 2 de l'ouvrage de Chemin [5].

#### Espaces de Sobolev

Nous fixons une partition dyadique  $C^\infty$  de l'identité, i.e. nous choisissons une fonction  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R} - \{0\})$ , paire, positive ou nulle, supportée dans  $\{\xi ; 3/4 < |\xi| < 8/3\}$  et  $\chi \in C_0^\infty([-4/3, 4/3])$ , paire, positive ou nulle, égale à 1 près de 0, telles que

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \chi(\xi) + \sum_0^{+\infty} \varphi(2^{-j}\xi) &\equiv 1, \\ |j - j'| \geq 2 &\Rightarrow \text{Supp}(\varphi(2^{-j}\cdot)) \cap \text{Supp}(\varphi(2^{-j'}\cdot)) = \emptyset, \\ j \geq 1 &\Rightarrow \text{Supp}\chi \cap \text{Supp}\varphi(2^{-j}\cdot) = \emptyset \end{aligned}$$

(cf. [5], chapitre 2). Nous désignerons par  $\Delta_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$  (resp. par  $\Delta_{-1}$ ) le multiplicateur de Fourier de symbole  $\varphi(2^{-j}\xi)$  (resp.  $\chi(\xi)$ ), de telle manière que  $\sum_{-1}^{+\infty} \Delta_j = \text{Id}$ . Pour  $j \in \mathbb{N}$ , nous posons  $S_j = \sum_{-1}^{j-1} \Delta_k$ . Nous commençons par définir une famille d'espaces de Sobolev dépendant du paramètre  $t \geq 1$ .

*Définition 2.1.* – Soient  $s, s', \alpha \in \mathbb{R}$ . On note  $H_\alpha^{s, s'}(t)$  l'espace des distributions tempérées  $u$  sur  $\mathbb{R}$  telles que

$$(2.2) \quad \|u\|_{H_\alpha^{s, s'}(t)} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \left( \sum_{j=-1}^{+\infty} 2^{2js} \left[ \frac{2^j}{t} \left( 1 + \frac{2^j}{t} \right)^{-1} \right]^{-2\alpha} \left( 1 + \frac{2^j}{t} \right)^{2s'} \|\Delta_j u\|^2 \right)^{1/2} < +\infty.$$

On pose en outre

$$(2.3) \quad E_\alpha^{s, s'}(t) = H_\alpha^{s, s'}(t) \cap L^\infty$$

muni de la norme  $\|u\|_{E_\alpha^{s, s'}(t)} = \|u\|_{H_\alpha^{s, s'}(t)} + \|u\|_{L^\infty}$ .

On remarquera que l'espace  $H_{\alpha}^{s,s'}(t)$  n'est autre, à  $t$  fixé, que l'espace de Sobolev usuel  $H^{s+s'}$  ; seule la norme choisie dépend de  $t$ . Lorsque  $t$  et  $t'$  restent dans un intervalle compact de  $[1, +\infty[$  les normes  $H_{\alpha}^{s,s'}(t)$  et  $H_{\alpha}^{s,s'}(t')$  définies par (2.2) sont équivalentes entre elles, avec des constantes uniformes. Ce n'est bien sûr plus le cas si  $t \rightarrow +\infty$ .

Dans la suite, lorsque nous parlerons d'un opérateur linéaire borné de  $H_{\alpha}^{s,s'}(t)$  dans  $H_{\alpha_1}^{s_1,s'_1}(t)$ , il s'agira toujours, sauf mention explicite du contraire, d'un opérateur dont la norme est majorée par une constante indépendante de  $t \geq 1$ . De même, lorsque nous parlerons d'une fonction continue bornée de  $t \in [T_0, +\infty[$  à valeurs dans  $H_{\alpha}^{s,s'}(t)$ , il s'agira d'une fonction continue à valeurs dans  $H^{s+s'}$  vérifiant une estimation uniforme

$$(2.4) \quad \sup_{t \geq T_0} \|u(t, \cdot)\|_{H_{\alpha}^{s,s'}(t)} < +\infty.$$

Nous utiliserons le même type de conventions lorsque nous parlerons de fonctions  $C^1$  bornées ainsi que leur dérivée à valeurs dans  $H_{\alpha}^{s,s'}(t)$ ,  $E_{\alpha}^{s,s'}(t)$ ...

*Remarque 2.1.* – Justifions l'introduction des espaces définis par (2.2). Compte tenu de (1.11) et du changement de variables (1.17), les fonctions que nous souhaitons étudier seront de la forme

$$W_1(x) \exp[it + iW_2(x) \log t],$$

où  $W_1$  et  $W_2$  sont régulières bornées ainsi que leurs dérivées, avec  $W_2$  à valeurs réelles. De telles fonctions sont bornées mais leurs dérivées en  $x$  croissent lorsque  $t \rightarrow +\infty$  comme des puissances de  $\log t$ . L'espace  $E_{\alpha}^{s,s'}(t)$  avec  $\alpha < 0$  est construit pour autoriser un tel comportement : en fait, les dérivées d'un élément de  $E_{\alpha}^{s,s'}(t)$  peuvent croître comme  $t^{-\alpha}$ . Bien entendu, la définition 2.1 impose des propriétés plus précises, puisqu'après localisation en fréquence de taille  $2^j$ , la croissance lorsque  $t \gg 2^j$  est en  $(t/2^j)^{-\alpha}$ .

Nous utiliserons à plusieurs reprises la propriété suivante des espaces  $H_{\alpha}^{s,s'}(t)$  : soit  $(v_j)_{j \geq -1}$  une suite de distributions tempérées telles qu'il existe  $C > 0$ ,  $C_0 > 0$ ,  $(c_j)_{j \geq -1}$  vérifiant  $\sum |c_j|^2 \leq 1$ , avec les propriétés

$$(2.5) \quad \begin{aligned} & \text{Supp } \widehat{v}_{-1} \subset \{\xi; |\xi| < C_0\}, \\ & \text{Supp } \widehat{v}_j \subset \{\xi; C_0^{-1}2^j < |\xi| < C_02^j\}, \quad \forall j \in \mathbb{N}, \\ & \|v_j\| \leq C c_j 2^{-js} \left[ \frac{2^j}{t} \left(1 + \frac{2^j}{t}\right)^{-1} \right]^{\alpha} \left(1 + \frac{2^j}{t}\right)^{-s'}, \quad \forall j \in \mathbb{N} \cup \{-1\}. \end{aligned}$$

Alors  $\sum_{-1}^{+\infty} v_j$  est dans  $H_{\alpha}^{s,s'}(t)$ , et sa norme dans cet espace est majorée par le produit de  $C$  et d'une constante indépendante de  $t \geq 1$ .

Nous utiliserons les opérateurs de paraproduit et de reste de Bony [3]. Si  $u, v$  sont dans  $S'(\mathbb{R})$ , nous posons

$$(2.6) \quad T_u v = (S_0 u)(S_1 v) + \sum_{j=1}^{+\infty} S_{j-1} u \Delta_j v$$

et, lorsque la série ci-dessous converge,

$$(2.7) \quad R(u, v) = \sum_{\substack{|j-j'| \leq 1 \\ j+j' \geq 0}} \Delta_j u \Delta_{j'} v - \Delta_{-1} u \Delta_{-1} v.$$

Lorsque le produit a un sens, il se décompose en  $uv = T_u v + T_v u + R(u, v)$ . On remarquera que les définitions (2.6), (2.7) diffèrent de celles de Bony [3] et Chemin [5] en ce qui concerne les termes de basse fréquence. Nous choisissons les définitions ci-dessus car elles entraînent l'égalité exacte  $uv = T_u v$  lorsque  $u$  est une constante. Nous utiliserons également la variante suivante des définitions précédentes

$$(2.8) \quad T_u v = (S_0 u)(S_{j_0} v) + \sum_{j=j_0}^{+\infty} S_{j-j_0} u \Delta_j v,$$

$$(2.9) \quad R(u, v) = \sum_{\substack{|j-j'| \leq j_0 \\ j \geq 0 \text{ et } j' \geq 0}} \Delta_j u \Delta_{j'} v - \Delta_{-1} u \Delta_{-1} v,$$

où  $j_0 \geq 1$  est un paramètre fixé. On a toujours  $uv = T_u v + T_v u + R(u, v)$  et  $uv = T_u v$  si  $u$  est une constante.

Rappelons enfin que pour  $\rho \in \mathbb{R}_+^* - \mathbb{N}$ , l'espace de Hölder  $C^\rho$  est caractérisé par la propriété

$$(2.10) \quad \sup_{j \geq -1} 2^{j\rho} \|\Delta_j u\|_{L^\infty} < +\infty.$$

Établissons un certain nombre de résultats qui nous seront utiles.

LEMME 2.2. – (i) L'application  $(u, v) \mapsto T_u v$  est bornée de  $L^\infty \times H_\alpha^{s, s'}(t)$  dans  $H_\alpha^{s, s'}(t)$  quels que soient  $s, s', \alpha$ .

(ii) L'application  $(u, v) \mapsto R(u, v)$  est bornée de  $L^\infty \times H_\alpha^{s, s'}(t)$  dans  $H_\alpha^{s, s'}(t)$  si  $s + s' > 0$  et  $s > \alpha$ , ainsi que de  $H_\alpha^{s, s'}(t) \times H_\beta^{s, s''}(t)$  dans  $H_{\alpha+\beta}^{2s-1/2, s'+s''}(t)$  si  $s + (s' + s'')/2 > 0$  et  $s > (\alpha + \beta)/2$ .

(iii) Si  $s + s' > 1/2$  et  $\rho = s - 1/2 - \alpha > 0$ ,  $H_\alpha^{s, s'}(t)$  est inclus dans  $t^{-\alpha} L^\infty$ . Si de plus  $s' + \alpha \geq 0$  et  $\rho$  n'est pas entier  $H_\alpha^{s, s'}(t)$  est inclus dans  $t^{-\alpha} C^\rho$ .

Démonstration. – (i) Il suffit d'écrire que  $\|\Delta_j T_u v\| \leq \sum_{|p-j| \leq N_0} \|\Delta_j (S_{p-1} u \Delta_p v)\|$  pour un entier  $N_0$  fixe (lorsque  $j$  est assez grand pour que le terme en  $S_0 u S_1 v$  de (2.6) n'intervienne pas) et de majorer le terme général par  $C \|S_{p-1} u\|_{L^\infty} \|\Delta_p v\| \leq C' \|u\|_{L^\infty} \|\Delta_p v\|$ .

(ii) On écrit, pour  $j$  assez grand,  $\Delta_j R(u, v) = \sum_{|p-q| \leq 1, q \geq j-N_0} \Delta_j (\Delta_p u \Delta_q v)$ . On a

$$\begin{aligned} \|\Delta_j (\Delta_p u \Delta_q v)\| &\leq C \|\Delta_p u\|_{L^\infty} \|\Delta_q v\| \\ &\leq \|u\|_{L^\infty} c_q(t) 2^{-qs} \left[ \frac{2^q}{t} \left( 1 + \frac{2^q}{t} \right)^{-1} \right]^\alpha \left( 1 + \frac{2^q}{t} \right)^{-s'} \|v\|_{H_\alpha^{s, s'}(t)}, \end{aligned}$$

avec  $(c_q(t))_q$  dans la boule unité de  $\ell^2$ . La somme en  $p, q$  des quantités précédentes se majore par  $C \|u\|_{L^\infty} \|v\|_{H_\alpha^{s, s'}(t)}$  fois

$$\sum_{2^{j-N_0} \leq 2^q \leq t} c_q 2^{-q(s-\alpha)} t^{-\alpha} + \sum_{\substack{t < 2^q \\ j-N_0 \leq q}} c_q 2^{-q(s+s')} t^{s'}.$$

Lorsque  $2^{j-N_0} < t$  cette quantité se majore par  $C 2^{-js} (2^j/t)^\alpha [c'_j + (2^j/t)^{s-\alpha}]$  pour une suite  $(c'_j)_j$  de la boule unité de  $\ell^2$ , et lorsque  $2^{j-N_0} > t$  par  $C c'_j 2^{-js} (2^j/t)^{-s'}$ , avec également  $(c'_j)_j \in \ell^2$ . La première conclusion de (ii) en découle. Pour obtenir la seconde conclusion, on majore

$$\begin{aligned}
 & \|\Delta_j(\Delta_p u \Delta_q v)\| \\
 & \leq C 2^{j/2} \|\Delta_p u \Delta_q v\|_{L^1} \\
 & \leq C 2^{j/2} c_q 2^{-2qs} \left[ \frac{2^q}{t} \left( 1 + \frac{2^q}{t} \right)^{-1} \right]^{\alpha+\beta} \left( 1 + \frac{2^q}{t} \right)^{-s'-s''} \|u\|_{H_{\alpha}^{s,s'}(t)} \|v\|_{H_{\beta}^{s,s''}(t)},
 \end{aligned}$$

avec  $(c_q)_q \in \ell^1 \subset \ell^2$ . Il ne reste qu'à sommer en utilisant  $s + (s' + s'')/2 > 0$ ,  $s > (\alpha + \beta)/2$ .

(iii) Il suffit d'écrire

$$\|\Delta_j u\|_{L^\infty} \leq C 2^{j/2} \|\Delta_j u\| \leq C 2^{j/2-j s} \left[ \frac{2^j}{t} \left( 1 + \frac{2^j}{t} \right)^{-1} \right]^{\alpha} \left( 1 + \frac{2^j}{t} \right)^{-s'} \|u\|_{H_{\alpha}^{s,s'}(t)}.$$

La première conclusion en découle en sommant en  $j$ . Lorsque  $s' + \alpha \geq 0$  le membre de droite de l'inégalité précédente est majoré par  $C 2^{-j\rho} t^{-\alpha} \|u\|_{H_{\alpha}^{s,s'}(t)}$  donc  $u \in t^{-\alpha} C^{\rho}$ .  $\square$

COROLLAIRE 2.3. – (i) Si  $s + s' > 0$  et  $s > \alpha$ ,  $E_{\alpha}^{s,s'}(t)$  est une algèbre. On a

$$\|uv\|_{E_{\alpha}^{s,s'}(t)} \leq C [\|u\|_{L^\infty} \|v\|_{E_{\alpha}^{s,s'}(t)} + \|u\|_{E_{\alpha}^{s,s'}(t)} \|v\|_{L^\infty}].$$

(ii) Si  $\gamma$  est une fonction  $C^\infty$  bornée ainsi que toutes ses dérivées, et si  $u \in H_{\alpha}^{s,s'}(t)$ , alors  $\gamma u \in H_{\alpha}^{s,s'}(t)$ . En outre,  $T_u \gamma + R(\gamma, u) \in H_{\alpha}^{s+N,s'}(t)$  pour tout  $N$ .

(iii) Si  $u \in E_{\alpha}^{s,s'+1}(t)$  avec  $s + s' > 1/2$  et  $s \geq 1/2$ ,  $\frac{D_x}{t} u \in E_{\alpha+1}^{s,s'}(t)$ .

(iv) Soit  $m(\xi)$  une fonction  $C^\infty$  bornée. Alors  $m(D/t)$  est bornée sur  $E_{\alpha}^{s,s'}(t)$  si  $s + s' > 1/2$  et  $s \geq 1/2$ .

(v) Si  $s + s' > 1/2$ ,  $s > 3/2 + \alpha$ ,  $u \in H_{\alpha+1}^{s,s'}(t)$  et  $v \in E_{\alpha}^{s,s'}(t)$  entraîne  $uv \in H_{\alpha+1}^{s,s'}(t) + t^{-1-\alpha} H_{\alpha}^{s,s'}(t)$ . De même,  $u \in H_{\alpha}^{s,s'}(t)$  et  $v \in E_{\alpha}^{s,s'}(t)$  entraîne  $uv \in t^{-\alpha} H_{\alpha}^{s,s'}(t)$ .

Démonstration. – (i) Il suffit d'écrire  $uv = T_u v + T_v u + R(u, v)$  et d'appliquer (i) et (ii) du lemme précédent.

(ii) D'après (i) du lemme précédent,  $T_\gamma u \in H_{\alpha}^{s,s'}(t)$ . D'autre part, en utilisant que  $\|\Delta_j \gamma\|_{L^\infty} \leq C_N 2^{-jN}$  pour tout  $N$  et tout  $j$ , on obtient si  $|p - q| \leq 1$

$$\|\Delta_j(\Delta_p \gamma \Delta_q u)\| \leq C c_q 2^{-q(s+N)} \left[ \frac{2^q}{t} \left( 1 + \frac{2^q}{t} \right)^{-1} \right]^{\alpha} \left( 1 + \frac{2^q}{t} \right)^{-s'},$$

avec  $(c_q)_q \in \ell^2$ , d'où en sommant pour  $q \geq j - N_0$ ,  $R(\gamma, u) \in H_{\alpha}^{s+N,s'}(t)$ , si  $N$  a été choisi assez grand pour que  $s + s' + N > 0$ ,  $s + N > \alpha$ . Il reste à étudier  $T_u \gamma$ . Or, remarquons que

$$\|S_{j-1} u\| \leq \sum_{p=-1}^{j-2} \|\Delta_p u\| \leq \sum_{\substack{2^p < t \\ p \leq j-2}} c_p 2^{-ps} (2^p/t)^{\alpha} + \sum_{t \leq 2^p \leq 2^{j-2}} c_p 2^{-p(s+s')} t^{s'},$$

avec  $(c_p)_p \in \ell^2$ . Lorsque  $2^{j-2} < t$ , on obtient  $\|S_j u\| \leq C (2^j/t)^{\alpha} 2^{jM}$  pour un certain  $M$ . Lorsque  $2^{j-2} \geq t$ , on majore par un  $2^{jM'}$  pour un certain  $M'$ . Comme

$$\|S_{j-1} u \Delta_j \gamma\| \leq \|S_{j-1} u\| \|\Delta_j \gamma\|_{L^\infty}$$

et que le dernier terme est en  $2^{-jN}$  quel que soit  $N$ , on en déduit  $T_u \gamma \in H_{\alpha}^{s+N,s'}$  si  $N$  est pris assez grand devant  $M, M'$ .

(iii) Il est évident que  $\frac{D_x}{t}u \in H_{\alpha+1}^{s,s'}$ . Pour montrer que  $\frac{D_x}{t}u \in L^\infty$ , remarquons que si  $\chi \in C_0^\infty$ ,  $\|\chi(\frac{D_x}{t})\frac{D_x}{t}u\|_{L^\infty} \leq C\|u\|_{L^\infty}$  avec une constante indépendante de  $t$ . Il suffit donc de voir que, si on suppose de plus  $\chi \equiv 1$  près de 0,  $(1 - \chi(\frac{D_x}{t}))\frac{D_x}{t}u$  s'estime en norme  $L^\infty$  à partir de  $\|u\|_{H_\alpha^{s,s'+1}(t)}$ . Or, cette norme  $L^\infty$  est majorée par

$$\sum_{2^j \geq ct} \left\| \Delta_j \frac{D_x}{t} u \right\|_{L^\infty} \leq C \sum_{2^j \geq ct} \frac{2^{3j/2}}{t} 2^{-js} \left( \frac{2^j}{t} \right)^{-s'-1} \|u\|_{H_\alpha^{s,s'+1}(t)} \leq Ct^{1/2-s} \|u\|_{H_\alpha^{s,s'+1}(t)},$$

d'où le résultat puisque  $s - 1/2 \geq 0$ .

(iv) Il suffit de raisonner comme dans la preuve de (iii).

(v) On a  $T_v u + R(u, v) \in H_{\alpha+1}^{s,s'}(t)$  d'après le lemme 2.2, puisque  $v \in L^\infty$ . D'autre part, le lemme 2.2 (iii) entraîne que  $u \in t^{-\alpha-1}L^\infty$  donc  $T_u v \in t^{-\alpha-1}H_\alpha^{s,s'}(t)$ . La seconde assertion se démontre de même.  $\square$

**COROLLAIRE 2.4.** – Soient  $s, s'$  vérifiant  $s + s' > 0$ ,  $s > \alpha$ . Soit  $F$  une fonction holomorphe bornée sur  $\{z \in \mathbb{C}^d; |z| < r\}$  avec  $F(0) = 0$ . Il existe  $L \geq 2$  tel que pour tout  $t \geq 1$ , tout  $u \in E_\alpha^{s,s'}(t)$ , de norme dans cet espace inférieure à  $r/L$ ,  $F(u) \in E_\alpha^{s,s'}(t)$  et vérifie l'estimation uniforme

$$(2.11) \quad \|F(u)\|_{E_\alpha^{s,s'}(t)} \leq C \|u\|_{E_\alpha^{s,s'}(t)} \sup_{|z| < r} |F(z)|.$$

De plus,  $u \rightarrow F(u)$  est  $C^1$  sur la boule de centre 0 de rayon  $r/L$  de  $E_\alpha^{s,s'}(t)$  et on a l'estimation suivante, pour tous  $u, v$  dans cette boule,

$$(2.12) \quad \|F(u+v) - F(u) - F'(u)v\|_{E_\alpha^{s,s'}(t)} \leq C \|v\|_{E_\alpha^{s,s'}(t)}^2 \sup_{|z| < r} |F(z)|$$

avec une constante  $C$  uniforme.

*Démonstration.* – Écrivons pour  $|z| \leq r/2$ ,

$$|F^{(k)}(z)| \leq k!(2/r)^k \sup_{|\zeta| < r} |F(\zeta)|,$$

d'où

$$\|F(u)\|_{E_\alpha^{s,s'}(t)} \leq \sum_1^{+\infty} \frac{|F^{(k)}(0)|}{k!} \|u^k\|_{E_\alpha^{s,s'}(t)} \leq \sup_{|z| < r} |F(z)| \sum_1^{+\infty} (2/r)^k C^k \|u\|_{E_\alpha^{s,s'}(t)}^k$$

en utilisant le (i) du corollaire précédent. Si  $L > 2C$ , on obtient (2.11). Le même raisonnement appliqué à  $F^{(\ell)}$  sur  $\{z; |z| < 2r/3\}$  donne, quitte à prendre  $L > 6C$ ,

$$\|F^{(\ell)}(u)\|_{E_\alpha^{s,s'}(t)} \leq C \sup_{|z| < 2r/3} |F^{(\ell)}(z)| \leq C' \ell! (3/r)^\ell \sup_{|\zeta| < r} |F(\zeta)|.$$

Il suffit alors d'écrire

$$\|F(u+v) - F(u) - F'(u)v\|_{E_\alpha^{s,s'}(t)} \leq \sum_2^{+\infty} \frac{C^{k+1}}{k!} \|F^{(k)}(u)\|_{E_\alpha^{s,s'}(t)} \|v\|_{E_\alpha^{s,s'}(t)}^k$$

pour obtenir (2.12).  $\square$

Nous utiliserons enfin le corollaire suivant :

**COROLLAIRE 2.5.** – Soient  $s, s', \alpha, \beta$  vérifiant  $s + s' > 1/2 + \beta - \alpha$ ,  $s > 1/2 + \beta$ ,  $\beta \geq \alpha$ ,  $s > (\alpha + \beta)/2$ ,  $s' + \alpha \geq 0$ . L'opérateur  $(u, v) \mapsto uv - T_u v$  est borné de  $H_\alpha^{s, s'}(t) \times H_\beta^{s, s' - (\beta - \alpha)}(t)$  à valeurs dans  $t^{-\beta} H_\alpha^{s, s'}(t)$ .

*Démonstration.* – Comme  $\|v\|_{L^\infty} \leq C t^{-\beta} \|v\|_{H_\beta^{s, s' - (\beta - \alpha)}(t)}$  d'après le (iii) du lemme 2.2, le (i) de ce même lemme montre que  $(u, v) \mapsto T_v u$  satisfait la propriété voulue. Il reste à montrer que  $R(u, v) \in t^{-\beta} H_\alpha^{s, s'}(t)$ . D'après le (ii) du lemme 2.2, qui s'applique grâce aux hypothèses sur  $s, s', \alpha, \beta$ , il suffit de voir que

$$H_{\alpha+\beta}^{2s-1/2, 2s'-(\beta-\alpha)}(t) \subset t^{-\beta} H_\alpha^{s, s'}(t).$$

Or, on a si  $u$  est dans le premier espace

$$\begin{aligned} \|\Delta_j u\| &\leq C \left\{ \left[ \frac{2^j}{t} \left( 1 + \frac{2^j}{t} \right)^{-1} \right]^\beta 2^{-j(s-1/2)} \left( 1 + \frac{2^j}{t} \right)^{-s'+\beta-\alpha} \right\} \\ &\quad \times c_j 2^{-js} \left[ \frac{2^j}{t} \left( 1 + \frac{2^j}{t} \right)^{-1} \right]^\alpha \left( 1 + \frac{2^j}{t} \right)^{-s'}, \end{aligned}$$

où  $(c_j)_j \in \ell^2$ , et la première accolade se majore par  $C t^{-\beta}$  puisque  $s > \beta + 1/2$  et  $s' + \alpha \geq 0$ . La conclusion en découle.  $\square$

### Opérateurs paradifférentiels

Nous allons introduire les classes d'opérateurs pseudo-différentiels et paradifférentiels qui agiront naturellement sur les espaces précédents. Nous désignerons par  $\langle \xi \rangle = (1 + \xi^2)^{1/2}$ .

*Définition 2.6.* – Soient  $m \in \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . On note  $S_k^m$  l'espace des fonctions  $C^\infty(t, x, \xi) \mapsto a(t, x, \xi)$  sur  $[1, +\infty[ \times \mathbb{R}^2$ , à valeurs complexes, telles que pour tous  $\alpha, \beta, \ell \in \mathbb{N}$ , on ait

$$(2.13) \quad \left| \partial_t^\ell \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(t, x, \xi) \right| \leq C_{\alpha, \beta, \ell} t^{-\beta - \ell} \left[ \frac{\langle \xi \rangle}{t} \left( 1 + \frac{\langle \xi \rangle}{t} \right)^{-1} \right]^{(k-\beta)_+} \left( 1 + \frac{\langle \xi \rangle}{t} \right)^{m-\beta}.$$

On munit cet espace de ses semi-normes naturelles.

Les éléments de  $S_k^m$  vérifient donc des estimations du type symbole d'ordre  $m$  en  $\langle \xi \rangle/t$ , et de plus s'annulent à l'ordre  $k$  lorsque  $\langle \xi \rangle/t$  tend vers 0. L'exemple typique de tels symboles est fourni par  $a(\xi/t)$ , où  $\eta \mapsto a(\eta)$  est un symbole usuel d'ordre  $m$ ,  $a$  s'annulant de plus à l'ordre  $k$  en  $\eta = 0$ .

Dans la définition suivante, nous désignerons par  $\|\cdot\|_{C^\rho}$  la norme höldérienne lorsque  $\rho \in \mathbb{R}_+^* - \mathbb{N}$  et la norme  $\|u\|_{C^\rho} = \sum_{\alpha \leq \rho} \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty}$  si  $\rho \in \mathbb{N}$ .

*Définition 2.7.* – Soient  $m \in \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\rho > 0$ . On note  $\Sigma_k^m$  (resp.  $\widetilde{\Sigma}_{k, \rho}^m$ ) l'espace des fonctions  $(t, x, \xi) \mapsto a(t, x, \xi)$ , définies sur  $[1, +\infty[ \times \mathbb{R}^2$ , à valeurs complexes, dont toutes les dérivées en  $\xi$  sont  $L^\infty$  (resp.  $C^\rho$ ) en  $x$  à  $(t, \xi)$  fixé, et qui vérifient les estimations

$$(2.14) \quad \left\| \partial_\xi^\beta a(t, \cdot, \xi) \right\|_{L^\infty} \leq C_\beta t^{-\beta} \left[ \frac{\langle \xi \rangle}{t} \left( 1 + \frac{\langle \xi \rangle}{t} \right)^{-1} \right]^{(k-\beta)_+} \left( 1 + \frac{\langle \xi \rangle}{t} \right)^{m-\beta},$$

resp.

$$(2.15) \quad \left\| \partial_\xi^\beta a(t, \cdot, \xi) \right\|_{C^\rho} \leq C_\beta t^{-\beta} \left[ \frac{\langle \xi \rangle}{t} \left( 1 + \frac{\langle \xi \rangle}{t} \right)^{-1} \right]^{(k-\beta)_+} \left( 1 + \frac{\langle \xi \rangle}{t} \right)^{m-\beta},$$

avec des constantes indépendantes de  $t \geq 1$ .

Si  $\rho \geq 1$  et  $\nu \in [0, +\infty[$ , on note  $\Sigma_{k,\rho,\nu}^m$  l'espace des  $a \in \Sigma_k^m$  tels que  $\partial_x a \in t^{-\nu} \widetilde{\Sigma}_{k+1,\rho-1}^m$ , i.e. l'espace des symboles vérifiant (2.14) et

$$(2.16) \quad \left\| \partial_\xi^\beta \partial_x a(t, \cdot, \xi) \right\|_{C^{\rho-1}} \leq C_\beta t^{-\beta-\nu} \left[ \frac{\langle \xi \rangle}{t} \left( 1 + \frac{\langle \xi \rangle}{t} \right)^{-1} \right]^{(k+1-\beta)_+} \left( 1 + \frac{\langle \xi \rangle}{t} \right)^{m-\beta}$$

uniformément en  $t \geq 1$ . Les meilleures constantes dans les inégalités précédentes définissent les semi-normes sur les espaces de symboles correspondants.

On remarquera que par définition de  $\Sigma_{k,\rho,\nu}^m$ , le fait de dériver une fois en  $x$  fait gagner de la décroissance en  $t$ , ainsi qu'un ordre d'annulation supplémentaire en  $\langle \xi \rangle/t = 0$ .

Les propriétés suivantes résultent de la définition :

- si  $a \in \Sigma_{k,\rho,\nu}^m$  et  $b \in \Sigma_{k',\rho,\nu}^{m'}$ ,  $ab \in \Sigma_{k+k'}^{m+m'}$  ;
- si  $a \in \Sigma_{0,\rho,\nu}^m$ , et s'il existe  $c > 0$  avec  $|a(t, x, \xi)| \geq c(1 + \langle \xi \rangle/t)^m$  uniformément en  $(t, x, \xi) \in [1, +\infty[ \times \mathbb{R}^2$ , alors  $a^{-1} \in \Sigma_{0,\rho,\nu}^{-m}$ .

On a les mêmes propriétés pour les classes  $\widetilde{\Sigma}_{0,\rho}^m$ .

*Définition 2.8.* – Soit  $a \in \Sigma_k^m$ . On note  $\text{Op}^B(a)$  la famille d'opérateurs sur  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , dépendant de  $t \geq 1$ , définie par la formule

$$(2.17) \quad \text{Op}^B(a)u = (S_0 a)(t, x, D)(S_{j_0} u) + \sum_{j=j_0}^{+\infty} (S_{j-j_0} a)(t, x, D)\Delta_j u,$$

où  $j_0 \geq 1$  est fixé assez grand et où  $S_{j-j_0} a$  désigne le symbole obtenu en faisant agir le multiplicateur de Fourier  $S_{j-j_0}$  sur  $a(t, x, \xi)$  relativement aux variables  $x$ .

L'opérateur défini par (2.17) est donc un opérateur paradifférentiel au sens de Bony [3]. Si  $a \in L^\infty \subset \Sigma_0^0$ ,  $\text{Op}^B(a) = T_a$  avec la définition (2.8) du paraproduit. En particulier, si  $a$  est une constante,  $\text{Op}^B(a)$  est l'opérateur de multiplication par  $a$ . Nous allons établir, pour les opérateurs précédents, un certain nombre de propriétés d'action sur les espaces de Sobolev et de calcul symbolique.

**THÉORÈME 2.9.** – (i) Soit  $a \in \Sigma_k^m$ . L'opérateur  $\text{Op}^B(a(t, x, \xi))$  est borné de  $H_\alpha^{s,s'}(t)$  à valeurs dans  $H_{\alpha+k}^{s,s'-m}(t)$  uniformément en  $t \geq 1$ .

(ii) Soient  $\rho \geq 1$ ,  $\nu \geq 0$ ,  $a \in \Sigma_{k,\rho,\nu}^m$ ,  $b \in \Sigma_{k',\rho,\nu}^{m'}$ . La différence

$$\text{Op}^B(a(t, x, \xi)) \circ \text{Op}^B(b(t, x, \xi)) - \text{Op}^B(ab(t, x, \xi))$$

est un opérateur borné de  $H_\alpha^{s,s'}(t)$  à valeurs dans  $t^{-1-\nu} H_{\alpha+k+k'}^{s,s'-(m+m')+1}(t)$  uniformément en  $t \geq 1$ .

(iii) Soient  $\rho \geq 1$ ,  $\nu \geq 0$ ,  $a \in \Sigma_{1,\rho,\nu}^1$ ,  $b \in \Sigma_{0,\rho,\nu}^0$ . Le crochet  $[\text{Op}^B(a), \text{Op}^B(b)]$  est borné de  $H_\alpha^{s,s'}(t)$  à valeurs dans  $t^{-1-\nu} H_{\alpha+1}^{s,s'}(t)$  uniformément en  $t \geq 1$ .

(iv) Soient  $\rho \geq 1$ ,  $\nu \geq 0$ ,  $a \in \Sigma_{k,\rho,\nu}^m$ . L'opérateur  $\text{Op}^B(a)^* - \text{Op}^B(\bar{a})$  est borné de  $H_\alpha^{s,s'}(t)$  dans  $t^{-1-\nu} H_{\alpha+k}^{s,s'-m+1}(t)$  uniformément en  $t \geq 1$ .

En outre, les bornes des opérateurs précédents se majorent à partir des semi-normes des symboles.

La preuve du théorème utilisera le lemme suivant :

LEMME 2.10. – Soit  $(M_q(x, \xi))_{q \in \mathbb{N}}$  une famille de fonctions  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^2$  telles qu'il existe  $0 < C' < C_1 < C_2$  avec :

$$(2.18) \quad \begin{aligned} \forall q \in \mathbb{N}^*, \quad \text{Supp}(\mathcal{F}_x M_q)(\eta, \xi) &\subset \{(\eta, \xi); |\eta| < C' 2^q, C_1 2^q < |\xi| < C_2 2^q\}, \\ \text{Supp}(\mathcal{F}_x M_0)(\eta, \xi) &\subset \{(\eta, \xi); |\eta| < C', |\xi| < C_2\}. \end{aligned}$$

Supposons de plus que, pour tout  $\beta \in \mathbb{N}$ ,

$$(2.19) \quad |\partial_\xi^\beta M_q(x, \xi)| \leq C_\beta 2^{-q\beta} \left[ \frac{2^q}{t} \left( 1 + \frac{2^q}{t} \right)^{-1} \right]^k \left( 1 + \frac{2^q}{t} \right)^m.$$

Alors pour tous  $s, s', \alpha$  l'opérateur  $\sum M_q(x, D)$  est borné de  $H_\alpha^{s, s'}(t)$  dans  $H_{\alpha+k}^{s, s'-m}(t)$  uniformément en  $t \geq 1$ . De plus, sa norme s'estime à partir des constantes  $C_\beta$  de (2.19) et de  $C_1, C_2, C'$ .

Démonstration. – Écrivons

$$M_q(x, D)u = \frac{1}{2\pi} \int e^{ix \cdot \xi} M_q(x, \xi) \hat{u}_q(\xi) d\xi,$$

où  $\hat{u}_q(\xi) = \tilde{\varphi}(2^{-q}\xi) \hat{u}(\xi)$  pour une fonction  $\tilde{\varphi} \in C_0^\infty(\mathbb{R} - \{0\})$ ,  $\tilde{\varphi} \equiv 1$  au voisinage de  $\{\xi; C_1 \leq |\xi| \leq C_2\}$  lorsque  $q \geq 1$ , et où  $\hat{u}_0(\xi) = \tilde{\chi}(\xi) \hat{u}(\xi)$  avec  $\tilde{\chi} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\tilde{\chi} \equiv 1$  au voisinage de  $\{\xi; |\xi| \leq C_2\}$ . Posons  $m_q(x, \xi) = M_q(x, 2^q \xi)$ . Il résulte immédiatement des hypothèses (2.18), (2.19) que

$$|\partial_\xi^\beta m_q(x, \xi)| \leq C_\beta \left[ \frac{2^q}{t} \left( 1 + \frac{2^q}{t} \right)^{-1} \right]^k \left( 1 + \frac{2^q}{t} \right)^m$$

et que  $m_q$  est à support dans  $C_1 \leq |\xi| \leq C_2$  si  $q \geq 1$ , et dans  $|\xi| \leq C_2$  si  $q = 0$ .

Si l'on pose  $k_q(x, y) = (1/2\pi) \int e^{iy \cdot \xi} m_q(x, \xi) d\xi$ , on en déduit

$$(2.20) \quad |k_q(x, y)| \leq C \left[ \frac{2^q}{t} \left( 1 + \frac{2^q}{t} \right)^{-1} \right]^k \left( 1 + \frac{2^q}{t} \right)^m (1 + |y|)^{-2}$$

et, écrivant  $m_q(x, \xi) = \int e^{-iy \cdot \xi} k_q(x, y) dy$ , on obtient pour  $M_q(x, D)u$  l'expression

$$(2.21) \quad M_q(x, D)u = \frac{1}{2\pi} \int e^{ix \cdot \xi} \phi_q(y, \xi) k_q(x, y) \hat{u}_q(\xi) dy d\xi = \int k_q(x, y) \phi_q(y, D_x) u_q(x) dy,$$

où  $\phi_q(y, \xi) = \exp(-i2^{-q}y \cdot \xi)$ . Il reste à remarquer que  $\|\phi_q(y, D_x) u_q(x)\|_{L^2(dx)} \leq \|u_q\|$ , et qu'il résulte de la définition 2.1 que

$$\|u_q\| \leq C c_q 2^{-qs} \left[ \frac{2^q}{t} \left( 1 + \frac{2^q}{t} \right)^{-1} \right]^\alpha \left( 1 + \frac{2^q}{t} \right)^{-s'}$$

avec  $\sum c_q^2 \leq 1$ , pour, utilisant (2.20), déduire de (2.21)

$$\|M_q(x, D)u\| \leq C c_q 2^{-qs} \left[ \frac{2^q}{t} \left( 1 + \frac{2^q}{t} \right)^{-1} \right]^{\alpha+k} \left( 1 + \frac{2^q}{t} \right)^{m-s'}$$

Comme l'hypothèse (2.18) entraîne que  $\mathcal{F}_x(M_q(x, D)u)(\xi)$  est à support dans une couronne de taille  $2^q$  pour  $q \geq 1$ , la propriété (2.5) est vérifiée par cette famille, ce qui entraîne la conclusion.  $\square$

*Démonstration du théorème 2.9.* – (i) Posons  $M_q(x, \xi) = (S_{q-j_0}a)(t, x, \xi)\varphi(2^{-q}\xi)$  pour  $q \geq j_0$ ,  $M_0(x, \xi) = (S_0a)(t, x, \xi)\chi(\xi/2^{j_0})$ . L'hypothèse (2.14) entraîne

$$(2.22) \quad \|\partial_\xi^\beta a(t, \cdot, \xi)\|_{L^\infty} \leq C_\beta \langle \xi \rangle^{-\beta} \left[ \frac{\langle \xi \rangle}{t} \left( 1 + \frac{\langle \xi \rangle}{t} \right)^{-1} \right]^k \left( 1 + \frac{\langle \xi \rangle}{t} \right)^m,$$

d'où l'on déduit que l'hypothèse (2.19) du lemme précédent est satisfaite par les  $M_q$ . La conclusion en résulte, puisque (2.18) est vérifiée si  $j_0$  est fixé assez grand.

(ii) Notons  $a_p(t, x, \xi) = (S_{p-j_0}a)(t, x, \xi)$ ,  $p \geq j_0$  et  $a_0(t, x, \xi) = (S_0a)(t, x, \xi)$ . Nous avons

$$(2.23) \quad \begin{aligned} \text{Op}^B(a) \circ \text{Op}^B(b)u &= a_0(t, x, D)S_{j_0}[b_0(t, x, D)S_{j_0}u] + \sum_{q \geq j_0} a_0(t, x, D)S_{j_0}[b_q(t, x, D)\Delta_q u] \\ &+ \sum_{p \geq j_0} a_p(t, x, D)\Delta_p[b_0(t, x, D)S_{j_0}u] + \sum_{p, q \geq j_0} a_p(t, x, D)\Delta_p[b_q(t, x, D)\Delta_q u]. \end{aligned}$$

Compte tenu des propriétés (2.1) des supports, il existe  $N_0$  tel que  $|p - q| \leq N_0$  sur le support de la dernière somme, et  $q \leq N_0$ ,  $p \leq N_0$  sur les supports de la deuxième et de la troisième. Écrivons pour  $p, q \geq j_0$ ,  $|p - q| \leq N_0$

$$(2.24) \quad \begin{aligned} a_p(t, x, D)\Delta_p[b_q(t, x, D)\Delta_q u] &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{i(x-y)\cdot\xi + iy\cdot\eta} a_p(t, x, \xi)b_q(t, y, \eta)\varphi(2^{-p}\xi)\varphi(2^{-q}\eta)\widehat{u}(\eta) d\eta dy d\xi. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$(2.25) \quad \begin{aligned} \text{Op}^B(ab)u &= (ab)_0(t, x, D)S_{j_0}u + \sum_{j_0}^{+\infty} (ab)_p(t, x, D)\Delta_p u \\ &= (ab)_0(t, x, D)S_{j_0}(S_{j_0}u) + \sum_{q \geq j_0} (ab)_0(t, x, D)S_{j_0}(\Delta_q u) \\ &+ \sum_{p \geq j_0} (ab)_p(t, x, D)\Delta_p(S_{j_0}u) + \sum_{p, q \geq j_0} (ab)_p(t, x, D)\Delta_p(\Delta_q u). \end{aligned}$$

Traisons d'abord la contribution à  $(\text{Op}^B(a) \circ \text{Op}^B(b) - \text{Op}^B(ab))u$  de

$$(2.26) \quad \sum_{p, q \geq j_0} a_p(t, x, D)\Delta_p[b_q(t, x, D)\Delta_q u] - \sum_{p, q \geq j_0} (ab)_p(t, x, D)\Delta_p(\Delta_q u)$$

en se souvenant toujours que  $|p - q| \leq N_0$  sur le support de la somme. Le terme général de (2.26) s'écrit

$$(2.27) \quad \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{i(x-y)\cdot\xi + iy\cdot\eta} [a_p(t, x, \xi)b_q(t, y, \eta) - (ab)_p(t, x, \eta)] \\ \times \varphi(2^{-p}\xi)\varphi(2^{-q}\eta)\widehat{u}(\eta) \, d\eta \, dy \, d\xi = \frac{1}{2\pi} \int e^{ix\cdot\eta} M_{pq}(x, \eta)\widehat{u}(\eta) \, d\eta$$

avec

$$(2.28) \quad M_{pq}(x, \eta) = \frac{1}{(2\pi)} \int e^{-i(x-y)\cdot\xi} [a_p(t, x, \eta - \xi)b_q(t, y, \eta) - (ab)_p(t, x, \eta)] \\ \times \varphi(2^{-p}(\eta - \xi))\varphi(2^{-q}\eta) \, dy \, d\xi.$$

LEMME 2.11. – On a, pour tout  $\beta$ ,

$$(2.29) \quad |\partial_\eta^\beta M_{pq}(x, \eta)| \leq C \frac{2^{-q\beta}}{t^{1+\nu}} \left[ \frac{2^q}{t} \left( 1 + \frac{2^q}{t} \right)^{-1} \right]^{k+k'} \left( 1 + \frac{2^q}{t} \right)^{m+m'-1}.$$

*Démonstration.* – Nous noterons

$$(2.30) \quad L = (1 + 2^{2q}(x-y)^2)^{-1} (1 - 2^{2q}(x-y) \cdot D_\xi)$$

de telle manière que  $L[e^{-i(x-y)\cdot\xi}] \equiv 1$ . Décomposons, en n'écrivant plus la variable  $t$

$$(2.31) \quad a_p(x, \eta - \xi)b_q(y, \eta) - (ab)_p(x, \eta) \\ = a_p(x, \eta - \xi)(b_q(y, \eta) - b_q(x, \eta)) + b_q(x, \eta)(a_p(x, \eta - \xi) - a_p(x, \eta)) \\ + (a_p(x, \eta)b_q(x, \eta) - (ab)_p(x, \eta)).$$

Comme le second terme du membre de droite de (2.31) s'annule en  $\xi = 0$  et est indépendant de  $y$ , sa contribution à l'intégrale oscillante (2.28) est nulle. Décomposons  $M_q(x, \eta) = M'_q(x, \eta) + M''_q(x, \eta)$ , où  $M'_q(x, \eta)$  (resp.  $M''_q(x, \eta)$ ) est la contribution à (2.28) du premier (resp. du troisième) terme de (2.31), et prouvons que  $|\partial_\eta^\beta M'_{pq}|$  (resp.  $|\partial_\eta^\beta M''_{pq}|$ ) est majoré par le membre de droite de (2.29). Remarquons d'abord que, d'après (2.14), (2.16),  $a$  vérifie (2.22) ainsi que

$$(2.32) \quad |\partial_x \partial_\xi^\beta a(x, \xi)| \leq C_\beta \frac{\langle \xi \rangle^{1-\beta}}{t^{1+\nu}} \left[ \frac{\langle \xi \rangle}{t} \left( 1 + \frac{\langle \xi \rangle}{t} \right)^{-1} \right]^k \left( 1 + \frac{\langle \xi \rangle}{t} \right)^{m-1},$$

et que l'on a des estimations analogues pour  $b$ . Écrivons

$$b_q(y, \eta) - b_q(x, \eta) = (y - x) \cdot B_q(x, y, \eta)$$

avec, grâce à l'analogie de (2.32) pour  $b$ ,

$$(2.33) \quad |\partial_\eta^\beta B_q(x, y, \eta)| \leq C_\beta \frac{\langle \eta \rangle^{1-\beta}}{t^{1+\nu}} \left[ \frac{\langle \eta \rangle}{t} \left( 1 + \frac{\langle \eta \rangle}{t} \right)^{-1} \right]^{k'} \left( 1 + \frac{\langle \eta \rangle}{t} \right)^{m'-1}.$$

Comme

$$(2.34) \quad M'_{pq}(x, \eta) \\ = \frac{1}{(2\pi)} \int e^{-i(x-y)\cdot\xi} D_\xi [B_q(x, y, \eta)a_q(x, \eta - \xi)\varphi(2^{-p}(\eta - \xi))\varphi(2^{-q}\eta)] \, dy \, d\xi \\ = \frac{1}{(2\pi)} \int e^{-i(x-y)\cdot\xi} ({}^t L)^2 D_\xi [B_q(x, y, \eta)a_q(x, \eta - \xi)\varphi(2^{-p}(\eta - \xi))\varphi(2^{-q}\eta)] \, dy \, d\xi,$$

il résulte des inégalités (2.22), (2.33) et du fait que  $|p - q| \leq N_0$  que

$$(2.35) \quad \begin{aligned} |\partial_\eta^\beta M'_{pq}(x, \eta)| &\leq C \frac{2^{-q\beta}}{t^{1+\nu}} \left[ \frac{2^q}{t} \left( 1 + \frac{2^q}{t} \right)^{-1} \right]^{k+k'} \left( 1 + \frac{2^q}{t} \right)^{m+m'-1} \\ &\quad \times \int (1 + 2^q|x - y|)^{-2} \mathbb{1}_{|\xi| \leq C2^q} dy d\xi, \end{aligned}$$

d'où la majoration par le membre de droite de (2.29). Pour étudier le terme  $M''_{pq}$ , écrivons

$$(2.36) \quad \begin{aligned} M''_{pq}(x, \eta) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{-i(x-y)\cdot\xi} ({}^tL)^2 [(a_p(x, \eta)b_q(x, \eta) - (ab)_p(x, \eta)) \\ &\quad \times \varphi(2^{-p}(\eta - \xi))\varphi(2^{-q}\eta)] dy d\xi. \end{aligned}$$

Il nous suffit, pour obtenir l'analogue de (2.35), de prouver les inégalités

$$(2.37) \quad \begin{aligned} &|\partial_\eta^\beta [a_p(x, \eta)b_q(x, \eta) - (ab)_p(x, \eta)]| \\ &\leq \frac{C_\beta}{t^{1+\nu}} 2^{-q\beta} \left[ \frac{2^q}{t} \left( 1 + \frac{2^q}{t} \right)^{-1} \right]^{k+k'} \left( 1 + \frac{2^q}{t} \right)^{m+m'-1} \end{aligned}$$

lorsque  $\varphi(2^{-q}\eta) \neq 0$ . Écrivons pour cela

$$(2.38) \quad a_p b_q - (ab)_p = (I - S_{p-1})(a_p b_q) + S_{p-1} [(a_p - a)b_q + a(b_q - b)].$$

Comme le symbole de  $S_{p-1}$  est identiquement égal à 1 sur une boule de rayon  $C2^p \sim C2^q$ , on a

$$|\partial_\eta^\beta (I - S_{p-1})(a_p b_q)(x, \eta)| \leq C2^{-q} \|\partial_\eta^\beta \partial_x (a_p b_q)(\cdot, \eta)\|_{L^\infty}$$

et les inégalités (2.22), (2.32) pour  $a$  et  $b$  permettent de majorer cette dernière quantité par le membre de droite de (2.37). Pour estimer la contribution des deux autres termes de (2.38), on raisonne de même en utilisant les inégalités

$$\begin{aligned} |\partial_\eta^\beta (a_p - a)(x, \eta)| &\leq C2^{-p} \|\partial_\eta^\beta \partial_x a(\cdot, \eta)\|_{L^\infty}, \\ |\partial_\eta^\beta (b_q - b)(x, \eta)| &\leq C2^{-q} \|\partial_\eta^\beta \partial_x b(\cdot, \eta)\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

Cela achève la preuve du lemme.  $\square$

*Fin de la démonstration du théorème 2.9.* – D'après le lemme précédent, la famille de symboles  $(t^{1+\nu} M_{pq}(x, \eta))_{p, q \geq j_0, |p-q| \leq N_0}$  vérifie l'hypothèse (2.19) du lemme 2.10. L'hypothèse (2.18) est satisfaite si le paramètre  $j_0$  de (2.17) est fixé assez grand. On en déduit que l'opérateur (2.26) est borné de  $H_\alpha^{s, s'}(t)$  dans  $t^{-1-\nu} H_{\alpha+k+k'}^{s, s'-(m+m')+1}(t)$ . Le fait que les contributions à  $(\text{Op}^B(a) \circ \text{Op}^B(b) - \text{Op}^B(ab))u$  provenant des autres termes de (2.24), (2.25) vérifient la même conclusion résulte d'un raisonnement semblable, à des changements de notation près. L'assertion (ii) du théorème est donc prouvée.

(iii) La conclusion est un cas particulier de (ii).

(iv) Écrivons

$$\begin{aligned} \text{Op}^B(a)^* u &= S_{j_0} [a_0(t, x, D)^* u] + \sum_{p=j_0}^{+\infty} \Delta_p [a_p(t, x, D)^* u], \\ \text{Op}^B(\bar{a})u &= \bar{a}_0(t, x, D) S_{j_0} u + \sum_{p=j_0}^{+\infty} \bar{a}_p(t, x, D) \Delta_p u, \end{aligned}$$

de telle manière que, pour  $p \geq j_0$  assez grand,

$$(2.39) \quad \begin{aligned} \Delta_p[a_p(t, x, D)^*u] - \bar{a}_p(t, x, D)\Delta_p u \\ = \frac{1}{2\pi} \int e^{i(x-y)\cdot\xi} \varphi(2^{-p}\xi)[\bar{a}_p(y, \xi) - \bar{a}_p(x, \xi)]\tilde{\varphi}(2^{-p}D)u(y) dy d\xi \\ = \frac{1}{2\pi} \int e^{ix\cdot\eta} M_p(x, \eta)\hat{u}(\eta) d\eta \end{aligned}$$

si  $\tilde{\varphi} \in C_0^\infty(\mathbb{R} - \{0\})$  est égale à 1 sur un voisinage assez grand de  $\text{Supp } \varphi$  et

$$M_p(x, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int e^{i(x-y)\cdot(\xi-\eta)} \varphi(2^{-p}\xi)[\bar{a}_p(y, \xi) - \bar{a}_p(x, \xi)]\tilde{\varphi}(2^{-p}\eta) dy d\xi.$$

Écrivant

$$\bar{a}_p(y, \xi) - \bar{a}_p(x, \xi) = (x - y)A_p(x, y, \xi)$$

avec  $|\partial_\xi^\beta A_p(x, y, \xi)|$  majoré par le membre de droite de (2.32), il suffit de faire les mêmes intégrations par parties que dans (2.34) pour majorer  $|\partial_\eta^\beta M_p(x, \eta)|$  par

$$C \frac{2^{-p\beta}}{t^{1+\nu}} \left[ \frac{2^p}{t} \left( 1 + \frac{2^p}{t} \right)^{-1} \right]^k \left( 1 + \frac{2^p}{t} \right)^{m-1},$$

ce qui permet d'appliquer le lemme 2.10. Les termes de basse fréquence se traitent de même. Cela achève la preuve du théorème.  $\square$

Nous allons terminer ce paragraphe en donnant des variantes des assertions (ii) ou (iii) du théorème qui nous seront utiles.

**PROPOSITION 2.12.** – Soient  $\rho \geq 1$ ,  $a \in \tilde{\Sigma}_{k,\rho}^m$ ,  $b \in \tilde{\Sigma}_{k',\rho}^{m'}$ . Supposons  $k \geq 1$  ou  $k' \geq 1$ . La différence  $\text{Op}^B(a(t, x, \xi)) \circ \text{Op}^B(b(t, x, \xi)) - \text{Op}^B((ab)(t, x, \xi))$  est un opérateur borné de  $H_{\alpha}^{s,s'}(t)$  à valeurs dans  $t^{-1}H_{\alpha+k+k'-1}^{s,s'-(m+m')+1}$ .

*Démonstration.* – Supposons par exemple  $k \geq 1$ . L'hypothèse (2.15) entraîne

$$\begin{aligned} \|\partial_\xi^\beta a(t, \cdot, \xi)\|_{C_\rho} &\leq C_\beta \langle \xi \rangle^{-\beta} \left[ \frac{\langle \xi \rangle}{t} \left( 1 + \frac{\langle \xi \rangle}{t} \right)^{-1} \right]^k \left( 1 + \frac{\langle \xi \rangle}{t} \right)^m \\ &\leq C_\beta \langle \xi \rangle^{-\beta} \frac{\langle \xi \rangle}{t} \left[ \frac{\langle \xi \rangle}{t} \left( 1 + \frac{\langle \xi \rangle}{t} \right)^{-1} \right]^{k-1} \left( 1 + \frac{\langle \xi \rangle}{t} \right)^{m-1} \end{aligned}$$

ainsi que

$$\|\partial_\xi^\beta b(t, \cdot, \xi)\|_{C_\rho} \leq C_\beta \langle \xi \rangle^{-\beta} \left[ \frac{\langle \xi \rangle}{t} \left( 1 + \frac{\langle \xi \rangle}{t} \right)^{-1} \right]^{k'} \left( 1 + \frac{\langle \xi \rangle}{t} \right)^{m'}.$$

Il nous suffit alors de reprendre la preuve du (ii) du théorème 2.9, en remplaçant les inégalités (2.22), (2.32) pour  $a$  et  $b$  par les deux inégalités précédentes. Il en résulte une estimation de  $\partial_\eta^\beta M_{pq}$  dans le lemme 2.11 en

$$\frac{2^{-q\beta}}{t} \left[ \frac{2^q}{t} \left( 1 + \frac{2^q}{t} \right)^{-1} \right]^{k+k'-1} \left( 1 + \frac{2^q}{t} \right)^{m+m'-1}$$

qui entraîne la conclusion voulue. Le raisonnement est le même dans le cas  $k' \geq 1$ .  $\square$

PROPOSITION 2.13. – (i) Soit  $a \in \Sigma_{0,\rho,\nu}^1$  avec  $\rho \geq 1$ ,  $\nu \geq 0$ . L'opérateur  $[\text{Op}^{\mathcal{B}}(a), \Delta_j]$  est borné de  $H_{\alpha}^{s,s'}(t)$  dans  $t^{-1-\nu}H_{\alpha}^{s,s'}(t)$  uniformément en  $t \geq 1$  et  $j \geq -1$ .

(ii) Soient  $a \in \widetilde{\Sigma}_{1,\rho}^1$  avec  $\rho \geq 1$  et  $\gamma$  une fonction  $C^\infty$  bornée ainsi que toutes ses dérivées. Les opérateurs  $\text{Op}^{\mathcal{B}}(a) \circ \text{Op}^{\mathcal{B}}(\gamma) - \text{Op}^{\mathcal{B}}(a\gamma)$  et  $\text{Op}^{\mathcal{B}}(\gamma) \circ \text{Op}^{\mathcal{B}}(a) - \text{Op}^{\mathcal{B}}(a\gamma)$  sont bornés de  $H_{\alpha}^{s,s'}(t)$  dans  $t^{-1}H_{\alpha}^{s,s'}(t)$  uniformément en  $t$ .

Démonstration. – (i) Nous ne pouvons pas appliquer directement le (iii) du théorème 2.9 puisque le symbole de  $\varphi(2^{-j}\xi)$  de  $\Delta_j$  ne vérifie pas les inégalités (2.14). Toutefois nous pouvons écrire

$$(2.40) \quad [\text{Op}^{\mathcal{B}}(a), \Delta_j]u = \sum_{p \geq j_0} (a_p(x, D)\Delta_p\Delta_j u - \Delta_j[a_p(x, D)\Delta_p u]) + a_0(x, D)S_{j_0}\Delta_j u \\ - \Delta_j[a_0(x, D)S_{j_0}u] = \sum_{p \geq j_0} M_p(x, D)u + M_0(x, D)u$$

avec, pour  $p \geq j_0$ ,

$$M_p(x, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-i(x-y)\cdot\xi} (a_p(x, \eta) - a_p(y, \eta))\varphi(2^{-j}(\eta - \xi))\varphi(2^{-p}\eta) d\xi dy$$

et une expression analogue pour  $M_0$ . En outre, sur le support de la sommation dans (2.40)  $|p - j| \leq N_0$  pour un  $N_0$  fixé assez grand. Il reste à remarquer que  $a_p(x, \eta) - a_p(y, \eta) = (x - y) \cdot A_p(x, y, \eta)$  avec

$$|\partial_{\eta}^{\beta} A_p(x, y, \eta)| \leq C \frac{\langle \eta \rangle^{1-\beta}}{t^{1+\nu}}$$

d'après (2.32) pour obtenir comme précédemment, par intégration par parties à l'aide du champ  $L$ , l'estimation

$$|\partial_{\eta}^{\beta} M_p(x, \eta)| \leq C 2^{-p\beta} t^{-1-\nu}$$

qui permet d'appliquer le lemme 2.10.

(ii) Il s'agit d'un cas particulier de la proposition précédente.  $\square$

COROLLAIRE 2.14. – Soient  $a \in \widetilde{\Sigma}_{1,\rho}^1$  avec  $\rho \geq 1$ ,  $\gamma$  une fonction  $C^\infty$  bornée ainsi que toutes ses dérivées. Alors  $[\text{Op}^{\mathcal{B}}(a), \gamma]$  est borné de  $H_{\alpha}^{s,s'}(t)$  à valeurs dans  $t^{-1}H_{\alpha}^{s,s'}(t)$  uniformément en  $t \geq 1$ .

Démonstration. – Écrivons, en utilisant la définition (2.8), (2.9) du paraproduit,

$$(2.41) \quad [\text{Op}^{\mathcal{B}}(a), \gamma]u = [\text{Op}^{\mathcal{B}}(a), \text{Op}^{\mathcal{B}}(\gamma)]u + \text{Op}^{\mathcal{B}}(a)[T_u\gamma + R(u, \gamma)] \\ - T_{\text{Op}^{\mathcal{B}}(a)u}\gamma - R(\text{Op}^{\mathcal{B}}(a)u, \gamma).$$

Par le (ii) de la proposition précédente, le premier terme du membre de droite est dans  $t^{-1}H_{\alpha}^{s,s'}(t)$ . D'après le corollaire 2.3 (ii),  $T_u\gamma + R(u, \gamma) \in H_{\alpha+1}^{s+N, s'-1}(t)$  pour tout  $N$ , donc, grâce au (i) du théorème 2.9, le second terme du membre de droite de (2.41) est dans  $H_{\alpha+1}^{s+N, s'-1}(t) \subset t^{-1}H_{\alpha}^{s+N-1, s'}(t)$ . Remarquons enfin que  $\text{Op}^{\mathcal{B}}(a)u \in H_{\alpha+1}^{s, s'-1}(t)$ , donc toujours d'après le corollaire 2.3 (ii),  $T_{\text{Op}^{\mathcal{B}}(a)u}\gamma + R(\text{Op}^{\mathcal{B}}(a)u, \gamma)$  est dans  $H_{\alpha+1}^{s+N, s'-1}(t) \subset t^{-1}H_{\alpha}^{s+N-1, s'}(t)$ .  $\square$

## 2.2. Écriture paradifférentielle de l'équation

Nous nous proposons de réécrire l'équation (1.40) sous forme paradifférentielle. Considérons l'équation

$$(2.42) \quad \tau^2 - \frac{1}{\sqrt{t}} a_{01}(t, x, z) \frac{\xi}{t} \cdot \tau - \left(1 + \frac{\xi^2}{t^2}\right) - \frac{1}{\sqrt{t}} a_{11}(t, x, z) \frac{\xi^2}{t^2} = 0,$$

où  $z \in D(0, 1) = \{z \in \mathbb{C}^3; |z| < 1\}$ , et où  $a_{01}$  et  $a_{11}$  sont dans  $\mathcal{E}_1^{\mathbb{R}}$  et admettent des décompositions de la forme (1.37). Si on pose  $z = (w, \partial_t w, \partial_x w/t)$ , le membre de gauche de (2.42) n'est autre que le symbole du membre de gauche de (1.40). En posant  $\tilde{\tau} = (1 + (\xi/t)^2)^{-1/2} \tau$ , on obtient

$$(2.43) \quad \tilde{\tau}^2 - \frac{1}{\sqrt{t}} a_{01} \frac{\xi}{t} \left(1 + \frac{\xi^2}{t^2}\right)^{-1/2} \tilde{\tau} - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}} a_{11} \frac{\xi^2}{t^2} \left(1 + \frac{\xi^2}{t^2}\right)^{-1}\right) = 0$$

qui admet, pour  $t \geq T_0$  assez grand, les deux racines réelles

$$(2.44) \quad \tilde{\tau}_{\pm} = \pm \left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}} \left[ a_{11} + \frac{1}{4\sqrt{t}} a_{01}^2 \right] \frac{\xi^2}{t^2} \left(1 + \frac{\xi^2}{t^2}\right)^{-1}\right)^{1/2} + \frac{1}{2\sqrt{t}} a_{01} \frac{\xi}{t} \left(1 + \frac{\xi^2}{t^2}\right)^{-1/2}.$$

Utilisant les expressions (1.37) et développant la racine carrée, on obtient :

PROPOSITION 2.15. – *Il existe  $T_0 \geq 1$  et :*

– *une application linéaire  $z \mapsto \theta_{\pm}^1(t, x, \xi, z)$  définie sur  $\mathbb{C}^3$ , à valeurs dans l'espace des symboles  $S_1^1$ , réelle lorsque  $z$  est réel ;*

– *une application  $z \mapsto \theta_{\pm}^2(t, x, \xi, z)$  holomorphe en  $z$  décrivant  $D(0, 1)$ , à valeurs dans  $S_1^1$ , réelle sur le réel, vérifiant pour  $\ell, \alpha, \beta \in \mathbb{N}$ , les estimations*

$$(2.45) \quad |\partial_t^{\ell} \partial_x^{\alpha} \partial_{\xi}^{\beta} \theta_{\pm}^2| \leq C t^{-\beta-\ell} \left[ \frac{\langle \xi \rangle}{t} \left(1 + \frac{\langle \xi \rangle}{t}\right)^{-1} \right]^{(1-\beta)_+} \left(1 + \frac{\langle \xi \rangle}{t}\right)^{1-\beta} |z|,$$

telles que si  $\theta_{\pm} = \theta_{\pm}^1 + t^{-1/2} \theta_{\pm}^2$ , l'équation (2.42) ait pour racines

$$(2.46) \quad \tau_{\pm}(t, x, \xi, z) = \pm \left(1 + \frac{\xi^2}{t^2}\right)^{1/2} + \frac{1}{\sqrt{t}} \theta_{\pm}(t, x, \xi, z).$$

Rappelons que nous avons posé  $E_{\alpha}^{s,s'}(t) = H_{\alpha}^{s,s'}(t) \cap L^{\infty}$ . Définissons

$$(2.47) \quad \begin{aligned} F_{\alpha}^{s,s'}(t) &= \{(w, w'); w \in E_{\alpha}^{s,s'+1}(t), w' \in E_{\alpha}^{s,s'}(t), (w, w') \text{ à valeurs réelles}\}, \\ \tilde{F}_{\alpha}^{s,s'}(t) &= \{(w, w', w''); w \in E_{\alpha}^{s,s'+1}(t), w' \in E_{\alpha}^{s,s'}(t), w'' \in E_{\alpha}^{s,s'-1}(t), \\ &\quad (w, w', w'') \text{ à valeurs réelles}\} \end{aligned}$$

munis des normes naturelles et désignons par  $B(E_{\alpha}^{s,s'}(t), r)$  (resp.  $B(F_{\alpha}^{s,s'}(t), r)$ ) la boule de centre 0 de rayon  $r$  dans  $E_{\alpha}^{s,s'}(t)$  (resp.  $F_{\alpha}^{s,s'}(t)$ ). Nous noterons  $\Sigma_{k,\rho,\nu}^m(t)$  (resp.  $\tilde{\Sigma}_{k,\rho}^m(t)$ ) l'espace des symboles vérifiant les inégalités (2.14), (2.16) (resp. (2.15)) à  $t$  fixé, muni des semi-normes définies par la meilleure constante dans ces inégalités à  $t$  fixé.

LEMME 2.16. – (i) Soient  $s, s', \alpha$  vérifiant les conditions

$$(2.48) \quad s + s' > \frac{3}{2}, \quad s \geq \frac{1}{2}, \quad \alpha \in ]-1/2, 0[.$$

Posons  $\nu = \frac{1}{2} + \alpha$ ,  $\rho = s - \frac{1}{2} - \alpha$  et supposons  $\rho$  non entier. Il existe  $r_0 > 0$  tel que pour tout  $t \geq T_0$  l'application définie sur  $B(F_\alpha^{s,s'}(t), r_0)$  par

$$(2.49) \quad (w, w') \mapsto \left( (t, x, \xi) \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}} \theta_\pm^1 \left( t, x, \xi, w, w', \frac{\partial_x}{t} w \right) \right),$$

resp. par

$$(2.50) \quad (w, w') \mapsto \left( (t, x, \xi) \mapsto \frac{1}{t} \theta_\pm^2 \left( t, x, \xi, w, w', \frac{\partial_x}{t} w \right) \right),$$

soit  $C^1$  sur cette boule à valeurs dans  $t^{-1/2} \Sigma_1^1(t)$  (resp. à valeurs dans  $t^{-1} \Sigma_1^1(t)$ ).

Si, outre (2.48), on suppose  $s' + \alpha \geq 0$ , (2.49) et (2.50) sont  $C^1$  sur  $B(F_\alpha^{s,s'}(t), r_0)$  à valeurs dans  $t^{-\nu} \tilde{\Sigma}_{1,\rho}^1(t)$ . En particulier,

$$(2.51) \quad (w, w') \mapsto \left( (t, x, \xi) \mapsto \tau_\pm \left( t, x, \xi, w, w', \frac{\partial_x}{t} w \right) \right)$$

est, sous les conditions (2.48), de classe  $C^1$  à valeurs dans  $\Sigma_0^1(t)$ , et à valeurs dans  $\Sigma_{0,\rho,\nu}^1(t)$  si de plus  $s' + \alpha \geq 0$ . En outre, les semi-normes de ces symboles dans les classes indiquées se majorent par  $C \|(w, w')\|_{F_\alpha^{s,s'}(t)}$  lorsque  $(w, w')$  reste dans  $B(F_\alpha^{s,s'}(t), r_0)$ , avec une constante  $C$  indépendante de  $t$ .

(ii) Sous les conditions (2.48) soit  $t \mapsto (w(t), w'(t))$  une courbe  $C^0$  définie sur  $[T_0, +\infty[$  à valeurs dans la boule  $B(F_\alpha^{s,s'}(t), r_0)$ , qui est  $C^1$  à valeurs dans  $F_\alpha^{s,s'-1}(t)$ . Alors

$$(2.52) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \tau_\pm \left( t, x, \xi, w(t), w'(t), \frac{\partial_x}{t} w(t) \right) \\ & - \frac{1}{\sqrt{t}} \theta_\pm^1 \left( t, x, \xi, \partial_t w(t), \partial_t w'(t), \partial_t \frac{\partial_x}{t} w(t) \right) \in \frac{1}{t} \Sigma_1^1(t) \end{aligned}$$

et les semi-normes de ce symbole sont majorées à partir de  $r_0$  et de

$$\|(\partial_t w(t), \partial_t w'(t))\|_{F_\alpha^{s,s'-1}(t)}.$$

En outre,

$$\frac{\partial}{\partial t} \tau_\pm \left( t, x, \xi, w(t), w'(t), \frac{\partial_x}{t} w(t) \right) \in \frac{1}{\sqrt{t}} \Sigma_1^1(t)$$

et  $\text{Im } \tau_\pm \equiv 0$ .

*Démonstration.* – (i) Nous voulons prouver que (2.49) est une forme linéaire continue sur  $F_\alpha^{s,s'}(t)$  à valeurs dans  $t^{-1/2} \Sigma_1^1(t)$ , et à valeurs dans  $t^{-\nu} \tilde{\Sigma}_{1,\rho}^1(t)$  lorsque de plus  $s' + \alpha \geq 0$ . La première propriété résulte immédiatement du fait que  $\theta_\pm^1$  est à valeurs dans  $S_1^1$  et que l'argument  $(w, w', \partial_x w/t)$  est dans  $L^\infty$  lorsque  $(w, w')$  décrit  $B(F_\alpha^{s,s'}(t), r_0)$  d'après le corollaire 2.3 (iii). Si nous supposons de plus  $s' + \alpha \geq 0$ , le lemme 2.2 (iii) entraîne que  $(w, w', \partial_x w/t)$  est dans

$t^{-\alpha}C^\rho$ . Comme  $\theta_\pm^1$  est à valeurs dans  $S_1^1$ , la relation  $\nu = (1/2) + \alpha$  montre que les semi-normes de

$$t^{\nu-1/2}\theta_\pm^1(t, x, \xi, w, w', \partial_x w/t)$$

dans  $\tilde{\Sigma}_{1,\rho}^1(t)$  sont majorées par  $C\|(w, w')\|_{\mathbb{F}_{\alpha, s'}^{s, s'}(t)}$  lorsque  $(w, w')$  reste dans la boule indiquée.

Montrons que, sous les hypothèses (2.48), et lorsque de plus  $s' + \alpha \geq 0$ ,

$$(w, w') \mapsto t^{-1+\nu}\theta_\pm^2\left(t, x, \xi, w, w', \frac{\partial_x}{t}w\right)$$

est  $C^1$  à valeurs dans  $\tilde{\Sigma}_{1,\rho}^1(t)$ . Remarquons d'abord que

$$(2.53) \quad \begin{aligned} & \left\| \partial_\xi^\beta \theta_\pm^2\left(t, x, \xi, w(x), w'(x), \frac{\partial_x}{t}w(x)\right) \right\|_{C^\rho} \\ & \leq \sum_{n \leq [\rho]+1} \sup_y \left\| \partial_y^n \partial_\xi^\beta \theta_\pm^2\left(t, y, \xi, w(x), w'(x), \frac{\partial_x}{t}w(x)\right) \right\|_{C^\rho} \\ & \leq Ct^{-\alpha} \sum_{n \leq [\rho]+1} \sup_y \left\| \partial_y^n \partial_\xi^\beta \theta_\pm^2\left(t, y, \xi, w(x), w'(x), \frac{\partial_x}{t}w(x)\right) \right\|_{\mathbb{E}_{\alpha, s'}^{s, s'}(t)}, \end{aligned}$$

où les normes  $C^\rho$  sont prises en  $x$ , et où on a utilisé le (iii) du lemme 2.2. D'après (2.11), le terme général de la dernière somme s'estime, si  $r_0$  est assez petit, par

$$C\|(w, w')\|_{\mathbb{F}_{\alpha, s'}^{s, s'}(t)} \sup_{|z| < 1} \sup_y |\partial_y^n \partial_\xi^\beta \theta_\pm^2(t, y, \xi, z)|$$

puisque  $w, w', \partial_x w/t$  sont dans  $\mathbb{E}_{\alpha, s'}^{s, s'}(t)$  d'après le corollaire 2.3 (iii). Comme  $\theta_\pm^2$  est à valeurs dans  $S_1^1$ , et que  $\nu - 1 - \alpha \leq 0$ , on obtient bien que

$$t^{-1+\nu}\theta_\pm^2\left(t, x, \xi, w, w', \frac{\partial_x}{t}w\right) \in \tilde{\Sigma}_{1,\rho}^1(t).$$

La continuité en  $(w, w')$  s'obtient de même. Pour obtenir la dépendance  $C^1$ , il suffit de reprendre le même type de calculs en utilisant l'inégalité (2.12) du corollaire 2.4.

Lorsqu'on se place uniquement sous les hypothèses (2.48), le fait que  $t^{-1}\theta_\pm^2$  soit dans  $t^{-1}\Sigma_1^1$  résulte des estimations analogues à (2.53) pour la norme  $L^\infty$  au lieu de la norme  $C^\rho$ , estimations qui ne donnent plus lieu à la perte en  $t^{-\alpha}$ . La conclusion concernant  $\tau_\pm$  résulte du fait que  $(1 + \xi^2/t^2)^{1/2}$  est dans  $S_0^1$  et que, lorsque  $s' + \alpha \geq 0$ ,  $\partial_\xi^\beta \partial_x \tau_\pm = t^{-1/2} \partial_\xi^\beta \partial_x \theta_\pm$  vérifie (2.16) avec  $k = 0, m = 1$  puisque  $t^{-1/2}\theta_\pm \in t^{-\nu}\tilde{\Sigma}_{1,\rho}^1(t)$ .

(ii) La dérivée en  $t$  du premier terme de (2.46) est dans  $t^{-1}S_1^1 \subset t^{-1}\Sigma_1^1$ . D'autre part,

$$(2.54) \quad \begin{aligned} & \partial_t \left[ \frac{1}{\sqrt{t}} \theta_\pm^1\left(t, x, \xi, w, w', \frac{\partial_x}{t}w\right) \right] \\ & = \frac{1}{\sqrt{t}} \theta_\pm^1\left(t, x, \xi, \partial_t w, \partial_t w', \partial_t \frac{\partial_x}{t}w\right) + \frac{1}{\sqrt{t}} (\partial_t \theta_\pm^1)\left(t, x, \xi, w, w', \frac{\partial_x}{t}w\right) \\ & \quad - \frac{1}{2t^{3/2}} \theta_\pm^1\left(t, x, \xi, w, w', \frac{\partial_x}{t}w\right). \end{aligned}$$

D'après le corollaire 2.3 (iii),  $(w, w', \partial_x w/t)$  est dans  $E_\alpha^{s,s'}(t) \subset L^\infty$ , et par (2.13)  $(\partial_t \theta_\pm^1)$  est à valeurs dans  $t^{-1}S_1^1$ . Il en résulte que la somme des deux derniers termes de (2.54) est dans  $t^{-3/2}\Sigma_1^1$ , leurs semi-normes s'estimant à partir de la quantité  $\|(w(t), w'(t))\|_{F_\alpha^{s,s'}(t)}$ . Calculons

$$(2.55) \quad \partial_t \left[ \frac{1}{t} \theta_\pm^2 \left( t, x, \xi, w, w', \frac{\partial_x w}{t} \right) \right] = \frac{1}{t} (\partial_z \theta_\pm^2) \left( t, x, \xi, w, w', \frac{\partial_x w}{t} \right) \left[ \partial_t w, \partial_t w', \partial_t \frac{\partial_x w}{t} \right] \\ - \frac{1}{t^2} \theta_\pm^2 + \frac{1}{t} (\partial_t \theta_\pm^2) \left( t, x, \xi, w, w', \frac{\partial_x w}{t} \right).$$

Les deux derniers termes du membre de droite sont dans  $t^{-2}\Sigma_1^1(t)$ . D'autre part, par le corollaire 2.3 (iii), et l'hypothèse  $(\partial_t w(t), \partial_t w'(t)) \in F_\alpha^{s,s'-1}(t)$ , le vecteur  $[\partial_t w, \partial_t w', \partial_t(\partial_x w/t)]$  est dans  $L^\infty$ . La proposition 2.15 et l'inégalité (2.11) entraînent alors que le premier terme du membre de droite de (2.55) est dans  $t^{-1}\Sigma_1^1$ , avec des semi-normes contrôlées à partir de  $\|(\partial_t w, \partial_t w')\|_{F_\alpha^{s,s'-1}(t)} + \|(w, w')\|_{F_\alpha^{s,s'}(t)}$  lorsque  $(w(t), w'(t))$  reste dans  $B(F_\alpha^{s,s'}(t), r_0)$  (on remarquera qu'ici, contrairement au point (i), on n'a pas de perte en  $t^{-\alpha}$  puisqu'on cherche seulement des estimations de symboles  $L^\infty$  en  $x$  au lieu de  $C^\rho$ ). Cela conclut la preuve. L'avant-dernière assertion résulte du fait que  $\theta_\pm^1(t, x, \xi, z)$  est dans  $S_1^1$  et que  $(\partial_t w, \partial_t w', \partial_t(\partial_x w/t))$  est dans  $L^\infty$ . Le fait que  $\text{Im } \tau_\pm \equiv 0$  est conséquence du fait que  $\theta_\pm^1, \theta_\pm^2$  sont réels sur le réel.  $\square$

Nous pouvons maintenant écrire la version paralinéarisée de l'équation (1.40).

PROPOSITION 2.17. – Soient  $s, s', \alpha$  vérifiant

$$(2.56) \quad s + s' > \frac{3}{2}, \quad s > \frac{3}{2} + \alpha, \quad \alpha \in ]-1/2, 0[, \quad s' + \alpha \geq 0,$$

et soit  $\nu = \frac{1}{2} + \alpha$ . Supposons  $\rho = s - (1/2) - \alpha$  non entier. Notons toujours  $T_0$  le réel défini dans la proposition 2.15 et  $r_0$  le réel défini dans le lemme précédent. Il existe une forme linéaire en  $z \in \mathbb{C}^5$  à valeurs dans  $S_1^1$ ,  $\ell_\pm(t, x, \xi, z)$ , et des opérateurs (en général non linéaires et non locaux)  $(w, w', w'') \mapsto S_0^\pm(t, w, w', w'')$  (resp.  $(w, w') \mapsto S_1^\pm(t, w, w')$ ) définis pour  $t \geq T_0$  sur  $B(\tilde{F}_\alpha^{s,s'}(t), r_0)$  (resp.  $B(F_\alpha^{s,s'}(t), r_0)$ ), à valeurs dans  $H_{\alpha+1}^{s,s'}(t)$  (resp.  $H_\alpha^{s,s'}(t)$ ), satisfaisant aux inégalités

$$\|S_0^\pm(t, w, w', w'')\|_{H_{\alpha+1}^{s,s'}(t)} \leq C \|(w, w', w'')\|_{\tilde{F}_\alpha^{s,s'}(t)}, \\ \|S_1^\pm(t, w, w')\|_{H_\alpha^{s,s'}(t)} \leq C \|(w, w')\|_{F_\alpha^{s,s'}(t)}$$

et vérifiant la propriété suivante :

Pour toute fonction  $t \mapsto w(t, \cdot)$  définie sur un intervalle  $[T_0, T[$ , telle que  $t \mapsto (w(t), \partial_t w(t))$  soit continue à valeurs dans la boule  $B(F_\alpha^{s,s'}(t), r_0)$ , et  $C^1$  à valeurs dans  $B(F_\alpha^{s,s'-1}, r_0)$ , solution sur  $[T_0, T[$  de (1.40), on a :

$$(2.57) \quad \left( D_t - \text{Op}^B \left( \tau_\pm \left( t, x, \xi, w, \partial_t w, \frac{\partial_x w}{t} \right) \right) \right) \left( D_t - \text{Op}^B \left( \tau_\mp \left( t, x, \xi, w, \partial_t w, \frac{\partial_x w}{t} \right) \right) \right) w \\ = \frac{1}{\sqrt{t}} A_2(x, w, \partial_t w) + \frac{1}{t} A_3(x, w, \partial_t w) \\ + \frac{1}{\sqrt{t}} \text{Op}^B \left( \ell_\pm \left( t, x, \xi, w, \partial_t w, \frac{\partial_x w}{t}, \partial_t^2 w, \partial_t \frac{\partial_x w}{t} \right) \right) w + \frac{1}{t} S_0^\pm(t, w, \partial_t w, \partial_t^2 w) \\ + \frac{1}{t^{1+\nu}} S_1^\pm(t, w, \partial_t w).$$

*Démonstration.* – Écrivons (pour le premier choix de signes)

$$(2.58) \quad \begin{aligned} & (D_t - \text{Op}^{\mathcal{B}}(\tau_+))(D_t - \text{Op}^{\mathcal{B}}(\tau_-))w \\ &= (D_t^2 - \text{Op}^{\mathcal{B}}(\tau_+ + \tau_-)D_t + \text{Op}^{\mathcal{B}}(\tau_+\tau_-))w \\ & \quad + (\text{Op}^{\mathcal{B}}(\tau_+) \circ \text{Op}^{\mathcal{B}}(\tau_-) - \text{Op}^{\mathcal{B}}(\tau_+\tau_-))w - \text{Op}^{\mathcal{B}}(D_t\tau_-)w. \end{aligned}$$

D'après le (ii) du lemme 2.16, le dernier terme s'écrit

$$(2.59) \quad \frac{i}{\sqrt{t}} \text{Op}^{\mathcal{B}} \left( \theta_-^1 \left( t, x, \xi, \partial_t w, \partial_t^2 w, \partial_t \frac{\partial_x}{t} w \right) \right) w + \frac{1}{t} S_0(t, w, \partial_t w, \partial_t^2 w),$$

où  $\|S_0(t, w, \partial_t w, \partial_t^2 w)\|_{\mathbb{H}_{\alpha+1}^{s, s'}(t)} \leq C \|w\|_{\mathbb{H}_{\alpha}^{s, s'+1}(t)}$ , puisque les opérateurs de symbole dans  $\Sigma_1^1$  agissent de  $\mathbb{H}_{\alpha}^{s, s'+1}(t)$  dans  $\mathbb{H}_{\alpha+1}^{s, s'}(t)$ . Le premier terme de (2.59) fournit l'une des contributions au terme en  $\ell_+$  de (2.57). D'autre part, puisque  $\tau_{\pm} \in \Sigma_{0, \rho, \nu}^1$  par le lemme 2.16, le théorème 2.9 (ii), qui s'applique puisque  $\rho = s - (1/2) - \alpha > 1$ , entraîne que l'avant-dernier terme de (2.58) est dans  $t^{-1-\nu} \mathbb{H}_{\alpha}^{s, s'}(t)$  pour  $w \in \mathbb{H}_{\alpha}^{s, s'+1}(t)$ , i.e. contribue au terme en  $S_1^+$  de (2.57). Remarquons que par définition de  $\tau_{\pm}$

$$\begin{aligned} \tau_+ + \tau_- &= \frac{1}{\sqrt{t}} a_{01} \left( t, x, w, \partial_t w, \frac{\partial_x}{t} w \right) \frac{\xi}{t}, \\ \tau_+ \tau_- &= - \left( 1 + \frac{\xi^2}{t^2} \right) - \frac{1}{\sqrt{t}} a_{11} \left( t, x, w, \partial_t w, \frac{\partial_x}{t} w \right) \frac{\xi^2}{t^2}. \end{aligned}$$

Pour ramener (2.58) au membre de gauche de (1.40), modulo des termes en  $t^{-1-\nu} S_1^+(t, w, \partial_t w)$ , il suffit donc de voir que les deux expressions

$$(2.60) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{t}} \left[ a_{01} \left( t, x, w, \partial_t w, \frac{\partial_x}{t} w \right) - \text{Op}^{\mathcal{B}} \left( a_{01} \left( t, x, w, \partial_t w, \frac{\partial_x}{t} w \right) \right) \right] \frac{D_x}{t} D_t w, \\ & \frac{1}{\sqrt{t}} \left[ a_{11} \left( t, x, w, \partial_t w, \frac{\partial_x}{t} w \right) - \text{Op}^{\mathcal{B}} \left( a_{11} \left( t, x, w, \partial_t w, \frac{\partial_x}{t} w \right) \right) \right] \frac{D_x^2}{t^2} w \end{aligned}$$

peuvent s'écrire sous la forme  $t^{-1-\nu} S_1^+(t, w, \partial_t w)$ . Or  $(w, \partial_t w, \frac{\partial_x}{t} w) \in E_{\alpha}^{s, s'}(t)$  par le corollaire 2.3 (iii), donc  $a_{01}$  et  $a_{11}$  sont dans  $E_{\alpha}^{s, s'}(t)$  par le corollaire 2.4. D'autre part,  $\frac{D_x}{t} D_t w$  et  $\frac{D_x^2}{t^2} w$  sont dans  $\mathbb{H}_{\alpha+1}^{s, s'-1}(t)$ . Le corollaire 2.5 entraîne alors que (2.60) est dans  $t^{-3/2-\alpha} \mathbb{H}_{\alpha}^{s, s'}(t)$  grâce aux hypothèses (2.56), i.e. représente une contribution en  $t^{-1-\nu} S_1^+(t, w, \partial_t w)$ .

Le premier terme du membre de droite de (1.40) contribue à  $t^{-1} S_0^+$  dans (2.57). Pour conclure la preuve, il nous reste donc à montrer que les deux derniers termes du membre de droite de (1.40) peuvent s'écrire sous la forme de termes du membre de droite de (2.57). Par le corollaire 2.4, le terme  $c(t, x, w, D_t w, \frac{D_x}{t} w)$  est dans  $E_{\alpha}^{s, s'}(t)$ , donc la contribution correspondante est de la forme  $t^{-3/2} S_1^+(t, w, \partial_t w)$ . D'autre part, d'après (1.38), le terme en  $a_1$  de (1.40) s'écrit

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \ell_1 \left( t, x, w, D_t w, \frac{D_x}{t} w \right) \frac{D_x}{t} w + \frac{1}{t} b_1 \left( t, x, w, D_t w, \frac{D_x}{t} w \right) \frac{D_x}{t} w.$$

Comme ci-dessus, on peut écrire le premier terme sous la forme  $\frac{1}{\sqrt{t}} \text{Op}^{\mathcal{B}}(\ell_1) \frac{D_x}{t} w$  modulo un reste en  $t^{-1-\nu} S_1^+(t, w, \partial_t w)$ . Le second terme est le produit de  $1/t$ , de  $b_1 \in E_{\alpha}^{s, s'}(t)$  et de  $\frac{D_x}{t} w \in \mathbb{H}_{\alpha+1}^{s, s'}(t)$ . Par le corollaire 2.5 et le lemme 2.2 (i) il est donc somme d'un élément de  $t^{-1} \mathbb{H}_{\alpha+1}^{s, s'}(t)$

et d'un élément de  $t^{-2-\alpha}H_{\alpha}^{s,s'}(t)$  i.e. s'écrit  $t^{-1}S_0^+(t, w, \partial_t w) + t^{-2-\alpha}S_1^+(t, w, \partial_t w)$ . Cela achève la preuve.  $\square$

**2.3. La méthode des formes normales paradifférentielles**

Dans l'équation (2.57) certains termes du membre de droite sont affectés du poids  $t^{-1/2}$ , poids qui est trop loin de l'intégrabilité lorsque  $t \rightarrow +\infty$  pour permettre d'obtenir des estimations  $L^2$ . Le but de ce paragraphe est d'éliminer ces termes en  $1/\sqrt{t}$  par une méthode de formes normales. Nous commençons pour cela par écrire l'équation sous forme d'un système. Si  $E$  est un espace fonctionnel, nous noterons comme précédemment  $B(E, r)$  la boule de centre 0 de rayon  $r$  pour la norme de  $E$ . Nous utiliserons les deux espaces suivants pour  $t \geq T_0$  :

$$(2.61) \quad \begin{aligned} \mathcal{G}_{\alpha}^{s,s'}(t) &= \{(w_1, w_2); (w_1, w_2) \in E_{\alpha}^{s,s'}(t) \times E_{\alpha}^{s,s'}(t), \bar{w}_1 = -w_1, \bar{w}_2 = w_2\}, \\ \mathcal{H}_{\alpha}^{s,s'}(t) &= \{(u_+, u_-); (u_+, u_-) \in E_{\alpha}^{s,s'}(t) \times E_{\alpha}^{s,s'}(t), \bar{u}_+ + u_- = 0\}. \end{aligned}$$

*Définition 2.18.* – On appelle opérateur de reste de type (0, 1) (resp. de type (0, 0)) sur  $B(\mathcal{H}_{\alpha}^{s,s'}(t), r)$  tout opérateur (en général non linéaire et non local)  $U \mapsto S_0(t, U)$  (resp.  $U \mapsto S_1(t, U)$ ) défini pour  $t \geq T_0$  sur la boule précédente, à valeurs dans  $H_{\alpha+1}^{s,s'}(t)$  (resp.  $H_{\alpha}^{s,s'}(t)$ ) et vérifiant les estimations uniformes

$$(2.62) \quad \|S_0(t, U)\|_{H_{\alpha+1}^{s,s'}(t)} \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_{\alpha}^{s,s'}(t)},$$

resp.

$$(2.63) \quad \|S_1(t, U)\|_{H_{\alpha}^{s,s'}(t)} \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_{\alpha}^{s,s'}(t)}.$$

Nous poserons désormais

$$(2.64) \quad \Lambda = \left(1 + \frac{D_x^2}{t^2}\right)^{1/2}.$$

Construisons un changement de variables d'un voisinage de 0 dans  $\mathcal{G}_{\alpha}^{s,s'}(t)$  sur un voisinage de 0 dans  $\mathcal{H}_{\alpha}^{s,s'}(t)$ .

PROPOSITION 2.19. – Soient  $s, s', \alpha$  des réels vérifiant les conditions suivantes

$$(2.65) \quad s + s' > \frac{5}{2}, \quad s > \frac{3}{2} + \alpha, \quad \alpha \in ]-1/2, 0[, \quad s - \frac{1}{2} - \alpha \notin \mathbb{N}.$$

Il existe  $r_1 > 0, r_2 > 0$  tels que l'application  $(w_1, w_2) \mapsto G_t(w_1, w_2)$  définie pour  $t \geq T_0$  par

$$(2.66) \quad G_t(w_1, w_2) = \begin{bmatrix} w_1 - \text{Op}^B \left( \tau_- \left( t, x, \xi, \Lambda^{-1}w_2, iw_1, \frac{\partial_x}{t} \Lambda^{-1}w_2 \right) \right) \Lambda^{-1}w_2 \\ w_1 - \text{Op}^B \left( \tau_+ \left( t, x, \xi, \Lambda^{-1}w_2, iw_1, \frac{\partial_x}{t} \Lambda^{-1}w_2 \right) \right) \Lambda^{-1}w_2 \end{bmatrix}$$

soit un  $C^1$  difféomorphisme d'un voisinage  $V_t$  (resp.  $V'_t$ ) de 0 dans  $\mathcal{G}_{\alpha}^{s,s'}(t)$  (resp.  $\mathcal{G}_{\alpha}^{s,s'-1}(t)$ ) sur un voisinage  $W_t$  (resp.  $W'_t$ ) de 0 dans  $\mathcal{H}_{\alpha}^{s,s'}(t)$  (resp.  $\mathcal{H}_{\alpha}^{s,s'-1}(t)$ ) pour tout  $t \geq T_0$ , avec en

autre

$$(2.67) \quad \begin{aligned} \mathbb{B}(\mathcal{G}_\alpha^{s,s'}(t), r_1) &\subset V_t, & \mathbb{B}(\mathcal{G}_\alpha^{s,s'-1}(t), r_1) &\subset V'_t, \\ \mathbb{B}(\mathcal{H}_\alpha^{s,s'}(t), r_2) &\subset W_t, & \mathbb{B}(\mathcal{H}_\alpha^{s,s'-1}(t), r_2) &\subset W'_t. \end{aligned}$$

On peut de plus supposer que l'image de la première boule par  $G_t$  contient la seconde, et que l'image de  $\mathbb{B}(\mathcal{G}_\alpha^{s,s'}(t), r)$  (resp. de  $\mathbb{B}(\mathcal{G}_\alpha^{s,s'-1}(t), r)$ ) par  $G_t$  est contenue dans  $\mathbb{B}(\mathcal{H}_\alpha^{s,s'}(t), r_2)$  (resp. dans  $\mathbb{B}(\mathcal{H}_\alpha^{s,s'-1}(t), r_2)$ ) si  $r$  est fixé assez petit.

L'inverse  $H_t : W_t \rightarrow V_t$  de  $G_t$  admet le développement suivant

$$(2.68) \quad H_t(U) = M_0 U + \frac{1}{\sqrt{t}} S_0(t, U) + \frac{1}{t} S_1(t, U),$$

où  $M_0 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}$ ,  $S_0$  (resp.  $S_1$ ) est une famille  $C^1$  en  $t$  d'opérateurs de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{B}(\mathcal{H}_\alpha^{s,s'-j}(t), r_2)$  à valeurs dans  $\mathbb{H}_{\alpha+1}^{s,s'-j}(t)$  (resp. à valeurs dans  $\mathbb{H}_\alpha^{s,s'-j}(t)$ )  $j = 0, 1$ , vérifiant les estimations uniformes

$$(2.69) \quad \begin{aligned} \|\partial_t S_0(t, U)\|_{\mathbb{H}_{\alpha+1}^{s,s'-j}(t)} + \|S_0(t, U)\|_{\mathbb{H}_{\alpha+1}^{s,s'-j}(t)} &\leq C \|U\|_{\mathcal{H}_\alpha^{s,s'-j}(t)}, \\ \|\partial_t S_1(t, U)\|_{\mathbb{H}_\alpha^{s,s'-j}(t)} + \|S_1(t, U)\|_{\mathbb{H}_\alpha^{s,s'-j}(t)} &\leq C \|U\|_{\mathcal{H}_\alpha^{s,s'-j}(t)}. \end{aligned}$$

*Démonstration.* – Montrons que  $G_t$  agit sur les espaces indiqués. Si  $(w_1, w_2) \in \mathcal{G}_\alpha^{s,s'-1}(t)$ ,  $\Lambda^{-1}w_2 \in \mathbb{H}_\alpha^{s,s'}(t)$  et  $\Lambda^{-1}w_2 \in L^\infty$  d'après le (iv) du corollaire 2.3. Par conséquent,  $(\Lambda^{-1}w_2, iw_1) \in \mathbb{F}_\alpha^{s,s'-1}(t)$ . Les hypothèses (2.65) entraînent que les inégalités (2.48) sont satisfaites avec  $s'$  remplacé par  $s' - 1$ . Le lemme 2.16 entraîne alors que

$$\tau_\pm \left( t, x, \xi, \Lambda^{-1}w_2, iw_1, \frac{\partial_x}{t} \Lambda^{-1}w_2 \right) \in \Sigma_0^1(t)$$

lorsque  $(w_1, w_2) \in \mathcal{G}_\alpha^{s,s'-1}(t)$ . L'opérateur associé est d'après le théorème 2.9 (i) borné de  $\mathbb{H}_\alpha^{s,s'+1}(t)$  et  $\mathbb{H}_\alpha^{s,s'}(t)$  à valeurs respectivement dans  $\mathbb{H}_\alpha^{s,s'}(t)$  et  $\mathbb{H}_\alpha^{s,s'-1}(t)$ . Par conséquent,  $G_t$  est à valeurs dans ces deux derniers espaces lorsque  $(w_1, w_2)$  décrit respectivement  $\mathcal{G}_\alpha^{s,s'}(t)$  et  $\mathcal{G}_\alpha^{s,s'-1}(t)$ . Pour voir que  $G_t(w_1, w_2)$  est dans  $L^\infty$ , il suffit compte tenu de la décomposition (2.46) de  $\tau_\pm$ , de montrer que  $\frac{1}{\sqrt{t}} \text{Op}^{\mathcal{B}}(\theta_\pm^1) \Lambda^{-1}w_2$  et  $\frac{1}{t} \text{Op}^{\mathcal{B}}(\theta_\pm^2) \Lambda^{-1}w_2$  sont dans  $L^\infty$ ,  $\theta_\pm^1$  et  $\theta_\pm^2$  désignant les symboles (2.49), (2.50) dans lesquels on a posé  $w = \Lambda^{-1}w_2$ ,  $w' = iw_1$ . D'après le lemme 2.16, les symboles  $t^{-1/2}\theta_\pm^1$  et  $t^{-1}\theta_\pm^2$  sont dans  $t^{-1/2}\Sigma_1^1$ , donc les quantités considérées sont dans  $t^{-1/2}\mathbb{H}_{\alpha+1}^{s,s'-1}(t)$  d'après le théorème 2.9 (i). Comme ce dernier espace est contenu dans  $L^\infty$  par la première assertion du lemme 2.2 (iii) on a bien  $G_t(w_1, w_2) \in L^\infty$ . Il reste à voir que les composantes  $(u_+, u_-)$  de  $G_t(w_1, w_2)$  vérifient  $\bar{u}_+ + u_- = 0$ . Or

$$(2.70) \quad \overline{\text{Op}^{\mathcal{B}}(\tau_\pm) \Lambda^{-1}w_2} = \text{Op}^{\mathcal{B}}(\overline{\tau_\pm(t, x, -\xi, \Lambda^{-1}w_2, iw_1, \partial_x \Lambda^{-1}w_2/t)}) \Lambda^{-1}\bar{w}_2.$$

Comme  $iw_1$  et  $w_2$  sont réels, et que dans (2.44)  $a_{11}$  et  $a_{01}$  sont réels sur le réel, le symbole au membre de droite de (2.70) vaut  $-\tau_\mp(t, x, \xi, \Lambda^{-1}w_2, iw_1, \frac{\partial_x}{t} \Lambda^{-1}w_2)$ , d'où

$$\overline{\text{Op}^{\mathcal{B}}(\tau_+) \Lambda^{-1}w_2} = -\text{Op}^{\mathcal{B}}(\tau_-) \Lambda^{-1}w_2,$$

qui entraîne la relation voulue. Comme, d'après le lemme 2.16, la dépendance des symboles  $\tau_{\pm}$ ,  $\theta_{\pm}^1$ ,  $\theta_{\pm}^2$  en  $(w_1, w_2)$  est  $C^1$ , on obtient que  $G_t$  est  $C^1$  sur les espaces indiqués.

Pour montrer que  $G_t$  est un difféomorphisme local sur des voisinages de 0 de la forme indiquée, il nous suffit de voir que sa différentielle en  $(w_1, w_2) = (0, 0)$  est inversible de  $\mathcal{G}_{\alpha}^{s, s'}(t)$  sur  $\mathcal{H}_{\alpha}^{s, s'}(t)$  et de  $\mathcal{G}_{\alpha}^{s, s'-1}(t)$  sur  $\mathcal{H}_{\alpha}^{s, s'-1}(t)$ , avec un contrôle uniforme en  $t$  de sa norme, et de celle de son inverse. D'après (2.46) cette différentielle n'est autre que l'application linéaire

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} w_1 + w_2 \\ w_1 - w_2 \end{pmatrix}$$

dont l'inverse est la matrice  $M_0$  de l'énoncé. D'après (2.46) les composantes de  $G_t(w_1, w_2)$  s'écrivent

$$\begin{aligned} w_1 \pm w_2 - \frac{1}{\sqrt{t}} \text{Op}^{\mathcal{B}} \left( \theta_{\mp}^1 \left( t, x, \xi, \Lambda^{-1} w_2, i w_1, \frac{\partial_x}{t} \Lambda^{-1} w_2 \right) \right) \Lambda^{-1} w_2 \\ - \frac{1}{t} \text{Op}^{\mathcal{B}} \left( \theta_{\mp}^2 \left( t, x, \xi, \Lambda^{-1} w_2, i w_1, \frac{\partial_x}{t} \Lambda^{-1} w_2 \right) \right) \Lambda^{-1} w_2. \end{aligned}$$

D'après le lemme 2.16, ces expressions se réécrivent

$$(2.71) \quad G_t(w_1, w_2) = M_0^{-1} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{t}} \tilde{S}_0(t, (w_1, w_2)) + \frac{1}{t} \tilde{S}_1(t, (w_1, w_2)),$$

où  $\tilde{S}_0$  (resp.  $\tilde{S}_1$ ) est  $C^1$  en  $t$  et en  $(w_1, w_2)$  et agit, ainsi que sa dérivée en  $t$ , si  $j = 0, 1$ , de  $\mathcal{G}_{\alpha}^{s, s'-j}(t)$  dans  $\mathcal{H}_{\alpha+1}^{s, s'-j}(t)$  (resp.  $\mathcal{H}_{\alpha}^{s, s'-j}(t)$ ) (en fait  $\tilde{S}_1$  arrive également dans  $\mathcal{H}_{\alpha+1}^{s, s'-j}(t)$ , mais nous n'utiliserons pas cette propriété). Cela entraîne en particulier que  $G_t$ , et donc aussi  $H_t$ , sont  $C^1$  en  $t$ . Remplaçant  $(w_1, w_2)$  par  $H_t(U)$  dans (2.71), on obtient (2.68) en posant  $S_0(t, U) = -M_0 \tilde{S}_0(t, H_t(U))$ ,  $S_1(t, U) = -M_0 \tilde{S}_1(t, H_t(U))$ . Cela achève la preuve.  $\square$

*Remarque 2.2.* – Les termes en  $S_0, S_1$  de (2.68) sont des opérateurs de reste au sens de la définition (2.61). De telles expressions joueront dans la suite le rôle de quantités négligeables.

Soit  $t \mapsto w(t, \cdot)$  une fonction dérivable de  $t$ , telle que  $t \mapsto (w(t), \partial_t w(t))$  soit continue sur  $[T_0, +\infty[$  à valeurs dans  $B(\mathcal{F}_{\alpha}^{s, s'}(t), r)$  et  $C^1$  à valeurs dans  $B(\mathcal{F}_{\alpha}^{s, s'-1}(t), r)$ . Posons

$$(2.72) \quad (w_1, w_2) = (D_t w, \Lambda w) \in \mathcal{G}_{\alpha}^{s, s'}(t).$$

Si  $r$  est assez petit, il existe  $U \in B(\mathcal{H}_{\alpha}^{s, s'}(t), r_2)$  tel que  $H_t(U) = (w_1, w_2)$  d'après la proposition précédente. Nous pouvons aussi supposer que  $\partial_t U \in B(\mathcal{H}_{\alpha}^{s, s'-1}(t), r_2)$ . Désignant par  $(H_t^1, H_t^2)$  les deux composantes de  $H_t$ , posons

$$(2.73) \quad \lambda_{\pm}(t, x, \xi, U) = \tau_{\pm} \left( t, x, \xi, \Lambda^{-1} H_t^2(U), i H_t^1(U), \frac{\partial_x}{t} \Lambda^{-1} H_t^2(U) \right)$$

pour  $U \in B(\mathcal{H}_{\alpha}^{s, s'}(t), r_2)$ . D'après (2.46), le lemme 2.16, et le fait que l'argument de  $\tau_{\pm}$  dans (2.73) est réel si  $U \in \mathcal{H}_{\alpha}^{s, s'}(t)$ , nous avons lorsque les conditions (2.65) sont satisfaites

$$(2.74) \quad \begin{aligned} \lambda_{\pm}(t, x, \xi, U) &\in \Sigma_0^1(t), \\ \lambda_{\pm}(t, x, \xi, U) &\mp \left( 1 + \frac{\xi^2}{t^2} \right)^{1/2} \in t^{-1/2} \Sigma_1^1(t), \\ \text{Im } \lambda_{\pm}(t, x, \xi, U) &\equiv 0, \end{aligned}$$

$\rho$  désignant toujours  $\rho = s - (1/2) - \alpha$ . De plus, d'après le (ii) de ce même lemme

$$(2.75) \quad D_t(\lambda_{\pm}(t, x, \xi, U)) \in t^{-1/2}\Sigma_1^1(t).$$

Enfin, si nous supposons de plus  $s' + \alpha \geq 0$ , le (i) du lemme 2.16 montre que

$$(2.76) \quad \begin{aligned} \lambda_{\pm}(t, x, \xi, U) &\in \Sigma_{0, \rho, \nu}^1(t), \\ \lambda_{\pm}(t, x, \xi, U) &\mp \left(1 + \frac{\xi^2}{t^2}\right)^{1/2} \in t^{-\nu}\tilde{\Sigma}_{1, \rho}^1(t). \end{aligned}$$

Rappelons que l'on a écrit en (1.44)  $A_2(x, w, \partial_t w)$  à partir de la matrice  $\tilde{A}_2(x)$ . Définissons de même  $\tilde{A}_3(x)$  comme l'application trilineaire telle que

$$(2.77) \quad A_3(x, w, \partial_t w) = \tilde{A}_3(x) \left( \begin{bmatrix} D_t w \\ w \end{bmatrix} \right)$$

et posons enfin

$$(2.78) \quad \Gamma(x) = {}^t M_0 \tilde{A}_2(x) M_0.$$

Nous pouvons alors réécrire l'équation (2.57) sous forme d'un système en  $U = {}^t[u_+, u_-]$  :

**PROPOSITION 2.20.** – Soient  $s, s', \alpha$  vérifiant les conditions (2.65). Il existe  $r > 0$ ,  $L_{\pm}(t, x, \xi, U)$  forme linéaire en  $U$  décrivant  $\mathcal{H}_{\alpha}^{s, s'}(t)$ , à coefficients dans  $S_1^0$ , et deux opérateurs de reste  $S_0^{\pm}(t, U)$  (resp.  $S_1^{\pm}(t, U)$ ) de type  $(0, 1)$  (resp.  $(0, 0)$ ) sur  $B(\mathcal{H}_{\alpha}^{s, s'}(t), r_2)$  vérifiant la condition suivante : pour toute fonction  $t \mapsto w(t, \cdot)$ , définie sur  $[T_0, T[$ , telle que  $t \mapsto (D_t w(t, \cdot), \Lambda w(t, \cdot))$  soit continue à valeurs dans  $B(\mathcal{G}_{\alpha}^{s, s'}(t), r)$ , et  $C^1$  à valeurs dans  $B(\mathcal{G}_{\alpha}^{s, s'-1}(t), r)$ , solution de (2.57) sur  $[T_0, T[$ ,  $U(t, \cdot) = G_t(D_t w, \Lambda w)$  vérifie

$$(2.79) \quad \begin{aligned} &(D_t - \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_{\pm}(t, x, \xi, U)))u_{\pm} \\ &= \frac{1}{\sqrt{t}} {}^t U \Gamma(x) U + \frac{1}{t} \tilde{A}_3(x)(M_0 U) + \frac{1}{\sqrt{t}} \text{Op}^{\mathcal{B}}(L_{\pm}(t, x, \xi, U))U \\ &\quad + \frac{1}{t} S_0^{\pm}(t, U) + \frac{1}{t^{1+\nu}} S_1^{\pm}(t, U), \end{aligned}$$

où  $\nu = \frac{1}{2} + \alpha$ .

*Démonstration.* – Le membre de gauche de (2.57) est de la forme voulue par définition même de  $u_{\pm}, \lambda_{\pm}$ . Il nous faut mettre le membre de droite sous la forme (2.79). Nous supposons  $r > 0$  assez petit pour que  $U$  reste dans la boule  $B(\mathcal{H}_{\alpha}^{s, s'}(t), r_2)$  et  $\partial_t U$  reste dans  $B(\mathcal{H}_{\alpha}^{s, s'-1}(t), r_2)$  lorsque  $(D_t w, \Lambda w)$  décrit  $B(\mathcal{G}_{\alpha}^{s, s'}(t), r)$  et que  $\partial_t(D_t w, \Lambda w)$  décrit  $B(\mathcal{G}_{\alpha}^{s, s'-1}(t), r)$ . Nous allons examiner successivement les trois premiers termes du membre de droite de (2.57). Toutes les estimations que nous écrirons seront uniformes en  $t \in [T_0, T[$ , les constantes ne dépendant que de  $r$ .

**LEMME 2.21.** – Il existe des opérateurs de reste  $S_0$  et  $S_1$  sur  $B(\mathcal{H}_{\alpha}^{s, s'}(t), r_2)$ , de type  $(0, 1)$  et  $(0, 0)$  respectivement, et  $L(t, x, \xi, U)$  forme linéaire en  $U$ , à coefficients dans  $S_1^0$ , tels que l'on puisse écrire

$$(2.80) \quad \begin{aligned} A_2(x, w, \partial_t w) &= {}^t U \Gamma(x) U + t^{-1/2} S_0(t, U) + t^{-1/2-\nu} S_1(t, U) \\ &\quad + \text{Op}^{\mathcal{B}}(L(t, x, \xi, U))U, \\ A_3(x, w, \partial_t w) &= \tilde{A}_3(x)(M_0 U) + S_0(t, U) + t^{-1/2-\nu} S_1(t, U). \end{aligned}$$

*Démonstration.* – Posons  $M_1(D/t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Lambda^{-1} \end{bmatrix}$ . D'après le lemme 1.9 on a

$$A_2(x, w, \partial_t w) = {}^t(M_1(D/t)H_t(U))\tilde{A}_2(x)(M_1(D/t)H_t(U)).$$

D'après (2.68)

$$M_1(D/t)(H_t(U) - M_0U) \in \frac{1}{\sqrt{t}}H_{\alpha+1}^{s,s'}(t) + \frac{1}{t}H_{\alpha}^{s,s'}(t).$$

D'autre part, grâce à (iv) du corollaire 2.3,  $M_1(D/t)H_t(U) \in E_{\alpha}^{s,s'}(t)$ , et de même pour  $\tilde{A}_2(x)M_1(D/t)H_t(U)$  par le (ii) de ce même corollaire. Le (v) de celui-ci entraîne que

$${}^t(M_1(D/t)(H_t(U) - M_0U))\tilde{A}_2(x)M_1(D/t)H_t(U) \in \frac{1}{\sqrt{t}}H_{\alpha+1}^{s,s'}(t) + \frac{1}{t^{1+\alpha}}H_{\alpha}^{s,s'}(t),$$

donc s'écrit  $t^{-1/2}S_0(t, U) + t^{-1/2-\nu}S_1(t, U)$  avec des restes  $S_0, S_1$  vérifiant les conditions de l'énoncé. Répétant ce raisonnement, on obtient donc, modulo des restes de la forme voulue, que  $A_2(x, w, \partial_t w)$  est congru à

$$(2.81) \quad {}^t(M_1(D/t)M_0U)\tilde{A}_2(x)(M_1(D/t)M_0U).$$

Or  $(M_1(\xi/t) - I)M_0$  est une matrice à coefficients dans  $S_1^0$ . Si nous posons provisoirement  $W = M_1(D/t)M_0U \in E_{\alpha}^{s,s'}(t)$ , nous avons

$$(2.82) \quad {}^tW\tilde{A}_2(x)((M_1(D/t) - I)M_0U) = \text{Op}^{\mathcal{B}}({}^tW\tilde{A}_2(x)(M_1(\xi/t) - I)M_0U) + r,$$

où  $r$  est de la forme  $T_{ab} + R(a, b)$ ,  $a$  désignant des coefficients de  $(M_1(D/t) - I)M_0U$  et  $b$  des coefficients de  ${}^tW\tilde{A}_2(x)$ . On aura  $a \in H_{\alpha+1}^{s,s'} \subset t^{-\alpha-1}L^{\infty}$  d'après le lemme 2.2 (iii), et  $b \in E_{\alpha}^{s,s'}(t)$  par le corollaire 2.3 (ii). Par conséquent,  $r \in t^{-\alpha-1}H_{\alpha}^{s,s'}(t)$ , donc est de la forme  $t^{-1/2-\nu}S_1(t, U)$ . Enfin  $W - M_0U \in H_{\alpha+1}^{s,s'} \subset t^{-\alpha-1}L^{\infty}$ , donc le premier terme du membre de droite de (2.82) ne diffère de

$$(2.83) \quad \text{Op}^{\mathcal{B}}({}^t(M_0U)\tilde{A}_2(x)(M_1(\xi/t) - I)M_0U)$$

que par un reste de la forme  $t^{-1/2-\nu}S_1(t, U)$ . Comme (2.83) est de la forme  $\text{Op}^{\mathcal{B}}(L(t, x, \xi, U))U$ , pour une forme linéaire  $L$  en  $U$ , à coefficients dans  $S_1^0$ , nous avons donc ramené (2.81) à  ${}^t(M_1(D/t)M_0U)\tilde{A}_2(x)(M_0U)$  modulo des termes en  $t^{-1/2}S_0(t, U)$ ,  $t^{-1/2-\nu}S_1(t, U)$ ,  $\text{Op}^{\mathcal{B}}(L(t, x, \xi, U))U$ . Il nous suffit donc de réduire à des termes de cette forme l'expression

$${}^t((M_1(D/t) - I)M_0U)\tilde{A}_2(x)(M_0U)$$

pour obtenir la conclusion. Il suffit pour cela de répéter le raisonnement que nous avons appliqué au membre de gauche de (2.82). Cela conclut la preuve de la première égalité (2.80).

La preuve de la deuxième égalité (2.80) est plus simple : comme  $(M_1(D/t) - I)H_t(U) \in H_{\alpha+1}^{s,s'}(t)$  et que  $M_1(D/t)H_t(U) \in E_{\alpha}^{s,s'}(t)$ , le (v) du corollaire 2.3 entraîne que

$$\tilde{A}_3(x)(M_1(D/t)H_t(U)) - \tilde{A}_3(x)(H_t(U)) \in H_{\alpha+1}^{s,s'}(t) + t^{-1/2-\nu}H_{\alpha}^{s,s'}(t)$$

donc est un reste. D'après (2.68),  $H_t(U) - M_0U \in H_{\alpha+1}^{s,s'}(t)$ . Par le même corollaire que ci-dessus, on en déduit que  $\tilde{A}_3(x)(H_t(U)) - \tilde{A}_3(x)(M_0U)$  est un reste.  $\square$

LEMME 2.22. – Il existe  $L_{\pm}(t, x, \xi, U)$  forme linéaire en  $U$  décrivant  $\mathcal{H}_{\alpha}^{s, s'}(t)$ , à coefficients dans  $S_1^0$ , et un opérateur de reste  $S_0^{\pm}$  de type  $(0, 1)$  tels que, avec les notations de la proposition 2.17 :

$$(2.84) \quad \frac{1}{\sqrt{t}} \text{Op}^{\mathcal{B}} \left( \ell_{\pm} \left( t, x, \xi, w, \partial_t w, \frac{\partial_x}{t} w, \partial_t^2 w, \partial_t \frac{\partial_x}{t} w \right) \right) w \\ = \frac{1}{\sqrt{t}} \text{Op}^{\mathcal{B}} (L_{\pm}(t, x, \xi, U)) U + \frac{1}{t} S_0^{\pm}(t, U).$$

Démonstration. – L'argument de  $\ell_{\pm}$  est linéaire en des quantités de la forme suivante :

$$(2.85) \quad m(D/t)H_t(U), \quad \frac{D_x}{t}H_t(U), \quad D_t H_t(U),$$

où  $m(\xi/t)$  est un élément de  $S_0^0$ . Il suffit de voir que l'on peut écrire chacune de ces expressions comme un terme linéaire en  $U$  modulo un reste  $V$  de norme  $L^{\infty}$  majorée par  $C/\sqrt{t}$ . En effet, la contribution d'un tel reste à (2.84) sera de la forme

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \text{Op}^{\mathcal{B}} (\text{Va}(t, x, \xi)) H_t^2(U)$$

avec  $a \in S_1^0$ . Comme  $H_t^2(U) \in H_{\alpha}^{s, s'}(t)$  et que  $\sqrt{t} \text{Va} \in \Sigma_1^0$ , le théorème 2.9 (i) entraîne que cette quantité s'écrit  $\frac{1}{t} S_0^{\pm}(t, U)$ . Modulo un tel reste, on a ainsi réduit le membre de gauche de (2.84) à  $t^{-1/2} \text{Op}^{\mathcal{B}} (L_{\pm}(t, x, \xi, U)) H_t^2(U)$ . Il reste à utiliser que  $H_t(U) - M_0 U \in t^{-1/2} H_{\alpha}^{s, s'}(t)$  par (2.68).

Pour étudier (2.85), remarquons d'abord que  $m(\xi/t) - m(0) \in S_1^0$  donc  $(m(D/t) - m(0))H_t(U) \in H_{\alpha+1}^{s, s'}$ , et  $H_{\alpha+1}^{s, s'} \subset t^{-1-\alpha} L^{\infty}$  d'après le lemme 2.2 (iii). D'autre part, d'après (2.68),

$$H_t(U) - M_0 U \in t^{-1/2} H_{\alpha+1}^{s, s'} + t^{-1} H_{\alpha}^{s, s'}(t) \subset t^{-1/2} L^{\infty},$$

par le même lemme. Le premier terme de (2.85) se réduit donc à la forme voulue.

Le second terme de (2.85) est dans  $H_{\alpha+1}^{s, s'-1}(t) \subset t^{-1-\alpha} L^{\infty}$ , donc a une norme  $L^{\infty}$  en  $C/\sqrt{t}$ , et fournit une contribution au reste. Écrivons le troisième terme de (2.85) sous la forme  $\dot{H}_t(U) + D H_t(U) D_t U$ , où  $\dot{H}_t$  désigne la dérivée de  $H_t$  par rapport à  $t$ . Par (2.68), (2.69),  $\dot{H}_t(U)$  est dans

$$t^{-1/2} H_{\alpha+1}^{s, s'}(t) + t^{-1} H_{\alpha}^{s, s'}(t) \subset t^{-1/2} L^{\infty}$$

toujours par le lemme 2.2 (iii). Écrivons les composantes de  $D_t U$  sous la forme

$$(2.86) \quad (D_t - \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_{\pm})) u_{\pm} + \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_{\pm} \mp 1) u_{\pm} \pm u_{\pm}.$$

Dans le membre de droite de (2.57), les termes de reste sont dans

$$t^{-1} H_{\alpha+1}^{s, s'}(t) + t^{-1-\nu} H_{\alpha}^{s, s'}(t) \subset H_{\alpha+1}^{s, s'},$$

et les autres termes sont dans  $t^{-1/2} E_{\alpha}^{s, s'}(t) + t^{-1/2} H_{\alpha+1}^{s, s'}(t)$ , puisque  $E_{\alpha}^{s, s'}(t)$  est une algèbre, et que le symbole  $\ell_{\pm}$  est dans  $\Sigma_1^1$ . Le premier terme de (2.86) est donc dans

$$t^{-1/2} E_{\alpha}^{s, s'}(t) + H_{\alpha+1}^{s, s'}(t) = t^{-1/2} E_{\alpha}^{s, s'}(t) + E_{\alpha+1}^{s, s'}(t).$$

Comme  $\lambda_{\pm} \mp 1 \in \Sigma_1^1$ , le second terme de (2.86) est dans  $H_{\alpha+1}^{s,s'-1}(t) = E_{\alpha+1}^{s,s'-1}(t)$ . Par conséquent,  $D_t U - {}^t(u_+, -u_-)$  est dans  $t^{-1/2}\mathcal{H}_{\alpha}^{s,s'}(t) + \mathcal{H}_{\alpha+1}^{s,s'-1}(t)$ . Or  $DH_t(U)$  est linéaire continue de  $\mathcal{H}_{\alpha}^{s,s'}(t)$  dans  $\mathcal{H}_{\alpha}^{s,s'}(t) \subset L^{\infty}$ . D'autre part, grâce à (2.68), l'image de  $\mathcal{H}_{\alpha+1}^{s,s'-1}(t)$  par  $DH_t(U)$  est contenue dans

$$H_{\alpha+1}^{s,s'-1}(t) + t^{-1}H_{\alpha}^{s,s'-1}(t) \subset t^{-1/2}L^{\infty}.$$

Nous avons donc obtenu

$$DH_t(U)(D_t U - {}^t(u_+, -u_-)) \in t^{-1/2}L^{\infty}.$$

Il reste encore à ramener  $DH_t(U) {}^t(u_+, -u_-)$  à une expression linéaire en  $U$  modulo un nouveau reste dans  $t^{-1/2}L^{\infty}$ . Il suffit pour cela de réappliquer (2.68).  $\square$

*Fin de la démonstration de la proposition 2.20.* – Les deux lemmes précédents permettent de réduire les trois premiers termes du membre de droite de (2.57) à la forme voulue. Il reste à remarquer que les opérateurs  $S_0^{\pm}$ ,  $S_1^{\pm}$  de (2.57) dans lesquels on remplace  $w$  par  $\Lambda^{-1}H_t^2(U)$ ,  $\partial_t w$  par  $iH_t^1(U)$ ,  $\partial_t^2 w$  par  $i\partial_t(H_t^1(U))$  sont, si le réel  $r_1$  de la proposition 2.19 est inférieur au  $r_0$  de la proposition 2.17, des restes en  $S_0^{\pm}(t, U)$ ,  $S_1^{\pm}(t, U)$  (nous n'écrivons pas de dépendance de  $S_0^{\pm}$  en  $\partial_t U$ , puisque grâce à l'équation,  $\partial_t(H_t^1(U))$  s'écrit comme un opérateur agissant sur  $U$ , ainsi que nous venons de le voir en (2.86)).  $\square$

Nous allons maintenant chercher à corriger les  $u_{\pm}$  du membre de gauche de (2.79) de manière à éliminer les deux termes en  $t^{-1/2}$  du membre de droite. Nous introduisons pour cela la classe suivante d'opérateurs bilinéaires :

*Définition 2.23.* – Soient  $\Gamma = (\gamma_{ee'})_{e,e' \in \{+,-\}}$  une matrice symétrique à coefficients  $C^{\infty}$  bornés ainsi que toutes leurs dérivées,  $a = (a_{ee'})_{e,e' \in \{+,-\}}$  une matrice de symboles de  $\Sigma_0^0(t)$  telle qu'il existe une matrice symétrique à coefficients constants  $(a_{ee'}^0)_{e,e' \in \{+,-\}}$  avec  $a_{ee'} - a_{ee'}^0 \in \Sigma_1^0(t)$  pour tous  $e, e' \in \{+,-\}$ . Pour  $U = (u_+, u_-) \in E_{\alpha}^{s,s'}(t)^2$ ,  $V = (v_+, v_-) \in E_{\alpha}^{s,s'}(t)^2$  avec  $s + s' > 0$ ,  $s > \alpha$ , on définit l'opérateur bilinéaire symétrique

$$(2.87) \quad \text{Op}^{\mathcal{B}}(\Gamma, a)(U, V) = \sum_{e,e'} \gamma_{ee'} [\text{Op}^{\mathcal{B}}(a_{e'e}u_e)v_{e'} + \text{Op}^{\mathcal{B}}(a_{ee'}v_{e'})u_e + a_{ee'}^0 R(u_e, v_{e'})].$$

On remarquera que les hypothèses faites sur  $s, s', \alpha$  entraînent, d'après le lemme 2.2 (ii), que (2.87) a un sens.

Des opérateurs bilinéaires paradifférentiels ont été définis par Chemin dans [4] et appliqués à des problèmes de propagation des singularités. Ils sont toutefois différents de ceux que nous introduisons ici. Expliquons les raisons qui nous conduisent à la définition 2.23. Nous souhaitons perturber  $u_{\pm}$  dans le membre de gauche de (2.79) par une expression de la forme (2.87), multipliée par  $1/\sqrt{t}$ , afin d'éliminer le terme en  $t^{-1/2} {}^t U \Gamma(x) U$  dans le membre de droite de (2.79). Dans le cas du modèle d'équation différentielle étudié en (0.5), cela se fait en perturbant  $u_{\pm}$  par une expression quadratique locale en  $u_+, u_-$ . Le fait que dans (2.79) l'opérateur non local  $(D_t - \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_{\pm}))$  agisse sur  $u_{\pm}$  nous oblige à rechercher ici une perturbation quadratique plus compliquée, qui va justement être donnée par (2.87). Indiquons par exemple comment nous allons éliminer une contribution à  ${}^t U \Gamma(x) U$  de la forme  $\gamma(x)u_+u_-$  avec  $\gamma$  fonction  $C^{\infty}$  bornée ainsi que toutes ses dérivées. Les commutateurs de  $\gamma$  et des divers opérateurs qui vont intervenir

donnent lieu à des restes. Nous nous limitons donc dans cette présentation au cas  $\gamma \equiv 1$ . Nous écrivons alors la décomposition de Bony

$$(2.88) \quad u_+ u_- = \text{Op}^{\mathcal{B}}(u_+) u_- + \text{Op}^{\mathcal{B}}(u_-) u_+ + R(u_+, u_-)$$

et nous recherchons une expression de la forme (2.87)

$$(2.89) \quad \text{Op}^{\mathcal{B}}(a^+ u_+) u_- + \text{Op}^{\mathcal{B}}(a^- u_-) u_+ + a^0 R(u_+, u_-),$$

où  $a^+$ ,  $a^-$ ,  $a^0$  sont des symboles convenables à déterminer, tels que l'image de (2.89) par  $(D_t - \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_+))$  (par exemple) soit égale à (2.88) modulo des termes cubiques – qui s'incorporeront aux termes cubiques déjà présents dans le membre de droite de (2.79) – et modulo des termes de reste contribuant aux restes dans (2.79). Les  $a^\pm$  que nous trouverons seront tels que  $D_t a^\pm$  fournira une contribution de reste. Par conséquent, modulo des restes,

$$(2.90) \quad (D_t - \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_+)) \text{Op}^{\mathcal{B}}(a^+ u_+) u_- \\ = \text{Op}^{\mathcal{B}}(a^+ D_t u_+) u_- + \text{Op}^{\mathcal{B}}(a^+ u_+) D_t u_- - \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_+) \text{Op}^{\mathcal{B}}(a^+ u_+) u_-.$$

Si nous écrivons

$$D_t u_\pm = (D_t - \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_\pm)) u_\pm + \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_\pm) u_\pm,$$

le premier terme est d'après (2.79) au moins quadratique en  $u_+$ ,  $u_-$ , donc fournira à (2.90) une contribution au moins cubique. Par conséquent, modulo des expressions jouant un rôle de reste, (2.90) s'écrit

$$(2.91) \quad \text{Op}^{\mathcal{B}}(a_+ \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_+) u_+) u_- + \text{Op}^{\mathcal{B}}(a^+ u_+) \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_-) u_- - \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_+) \text{Op}^{\mathcal{B}}(a^+ u_+) u_-.$$

Le calcul symbolique permet, modulo des restes, de remplacer dans les deux derniers termes les composés qui apparaissent par les opérateurs de symboles respectifs  $a^+ u_+ \lambda_-$  et  $\lambda_+ a^+ u_+$ . D'autre part,  $\text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_+ - 1) u_+$  a une norme  $L^\infty$  en  $O(t^{-1-\alpha})$  car le symbole de  $\lambda_+ - 1$  s'annule en  $\xi/t = 0$ . Si on écrit le premier terme de (2.91) sous la forme

$$\text{Op}^{\mathcal{B}}(a^+ u_+) u_- + \text{Op}^{\mathcal{B}}(a^+ (\text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_+ - 1) u_+) u_-)$$

la dernière expression est encore un reste puisqu'elle décroît en  $t^{-1-\alpha}$  si  $t \rightarrow +\infty$ . Finalement, modulo des restes, on a réduit (2.91) à

$$\text{Op}^{\mathcal{B}}(a^+ (1 + \lambda_- - \lambda_+) u_+) u_-.$$

Afin d'égaliser ce premier terme au premier terme de (2.88), on est donc naturellement conduit à poser  $a^+ = (1 + \lambda_- - \lambda_+)^{-1}$ .

Le même type de raisonnements appliqué au second (resp. au troisième) terme de (2.89) conduit à  $a^- = (-1 + \lambda_+ - \lambda_-)^{-1} = -1$  (resp.  $a^0 = -1$ ). La condition  $a_{ee'} - a_{ee'}^0 \in \Sigma_1^0(t)$  qui intervient dans l'énoncé de la définition 2.23 ne fait que traduire la propriété

$$a^+|_{\xi/t=0} = a^-|_{\xi/t=0} = a^0$$

que l'on constate immédiatement sur les expressions que nous venons d'obtenir.

Nous pouvons passer à la preuve détaillée des résultats esquissés ci-dessus. Nous utiliserons le lemme suivant :

LEMME 2.24. – Supposons  $s + s' > \frac{1}{2}$ ,  $s > \frac{3}{2} + \alpha$ ,  $\alpha \in ]-\frac{1}{2}, 0[$ , et posons  $\nu = \frac{1}{2} + \alpha$ .

(i) Avec les notations de la définition précédente,  $(U, V) \mapsto \text{Op}^{\mathcal{B}}(\Gamma, a)(U, V)$  est un opérateur borné de  $\text{H}_{\alpha+1}^{s, s'}(t)^2 \times \text{E}_{\alpha}^{s, s'}(t)^2$  (resp.  $\text{H}_{\alpha}^{s, s'}(t)^2 \times \text{E}_{\alpha}^{s, s'}(t)^2$ ) à valeurs dans  $\text{H}_{\alpha+1}^{s, s'}(t) + t^{-\nu}\text{H}_{\alpha}^{s, s'}(t)$  (resp.  $t^{-\alpha}\text{H}_{\alpha}^{s, s'}(t)$ ). Enfin, si  $U \in \text{E}_{\alpha}^{s, s'}(t)^2$ , on a

$$\|\text{Op}^{\mathcal{B}}(\Gamma, a)(U, U)\|_{\text{H}_{\alpha}^{s, s'}(t)} \leq C\|U\|_{L^{\infty}}\|U\|_{\text{H}_{\alpha}^{s, s'}(t)}.$$

(ii) Supposons  $a_{ee'}^0 = 0$  pour tous  $e, e'$  et  $a_{ee'} \in \Sigma_1^0$ . L'opérateur

$$(U, V) \mapsto \text{Op}^{\mathcal{B}}(\Gamma, a)(U, V)$$

est borné de  $\text{E}_{\alpha+1}^{s, s'}(t)^2 \times \text{E}_{\alpha}^{s, s'}(t)^2$  à valeurs dans  $\text{H}_{\alpha+1}^{s, s'}(t)$ .

*Démonstration.* – (i) Prouvons d'abord la première assertion. Par le lemme 2.2 (iii),  $\|U\|_{L^{\infty}} \leq Ct^{-\alpha-1}\|U\|_{\text{H}_{\alpha+1}^{s, s'}(t)}$ , donc  $t^{\alpha+1}a_{e'e}u_e$  est dans  $\Sigma_0^0$ . Par conséquent, grâce au théorème 2.9

$$\|\text{Op}^{\mathcal{B}}(a_{e'e}u_e)v_{e'}\|_{\text{H}_{\alpha}^{s, s'}(t)} \leq Ct^{-\alpha-1}\|U\|_{\text{H}_{\alpha+1}^{s, s'}(t)}\|V\|_{\text{H}_{\alpha}^{s, s'}(t)}.$$

Utilisant le corollaire 2.3 (ii), on obtient donc que le premier terme de (2.87) est dans  $t^{-\alpha-1}\text{H}_{\alpha}^{s, s'}(t) \subset t^{-\nu}\text{H}_{\alpha}^{s, s'}(t)$ . D'après le (ii) du lemme 2.2  $R(u_e, v_{e'}) = R(v_{e'}, u_e) \in \text{H}_{\alpha+1}^{s, s'}(t)$  donc, encore grâce au corollaire 2.3 (ii), le produit de ce terme par  $\gamma_{ee'}$  est aussi dans  $\text{H}_{\alpha+1}^{s, s'}(t)$ . Enfin,  $V$  étant dans  $L^{\infty}$ ,  $a_{ee'}v_{e'} \in \Sigma_0^0$ , donc

$$\gamma_{ee'}\text{Op}^{\mathcal{B}}(a_{ee'}v_{e'})u_e \in \text{H}_{\alpha+1}^{s, s'}(t).$$

On a donc obtenu la conclusion. Le cas  $(U, V) \in \text{H}_{\alpha}^{s, s'}(t) \times \text{E}_{\alpha}^{s, s'}(t)$  se traite de même. La dernière assertion résulte immédiatement de (2.87) et du théorème 2.9.

(ii) Ici il n'y a pas de contribution en  $R(u_e, u_{e'})$  à (2.87). Les termes paradifférentiels ont un symbole dans  $\Sigma_1^0(t)$  grâce à l'hypothèse, et puisque  $U, V \in L^{\infty}$ . La conclusion résulte du théorème 2.9 (i).  $\square$

Nous désignerons désormais par  $\Gamma = (\gamma_{ee'})_{e, e'}$  la matrice symétrique définie par (2.78) et nous poserons

$$(2.92) \quad \widehat{\Gamma}^{\pm}(x) = (\widehat{\gamma}_{ee'}^{\pm}(x))_{e, e'} \quad \text{avec} \quad \widehat{\gamma}_{ee'}^{\pm} = \gamma_{ee'}^{\pm}(e + e' \mp 1)^{-1},$$

où  $e, e'$  désignent les signes  $+$  ou  $-$  lorsqu'ils sont en indice, et les entiers  $+1$  ou  $-1$  sinon. Introduisons d'autre part les symboles

$$(2.93) \quad \widehat{a}_{ee'}^{\pm} = (e + \lambda_{e'} - \lambda_{\pm})^{-1}(e + e' \mp 1).$$

Remarquons que, d'après la deuxième propriété (2.74),

$$|(e + \lambda_{e'} - \lambda_{\pm})| \geq c \left(1 + \frac{\langle \xi \rangle}{t}\right)$$

si  $e' \neq \pm$  et si  $t \geq T_0$  assez grand. D'autre part,  $|(e + \lambda_{e'} - \lambda_{\pm})| = 1$  si  $e' = \pm$ . Il résulte de (2.76) et des remarques suivant la définition 2.7 que  $\widehat{a}_{ee'}^{\pm} \in \widetilde{\Sigma}_{0, \rho}^0(t)$  avec  $\rho > 1$  si les hypothèses (2.22)

sont satisfaites et si  $s' + \alpha \geq 0$ . Comme d'après la deuxième égalité (2.76)  $\lambda_{\pm} \mp 1 \in \tilde{\Sigma}_{1,\rho}^1(t)$ , on a, en posant  $\hat{a}_{ee'}^0 = 1$  pour tous  $e, e'$ ,  $\hat{a}_{ee'}^{\pm} - \hat{a}_{ee'}^0 \in \tilde{\Sigma}_{1,\rho}^0(t)$ . Enfin, comme

$$D_t \hat{a}_{ee'}^{\pm} = -(e + \lambda_{e'} - \lambda_{\pm})^{-2} (e + e' \mp 1) (D_t (\lambda_{e'} - \lambda_{\pm})),$$

(2.75) entraîne que  $D_t \hat{a}_{ee'}^{\pm} \in t^{-1/2} \Sigma_1^0(t)$ . Les semi-normes de ces symboles sont uniformément majorées pour  $t \geq T_0$  et  $U$  décrivant  $B(\mathcal{H}_{\alpha}^{s,s'}(t), r_2)$ .

Considérons  $L_{\pm}(t, x, \xi, U)$  la forme linéaire en  $U$  décrivant  $\mathcal{H}_{\alpha}^{s,s'}(t)$ , à coefficients dans l'espace de symboles  $S_1^0$ , introduite dans l'énoncé de la proposition 2.20 et écrivons

$$L_{\pm}(t, x, \xi, U) = {}^t U \mathcal{L}_{\pm}(t, x, \xi),$$

où  $\mathcal{L}$  est une matrice  $2 \times 2$  à coefficients dans  $S_1^0$

$$(2.94) \quad \mathcal{L}_{\pm}(t, x, \xi) = \begin{bmatrix} \ell_{++}^{\pm} & \ell_{+-}^{\pm} \\ \ell_{-+}^{\pm} & \ell_{--}^{\pm} \end{bmatrix}.$$

Posons

$$(2.95) \quad \begin{aligned} c_{++}^{\pm}(t, x, \xi) &= \ell_{++}^{\pm}(t, x, \xi) (1 + \lambda_+ - \lambda_{\pm})^{-1}, \\ c_{-+}^{\pm}(t, x, \xi) &= \ell_{-+}^{\pm}(t, x, \xi) (-1 + \lambda_+ - \lambda_{\pm})^{-1}, \\ c_{+-}^{\pm}(t, x, \xi) &= \ell_{+-}^{\pm}(t, x, \xi) (1 + \lambda_- - \lambda_{\pm})^{-1}, \\ c_{--}^{\pm}(t, x, \xi) &= \ell_{--}^{\pm}(t, x, \xi) (-1 + \lambda_- - \lambda_{\pm})^{-1} \end{aligned}$$

et désignons par  $C_{\pm}(t, x, \xi)$  la matrice des  $(c_{ee'}^{\pm})_{e, e' \in \{+, -\}}$ . D'après (2.76), si  $t \geq T_0$  assez grand, les coefficients de  $C_{\pm}$  sont dans  $\tilde{\Sigma}_{1,\rho}^0(t)$  avec  $\rho > 1$  non entier lorsque les inégalités (2.65) sont satisfaites et que  $s' + \alpha \geq 0$ . De plus, grâce à (2.75) et (2.13),  $D_t C_{\pm} \in t^{-1/2} \Sigma_1^0(t)$ . En outre, les semi-normes de symboles admettent des majorations uniformes pour  $U$  décrivant  $B(\mathcal{H}_{\alpha}^{s,s'}(t), r_2)$  et  $t \geq T_0$ .

Nous sommes désormais en mesure d'énoncer le théorème de forme normale permettant d'éliminer les termes quadratiques au membre de droite de (2.79).

**THÉORÈME 2.25.** – *Supposons que  $s, s', \alpha$  vérifient les inégalités (2.65) et que  $s' + \alpha \geq 0$ . Avec les notations précédentes, la fonction  $U$  vérifie sur  $[T_0, T[$  le système*

$$(2.96) \quad \begin{aligned} & (D_t - \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_{\pm}(t, x, \xi, U))) \\ & \left( u_{\pm} - \frac{1}{\sqrt{t}} \text{Op}^{\mathcal{B}}(\hat{\Gamma}^{\pm}, \hat{a}^{\pm})(U, U) - \frac{1}{\sqrt{t}} \text{Op}^{\mathcal{B}}({}^t U C_{\pm}(t, x, \xi)) U \right) \\ & = \frac{1}{t} \tilde{A}_3(x)(M_0 U) - \frac{2}{t} ({}^t U \Gamma(x) U) ([1, 1] \hat{\Gamma}^{\pm}(x) U) + \frac{1}{t} S_0^{\pm}(t, U) + \frac{1}{t^{1+\nu}} S_1^{\pm}(t, U) \end{aligned}$$

les opérateurs  $S_0^{\pm}, S_1^{\pm}$  étant des opérateurs de reste sur  $B(\mathcal{H}_{\alpha}^{s,s'}(t), r_2)$  de type  $(0, 1)$  et  $(0, 0)$  respectivement.

Le théorème va résulter du calcul de l'action de  $(D_t - \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_{\pm}))$  sur les termes quadratiques du membre de gauche de (2.96).

PROPOSITION 2.26. – Avec les notations et sous les hypothèses du théorème, on a, pour tout  $t \in [T_0, T[$ ,

$$(2.97) \quad \begin{aligned} & \left( D_t - \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_{\pm}(t, x, \xi, U)) \right) \left[ \frac{1}{\sqrt{t}} \text{Op}^{\mathcal{B}}(\widehat{\Gamma}^{\pm}, \widehat{a}^{\pm})(U, U) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{t}} {}^t U \Gamma(x) U + \frac{2}{\sqrt{t}} \text{Op}^{\mathcal{B}}(\widehat{\Gamma}^{\pm}, \widehat{a}^{\pm}) \left( (D_t - \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda)) U, U \right) \\ & \quad + \frac{1}{t} S_0(t, U) + \frac{1}{t^{1+\nu}} S_1(t, U), \end{aligned}$$

où on a noté  $\text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda)$  l'opérateur matriciel  $\left[ \text{Op}_0^{\mathcal{B}(\lambda_+)} \quad \text{Op}_0^{\mathcal{B}(\lambda_-)} \right]$ , et où  $S_0$  et  $S_1$  sont des opérateurs de reste de type  $(0, 1)$  et  $(0, 0)$  sur  $\mathcal{B}(\mathcal{H}_{\alpha}^{s, s'}(t), r_2)$ , uniformément pour  $t \in [T_0, T[$ .

La proposition est conséquence directe de la définition 2.23, de (2.92), (2.93) et du lemme suivant :

LEMME 2.27. – (i) Soient  $\widehat{\gamma}$  fonction  $C^{\infty}$  bornée ainsi que toutes ses dérivées,  $\widehat{a} \in \widetilde{\Sigma}_{0, \rho}^0(t)$  pour  $t \in [T_0, T[$ , à bornes uniformes en  $t$ , avec  $\rho > 1$ , tel que  $\widehat{a}$  soit dérivable en  $t$  et vérifie  $D_t \widehat{a} \in t^{-1/2} \widetilde{\Sigma}_1^0(t)$ . On a alors, pour  $U$  dans  $\mathcal{B}(\mathcal{H}_{\alpha}^{s, s'}(t), r_2)$ ,  $t \in [T_0, T[$ ,

$$(2.98) \quad \begin{aligned} & \left( D_t - \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_{\pm}(t, x, \xi, U)) \right) \left[ \frac{\widehat{\gamma}}{\sqrt{t}} \text{Op}^{\mathcal{B}}(u_e \widehat{a}) u_{e'} \right] \\ &= \frac{\widehat{\gamma}}{\sqrt{t}} \text{Op}^{\mathcal{B}} \left( \left[ (D_t - \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_e)) u_e \right] \widehat{a} \right) u_{e'} + \frac{\widehat{\gamma}}{\sqrt{t}} \text{Op}^{\mathcal{B}}(u_e \widehat{a}) (D_t - \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_{e'})) u_{e'} \\ & \quad + \frac{\widehat{\gamma}}{\sqrt{t}} \text{Op}^{\mathcal{B}}(u_e \widehat{a} (e + \lambda_{e'} - \lambda_{\pm})) u_{e'} + \frac{1}{t} S_0^{\pm}(t, U) + \frac{1}{t^{1+\nu}} S_1^{\pm}(t, U) \end{aligned}$$

avec  $S_0^{\pm}$  et  $S_1^{\pm}$  opérateurs de reste de type  $(0, 1)$  et  $(0, 0)$  sur  $\mathcal{B}(\mathcal{H}_{\alpha}^{s, s'}(t), r_2)$  uniformément en  $t \in [T_0, T[$ .

(ii) Avec les mêmes notations que précédemment pour  $\widehat{\gamma}$ ,  $U$  :

$$(2.99) \quad \begin{aligned} & \left( D_t - \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_{\pm}(t, x, \xi, U)) \right) \left[ \frac{\widehat{\gamma}}{\sqrt{t}} R(u_e, u_{e'}) \right] \\ &= \frac{\widehat{\gamma}}{\sqrt{t}} R \left( (D_t - \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_e)) u_e, u_{e'} \right) + \frac{\widehat{\gamma}}{\sqrt{t}} R(u_e, (D_t - \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_{e'})) u_{e'}) \\ & \quad + \frac{\widehat{\gamma}}{\sqrt{t}} (e + e' \mp 1) R(u_e, u_{e'}) + \frac{1}{t^{1+\nu}} S_1^{\pm}(t, U). \end{aligned}$$

Démonstration. – (i) Remarquons d'abord que  $[\text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_{\pm}), \widehat{\gamma}] = [\text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_{\pm} \mp 1), \widehat{\gamma}]$ , et puisque d'après (2.76)  $\lambda_{\pm} \mp 1 \in \widetilde{\Sigma}_{1, \rho}^1(t)$ , ce dernier commutateur envoie  $\mathcal{H}_{\alpha}^{s, s'}(t)$  dans  $t^{-1} \mathcal{H}_{\alpha}^{s, s'}(t)$  grâce au corollaire 2.14. Par conséquent,

$$(2.100) \quad \begin{aligned} & \left( D_t - \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_{\pm}) \right) \left[ \frac{\widehat{\gamma}}{\sqrt{t}} \text{Op}^{\mathcal{B}}(u_e \widehat{a}) u_{e'} \right] \\ &= \frac{\widehat{\gamma}}{\sqrt{t}} (D_t - \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_{\pm})) \text{Op}^{\mathcal{B}}(u_e \widehat{a}) u_{e'} + \frac{1}{t^{3/2}} S_1^{\pm}(t, U) \end{aligned}$$

avec  $S_1^{\pm}$  opérateur de reste de type  $(0, 0)$ . Comme  $t^{\alpha} u_e \in C^{\rho}$  par le lemme 2.2 (iii),  $t^{\alpha} u_e \widehat{a} \in \widetilde{\Sigma}_{0, \rho}^0(t)$ . De plus,  $\lambda_{\pm} \mp 1 \in \widetilde{\Sigma}_{1, \rho}^1$ . Si nous écrivons

$$(2.101) \quad \frac{\widehat{\gamma}}{\sqrt{t}} \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_{\pm}) \text{Op}^{\mathcal{B}}(u_e \widehat{a}) = \frac{\widehat{\gamma}}{\sqrt{t}} \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_{\pm} \mp 1) \text{Op}^{\mathcal{B}}(u_e \widehat{a}) \pm \frac{\widehat{\gamma}}{\sqrt{t}} \text{Op}^{\mathcal{B}}(u_e \widehat{a}),$$

nous pouvons appliquer la proposition 2.12 au premier terme du membre de droite (en écrivant  $u_e = t^{-\alpha} t^\alpha u_e$ ). Nous obtenons

$$(2.102) \quad \begin{aligned} & \frac{\widehat{\gamma}}{\sqrt{t}} (D_t - \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_{\pm})) \text{Op}^{\mathcal{B}}(u_e \widehat{a}) u_{e'} \\ &= \frac{\widehat{\gamma}}{\sqrt{t}} D_t [\text{Op}^{\mathcal{B}}(u_e \widehat{a}) u_{e'}] - \frac{\widehat{\gamma}}{\sqrt{t}} \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_{\pm} \widehat{a} u_e) u_{e'} + \frac{1}{t^{3/2+\alpha}} S_1^{\pm}(t, U) \end{aligned}$$

avec  $S_1^{\pm}$  de type  $(0, 0)$ . Les deux premiers termes du membre de droite se réécrivent

$$(2.103) \quad \begin{aligned} & \frac{\widehat{\gamma}}{\sqrt{t}} \text{Op}^{\mathcal{B}}([(D_t - \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_e)) u_e] \widehat{a}) u_{e'} \\ &+ \frac{\widehat{\gamma}}{\sqrt{t}} \text{Op}^{\mathcal{B}}(u_e \widehat{a}) (D_t - \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_{e'})) u_{e'} + \frac{\widehat{\gamma}}{\sqrt{t}} \text{Op}^{\mathcal{B}}(u_e D_t \widehat{a}) u_{e'} \\ &+ \frac{\widehat{\gamma}}{\sqrt{t}} [\text{Op}^{\mathcal{B}}([\text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_e) u_e] \widehat{a}) u_{e'} + \text{Op}^{\mathcal{B}}(u_e \widehat{a}) \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_{e'}) u_{e'} - \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_{\pm} \widehat{a} u_e) u_{e'}]. \end{aligned}$$

Puisque  $D_t \widehat{a} \in t^{-1/2} \Sigma_1^0$  et que  $u_e \in L^\infty$ ,  $\text{Op}^{\mathcal{B}}(u_e D_t \widehat{a}) u_{e'} \in t^{-1/2} H_{\alpha+1}^{s, s'}$  par le théorème 2.9 (i). Par conséquent, d'après le corollaire 2.3 (ii), le terme en  $D_t \widehat{a}$  de (2.103) est de la forme  $t^{-1} S_0(t, U)$  avec  $S_0$  de type  $(0, 1)$ . Il nous reste à simplifier le dernier terme de (2.103). Comme  $\lambda_{e'} - e' \in \widetilde{\Sigma}_{1, \rho}^1$  et que  $t^\alpha u_e \widehat{a} \in \widetilde{\Sigma}_{0, \rho}^0$ , nous pouvons écrire comme en (2.101)

$$(2.104) \quad \frac{\widehat{\gamma}}{\sqrt{t}} \text{Op}^{\mathcal{B}}(u_e \widehat{a}) \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_{e'}) u_{e'} = \frac{\widehat{\gamma}}{\sqrt{t}} \text{Op}^{\mathcal{B}}(u_e \widehat{a} \lambda_{e'}) u_{e'} + \frac{1}{t^{3/2+\alpha}} S_1(t, U).$$

D'autre part,

$$\text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_e - e) u_e \in H_{\alpha+1}^{s, s'-1} \subset t^{-\alpha-1} L^\infty$$

par le lemme 2.2 (iii), donc  $\widehat{a}(\text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_e - e) u_e) \in t^{-\alpha-1} \Sigma_0^0$  d'où il résulte que

$$(2.105) \quad \frac{\widehat{\gamma}}{\sqrt{t}} \text{Op}^{\mathcal{B}}([\text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_e) u_e] \widehat{a}) u_{e'} = \frac{\widehat{\gamma}}{\sqrt{t}} \text{Op}^{\mathcal{B}}(e u_e \widehat{a}) u_{e'} + \frac{1}{t^{3/2+\alpha}} S_1(t, U).$$

La conclusion résulte des égalités (2.104) et (2.105).

(ii) Utilisant de nouveau que  $[\text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_{\pm}), \widehat{\gamma}]$  envoie  $H_{\alpha+1}^{s, s'}(t)$  dans  $t^{-1} H_{\alpha}^{s, s'}(t)$ , et que  $R(u_e, u_{e'}) \in H_{\alpha}^{s, s'}(t)$ , nous avons, avec un reste  $S_1$  de type  $(0, 0)$ ,

$$(2.106) \quad \begin{aligned} & (D_t - \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_{\pm})) \left[ \frac{\widehat{\gamma}}{\sqrt{t}} R(u_e, u_{e'}) \right] \\ &= \frac{\widehat{\gamma}}{\sqrt{t}} R((D_t - \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_e)) u_e, u_{e'}) + \frac{\widehat{\gamma}}{\sqrt{t}} R(u_e, (D_t - \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_{e'})) u_{e'}) \\ &+ \frac{\widehat{\gamma}}{\sqrt{t}} R(\text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_e) u_e, u_{e'}) + \frac{\widehat{\gamma}}{\sqrt{t}} R(u_e, \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_{e'}) u_{e'}) \\ &- \frac{\widehat{\gamma}}{\sqrt{t}} \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_{\pm}) R(u_e, u_{e'}) + \frac{1}{t^{3/2}} S_1(t, U). \end{aligned}$$

Comme  $\text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_e - e) u_e \in H_{\alpha+1}^{s, s'-1} \subset t^{-\alpha-1} L^\infty$ , le lemme 2.2 (ii) entraîne que

$$(2.107) \quad \frac{\widehat{\gamma}}{\sqrt{t}} R(\text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_e) u_e, u_{e'}) = e \frac{\widehat{\gamma}}{\sqrt{t}} R(u_e, u_{e'}) + \frac{1}{t^{3/2+\alpha}} S_1(t, U)$$

pour un reste  $S_1$  de type  $(0, 0)$ , et l'égalité analogue pour  $\frac{\widehat{\gamma}}{\sqrt{t}}R(u_e, \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_{e'})u_{e'})$ . Écrivons d'autre part

$$(2.108) \quad \frac{\widehat{\gamma}}{\sqrt{t}} \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_{\pm})R(u_e, u_{e'}) = \pm \frac{\widehat{\gamma}}{\sqrt{t}}R(u_e, u_{e'}) + \frac{\widehat{\gamma}}{\sqrt{t}} \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_{\pm} \mp 1)R(u_e, u_{e'}).$$

D'après le lemme 2.2 (ii),  $R(u_e, u_{e'}) \in \mathbb{H}_{2\alpha}^{2s-\frac{1}{2}, 2s'}$ , donc le dernier terme de (2.108) est dans

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \mathbb{H}_{2\alpha+1}^{2s-\frac{1}{2}, 2s'-1} \subset t^{-3/2-\alpha} \mathbb{H}_{\alpha}^{s, s'}(t)$$

puisque  $s > \frac{3}{2} + \alpha$ , et  $s + s' > \frac{3}{2}$ . C'est donc un terme de reste de la forme  $t^{-3/2-\alpha}S_1(t, U)$ . La conclusion résulte de (2.106), (2.107), (2.108).  $\square$

LEMME 2.28. – *En utilisant les notations introduites en (2.95), on a sur  $[T_0, T[$*

$$(2.109) \quad (\text{D}_t - \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_{\pm})) \left[ \frac{1}{\sqrt{t}} \text{Op}^{\mathcal{B}}({}^tUC_{\pm}(t, x, \xi))U \right] \\ = \frac{1}{\sqrt{t}} \text{Op}^{\mathcal{B}}({}^tU\mathcal{L}_{\pm}(t, x, \xi))U + \frac{1}{\sqrt{t}} \text{Op}^{\mathcal{B}}(t[(\text{D}_t - \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda))U]C_{\pm}(t, x, \xi))U \\ + \frac{1}{\sqrt{t}} \text{Op}^{\mathcal{B}}({}^tUC_{\pm}(t, x, \xi))(\text{D}_t - \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda))U + \frac{1}{t}S_0^{\pm}(t, U) + \frac{1}{t^{1+\nu}}S_1^{\pm}(t, U),$$

avec des opérateurs de reste  $S_0^{\pm}$  et  $S_1^{\pm}$  de type  $(0, 1)$  et  $(0, 0)$ .

*Démonstration.* – Puisque  $\text{D}_tC_{\pm} \in t^{-1/2}\Sigma_1^0(t)$ , modulo des restes de la forme voulue, le membre de gauche de (2.109) s'écrit

$$(2.110) \quad \frac{1}{\sqrt{t}} \text{Op}^{\mathcal{B}}({}^t(\text{D}_tU)C_{\pm})U + \frac{1}{\sqrt{t}} \text{Op}^{\mathcal{B}}({}^tUC_{\pm})\text{D}_tU - \frac{1}{\sqrt{t}} \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_{\pm})\text{Op}^{\mathcal{B}}({}^tUC_{\pm})U \\ = \frac{1}{\sqrt{t}} \text{Op}^{\mathcal{B}}(t[(\text{D}_t - \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda))U]C_{\pm})U + \frac{1}{\sqrt{t}} \text{Op}^{\mathcal{B}}({}^tUC_{\pm})(\text{D}_t - \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda))U \\ + \frac{1}{\sqrt{t}} \text{Op}^{\mathcal{B}}(t[\text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda)U]C_{\pm})U + \frac{1}{\sqrt{t}} \text{Op}^{\mathcal{B}}({}^tUC_{\pm})\text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda)U \\ - \frac{1}{\sqrt{t}} \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_{\pm})\text{Op}^{\mathcal{B}}({}^tUC_{\pm})U.$$

Si  $\lambda^0$  désigne la matrice  $\lambda^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $\text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda - \lambda^0)U \in \mathbb{H}_{\alpha+1}^{s, s'-1} \subset t^{-\alpha-1}\mathbb{L}^{\infty}$ , donc puisque  $C_{\pm} \in \Sigma_0^0$ , modulo un reste en  $t^{-3/2-\alpha}S_1^{\pm}(t, U)$ , le troisième terme du membre de droite de (2.110) s'écrit  $t^{-1/2}\text{Op}^{\mathcal{B}}({}^tU[\lambda^0C_{\pm}])U$ . La somme des deux derniers termes de (2.110) s'écrit

$$(2.111) \quad \frac{1}{t^{1/2+\alpha}} [\text{Op}^{\mathcal{B}}(t^{\alpha}{}^tUC_{\pm})\text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda)U - \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_{\pm})\text{Op}^{\mathcal{B}}(t^{\alpha}{}^tUC_{\pm})U].$$

Comme  $t^{\alpha}U \in C^{\rho}$ , les expressions  $t^{\alpha}{}^tUC_{\pm}$  sont des symboles de  $\widetilde{\Sigma}_{1, \rho}^0$  et les  $\lambda_{\pm}$  sont dans  $\widetilde{\Sigma}_{0, \rho}^1$  d'après (2.76). Par conséquent, d'après la proposition 2.12, (2.111) ne diffère de  $\frac{1}{\sqrt{t}} \text{Op}^{\mathcal{B}}({}^tUC_{\pm}(\lambda - \lambda_{\pm}\text{Id}))U$  que par un reste en  $t^{-3/2-\alpha}S_1^{\pm}(t, U)$ . Modulo des restes admissibles, le membre de gauche de (2.109) s'écrit donc

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{t}} \text{Op}^{\mathcal{B}}({}^t[(D_t - \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda))U]C_{\pm})U + \frac{1}{\sqrt{t}} \text{Op}^{\mathcal{B}}({}^tUC_{\pm})(D_t - \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda))U \\ & + \frac{1}{\sqrt{t}} \text{Op}^{\mathcal{B}}({}^tU(\lambda^0 C_{\pm} + C_{\pm}\lambda - \lambda_{\pm}C_{\pm}))U. \end{aligned}$$

Il suffit de remarquer que d'après (2.95),  $\lambda^0 C_{\pm} + C_{\pm}\lambda - \lambda_{\pm}C_{\pm} = \mathcal{L}_{\pm}$ .  $\square$

*Démonstration du théorème 2.25.* – D'après la proposition 2.26, le lemme 2.28 et (2.79), le membre de gauche de (2.96) vaut

$$\begin{aligned} (2.112) \quad & \frac{1}{t} \tilde{A}_3(x)(M_0U) - \frac{2}{\sqrt{t}} \text{Op}^{\mathcal{B}}(\hat{\Gamma}^{\pm}, \hat{a}^{\pm})((D_t - \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda))U, U) \\ & - \frac{1}{\sqrt{t}} \text{Op}^{\mathcal{B}}({}^t[(D_t - \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda))U]C_{\pm})U - \frac{1}{\sqrt{t}} \text{Op}^{\mathcal{B}}({}^tUC_{\pm})(D_t - \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda))U \\ & + \frac{1}{t} S_0^{\pm}(t, U) + \frac{1}{t^{1+\nu}} S_1^{\pm}(t, U). \end{aligned}$$

Remarquons d'abord que d'après (2.79), les propriétés d'algèbre de  $E_{\alpha}^{s, s'}(t)$ , et les propriétés d'action des opérateurs de symbole dans  $\Sigma_1^0$ , nous pouvons écrire

$$(2.113) \quad (D_t - \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda))U = \frac{1}{\sqrt{t}} {}^tU\Gamma(x)U \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{t}} w_1 + \frac{1}{t} w_2$$

avec  $w_1 \in H_{\alpha+1}^{s, s'}(t)$  et  $w_2 \in H_{\alpha}^{s, s'}(t)$ . Il en résulte en particulier que  $(D_t - \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda))U \in t^{-1/2}H_{\alpha}^{s, s'}(t)$ . Par conséquent, le quatrième terme de (2.112) est dans  $t^{-1}H_{\alpha+1}^{s, s'}$ , i.e. peut être incorporé au terme de reste  $t^{-1}S_0^{\pm}(t, U)$ . D'autre part, l'inclusion  $H_{\alpha+1}^{s, s'} \subset t^{-\alpha-1}L^{\infty}$  et  $H_{\alpha}^{s, s'}(t) \subset t^{-\alpha}L^{\infty}$  entraîne que l'on a aussi  $(D_t - \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda))U \in t^{-1/2}L^{\infty}$ . Par conséquent, le symbole  ${}^t[(D_t - \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda))U]C_{\pm}$  est dans  $t^{-1/2}\Sigma_1^0$  et le troisième terme de (2.112) est aussi un terme de reste en  $t^{-1}S_0^{\pm}(t, U)$ .

Il reste juste à réduire le second terme de (2.112). Écrivons d'après (2.113)

$$\begin{aligned} (2.114) \quad & \frac{1}{\sqrt{t}} \text{Op}^{\mathcal{B}}(\hat{\Gamma}^{\pm}, \hat{a}^{\pm})((D_t - \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda))U, U) \\ & = \frac{1}{t} \text{Op}^{\mathcal{B}}(\hat{\Gamma}^{\pm}, \hat{a}^{\pm})(({}^tU\Gamma(x)U)^t[1, 1], U) + \frac{1}{t} \text{Op}^{\mathcal{B}}(\hat{\Gamma}^{\pm}, \hat{a}^{\pm})(w_1, U) \\ & + \frac{1}{t^{3/2}} \text{Op}^{\mathcal{B}}(\hat{\Gamma}^{\pm}, \hat{a}^{\pm})(w_2, U). \end{aligned}$$

D'après le lemme 2.24 (i), les deux derniers termes peuvent être écrits sous la forme de restes  $t^{-1}S_0^{\pm}(t, U) + t^{-1-\nu}S_1^{\pm}(t, U)$ . Si nous désignons par  $\mathbf{1}$  la matrice  $2 \times 2$  dont tous les coefficients sont égaux à 1, écrivons

$$(2.115) \quad \text{Op}^{\mathcal{B}}(\hat{\Gamma}^{\pm}, \hat{a}^{\pm}) = \text{Op}^{\mathcal{B}}(\hat{\Gamma}^{\pm}, \hat{a}^{\pm} - \mathbf{1}) + \text{Op}^{\mathcal{B}}(\hat{\Gamma}^{\pm}, \mathbf{1}).$$

Les hypothèses du (ii) du lemme 2.24 sont vérifiées par  $\hat{a}^{\pm} - \mathbf{1}$ , donc la contribution au premier terme du membre de droite de (2.114) de  $\text{Op}^{\mathcal{B}}(\hat{\Gamma}^{\pm}, \hat{a}^{\pm} - \mathbf{1})$  est un reste de la forme  $\frac{1}{t}S_0^{\pm}(t, U)$ . Par conséquent, modulo des restes admissibles, (2.114) s'écrit

$$\frac{1}{t} \text{Op}^{\mathcal{B}}(\hat{\Gamma}^{\pm}, \mathbf{1})(({}^tU\Gamma(x)U)^t[1, 1], U) = \frac{1}{t} ({}^tU\Gamma(x)U)([1, 1]\hat{\Gamma}^{\pm}(x)U).$$

Nous avons bien réduit (2.112) au membre de droite de (2.96).  $\square$

### 3. Démonstrations des théorèmes principaux

#### 3.1. Estimations $L^2$ et $L^\infty$

Nous allons prouver le théorème 1.10 en établissant pour la solution de (1.40) des estimations  $L^2$  et  $L^\infty$ . Seule cette dernière utilisera l'hypothèse faite sur la non-linéarité. Les données  $(w_0, w_1)$  du théorème 1.10 sont dans  $H^\sigma$  et  $H^{\sigma-1}$  avec  $\sigma > 7/2$ , leur norme dans cet espace étant majorée par  $C_0$ . Nous choisissons  $\alpha < 0$  arbitrairement proche de 0, et nous posons  $s' = -\alpha$ ,  $s = \sigma + \alpha - 1$ . Si  $\alpha$  est assez voisin de 0, les hypothèses de régularité suivantes :

$$(3.1) \quad s + s' > \frac{5}{2}, \quad s > \frac{5}{2} + \alpha, \quad \alpha \in ]-1/2, 0[, \quad s - 1/2 - \alpha \notin \mathbb{N}, \quad s' + \alpha \geq 0$$

sont satisfaites. Comme à  $t = T_0$  fixé,  $H_\alpha^{s, s'}(T_0)$  coïncide avec  $H^{s+s'} = H^{\sigma-1}$ , la donnée initiale de l'équation paralinéarisée (2.57) vérifiera

$$(3.2) \quad \begin{aligned} (w(T_0), \partial_t w(T_0)) &\in F_\alpha^{s, s'}(T_0), \\ (\partial_t w(T_0), \partial_t^2 w(T_0)) &\in F_\alpha^{s, s'-1}(T_0), \end{aligned}$$

avec des normes dans ces espaces majorées par  $C'_0 \varepsilon$ , pour une constante  $C'_0$  ne dépendant que de  $C_0$  et  $T_0$ . Supposons que nous disposions d'un intervalle  $[T_0, T[$  sur lequel existe une solution de (1.40), telle que  $t \mapsto (D_t w(t, \cdot), \Lambda w(t, \cdot))$  soit continue à valeurs dans  $B(\mathcal{G}_\alpha^{s, s'}(t), r)$  et  $C^1$  à valeurs dans  $B(\mathcal{G}_\alpha^{s, s'-1}(t), r)$ ,  $r > 0$  étant défini dans l'énoncé de la proposition 2.20. Un tel  $T > T_0$  existe par le résultat d'existence locale de la proposition 1.4, si  $\varepsilon$  est assez petit et  $T$  assez proche de  $T_0$ . Si de plus nous supposons  $r$  assez petit pour que la proposition 2.17 s'applique,  $w$  est alors solution de (2.57). La fonction  $U$  définie à partir de  $w$  par le changement d'inconnue de la proposition 2.19 est solution, d'après la proposition 2.20, de (2.79) donc de (2.96). Établissons une inégalité  $L^2$  pour  $U$ .

#### Estimations $L^2$

Nous réécrivons (2.96) sous la forme

$$(3.3) \quad (D_t - \text{Op}^B(\lambda_\pm(t, x, \xi, U))) \tilde{u}_\pm = \frac{1}{t} f_\pm$$

avec

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \tilde{u}_\pm &= u_\pm - \frac{1}{\sqrt{t}} \text{Op}^B(\hat{\Gamma}^\pm, \hat{a}^\pm)(U, U) - \frac{1}{\sqrt{t}} \text{Op}^B({}^t U C_\pm) U, \\ f_\pm &= \tilde{A}_3(x)(M_0 U) - 2({}^t U \Gamma(x) U) ([1, 1] \hat{\Gamma}^\pm(x) U) + S_0^\pm(t, U) + t^{-\nu} S_1^\pm(t, U) \end{aligned}$$

et nous écrivons

$$\tilde{U} = \begin{bmatrix} \tilde{u}_+ \\ \tilde{u}_- \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} f_+ \\ f_- \end{bmatrix}.$$

PROPOSITION 3.1. – *Il existe une constante  $C > 0$ , ne dépendant que de  $r$  et de  $T_0$ , telle que sous les conditions précédentes, on ait, pour  $t \in [T_0, T[$ ,*

$$(3.5) \quad \|U(t, \cdot)\|_{\mathbb{H}_\alpha^{s, s'}(t)} \leq C \left[ \|U(T_0, \cdot)\|_{\mathbb{H}_\alpha^{s, s'}(T_0)} + \|U(t, \cdot)\|_{\mathbb{H}_\alpha^{s, s'}(t)} \|U(t, \cdot)\|_{L^\infty} \right. \\ \left. + \int_{T_0}^t \|U(\tau, \cdot)\|_{\mathbb{E}_\alpha^{s, s'}(\tau)} \left( \left( \frac{\tau}{t} \right)^{-2\alpha} + \frac{1}{\tau^\nu} \right) \frac{d\tau}{\tau} \right].$$

Écrivons

$$(3.6) \quad (D_t - \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_\pm)) \Delta_j \tilde{u}_\pm = [\Delta_j, \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_\pm)] \tilde{u}_\pm + \frac{1}{t} \Delta_j f_\pm.$$

Pour  $j \geq N_0$  assez grand, remarquons que  $[\Delta_j, \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_\pm)] = [\Delta_j, \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_\pm)] \tilde{\Delta}_j$ , où  $\tilde{\Delta}_j = \tilde{\varphi}(2^{-j}D)$  avec  $\tilde{\varphi} \in C_0^\infty(\mathbb{R} - \{0\})$ ,  $\tilde{\varphi} \equiv 1$  sur un voisinage assez grand de  $\text{Supp } \varphi$ . La même inégalité est vraie pour  $j \leq N_0$  quitte à définir alors  $\tilde{\Delta}_j = \tilde{\chi}(2^{-j}D)$  avec  $\tilde{\chi} \in C_0^\infty$ ,  $\tilde{\chi} \equiv 1$  sur un domaine assez grand. On posera

$$\|\Delta_j \tilde{U}\|^2 = \|\Delta_j \tilde{u}_+\|^2 + \|\Delta_j \tilde{u}_-\|^2, \\ \|\tilde{\Delta}_j \tilde{U}\|^2 = \|\tilde{\Delta}_j \tilde{u}_+\|^2 + \|\tilde{\Delta}_j \tilde{u}_-\|^2, \\ \|\Delta_j f\|^2 = \|\Delta_j f_+\|^2 + \|\Delta_j f_-\|^2$$

et

$$(3.7) \quad m_j(t) = 2^{js} \left[ \frac{2^j}{t} \left( 1 + \frac{2^j}{t} \right)^{-1} \right]^{-\alpha} \left( 1 + \frac{2^j}{t} \right)^{s'} \|\Delta_j \tilde{U}(t, \cdot)\|, \\ \tilde{m}_j(t) = 2^{js} \left[ \frac{2^j}{t} \left( 1 + \frac{2^j}{t} \right)^{-1} \right]^{-\alpha} \left( 1 + \frac{2^j}{t} \right)^{s'} \|\tilde{\Delta}_j \tilde{U}(t, \cdot)\|, \\ d_j(t) = 2^{js} \left[ \frac{2^j}{t} \left( 1 + \frac{2^j}{t} \right)^{-1} \right]^{-\alpha} \left( 1 + \frac{2^j}{t} \right)^{s'} \|\Delta_j f(t, \cdot)\|$$

de telle manière que  $\sum_j m_j(t)^2 = \|\tilde{U}(t, \cdot)\|_{\mathbb{H}_\alpha^{s, s'}(t)}^2$ ,  $\sum_j d_j(t)^2 = \|f(t, \cdot)\|_{\mathbb{H}_\alpha^{s, s'}(t)}^2$  et que  $\sum_j \tilde{m}_j(t)^2$  soit équivalent, avec constantes uniformes, à  $\|\tilde{U}(t, \cdot)\|_{\mathbb{H}_\alpha^{s, s'}(t)}^2$ .

LEMME 3.2. – *Il existe une constante  $C > 0$  telle que, pour tout  $t \in [T_0, T]$ ,*

$$(3.8) \quad m_j(t) \leq C \left[ m_j(T_0) + \int_{T_0}^t [m_j(\tau) + \tilde{m}_j(\tau)] \frac{d\tau}{\tau^{1+\nu}} + \int_{T_0}^t \left( \frac{\tau}{t} \right)^{-2\alpha} d_j(\tau) \frac{d\tau}{\tau} \right].$$

*Démonstration.* – Calculons

$$(3.9) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\Delta_j \tilde{U}(t, \cdot)\|^2 = \text{Re} \langle i \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_+) \Delta_j \tilde{u}_+, \Delta_j \tilde{u}_+ \rangle + \text{Re} \langle i \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_-) \Delta_j \tilde{u}_-, \Delta_j \tilde{u}_- \rangle \\ + \text{Re} \langle i [\Delta_j, \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_+)] \tilde{\Delta}_j \tilde{u}_+, \Delta_j \tilde{u}_+ \rangle \\ + \text{Re} \langle i [\Delta_j, \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_-)] \tilde{\Delta}_j \tilde{u}_-, \Delta_j \tilde{u}_- \rangle + \frac{1}{t} \text{Re} \langle i \Delta_j f_+, \Delta_j \tilde{u}_+ \rangle \\ + \frac{1}{t} \text{Re} \langle i \Delta_j f_-, \Delta_j \tilde{u}_- \rangle.$$

Écrivons

$$(3.10) \quad \text{Re} \langle i \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_\pm) \Delta_j \tilde{u}_\pm, \Delta_j \tilde{u}_\pm \rangle = \frac{1}{2} \langle i (\text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_\pm) - \text{Op}^{\mathcal{B}}(\lambda_\pm)^*) \Delta_j \tilde{u}_\pm, \Delta_j \tilde{u}_\pm \rangle.$$

Comme  $\lambda_{\pm}$  est réel d'après (2.74), il résulte de (2.76) et du théorème 2.9 (iv) que  $\text{Op}^B(\lambda_{\pm}) - \text{Op}^B(\lambda_{\pm})^*$  envoie  $L^2 = H_0^{0,0}$  dans  $t^{-1-\nu}L^2$ . Par conséquent, les deux premiers termes du membre de droite de (3.9) se majorent par  $Ct^{-1-\nu}\|\Delta_j\tilde{U}\|^2$ . Par la proposition 2.13 (i) les deux termes suivants se majorent par  $Ct^{-1-\nu}\|\Delta_j\tilde{U}\|\|\tilde{\Delta}_j\tilde{U}\|$ . On obtient donc

$$\begin{aligned} \|\Delta_j\tilde{U}(t, \cdot)\|^2 &\leq \|\Delta_j\tilde{U}(T_0, \cdot)\|^2 + C \int_{T_0}^t \|\Delta_j\tilde{U}(\tau, \cdot)\| (\|\Delta_j\tilde{U}(\tau, \cdot)\| + \|\tilde{\Delta}_j\tilde{U}(\tau, \cdot)\|) \frac{d\tau}{\tau^{\nu+1}} \\ &\quad + C \int_{T_0}^t \|\Delta_j f(\tau, \cdot)\| \|\Delta_j\tilde{U}(\tau, \cdot)\| \frac{d\tau}{\tau}. \end{aligned}$$

Remarquons que  $s' + \alpha = 0$ , et multiplions l'inégalité précédente par  $2^{2js}(2j/t)^{-2\alpha}$  on obtient

$$\begin{aligned} m_j(t)^2 &\leq (T_0/t)^{-2\alpha} m_j(T_0)^2 + C \int_{T_0}^t m_j(\tau) (m_j(\tau) + \tilde{m}_j(\tau)) \left(\frac{\tau}{t}\right)^{-2\alpha} \frac{d\tau}{\tau^{1+\nu}} \\ &\quad + C \int_{T_0}^t m_j(\tau) d_j(\tau) \left(\frac{\tau}{t}\right)^{-2\alpha} \frac{d\tau}{\tau}, \end{aligned}$$

d'où, puisque  $\alpha < 0$ ,

$$\begin{aligned} \sup_{t' \in [T_0, t]} m_j(t')^2 &\leq C \left( \sup_{t' \in [T_0, t]} m_j(t') \right) \left[ m_j(T_0) + \int_{T_0}^t (m_j(\tau) + \tilde{m}_j(\tau)) \frac{d\tau}{\tau^{1+\nu}} \right. \\ &\quad \left. + \int_{T_0}^t d_j(\tau) \left(\frac{\tau}{t}\right)^{-2\alpha} \frac{d\tau}{\tau} \right], \end{aligned}$$

et la conclusion.  $\square$

*Démonstration de la proposition 3.1.* – Prenant la norme  $\ell^2$  de (3.8), on obtient,

$$\begin{aligned} \|\tilde{U}(t, \cdot)\|_{H_{\alpha}^{s, s'}(t)} &\leq C \left[ \|\tilde{U}(T_0, \cdot)\|_{H_{\alpha}^{s, s'}(T_0)} + \int_{T_0}^t \|\tilde{U}(\tau, \cdot)\|_{H_{\alpha}^{s, s'}(\tau)} \frac{d\tau}{\tau^{1+\nu}} \right. \\ &\quad \left. + \int_{T_0}^t \|f(\tau, \cdot)\|_{H_{\alpha}^{s, s'}(\tau)} \left(\frac{\tau}{t}\right)^{-2\alpha} \frac{d\tau}{\tau} \right]. \end{aligned}$$

D'après le corollaire 2.3 (i) et les inégalités (2.62), (2.63), on aura

$$\begin{aligned} \|f_{\pm}(\tau, \cdot)\|_{H_{\alpha}^{s, s'}(\tau)} &\leq C \left[ \|U(\tau, \cdot)\|_{E_{\alpha}^{s, s'}(\tau)}^3 + \|S_0^{\pm}(\tau, U)\|_{H_{\alpha}^{s, s'}(\tau)} + \|S_1^{\pm}(\tau, U)\|_{H_{\alpha}^{s, s'}(\tau)} \right] \\ &\leq C' \|U(\tau, \cdot)\|_{E_{\alpha}^{s, s'}(\tau)} \end{aligned}$$

puisque on suppose que  $U$  reste dans un borné de  $E_{\alpha}^{s, s'}(t)$  uniformément en  $t \in [T_0, T[$ . Il nous suffit donc de voir que l'on a l'inégalité

$$(3.11) \quad \|\tilde{U}(t, \cdot) - U(t, \cdot)\|_{H_{\alpha}^{s, s'}(t)} \leq \frac{C}{\sqrt{t}} \|U(t, \cdot)\|_{L^{\infty}} \|U(t, \cdot)\|_{H_{\alpha}^{s, s'}(t)}.$$

Or (3.11) résulte du lemme 2.67 (i) et du fait que la norme d'opérateur de  $\text{Op}^B({}^tUC_{\pm})$  sur  $H_{\alpha}^{s,s'}(t)$  s'estime à partir des semi-normes de  ${}^tUC_{\pm}$  dans  $\Sigma_0^0$ , donc à partir de  $\|U\|_{L^{\infty}}$ .  $\square$

### Estimations $L^{\infty}$

PROPOSITION 3.3. – Soit  $\nu' = 1/2 + 2\alpha > 0$  (si  $\alpha$  est assez voisin de 0). Il existe une constante  $C > 0$  telle que, lorsque la condition nulle  $\Phi \equiv 0$  est satisfaite, la fonction  $U$  vérifie l'estimation

(3.12)

$$\|U(t, \cdot)\|_{L^{\infty}} \leq C \left[ \|U(T_0, \cdot)\|_{L^{\infty}} + \sup_{t' \in [T_0, t]} \|U(t', \cdot)\|_{E_{\alpha}^{s,s'}(t')}^2 + \int_{T_0}^t \|U(\tau, \cdot)\|_{E_{\alpha}^{s,s'}(\tau)} \frac{d\tau}{\tau^{1+\nu'}} \right].$$

LEMME 3.4. – Il existe pour  $t \geq T_0$  un opérateur  $S_1^{\pm}(t, U)$ , défini sur la boule  $B(\mathcal{H}_{\alpha}^{s,s'}(t), r_2)$ , vérifiant

$$(3.13) \quad \|S_1^{\pm}(t, U)\|_{L^{\infty}} \leq C \|U(t, \cdot)\|_{E_{\alpha}^{s,s'}(t)}$$

tel que

$$(3.14) \quad (D_t \mp 1)\tilde{u}_{\pm} = \frac{1}{t} \tilde{A}_3(x)(M_0 U) - \frac{2}{t} ({}^tU\Gamma(x)U)([1, 1]\hat{\Gamma}^{\pm}(x)U) + \frac{1}{t^{1+\nu'}} S_1^{\pm}(t, U).$$

Démonstration. – On a

$$\lambda_{\pm} \mp 1 = \left( \lambda_{\pm} \mp \sqrt{1 + \frac{\xi^2}{t^2}} \right) \pm \left( \sqrt{1 + \frac{\xi^2}{t^2}} - 1 \right).$$

D'après (2.74), la première parenthèse est dans  $t^{-1/2}\Sigma_1^1$ . La seconde est dans  $S_2^1$ . Par conséquent,  $(\text{Op}^B(\lambda_{\pm} \mp 1))\tilde{u}_{\pm}$  est dans  $t^{-1/2}H_{\alpha+1}^{s,s'-1} + H_{\alpha+2}^{s,s'-1} \subset t^{-3/2-\alpha}L^{\infty} + t^{-2-\alpha}L^{\infty}$  par le lemme 2.2 (iii) dont les hypothèses sont satisfaites grâce à (3.1). On aura donc

$$\|\text{Op}^B(\lambda_{\pm} \mp 1)\tilde{u}_{\pm}\|_{L^{\infty}} \leq C t^{-3/2-\alpha} \|\tilde{u}_{\pm}(t, \cdot)\|_{H_{\alpha}^{s,s'}(t)} \leq C' t^{-3/2-\alpha} \|u_{\pm}(t, \cdot)\|_{H_{\alpha}^{s,s'}(t)}$$

en utilisant (3.11) et le fait que  $U(t, \cdot)$  reste dans un borné de  $E_{\alpha}^{s,s'}(t)$ . Il nous suffit de remarquer que les termes de reste dans l'expression (3.4) de  $f_{\pm}$  vérifient

$$(3.15) \quad \begin{aligned} \|S_0^{\pm}(t, U)\|_{L^{\infty}} &\leq C t^{-\alpha-1} \|S_0^{\pm}(t, U)\|_{H_{\alpha+1}^{s,s'}(t)} \leq C' t^{-\alpha-1} \|U(t, \cdot)\|_{E_{\alpha}^{s,s'}(t)}, \\ \|S_1^{\pm}(t, U)\|_{L^{\infty}} &\leq C t^{-\alpha} \|S_1^{\pm}(t, U)\|_{H_{\alpha}^{s,s'}(t)} \leq C' t^{-\alpha} \|U(t, \cdot)\|_{E_{\alpha}^{s,s'}(t)} \end{aligned}$$

d'après le lemme 2.2 (iii), et les propriétés (2.62), (2.63) des opérateurs de reste, pour déduire (3.14) de (3.3).  $\square$

Nous allons maintenant absorber, autant que faire se peut, les termes en  $\frac{1}{t}$  du membre de droite de (3.14) par le membre de gauche. Nous utiliserons pour cela :

LEMME 3.5. – *Il existe des polynômes homogènes de degré 3 à deux indéterminées  $(X, Y)$ , à coefficients  $C^\infty$  bornés ainsi que toutes leurs dérivées  $P_\pm(x; X, Y)$  tels que*

$$(3.16) \quad \begin{aligned} & (D_t - 1) \left( \tilde{u}_+ - \frac{1}{t} P_+(x; u_+, u_-) \right) \\ &= -\frac{1}{8t \operatorname{ch}^2(\kappa x)} [\Psi(\operatorname{th} x) - i\Phi(\operatorname{th} x)] u_+^2 u_- + \frac{1}{t^{1+\nu'}} S_1^{\prime+}(t, U), \\ & (D_t + 1) \left( \tilde{u}_- - \frac{1}{t} P_-(x; u_+, u_-) \right) \\ &= \frac{1}{8t \operatorname{ch}^2(\kappa x)} [\Psi(\operatorname{th} x) + i\Phi(\operatorname{th} x)] u_+ u_-^2 + \frac{1}{t^{1+\nu'}} S_1^{\prime-}(t, U) \end{aligned}$$

avec  $S_1^{\pm}(t, U)$  vérifiant les estimations (3.13).

Le lemme résultera de :

LEMME 3.6. – *Le coefficient de  $u_+^2 u_-$  (resp. de  $u_+ u_-^2$ ) dans le terme cubique de  $f_+$  (resp.  $f_-$ ) s'écrit*

$$(3.17) \quad -\frac{1}{8\operatorname{ch}^2(\kappa x)} [\Psi(\operatorname{th} x) - i\Phi(\operatorname{th} x)],$$

resp.

$$(3.18) \quad \frac{1}{8\operatorname{ch}^2(\kappa x)} [\Psi(\operatorname{th} x) + i\Phi(\operatorname{th} x)].$$

*Démonstration.* – Il s'agit d'un calcul dont nous ne donnons que les principales étapes. Nous nous limitons à la preuve de (3.17), étant donné que (3.18) en découle puisque  $\tilde{u}_+ = -u_-$ . On calcule d'abord  $\tilde{A}_3(x)(M_0 U)$  en remarquant qu'il suffit pour cela de remplacer dans (1.45)  $D_t w$  par  $(u_+ + u_-)/2$  et  $w$  par  $(u_+ - u_-)/2$ , compte tenu de la définition de  $M_0$  donnée dans la proposition 2.19. On obtient comme coefficient de  $u_+^2 u_-$  dans  $\tilde{A}_3(x)(M_0 U)$

$$(3.19) \quad \begin{aligned} & -\frac{1}{8\operatorname{ch}^2(\kappa x)} \left[ -3p_0 + 3q_0''(q_0' + q_0'') - p_2 + q_2'q_0'' + q_1''(q_1' + q_1'') \right. \\ & \quad \left. + i(-p_1 + q_0''(q_1' + q_1'') + q_1''(q_0' + q_0'') - 3p_3' + 3q_1''q_2') \right] \end{aligned}$$

les divers termes étant évalués en  $(\omega_0(\operatorname{th} x), \omega_1(\operatorname{th} x))$  avec la notation (1.8). D'autre part, la matrice  $\Gamma(x)$  s'écrit d'après (2.78) et (1.44),

$$\Gamma(x) = -\frac{1}{4\operatorname{ch}(\kappa x)} \begin{bmatrix} q_0' + q_0'' - q_2' + i(q_1' + q_1'') & -q_0' - q_0'' - q_2' \\ -q_0' - q_0'' - q_2' & q_0' + q_0'' - q_2' - i(q_1' + q_1'') \end{bmatrix}.$$

Si nous écrivons  $\Gamma(x) = (\gamma_{ee'})_{e, e' \in \{+, -\}}$  nous avons par (2.92)

$$\widehat{\Gamma}^+(x) = \begin{bmatrix} \gamma_{++} & -\gamma_{+-} \\ -\gamma_{-+} & -\gamma_{--}/3 \end{bmatrix}, \quad \widehat{\Gamma}^-(x) = \begin{bmatrix} \gamma_{++}/3 & \gamma_{+-} \\ \gamma_{-+} & -\gamma_{--} \end{bmatrix}.$$

On en déduit la valeur du coefficient de  $u_+^2 u_-$  dans  $-2({}^t U \Gamma(x) U)([1, 1] \widehat{\Gamma}^\pm(x) U)$

$$(3.20) \quad -\frac{1}{8\text{ch}^2(\kappa x)} \left[ (q'_0 + q''_0 - q'_2 + i(q'_1 + q''_1)) \left( \frac{2}{3}(q'_0 + q''_0 + 2q'_2) + \frac{i}{3}(q'_1 + q''_1) \right) \right. \\ \left. - 2(q'_0 + q''_0 + q'_2)(2(q'_0 + q''_0) + i(q'_1 + q''_1)) \right].$$

Regroupant (3.19) et (3.20), on obtient (3.17).  $\square$

*Démonstration du lemme 3.5.* – On a vu dans la preuve du lemme 2.22 que

$$(3.21) \quad \text{D}_t U - {}^t(u_+, -u_-) \in \frac{1}{\sqrt{t}} E_\alpha^{s,s'}(t) + E_{\alpha+1}^{s,s'-1}(t) \subset t^{-1/2} \mathbf{L}^\infty + t^{-\alpha-1} \mathbf{L}^\infty \subset t^{-1/2} \mathbf{L}^\infty.$$

Si  $P_\pm$  est un polynôme homogène de degré 3 en  $(X, Y)$ , on a

$$(3.22) \quad (\text{D}_t \mp 1) \left( \frac{1}{t} P_\pm(x; u_+, u_-) \right) = \frac{i}{t^2} P_\pm(x; u_+, u_-) + \frac{1}{t} (\partial_X P_\pm)(x; u_+, u_-) (\text{D}_t - 1) u_+ \\ + \frac{1}{t} (\partial_Y P_\pm)(x; u_+, u_-) (\text{D}_t + 1) u_- \\ + \frac{1}{t} [(X \partial_X - Y \partial_Y \mp 1) P_\pm](x; u_+, u_-).$$

La norme  $\mathbf{L}^\infty$  des trois premiers termes se majore grâce à (3.21) par la quantité  $Ct^{-3/2} \|U(t, \cdot)\|_{\mathbf{L}^\infty}$  puisque  $U$  reste dans un borné de  $\mathcal{H}_\alpha^{s,s'}(t)$ , donc ces termes contribuent au reste de (3.16). Pour prouver le lemme, il nous suffit donc de voir, compte tenu du lemme 3.6, que  $P_+$  (resp.  $P_-$ ) peut être choisi de telle manière que  $(X \partial_X - Y \partial_Y - 1) P_+(x; u_+, u_-)$  (resp.  $(X \partial_X - Y \partial_Y + 1) P_-(x; u_+, u_-)$ ) soit égal à la somme des termes en  $u_+^3$ ,  $u_+ u_-^2$ ,  $u_-^3$  (resp.  $u_+^3$ ,  $u_+^2 u_-$ ,  $u_-^3$ ) dans le terme en  $1/t$  du membre de droite de la première (resp. la deuxième) équation (3.14). Or, on constate immédiatement que l'application linéaire

$$P \mapsto (X \partial_X - Y \partial_Y - 1) P \quad (\text{resp. } P \mapsto (X \partial_X - Y \partial_Y + 1) P)$$

est surjective de l'espace des polynômes homogènes de degré 3 sur le sous-espace engendré par  $(X^3, XY^2, Y^3)$  (resp.  $(X^3, X^2Y, Y^3)$ ). Cela conclut la preuve.  $\square$

*Démonstration de la proposition 3.3.* – Posons  $w_\pm = \tilde{w}_\pm - t^{-1} P_\pm(x; u_+, u_-)$ . Écrivons

$$(3.23) \quad \partial_t |w_+|^2 = ((\partial_t - i)w_+) \bar{w}_+ + w_+ \overline{(\partial_t - i)w_+} \\ = \frac{i}{t^{1+\nu'}} S'^1_+(t, U) \bar{w}_+ - \frac{i}{t^{1+\nu'}} w_+ \overline{S'^1_+(t, U)} \\ - \frac{i}{8t \text{ch}^2(\kappa x)} \Psi(\text{th } x) [u_+^2 u_- \bar{w}_+ - w_+ \overline{u_+^2 u_-}]$$

en utilisant le lemme 3.5 et l'hypothèse  $\Phi \equiv 0$ . Or, grâce à (3.11)

$$(3.24) \quad \|w_+ - u_+\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq Ct^{-1/2-\alpha} \|U(t, \cdot)\|_{\mathbf{L}^\infty} \|U(t, \cdot)\|_{E_\alpha^{s,s'}(t)}$$

lorsque  $U$  reste dans un borné de  $E_\alpha^{s,s'}(t)$ . Nous avons donc obtenu, compte tenu de (3.13), de la relation  $\bar{u}_+ = -u_-$ , et du fait que  $\Psi(\text{th } x)/\text{ch}^2(\kappa x)$  est bornée

$$\partial_t |w_+|^2 \leq \frac{C}{t^{1+\nu'}} \|U(t, \cdot)\|_{E_\alpha^{s,s'}(t)} \|U(t, \cdot)\|_{\mathbf{L}^\infty}.$$

L'inégalité analogue pour  $w_-$  donne

$$\begin{aligned} \|w_+(t, \cdot)\|_{L^\infty}^2 + \|w_-(t, \cdot)\|_{L^\infty}^2 &\leq \|w_+(T_0, \cdot)\|_{L^\infty}^2 + \|w_-(T_0, \cdot)\|_{L^\infty}^2 \\ &\quad + C \int_{T_0}^t \|U(\tau, \cdot)\|_{E_\alpha^{s, s'}(\tau)} \|U(\tau, \cdot)\|_{L^\infty} \frac{d\tau}{\tau^{1+\nu'}}. \end{aligned}$$

Utilisant (3.24), on en déduit, puisque  $U(t, \cdot)$  reste dans un borné de  $E_\alpha^{s, s'}(t)$ , que

$$\begin{aligned} \|U(t, \cdot)\|_{L^\infty}^2 - C \|U(t, \cdot)\|_{E_\alpha^{s, s'}(t)}^2 \|U(t, \cdot)\|_{L^\infty}^2 \\ \leq C \left[ \|U(T_0, \cdot)\|_{L^\infty}^2 + \int_{T_0}^t \|U(\tau, \cdot)\|_{L^\infty} \|U(\tau, \cdot)\|_{E_\alpha^{s, s'}(\tau)} \frac{d\tau}{\tau^{1+\nu'}} \right], \end{aligned}$$

d'où (3.12) découle immédiatement.  $\square$

Le théorème 1.10 va résulter directement du lemme suivant :

LEMME 3.7. – *Il existe  $K > 0$  et  $\varepsilon_0 > 0$  vérifiant la propriété suivante : pour tout  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$ , tout  $T > 0$ , tels qu'il existe sur  $[T_0, T[$  une solution  $w$  à (1.40) avec  $t \mapsto (D_t w(t, \cdot), \Lambda w(t, \cdot))$  continue sur  $[T_0, T[$  à valeurs dans  $B(\mathcal{G}_\alpha^{s, s'}(t), r)$ , et  $C^1$  à valeurs dans  $B(\mathcal{G}_\alpha^{s, s'-1}(t), r)$ , on a l'estimation*

$$(3.25) \quad \sup_{[T_0, T[} [\|w(t, \cdot)\|_{E_\alpha^{s, s'+1}(t)} + \|D_t w(t, \cdot)\|_{E_\alpha^{s, s'}(t)} + \|D_t^2 w(t, \cdot)\|_{E_\alpha^{s, s'-1}(t)}] \leq KC'_0 \varepsilon$$

la constante  $C'_0$  ne dépendant que du  $C_0$  de l'énoncé du théorème 2.7 et de  $T_0$ .

*Démonstration.* – Nous pouvons appliquer à la fonction  $U$  définie au début de cette section à partir de  $w$  les propositions 3.1 et 3.3. Si nous posons  $N(t) = \sup_{t' \in [T_0, t]} \|U(t', \cdot)\|_{E_\alpha^{s, s'}(t')}$ , nous obtenons donc

$$(3.26) \quad N(t) \leq C \left[ N(T_0) + N(t)^2 + \int_{T_0}^t N(\tau) \left[ \left( \frac{\tau}{t} \right)^{-2\alpha} + \frac{1}{\tau^{\nu'}} \right] \frac{d\tau}{\tau} \right].$$

Le lemme de Gronwall entraîne

$$(3.27) \quad \begin{aligned} N(t) &\leq C \left[ N(T_0) + N(t)^2 + \int_{T_0}^t (N(T_0) + N(\tau)^2) \left[ \left( \frac{\tau}{t} \right)^{-2\alpha} + \frac{1}{\tau^{\nu'}} \right] \right. \\ &\quad \left. \times \exp \left[ \int_{\tau}^t \left( \left( \frac{\tau'}{t} \right)^{-2\alpha} + \frac{1}{\tau'^{\nu'}} \right) \frac{d\tau'}{\tau'} \right] \frac{d\tau}{\tau} \right]. \end{aligned}$$

Puisque  $\int_{T_0}^t \left( \left( \frac{\tau}{t} \right)^{-2\alpha} + \frac{1}{\tau^{\nu'}} \right) \frac{d\tau}{\tau}$  est majorée, comme  $\alpha < 0$  et  $\nu' > 0$ , par une constante indépendante de  $t$ , nous obtenons

$$(3.28) \quad N(t) \leq C' [N(T_0) + N(t)^2].$$

Puisque les normes des quantités (3.2) dans les espaces indiqués sont majorées par  $C'_0 \varepsilon$ , il en est de même pour  $\varepsilon$  assez petit de  $N(T_0)$  quitte à modifier la constante. L'inégalité (3.28) entraîne

alors une majoration de  $N(t)$  par  $K_1 C'_0 \varepsilon$ , quitte éventuellement à diminuer encore  $\varepsilon$ . Puisque  $(D_t w, \Lambda w) = H_t(U(t, \cdot))$  avec  $H_t$  difféomorphisme  $C^1$  vérifiant  $H_t(0) = 0$ , la majoration cherchée en découle pour les deux premiers termes du membre de gauche de (3.25). Nous avons d'autre part, d'après (2.86) et (2.79) que la borne de  $\|U(t, \cdot)\|_{E_\alpha^{s, s'}(t)}$  entraîne une borne de  $\|D_t U(t, \cdot)\|_{E_\alpha^{s, s'-1}}$  uniformément en  $t \in [T_0, T[$ . Comme  $H_t$  est aussi un difféomorphisme au voisinage de 0 dans  $\mathcal{G}_\alpha^{s, s'-1}(t)$ , l'estimation du terme en  $D_t^2 w$  dans (3.25) en découle.  $\square$

*Démonstration du théorème 1.10.* – Notons  $T^*$  la borne supérieure des  $T > T_0$  pour lesquels l'hypothèse du lemme 3.7 est satisfaite. Si  $\varepsilon_0$  est fixé assez petit, la conclusion (3.25) du lemme entraîne, d'après la définition (2.61) de  $\mathcal{G}_\alpha^{s, s'}(t)$ , que pour  $t \in [T_0, T^*[$ ,  $(D_t w(t, \cdot), \Lambda w(t, \cdot))$  reste dans  $B(\mathcal{G}_\alpha^{s, s'}(t), r/2)$  et  $\partial_t(D_t w(t, \cdot), \Lambda w(t, \cdot))$  dans  $B(\mathcal{G}_\alpha^{s, s'-1}(t), r/2)$ . On peut donc, si  $T^* < +\infty$ , prolonger  $w$  sur un voisinage de  $[T_0, T^*]$  par le théorème d'existence locale, ce qui fournit une contradiction. La solution est donc globale et (3.25) est valable avec  $T = +\infty$ . Cette inégalité permet de contrôler  $\|w(t, \cdot)\|_{L^\infty}$ ,  $\|D_t w(t, \cdot)\|_{L^\infty}$ ,  $\|D_t^2 w(t, \cdot)\|_{L^\infty}$ . D'autre part, puisque  $\frac{D_x}{t} w \in H_{\alpha+1}^{s, s'}(t)$ ,  $\frac{D_x^2}{t^2} w \in H_{\alpha+2}^{s, s'-1}(t)$ ,  $\frac{D_x}{t} D_t w \in H_{\alpha+1}^{s, s'-1}(t)$ , les injections du lemme 2.2 (iii) permettent de contrôler les normes  $L^\infty$  de ces quantités à partir du membre de gauche de (3.25). Les inégalités (1.46) en découlent.  $\square$

### 3.2. Comportement asymptotique de la solution

Revenons aux notations de la partie 1 : nous désignerons par  $(t, x)$  les coordonnées initiales, dans lesquelles est formulée l'équation (1.1), et par  $(T, X)$  les coordonnées données par (1.17). Nous aurons alors en particulier

$$(3.29) \quad \begin{aligned} T &= \sqrt{(t+2B)^2 - x^2}, & \text{th } X &= \frac{x}{t+2B}, \\ T &= \frac{t+2B}{\text{ch } X}, & \text{ch } X &= \left(1 - \left(\frac{x}{t+2B}\right)^2\right)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Les paramètres  $\kappa$  et  $\alpha$  des sections précédentes seront choisis arbitrairement grand pour le premier, et strictement négatif, arbitrairement proche de 0 pour le second. Nous poserons

$$(3.30) \quad \rho(X) = \frac{\Psi(\text{th } X)}{8\text{ch}^2(\kappa X)}.$$

Comme par (1.10),  $\Psi(y)$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à 6 en  $\omega_0(y) = (1-y^2)^{-1/2}$ ,  $\omega_1(y) = -y(1-y^2)^{-1/2}$ , nous avons

$$(3.31) \quad |\Psi(y)| \leq C(1-|y|)^{-3},$$

donc  $\rho$  est bornée si on prend  $\kappa \geq 3$ . Dans la mesure où les données initiales que nous considérons sont  $C^\infty$  à support compact, les estimations du paragraphe 3.1 sont valables avec un  $s$  arbitraire. En particulier, nous pouvons dans la preuve du lemme 3.4 remplacer (3.15) par

$$\begin{aligned} \|\partial_X^k S_0^\pm(T, U)\|_{L^\infty} &\leq CT^{-\alpha-1} \|S_0^\pm(T, U)\|_{H_{\alpha+1}^{s, s'}(T)} \leq C'T^{-\alpha-1} \|U(T, \cdot)\|_{E_\alpha^{s, s'}(T)}, \\ \|\partial_X^k S_1^\pm(T, U)\|_{L^\infty} &\leq CT^{-\alpha} \|S_1^\pm(T, U)\|_{H_\alpha^{s, s'}(T)} \leq C'T^{-\alpha} \|U(T, \cdot)\|_{E_\alpha^{s, s'}(T)} \end{aligned}$$

si  $s$  a été pris assez grand devant  $k$ . Par conséquent, le lemme 3.4 est valable avec (3.13) remplacé par

$$(3.32) \quad \|\partial_X^k S'_1^\pm(T, U)\|_{L^\infty} \leq C \|U(T, \cdot)\|_{E_\alpha^{s, s'}(T)} \leq C_k \varepsilon.$$

De même, les restes intervenant dans l'énoncé du lemme 3.5 vérifient l'inégalité précédente. Ces estimations sont uniformes pour  $T \geq T_0(k)$ . D'après (3.11), nous aurons de même une borne en  $CT^{-1/2-\alpha}\varepsilon$  pour  $\|\partial_X^k(\tilde{u}_\pm - u_\pm)(T, \cdot)\|_{L^\infty}$ . Par conséquent, (3.16) entraîne que nous pouvons écrire pour tout  $\mu > 0$

$$(3.33) \quad \left(D_T \mp 1 \pm \frac{\rho(X)}{T} u_+ u_-\right) \left(\tilde{u}_\pm - \frac{1}{T} P_\pm(X; u_+, u_-)\right) = \frac{1}{T^{3/2-\mu}} S'_1^\pm(T, U),$$

où  $S'_1^\pm(T, U)$  vérifie (3.32) avec une constante dépendant de  $k$  et de  $\mu$ . Nous poserons

$$(3.34) \quad v_\pm(T, X) = e^{\mp i T} \exp \left[ \pm i \int_{T_0}^T \frac{\rho(X)}{\tau} (u_+ u_-)(\tau, X) d\tau \right] \left(\tilde{u}_\pm - \frac{1}{T} P_\pm(X; u_+, u_-)\right).$$

LEMME 3.8. – *Pour tout  $X$  la limite  $v_\pm^\infty(X) = \lim_{T \rightarrow +\infty} v_\pm(T, X)$  existe et est une fonction  $C^\infty$  bornée, ainsi que toutes ses dérivées, par  $C\varepsilon$ . On a pour tout  $k$  et tout  $\mu > 0$  l'estimation*

$$(3.35) \quad \|\partial_X^k (v_\pm(T, \cdot) - v_\pm^\infty(\cdot))\|_{L^\infty} \leq C_{k, \mu} T^{-1/2+\mu} \varepsilon.$$

*Démonstration.* – Écrivons si  $T_0 < T' < T$

$$(3.36) \quad |\partial_X^k (v_\pm(T, X) - v(T', X))| \leq \int_{T'}^T \|\partial_\tau \partial_X^k v(\tau, \cdot)\|_{L^\infty} d\tau.$$

Or, d'après (3.33), (3.34),

$$D_T v_\pm(T, X) = e^{\mp i T} \exp \left[ \pm i \int_{T_0}^T \frac{\rho(X)}{\tau} (u_+ u_-)(\tau, X) d\tau \right] \frac{1}{T^{3/2-\mu}} S'_1^\pm(T, U).$$

Comme  $\|\partial_X^k u_\pm(T, \cdot)\|_{L^\infty} \leq C_k T^{-\alpha} \varepsilon$ , toujours grâce aux estimations uniformes de  $\|u_\pm(T, \cdot)\|_{H_\alpha^{s, s'}(T)}$  avec  $s$  assez grand, nous avons

$$\|\partial_T \partial_X^k v_\pm(T, \cdot)\|_{L^\infty} \leq C_k T^{-3/2+\mu-k\alpha} \varepsilon.$$

Si  $\alpha$  est assez voisin de 0, et quitte à changer la définition de  $\mu$ , on majore donc (3.36) par  $C_k T'^{-1/2+\mu} \varepsilon$ . L'existence de la limite et (3.35) en découlent.  $\square$

COROLLAIRE 3.9. – *Il existe des fonctions  $\tilde{v}_\pm^\infty(X)$ ,  $C^\infty$  bornées par  $C\varepsilon$  ainsi que leurs dérivées, et des fonctions  $C^\infty$  en  $X$ ,  $r_\pm(T, X)$  telles que l'on ait pour tout  $\mu > 0$ , tout  $k \in \mathbb{N}$*

$$(3.37) \quad u_\pm(T, X) = \tilde{v}_\pm^\infty(X) e^{\pm i T \pm i \rho(X) |\tilde{v}_\pm^\infty(X)|^2 \log T} + T^{-1/2+\mu} r_\pm(T, X),$$

$$(3.38) \quad |\partial_X^k r_\pm(T, X)| \leq C_{k, \mu} \varepsilon.$$

*Démonstration.* – On a vu avant l'énoncé du lemme 3.8 que

$$\|\partial_X^k(\tilde{u}_\pm - u_\pm)(T, \cdot)\|_{L^\infty} \leq C_k T^{-1/2-\alpha} \varepsilon$$

et, dans la preuve de ce lemme, que  $\|\partial_X^k u_\pm(T, \cdot)\|_{L^\infty} \leq C_k T^{-\alpha} \varepsilon$ . Il résulte alors immédiatement de (3.34) et (3.35) que

$$(3.39) \quad u_\pm(T, X) = v_\pm^\infty(X) e^{\pm i T} \exp \left[ \mp i \int_{T_0}^T \frac{\rho(X)}{\tau} (u_+ u_-)(\tau, X) d\tau \right] + T^{-1/2+\mu} r_\pm$$

avec  $r_\pm$  vérifiant (3.38), quitte éventuellement à modifier la définition de  $\mu$ . Comme  $\tilde{u}_+ = -u_-$ , nous avons  $\tilde{v}_+^\infty = -v_-^\infty$  et, en utilisant (3.35) et le fait que

$$|\partial_X^k (|u_+(T, X)|^2 - |v_+^\infty(X)|^2)| \leq c_k T^{-1/2+\mu} \varepsilon^2,$$

on obtient

$$(3.40) \quad \int_{T_0}^T |u_+(\tau, X)|^2 \frac{d\tau}{\tau} = \int_{T_0}^T |v_+^\infty(X)|^2 \frac{d\tau}{\tau} + \int_{T_0}^{+\infty} (|u_+(\tau, X)|^2 - |v_+^\infty(X)|^2) \frac{d\tau}{\tau} \\ - \int_T^{+\infty} (|u_+(\tau, X)|^2 - |v_+^\infty(X)|^2) \frac{d\tau}{\tau} \\ = |v_+^\infty(X)|^2 \log T + \varepsilon^2 \Theta_0(X) + T^{-1/2+\mu} \Theta_1(T, X) \varepsilon^2,$$

où  $\Theta_0$  et  $\Theta_1$  sont  $C^\infty$  en  $X$ , bornées ainsi que leurs dérivées, uniformément lorsque  $T \rightarrow +\infty$  pour  $\Theta_1$ . Comme

$$|\partial_X^k [\exp(\pm i T^{-1/2+\mu} \varepsilon^2 \Theta_1(T, X) \rho(X)) - 1]| \leq C_k T^{-1/2+\mu} \varepsilon$$

il nous suffit de poser  $\tilde{v}_\pm^\infty(X) = v_\pm^\infty(X) \exp(\pm i \rho(X) \Theta_0(X) \varepsilon^2)$  pour  $\tilde{v}$  obtenir (3.37) en substituant (3.40) dans (3.39). Cela achève la preuve du corollaire.  $\square$

*Démonstration du théorème 1.3.* – Nous devons maintenant nous ramener aux inconnues et aux variables initiales. D'après la proposition 2.19, on peut écrire

$$(3.41) \quad \begin{pmatrix} D_T w \\ \Lambda w \end{pmatrix} = M_0 \begin{pmatrix} u_+ \\ u_- \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{T}} S_0(T, U) + \frac{1}{T} S_1(T, U)$$

avec, si  $s$  est assez grand devant  $k$ ,

$$\partial_X^k S_0(T, U) \in H_{\alpha+1}^{s-k, s'}(T) \subset T^{-\alpha-1} L^\infty$$

et  $\partial_X^k S_1(T, U) \in H_\alpha^{s-k, s'}(T) \subset T^{-\alpha} L^\infty$ . D'autre part,  $\partial_X^k (\Lambda^{-1} - \text{Id})(u_+ - u_-) \in H_{\alpha+1}^{s-k, s'}(T) \subset T^{-\alpha-1} L^\infty$ . La définition de  $M_0$  permet donc d'écrire

$$(3.42) \quad w = \frac{1}{2}(u_+ - u_-) + T^{-\alpha-1} S(T, u_+, u_-), \\ D_T w = \frac{1}{2}(u_+ + u_-) + T^{-\alpha-1} S'(T, u_+, u_-),$$

avec

$$(3.43) \quad \begin{aligned} \|\partial_X^k S(T, u_+, u_-)\|_{L^\infty} &\leq C_k \varepsilon, \\ \|\partial_X^k S'(T, u_+, u_-)\|_{L^\infty} &\leq C_k \varepsilon. \end{aligned}$$

La solution  $v(t, x)$  de (1.1) s'exprime par (1.20) en fonction de  $w$ . Utilisant (3.42) et (3.37) on obtient donc, compte tenu de (3.29),

$$(3.44) \quad \begin{aligned} v(t, x) &= T^{-1/2}(\operatorname{ch} \kappa X)^{-1} w(T, X) \\ &= \frac{1}{2}(t + 2B)^{-1/2}(\operatorname{ch} X)^{1/2}(\operatorname{ch} \kappa X)^{-1} \tilde{v}_+^\infty(X) \exp(iT + i\rho(X)|\tilde{v}_+^\infty(X)|^2 \log T) \\ &\quad - \frac{1}{2}(t + 2B)^{-1/2}(\operatorname{ch} X)^{1/2}(\operatorname{ch} \kappa X)^{-1} \tilde{v}_-^\infty(X) \exp(-iT - i\rho(X)|\tilde{v}_-^\infty(X)|^2 \log T) \\ &\quad + (t + 2B)^{-1+\mu}(\operatorname{ch} X)^{1-\mu}(\operatorname{ch} \kappa X)^{-1} r(t, x), \end{aligned}$$

où  $r$  est borné. Posons

$$(3.45) \quad \begin{aligned} b_\pm(X) &= \frac{1}{2}(\operatorname{ch} X)^{1/2}(\operatorname{ch} \kappa X)^{-1} \tilde{v}_\pm^\infty(X), \\ c_\pm(y) &= b_\pm(\operatorname{Argth} y) \quad \text{si } |y| < 1, \\ c_\pm(y) &= 0 \quad \text{si } |y| \geq 1. \end{aligned}$$

Nous avons

$$(3.46) \quad \rho(X)|\tilde{v}_\pm^\infty(X)|^2 = \frac{1}{2} \Psi(y)|c_\pm(y)|^2 \sqrt{1-y^2} \Big|_{y=x/(t+2B)}$$

d'après (3.29), (3.30). De plus, comme  $\tilde{v}_\pm^\infty$  est bornée ainsi que ses dérivées, nous avons

$$(3.47) \quad |\partial_y^k c_\pm(y)| \leq C_k (1 - |y|)_+^{\frac{\kappa}{2} - \frac{1}{4} - k} \varepsilon$$

si  $k < \frac{\kappa}{2} - \frac{1}{4}$ . Le premier terme du membre de droite de (3.44) se réécrit

$$(3.48) \quad \begin{aligned} (t + 2B)^{-1/2} c_+(y) \exp[i(t + 2B)\sqrt{1-y^2}] \\ + \frac{i}{2} \log[(t + 2B)\sqrt{1-y^2}] \Psi(y)|c_+(y)|^2 \sqrt{1-y^2} \Big|_{y=x/(t+2B)} \end{aligned}$$

et la phase peut se décomposer en

$$t\sqrt{1-y^2} + \frac{1}{2} \log t \Psi(y)|c_+(y)|^2 \sqrt{1-y^2} + \Theta_0(y) + \Theta_1(t, y)$$

avec

$$\begin{aligned} \Theta_0(y) &= 2B\sqrt{1-y^2} + \frac{1}{2}(\log \sqrt{1-y^2}) \Psi(y)|c_+(y)|^2 \sqrt{1-y^2}, \\ \Theta_1(t, y) &= \frac{1}{2} \log \left( 1 + \frac{2B}{t} \right) \Psi(y)|c_+(y)|^2 \sqrt{1-y^2}. \end{aligned}$$

On a en particulier  $|\Theta_1(t, y)| \leq Ct^{-1}(1 - |y|)_+^{\kappa-3} \varepsilon^2$  par (3.31), et donc, en remplaçant  $c_+(y)$  par  $c_+(y) \exp(i\Theta_0(y))$ , qui vérifie si  $\kappa > 3$  les inégalités (3.47), on obtient que (3.48) s'écrit

$$(3.49) \quad t^{-1/2} c_+(y) \exp \left[ it\sqrt{1-y^2} + \frac{i}{2} \log t \Psi(y)|c_+(y)|^2 \sqrt{1-y^2} \right] \Big|_{y=x/(t+2B)}$$

modulo un reste majoré par

$$Ct^{-3/2} \left(1 - \frac{|x|}{t+2B}\right)_+^{\frac{\kappa}{2}-\frac{1}{4}} \varepsilon \leq Ct^{-3/2} \left( \left(1 - \frac{|x|}{t}\right)_+ + \frac{1}{t} \right)^{\frac{\kappa}{2}-\frac{1}{4}} \varepsilon.$$

La fonction

$$\tilde{c}_+(t, y) = c_+(y) \exp \left[ \frac{i}{2} \log t \Psi(y) |c_+(y)|^2 \sqrt{1-y^2} \right]$$

vérifie grâce à (3.47), pour  $k < \frac{\kappa}{2} - \frac{1}{4}$

$$|\partial_y^k \tilde{c}_+(t, y)| \leq C_k (\log t)^k (1-|y|)_+^{\frac{\kappa}{2}-\frac{1}{4}-k} \varepsilon,$$

d'où, si  $|x| < t + 2B$ ,

$$\begin{aligned} |\tilde{c}_+(t, x/(t+2B)) - \tilde{c}_+(t, x/t)| &\leq C \frac{\log t}{t} \left(1 - \frac{|x|}{t+2B}\right)_+^{\frac{\kappa}{2}-\frac{5}{4}} \varepsilon \\ &\leq C \frac{\log t}{t} \left( \left(1 - \frac{|x|}{t}\right)_+ + \frac{1}{t} \right)^{\frac{\kappa}{2}-\frac{5}{4}} \varepsilon. \end{aligned}$$

Par conséquent, (3.49) est égal à

$$(3.50) \quad t^{-1/2} c_+(x/t) \exp \left[ it \sqrt{1 - \frac{x^2}{(t+2B)^2}} + \frac{i}{2} \log t \Psi(x/t) |c_+(x/t)|^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{t^2}} \right]$$

modulo un reste majoré par

$$C \frac{\log t}{t^{3/2}} \left( \left(1 - \frac{|x|}{t}\right)_+ + \frac{1}{t} \right)^{\frac{\kappa}{2}-\frac{5}{4}} \varepsilon.$$

Remarquons alors que si  $|x| < t$ ,

$$\Theta_2(t, x/t) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{(t+2B)^2}} - \sqrt{1 - \frac{x^2}{t^2}} - \frac{2B(x/t)^2}{t\sqrt{1 - (x/t)^2}}$$

vérifie  $|\Theta_2(t, x/t)| \leq Ct^{-2}(1 - (x/t)^2)^{-3/2}$ . Par conséquent, si nous remplaçons  $c_+(y)$  par

$$c_+(y) e^{i\sqrt{1-y^2}-2iBy^2(1-y^2)^{-1/2}},$$

nous obtenons que (3.50) est égal à

$$(3.51) \quad t^{-1/2} c_+(x/t) \exp \left[ i\sqrt{t^2 - x^2} + \frac{i}{2} \log t \Psi(x/t) |c_+(x/t)|^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{t^2}} \right]$$

modulo un reste majoré par  $Ct^{-3/2} \left(1 - \frac{|x|}{t}\right)_+^{\frac{\kappa}{2}-\frac{7}{4}} \varepsilon$ . Si nous effectuons le même raisonnement pour le second terme du membre de droite de (3.44), et si nous remarquons que le dernier terme

de (3.44) se majore par

$$Ct^{-1+\mu} \left( \left( 1 - \frac{|x|}{t} \right)_+ + \frac{1}{t} \right)^{\frac{\mu}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\mu}{2}} \varepsilon,$$

nous obtenons la première expression (1.13), en posant  $c_+(y) = \varepsilon a_\varepsilon(y)$ . En raisonnant de même, on obtient la seconde expression (1.13), puisque (1.18) permet d'exprimer  $\partial_t v$  à partir de  $\partial_T w$ , modulo un terme en

$$T^{-3/2} \operatorname{sh} X \partial_X [(\operatorname{ch} \kappa X)^{-1} w(T, X)]$$

qui contribue aux restes, et que l'on dispose de l'expression (3.42) pour  $\partial_T w$ .  $\square$

### RÉFÉRENCES

- [1] ALINHAC S., Blow-up of small data solutions for a quasilinear wave equation in two space dimensions, *Ann. of Math. (2)* **149** (1) (1997) 97–127.
- [2] ALINHAC S., Blow-up of small data solutions for a class of quasilinear wave equations in two space dimensions II, *Acta Math.* **182** (1) (1999) 1–23.
- [3] BONY J.-M., Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **14** (2) (1981) 209–246.
- [4] CHEMIN J.-Y., Interaction contrôlée dans les équations aux dérivées partielles non linéaires, *Bull. Soc. Math. France* **116** (3) (1988) 341–383.
- [5] CHEMIN J.-Y., *Fluides parfaits incompressibles*, Astérisque, Vol. **230**, 1995, 177 p.
- [6] CHRISTODOULOU D., Global solutions of nonlinear hyperbolic equations for small initial data, *Comm. Pure Appl. Math.* **39** (1986) 267–282.
- [7] DELORT J.-M., Minoration du temps d'existence pour l'équation de Klein–Gordon non linéaire en dimension 1 d'espace, *Ann. Inst. Henri-Poincaré, Analyse non linéaire* **16** (5) (1999) 563–591.
- [8] GEORGIEV V., YORDANOV B., Asymptotic behaviour of the one-dimensional Klein–Gordon equation with a cubic nonlinearity, *Preprint*, 1997.
- [9] HÖRMANDER L., The lifespan of classical solutions of nonlinear hyperbolic equations, in : *Lectures Notes in Math.*, Vol. **1256**, Springer-Verlag, 1987, pp. 214–280.
- [10] HÖRMANDER L., *Lectures on Nonlinear Hyperbolic Differential Equations*, Mathématiques et Applications, Vol. **26**, Springer-Verlag, 1997.
- [11] KEEL M., TAO T., Small data blow-up for semilinear Klein–Gordon equations, *Amer. J. Math.* **121** (3) (1999) 629–669.
- [12] KLAINERMAN S., Global existence of small amplitude solutions to nonlinear Klein–Gordon equations in four space-time dimensions, *Comm. Pure Appl. Math.* **38** (1985) 631–641.
- [13] KLAINERMAN S., The null condition and global existence to nonlinear wave equations, in : *Lectures in Applied Mathematics*, Vol. **23**, 1986, pp. 293–326.
- [14] KLAINERMAN S., Remark on the asymptotic behavior of the Klein–Gordon equation in  $\mathbb{R}^{n+1}$ , *Comm. Pure Appl. Math.* **46** (2) (1993) 137–144.
- [15] LADHARI R., Petites solutions d'équations d'ondes quasi linéaires en dimension deux d'espace, *Thèse*, Université Paris-Sud, 1999.
- [16] LINDBLAD H., SOGGE C., Restriction theorems and semilinear Klein–Gordon equations in  $(1+3)$ -dimensions, *Duke Math. J.* **85** (1) (1996) 227–252.
- [17] MORIYAMA K., Normal forms and global existence of solutions to a class of cubic nonlinear Klein–Gordon equations in one-space dimension, *Differential Integral Equations* **10** (3) (1997) 499–520.
- [18] MORIYAMA K., TONEGAWA S., TSUTSUMI Y., Almost global existence of solutions for the quadratic semilinear Klein–Gordon equation in one space dimension, *Funkcialaj Ekvacioj* **40** (2) (1997) 313–333.

- [19] OZAWA T., TSUTAYA K., TSUTSUMI Y., Global existence and asymptotic behavior of solutions for the Klein–Gordon equations with quadratic nonlinearity in two space dimensions, *Math. Z.* **222** (1996) 341–362.
- [20] SHATAH J., Normal forms and quadratic nonlinear Klein–Gordon equations, *Comm. Pure Appl. Math.* **38** (1985) 685–696.
- [21] SIMON J.C.H., TAFLIN E., The Cauchy problem for nonlinear Klein–Gordon equations, *Comm. Math. Phys.* **152** (1993) 433–478.
- [22] YAGI K., Normal forms and nonlinear Klein–Gordon equations in one space dimension, *Master thesis*, Waseda University, 1994.
- [23] YORDANOV B., Blow-up for the one-dimensional Klein–Gordon equation with a cubic nonlinearity, *Preprint*, 1996.

(Manuscrit reçu le 7 octobre 1999 ;  
accepté, après révision, le 13 janvier 2000.)

Jean-Marc DELORT  
Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications,  
UMR CNRS 7539,  
Institut Galilée, Université Paris-Nord,  
99, avenue Jean-Batiste-Clément,  
93430 Villetaneuse, France  
E-mail : delort@math.univ-paris13.fr