ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MARTINE BABILLOT
MARC PEIGNÉ

Homologie des géodésiques fermées sur des variétés hyperboliques avec bouts cuspidaux

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 33, nº 1 (2000), p. 81-120
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_2000_4_33_1_81_0>

Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 33, 2000, p. 81 à 120.

HOMOLOGIE DES GÉODÉSIQUES FERMÉES SUR DES VARIÉTÉS HYPERBOLIQUES AVEC BOUTS CUSPIDAUX

PAR MARTINE BABILLOT ET MARC PEIGNÉ [1]

ABSTRACT. – The presence of cusps in hyperbolic manifolds has an influence on the homological behavior of closed geodesics. This phenomenon is studied here for a class of geometrically finite manifolds obtained as quotients of the hyperbolic space by free products of abelian groups acting in a Schottky way. We get in particular an exact estimate for the number of closed geodesics in a fixed homology class which depends in a peculiar way of the Hausdorff dimension of the limit set with a transition at certain half-integer values. © 2000 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

RÉSUMÉ. – La présence de bouts cuspidaux dans une variété hyperbolique affecte le comportement en homologie des géodésiques de la variété. Ce phénomène est étudié pour une classe de variétés géométriquement finies obtenues en quotientant l'espace hyperbolique par des produits libres de groupes abéliens opérant de façon Schottky. On donne en particulier un asymptotique précis du nombre de géodésiques fermées dans une classe d'homologie fixée et on met en évidence un phénomène de bifurcation lorsque la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite prend certaines valeurs demi-entières. © 2000 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Mots Clés: Flot géodésique; Géodésiques fermées; Variétés hyperboliques géométriquement finies

Introduction

L'ensemble $\mathcal{P}_{er}$ des géodésiques fermées d'une variété riemannienne compacte M à courbure négative vérifie un théorème similaire à celui des nombres premiers : si l'on note $N(L)$ le nombre de géodésiques fermées sur M dont la longueur est inférieure à L, on a [36] :

$$N(L) \sim \frac{e^{hL}}{hL} \quad \text{lorsque } L \to +\infty$$

où le nombre h mesure le taux de croissance exponentiel du volume des boules dans le revêtement universel de M. Notons que ce résultat, initialement dû à Selberg et Huber [50,27] pour des variétés de courbure constante -1 reste encore vrai pour des variétés hyperboliques non-compactes, comme les variétés de volume fini [25,38] et plus généralement les variétés géométriquement finies [32,16,22,46].

Par analogie avec les théorèmes de Cebotarev en théorie des nombres, Adachi et Sunada ont posé le problème de l'asymptotique du nombre $N_c(L)$ de géodésiques fermées dans une classe

[1] Durant la rédaction de cet article, M. Peigné a bénéficié d'un détachement au Centre National de la Recherche Scientifique, URA 305.

d'homologie fixée c de M [3]. Phillips et Sarnak ont alors obtenu, pour une variété hyperbolique réelle compacte, un développement asymptotique de $N_c(L)$, et en particulier l'estimée :

$$N_c(L) \sim \mathrm{C}^{\mathrm{ste}} \frac{e^{hL}}{L^{1+d/2}} \quad \text{lorsque } L \to +\infty$$

où $d = \dim H_1(M, \mathbf{R})$ est le premier nombre de Betti de M [43]. Celle-ci fut ensuite étendue aux variétés compactes de courbure négative [31,33,41], et plus généralement aux variétés portant un flot hyperbolique ayant un attracteur compact [42,52]. C'est ainsi le cas des variétés obtenues en quotientant l'espace hyperbolique $\mathbf{H}^{N+1}$ par un groupe d'isométries Γ agissant de façon convexe et co-compacte ; dans ce cas, l'entropie topologique h coïncide avec la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite de Γ. Toutefois, les résultats de C. Epstein sur les variétés hyperboliques *de volume fini* mettaient en évidence un phénomène nouveau, puisque cette dernière estimée était affectée par l'existence de bouts cuspidaux dans la variété M, mais ce uniquement en dimension 2 et 3 [19].

Le thème du présent travail est de mieux comprendre l'influence des transformations paraboliques du groupe fondamental Γ de la variété sur l'estimée asymptotique de $N_c(L)$, lorsque Γ est un groupe géométriquement fini. Pour cela, nous détaillons ici l'étude des variétés hyperboliques $\mathbf{H}^{N+1}/\Gamma$ lorsque Γ est un groupe de Schottky, ou encore un produit libre de groupes abéliens opérant de façon Schottky (nous renvoyons aux Sections 1.2 et 5.2 pour une description précise de ces groupes). Considérons tout d'abord le cas d'un groupe de Schottky.

THÉORÈME A. – *Soit Γ un groupe de Schottky engendré par p ($p \geqslant 1$) transformations paraboliques et q transformations hyperboliques opérant sur l'espace hyperbolique de dimension $N+1$. Notons δ la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite de Γ et $N_c(L)$ le nombre de géodésiques fermées de longueur $\leqslant L$ dans une classe d'homologie c. On a* :

$$N_c(L) \sim C \frac{e^{\delta L}}{LP(L)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \text{si } \delta < 3/2 & P(L) = L^{p/(2\delta-1)+q/2} \\ \text{si } \delta = 3/2 & P(L) = (L \log L)^{p/2} L^{q/2} \\ \text{si } \delta > 3/2 & P(L) = L^{(p+q)/2} \end{cases}$$

pour une constante $C = C(\Gamma) > 0$ indépendante de la classe d'homologie c donnée.

Notons que dans ces exemples, le premier nombre de Betti de la variété est égal à $d = p + q$; l'estimée obtenue est donc la même que celle du cas compact lorsque $\delta > 3/2$. Toutefois, le Théorème A met en évidence un phénomène de bifurcation pour la nature de l'asymptotique de $N_c(L)$ lorsque la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite de Γ prend la valeur $3/2$. L'interprétation géométrique de cette valeur apparaît plus clairement dans l'étude de groupes plus généraux. Dans le Théorème A, tous les bouts cuspidaux de $\mathbf{H}^{N+1}/\Gamma$ étaient de rang 1. Examinons le cas d'une variété hyperbolique possédant un bout cuspidal de rang k. L'asymptotique de $N_c(L)$ devient alors :

THÉORÈME A′. – *Soit Γ le produit libre $\mathbf{Z}^k * \mathbf{Z} * \cdots * \mathbf{Z}$ opérant de façon Schottky sur $\mathbf{H}^{N+1}$, où $\mathbf{Z}^k$ opère par transformations paraboliques et $\mathbf{Z} * \cdots * \mathbf{Z}$ par q transformations hyperboliques. Pour toute classe d'homologie c dans* $\mathrm{H}_1(M, \mathbf{Z})$, *lorsque L tend vers l'infini,*

$$N_c(L) \sim C \frac{e^{\delta L}}{LP(L)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \text{si } \delta < 1 + k/2 & P(L) = L^{k/(2\delta-k)+q/2} \\ \text{si } \delta = 1 + k/2 & P(L) = (L \log L)^{k/2} L^{q/2} \\ \text{si } \delta > 1 + k/2 & P(L) = L^{(k+q)/2} \end{cases}$$

pour une constante $C = C(\Gamma) > 0$ indépendante de la classe d'homologie c donnée.

Nous avons également étudié des exemples de groupes Γ pour lesquels $\mathbf{H}^{N+1}/\Gamma$ contient des bouts cuspidaux de rang arbitraire. Si $\bar{k}$ désigne le rang maximal de ces bouts, la nature de l'asymptotique de $N_c(L)$ change pour $\delta = 1 + \bar{k}/2$ et également pour $\delta = 1/2 + \bar{k}/2$, lorsque Γ contient des bouts cuspidaux de rang $\bar{k} - 1$ (voir Théorème A$''$, en Section 5).

Même si la signification géométrique précise de ces valeurs particulières pour la dimension de Hausdorff d'un ensemble limite reste très mystérieuse, remarquons que le phénomène de bifurcation mis en évidence rejoint le résultat d'Epstein : en effet, en volume fini, les deux nombres $\bar{k}$ et δ coïncident avec la dimension N du bord de l'espace hyperbolique, et la condition $\delta \leqslant 1 + \bar{k}/2$ redonne la condition $N \leqslant 2$ ou encore $\dim M \leqslant 3$.

On peut également s'intéresser à la distribution des géodésiques fermées sur M. Dans les variétés que nous considérons, l'ensemble non-errant du flot géodésique est non-compact et il existe des géodésiques fermées qui "tendent vers l'infini" au sens où les mesures de probabilités supportées par ces géodésiques convergent vaguement vers 0. Cependant, comme dans le cas des variétés compactes [8,57], nous montrons que les géodésiques fermées s'équidistribuent "en moyenne" suivant la mesure de Bowen–Margulis dans le fibré tangent unitaire de M, et ce avec ou sans contraintes homologiques :

THÉORÈME B. – *Sous les hypothèses du Théorème A, notons m^L (resp. m_c^L) le barycentre des mesures de Dirac supportées par les géodésiques fermées de M de longueur $\leqslant L$ (resp. dans une classe d'homologie fixée). Alors m^L et m_c^L convergent vaguement vers la mesure de Bowen–Margulis de T^1M.*

Il est vraisemblable que ces résultats pourront être étendus dans le contexte général des variétés géométriquement finies. La propriété importante des groupes de Schottky que nous utilisons ici est que leur ensemble limite peut être codé à l'aide d'un alphabet *dénombrable*. La restriction du flot géodésique de $\mathbf{H}^{N+1}/\Gamma$ à son ensemble non-errant est alors semi-conjuguée à un flot spécial au-dessus d'une transformation dilatante T possédant une infinité dénombrable de branches inverses (pour la surface modulaire, cette application est la transformation de Gauss des fractions continues, [2,51]). Notre étude se relie donc aux travaux concernant les transformations dilatantes de l'intervalle avec partition de Markov dénombrable, [47,6,4,12], ou encore à l'étude de transformations avec des points fixes neutres [44,28–30,49,56].

On peut penser que les théorèmes ci-dessus pourraient être aussi obtenus par une méthode reposant sur des extensions de la formule des traces de Selberg, comme dans [25,43,19] et [22]. Notons cependant que cette approche n'est pour l'instant utilisable que lorsque la dimension δ vérifie l'hypothèse restrictive : $\delta > N/2$, assurée par exemple lorsqu'il existe un bout cuspidal de volume fini. Les méthodes de dynamique symbolique que nous employons ici nous permettent de nous affranchir de cette hypothèse.

Nos résultats sont également à mettre en parallèle avec ceux obtenus par Guivarc'h et Le Jan concernant l'existence de lois stables dans le théorème Central Limite pour l'enroulement des géodésiques sur la surface modulaire [21], ainsi que les résultats de Enriquez, Franchi et Le Jan pour certaines variétés hyperboliques géométriquement finies [17,18,20]. Pour les variétés considérées ici, il est probable qu'un théorème limite avec convergence vers une loi stable d'indice $\alpha = \max(2, 2\delta - \bar{k})$ puisse être prouvé. Ceci fera l'objet d'un prochain travail.

Plan de l'article. Afin d'alléger les notations, nous avons choisi de détailler les démonstrations lorsque Γ est un groupe de Schottky, en indiquant brièvement dans la Partie 5 les modifications à apporter lorsque la variété M contient des bouts cuspidaux de rang arbitraire. Pour montrer les Théorèmes A et B, nous adoptons une démarche similaire à celle développée pour l'étude des flots Axiome A [42] : dans la Partie 1, nous représentons le flot géodésique sur T^1M comme un flot spécial au dessus d'un système dynamique (mesurablement) isomorphe à un système symbolique ; on étudie alors dans la Partie 2 une famille d'opérateurs de transfert naturellement associée à cette représentation, ce qui permet de décrire les singularités de la fonction Zêta dynamique (Partie 3) et par un théorème taubérien d'une part, et une estimée de grands écarts d'autre part, de prouver les Théorèmes A et B (Partie 4).

Cependant, la présence de transformations paraboliques dans le groupe Γ amène des modifications importantes dans la mise en œuvre de cette approche. Ainsi, l'action de Γ sur son ensemble limite Λ se conjugue a priori à une transformation avec points fixes neutres. Pour retrouver une dynamique dilatante, il faut itérer cette transformation, et pour cela introduire une partition dénombrable de Λ [16]. L'application de Poincaré devient alors non-bornée, et il nous faut les estimées précises du Lemme 1.1 afin de contrôler sa taille sur chacun des éléments de la partition. De même, la fonction prenant en compte l'homologie des géodésiques n'est pas intégrable dans certains cas et ceci rend plus complexe l'étude de la régularité de la famille d'opérateurs de transfert associée à cette représentation. Pour relier la fonction Zêta Dynamique à la "trace" de ces opérateurs, nous vérifions que l'argument téléscopique de Haydn [24] s'adapte dans ce contexte, ce qui permet de transporter la faible régularité de la famille des opérateurs de Ruelle à une singularité de type Hölder de la fonction Zêta. Celle-ci n'étant plus méromorphe, nous proposons enfin une démonstration d'un théorème taubérien adapté à la nature de ces singularités, afin de revenir au problème de dénombrement initial.

1. Groupes de Schottky

Cette section est principalement consacrée à des préliminaires. Tout d'abord, nous donnons une estimée précise pour le jacobien des itérés d'une transformation non elliptique de l'espace hyperbolique. Puis nous considérons un groupe de Schottky Γ et rappelons le codage du flot géodésique de $\Gamma\backslash\mathbf{H}^{N+1}$ suivant [16]. Grâce à ce codage, les géodésiques fermées de la variété sont en correspondance avec les orbites des points périodiques d'une transformation dilatante T sur le bord de l'espace hyperbolique. Nous construisons ensuite une mesure invariante pour T et décrivons son comportement local au voisinage des points fixes des générateurs.

1.1. L'espace hyperbolique

Pour les éléments de géométrie hyperbolique que nous utilisons ici, nous renvoyons aux livres de J.B. Ratcliffe et de B. Maskitt [45,35].

On considèrera deux modèles de l'espace hyperbolique $\mathbf{H}^{N+1}$. Le premier est celui de la boule unité de $\mathbf{R}^{N+1}$: $B^{N+1} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{N+1},\ \|\mathbf{x}\| < 1\}$ avec la métrique $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\mathbf{x}^2/4(1-\|\mathbf{x}\|^2)^2$. On notera alors d la distance hyperbolique sur B^{N+1} et o l'origine de B^{N+1}. Le bord $\partial\mathbf{H}^{N+1}$ s'identifie avec la sphère unité S^N munie de la métrique euclidienne $|\,.\,|$. Pour un point x de S^N, on définit la *fonction de Busemann* $\beta_x(.)$ par : $\beta_x(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{y}\to x} d(\mathbf{x},\mathbf{y}) - d(o,\mathbf{y})$. Ses surfaces de niveau, *les horosphères*, sont des sphères tangentes à S^N au point x.

On obtient le modèle du demi-espace en considérant, pour $x \in S^N$, l'inversion s_x de centre x et de rapport 2 définie par $s_x(\mathbf{x}) = 2\frac{\mathbf{x}-x}{|\mathbf{x}-x|^2} + x$: c'est une transformation conforme de $\mathbf{R}^{N+1}$ qui envoie le point x à l'infini et l'intérieur de la boule unité sur le demi-espace $\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{N+1},\ \mathbf{x}.x < 0\}$. Dans ce modèle, le bord de l'espace hyperbolique est la réunion de l'hyperplan H_x orthogonal à x et du point à l'infini.

Le groupe d'isométries $G = \mathrm{SO}(N+1,1)$ de $\mathbf{H}^{N+1}$ agit transitivement sur $\mathbf{H}^{N+1}$. Cette action se prolonge en une action conforme sur le bord de $\mathbf{H}^{N+1}$. Dans le modèle de la sphère, le coefficient de conformité est donné par :

$$|\gamma'(x)| = e^{-b(\gamma,x)}$$

où, pour une isométrie γ de G et un point x de S^N, on a posé :

$$b(\gamma,x) = \beta_x(\gamma^{-1}.o).$$

Soit γ une isométrie de $\mathbf{H}^{N+1}$ sans point fixe dans B^N. Alors, elle admet un ou deux points fixes sur S^N. Dans le premier cas, elle est dite *parabolique*, et si x_γ désigne son unique point fixe, $|\gamma'(x_\gamma)| = 1$. Après conjugaison par l'inversion s_{x_γ}, elle devient une similitude directe de $\mathbf{R}^{N+1}$ fixant $+\infty$: il existe une rotation affine R_γ et une translation T_γ de H_{x_γ} non-nulle telles que $s_{x_\gamma} \circ \gamma \circ s_{x_\gamma} = R_\gamma \circ T_\gamma = T_\gamma \circ R_\gamma$. La norme (euclidienne) du vecteur de la translation sera notée $\tau(\gamma)$.

Dans le deuxième cas, elle est dite *hyperbolique*. On note alors x_γ^+ son point fixe attracteur ($|\gamma'(x_\gamma^+)| < 1$) et x_γ^- son point fixe répulsif ($|\gamma'(x_\gamma^-)| > 1$). *L'axe de* γ, c'est-à-dire la géodésique joignant x_γ^- à x_γ^+ est invariante par γ et si l'on note $l(\gamma) := \inf_{\mathbf{x}} d(\mathbf{x}, \gamma\mathbf{x})$ la *distance de translation* de γ, on a $d(\mathbf{x}, \gamma.\mathbf{x}) = l(\gamma)$ pour tout point $\mathbf{x}$ de cet axe. Ainsi, $l(\gamma) = b(\gamma, x_\gamma^+) = -b(\gamma, x_\gamma^-)$.

Dans l'étude de l'action d'un groupe Γ sur le bord de l'espace hyperbolique, les estimées $|(\gamma^n)'|(x) = \mathrm{O}(e^{-nl(\gamma)})$ si γ est hyperbolique, ou $|(\gamma^n)'|(x) = \mathrm{O}(1/n^2)$ si γ est parabolique, sont importantes. Nous aurons besoin ici d'un résultat plus précis :

LEMME 1.1. –
(i) *Si γ est hyperbolique, la suite $(b(\gamma^n,x) - nl(\gamma))_{n\geqslant 1}$ converge vers $2\log\frac{|x-x_\gamma^-|}{|x_\gamma^+-x_\gamma^-|}$ pour tout point x de $S^N - \{x_\gamma^-\}$.*
(ii) *Si γ est parabolique, la suite $(b(\gamma^n,x) - 2\log n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $2\log(\tau(\gamma)|x - x_\gamma|/2)$ pour tout point $x \in S^N - \{x_\gamma\}$.*
Ces convergences sont uniformes sur les compacts de S^N ne contenant pas x_γ^- (resp. x_γ).

La démonstration de ce lemme repose sur l'identité suivante [54, p. 183], dite *égalité des accroissements finis* :

$$\text{pour } x, y \in S^N \quad |\gamma.x - \gamma.y|^2 = |\gamma'(x)|\,|\gamma'(y)|\,|x-y|^2.$$

En effet, lorsque γ est hyperbolique, nous obtenons :

$$b(\gamma^n,x) - nl(\gamma) = b(\gamma^n,x) + b(\gamma^n,x_\gamma^-) = 2\log\frac{|x-x_\gamma^-|}{|\gamma^n.x - x_\gamma^-|}$$

et l'on conclut en remarquant que la suite $(\gamma^n.x)_{n\geqslant 1}$ converge vers x_γ^+, uniformément sur les compacts de S^N ne contenant pas x_γ^-. Lorsque γ est parabolique, on a de même :

$$b(\gamma^n,x) = 2\log\frac{|x-x_\gamma|}{|\gamma^n.x - x_\gamma|}.$$

Or, en notant s l'inversion de centre x_γ et de rapport 2 et $\vec{\tau}$ le vecteur de la translation associée à $s\gamma s$ on obtient :

$$|\gamma^n.x - x_\gamma| = \frac{2}{|s\gamma^n.x - x_\gamma|} = \frac{2}{|R_\gamma^n(sx) + n\vec{\tau} - x_\gamma|}$$

et $n|\vec{\tau}||\gamma^n.x - x_\gamma|$ converge uniformément vers 2 sur les compacts de $\mathbf{R}^N$; la propriété (ii) du lemme en découle.

1.2. Groupes de Schottky et codage de l'ensemble limite

On se donne un ensemble $\mathcal{P}$ constitué de p isométries paraboliques de $\mathbf{H}^{N+1}$, un ensemble $\mathcal{Q}$ de q isométries hyperboliques et pour chaque a dans $\mathcal{A} = \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$, deux fermés B_a^+ et B_a^- dans S^N tels que a envoie l'extérieur de B_a^- dans B_a^+. Si $a \in \mathcal{P}$ est parabolique, ces deux fermés contiennent le point x_a, tandis que si $a \in \mathcal{Q}$ est hyperbolique, on peut choisir ces deux fermés disjoints et contenant respectivement x_a^+ et x_a^-. Nous posons $B_a = B_a^+ \cup B_a^-$ et nous supposons que *les ensembles B_a sont deux à deux disjoints,* et donc à distance strictement positive les uns des autres. L'ensemble $\bigcup_{a \neq b} B_a \times B_b$ est ainsi relativement compact dans $S^N \times S^N$ privé de la diagonale.

Le groupe Γ engendré par $\mathcal{A}$ est par définition un *groupe de Schottky* [35]. Lorsque les ensembles B_a^+ et B_a^- sont des boules euclidiennes, Γ est appelé *groupe de Schottky classique* et en dimension $N + 1 = 3$, il existe une borne supérieure strictement inférieure à 2 pour la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite [15]. Pour cette raison, nous autorisons ici les bassins d'attraction B_a à être des fermés arbitraires.

D'après le lemme du tennis de table de Klein, le groupe Γ est un groupe libre à $d = \operatorname{card} \mathcal{A}$ générateurs, opérant proprement discontinûment sur $\mathbf{H}^{N+1}$. La variété quotient $M = \mathbf{H}^{N+1}/\Gamma$ possède alors p bouts de type cuspidal et son premier groupe d'homologie $H_1(M, \mathbf{Z})$ s'identifie avec l'abélianisé $\Gamma/[\Gamma, \Gamma]$ de Γ, soit ici le groupe $\mathbf{Z}^d$.

L'*ensemble limite* de Γ, noté Λ, est l'adhérence dans S^N de l'orbite $\Gamma.o$. Le lemme du tennis de table permet également de montrer que, pour toute suite $(a_i)_{i \geqslant 1}$ formée d'éléments de $\mathcal{A}$ ou de leurs inverses avec $a_{i+1} \neq a_i^{-1}$, la suite de points de l'espace hyperbolique $(a_1 \cdots a_k.o)_k$ converge. On obtient ainsi une application

$$(a_i)_{i \geqslant 1} \mapsto x = \lim a_1 \cdots a_k.o$$

dont les valeurs décrivent tout l'ensemble limite Λ. Pour des groupes de Schottky sans éléments paraboliques, elle est bi-univoque, et permet une correspondance bi-Lipschitz entre un espace symbolique et l'ensemble limite [9,32]. Mais ceci n'est plus vrai dans notre cas puisque pour un élément parabolique $a \in \mathcal{P}$, on a par exemple : $x_a = \lim_n a^n.o = \lim_n a^{-n}.o$. De plus, le décalage sur cet ensemble de suites induit une transformation sur Λ qui n'est pas (strictement) dilatante : sur l'ensemble des points dont la première lettre est $a \in \mathcal{P}$, cette transformation agit par a^{-1} et son jacobien peut-être arbitrairement proche de 1.

Pour remédier à cette lacune, l'approche de [16] (voir aussi [13]) consiste à retirer à l'ensemble Λ les points fixes des générateurs de $\mathcal{A}$ ainsi que leurs orbites sous Γ ; nous notons Λ^0 l'ensemble ainsi obtenu—il suffirait en fait d'ôter les points paraboliques, mais nous préférons cette définition de Λ^0 pour des raisons d'homogénéité de notation. Les points de Λ^0 sont codés par des suites qui ne sont pas constantes à partir d'un certain rang, de sorte que l'ensemble Λ^0 est maintenant en bijection avec l'espace symbolique $\Sigma^+ = \{(a_k^{n_k})_{k \geqslant 1};\ a_k \in \mathcal{A},\ n_k \in \mathbf{Z}^*,\ a_{k+1} \neq a_k^{\pm 1}\}$ [16, p. 759]. Il apparait ainsi une partition dénombrable de Λ^0 : pour $a \in \mathcal{A}$, on note Λ_{a^0} l'ensemble des points de Λ^0 dont la première lettre diffère de a ou a^{-1}, et pour $n \in \mathbf{Z}^*$, on pose :

$$\Lambda_{a^n} := a^n \Lambda_{a^0}.$$

Alors les sous-ensembles Λ_{a^n} pour $a \in \mathcal{A}$ et $n \in \mathbf{Z}^*$ sont d'adhérences disjointes deux à deux et leur réunion est égale à Λ^0.

L'espace symbolique Σ^+ est muni d'une transformation naturelle, le décalage, qui consiste à enlever à la suite $(a_k^{n_k})_{k\geqslant 1}$ le premier groupe de lettres $a_1^{n_1}$. Celui-ci induit une transformation T sur Λ^0 qui agit par a^{-n} en restriction à Λ_{a^n}. Observons que l'ensemble Λ_{a^0} est contenu dans $\bigcup_{b\neq a} B_b$, et il est par conséquent "loin" de x_a, tandis que pour $n \neq 0$, chaque sous-ensemble Λ_{a^n} est contenu dans B_a. C'est grâce à ce fait que l'on peut montrer que les branches inverses de T possèdent la propriété de contraction uniforme suivante [16, p. 761] :

LEMME 1.2. – *Il existe un réel* $0 < r < 1$ *et une constante* $C > 0$ *tels que pour toute suite finie* $(a_i^{n_i})_{i=1,\dots,k}$ *avec* $a_{i+1} \neq a_i^{-1}$ *et tous points* x, y *de l'ensemble limite de* Γ *dont la première lettre diffère de* a_k, *on a* :

$$\left|a_1^{n_1}\cdots a_k^{n_k}.x - a_1^{n_1}\cdots a_k^{n_k}.y\right| \leqslant Cr^k\,|x-y|.$$

Ainsi, dans le modèle géométrique $(\Lambda^0, |.|)$, la transformation T est une dilatation, et ceci sera essentiel dans la suite pour utiliser les méthodes d'opérateurs de transfert.

1.3. Le codage du flot géodésique et les géodésiques fermées de M

Si E est un sous-ensemble de S^N, on notera $E \overset{\vartriangle}{\times} E$ le sous-ensemble $E \times E$ privé des points de la diagonale.

Identifions le fibré unitaire tangent $T^1\mathbf{H}^{N+1}$ de l'espace hyperbolique avec $S^N \overset{\vartriangle}{\times} S^N \times \mathbf{R}$ en associant à un vecteur unitaire tangent v basé en p le triplet (x^-, x^+, r) où x^- et x^+ sont les extrémités de la géodésique passant par v et $r = \beta_{x^+}(p)$. Dans ces coordonnées l'action d'une isométrie γ de Γ est donnée par

$$\gamma(x^-, x^+, r) = \bigl(\gamma.x^-, \gamma.x^+, r - b(\gamma, x^+)\bigr)$$

tandis que le flot géodésique $(\tilde{g}_t)_{t\in\mathbf{R}}$ agit sur $T^1\mathbf{H}^{N+1}$ par

$$\tilde{g}_t(x^-, x^+, r) = (x^-, x^+, r - t).$$

Cette action de $\mathbf{R}$ sur la troisième composante commute avec celle de Γ et définit par passage au quotient le *flot géodésique* $(g_t)_{t\in\mathbf{R}}$ sur $T^1M \simeq \Gamma\backslash T^1\mathbf{H}^{N+1}$.

Si l'une des deux extrémités d'une géodésique n'appartient pas à l'ensemble limite, celle-ci se projette sur une géodésique qui part à l'infini dans la variété quotient. On restreint donc l'étude du flot géodésique à l'ensemble non-errant $\Omega \subset T^1M$ du flot géodésique défini par : $\Omega = \Gamma\backslash \Lambda \overset{\vartriangle}{\times} \Lambda \times \mathbf{R}$. Dans le cas d'un groupe convexe co-compact, Ω est un attracteur compact. Ici, il ne l'est plus, mais sa projection dans la variété M est contenue dans une sous-variété de volume fini appelée le *cœur de Nielsen* de M.

Introduisons le sous-ensemble invariant $\Omega^0 = \Gamma\backslash \Lambda^0 \overset{\vartriangle}{\times} \Lambda^0 \times \mathbf{R}$ de Ω. Nous allons conjuguer le flot géodésique (en restriction à Ω^0) à un flot spécial au dessus de l'extension naturelle du système (Λ^0, T). Soit $\Sigma = \{(a_k^{n_k})_{k\in\mathbf{Z}};\ a_i \in \mathcal{A},\ n_k \in \mathbf{Z}^*,\ a_{k+1} \neq a_k^{\pm 1}\}$, l'espace des *suites bilatères* et l'application qui associe à une suite de Σ le couple (x^-, x^+) de $\Lambda^0 \times \Lambda^0$ défini par

$$x^+ := \lim_{k\to+\infty} a_1^{n_1}\cdots a_k^{n_k}.o, \qquad x^- := \lim_{k\to-\infty} a_0^{-n_0}\cdots a_k^{-n_k}.o.$$

L'image de Σ par cette application est l'ensemble

$$\mathcal{D}^0 = \bigcup_{a\neq b}\ \bigcup_{n,m\in\mathbf{Z}^*} \Lambda_{b^m} \times \Lambda_{a^n}$$

et le décalage sur Σ induit une transformation $\bar{T}$ de $\mathcal{D}^0$ définie par :

$$\bar{T}(x^-,x^+) = (a^{-n}x^-, a^{-n}x^+) \quad \text{lorsque } x^+ \in \Lambda_{a^n}.$$

On obtient ainsi une équivalence d'orbites entre l'action de Γ sur $\Lambda^0 \overset{\triangle}{\times} \Lambda^0$ et celle de la transformation $\bar{T}$ sur $\mathcal{D}^0$. De plus, l'égalité $a^{-n}(x^-,x^+,r) = (a^{-n}.x^-, a^{-n}.x^+, r - b(a^{-n},x^+))$ conduit à introduire l'extension T_f de $\bar{T}$ définie sur $\mathcal{D}^0 \times \mathbf{R}$ par :

$$T_f(x^-,x^+,r) = \big(\bar{T}(x^-,x^+), r + f(x^+)\big)$$

où

$$f(x^+) = -b(a^{-n},x^+) = b(a^n, a^{-n}.x^+) \quad \text{si } x^+ \in \Lambda_{a^n}$$

et qui reflète l'action de Γ sur $\mathcal{D}^0 \times \mathbf{R}$. La fonction plafond f est égale au temps de retour du flot géodésique sur la section $\mathcal{D}^0 \times \{0\}$ et nous obtenons donc le lemme suivant :

LEMME 1.3. –
(i) *L'espace* $\Omega^0 = \Gamma \backslash \Lambda^0 \overset{\triangle}{\times} \Lambda^0 \times \mathbf{R}$ *est en bijection avec* $\mathcal{D}^0 \times \mathbf{R}/\langle T_f \rangle$.
(ii) *Le flot géodésique sur* Ω^0 *est conjugué au flot spécial sur* $\mathcal{D}^0 \times \mathbf{R}/\langle T_f \rangle$.

Remarquons que f coïncide avec le logarithme du jacobien de T, et qu'elle est non-bornée d'après le Lemme 1.1.

Une *géodésique fermée* $\wp$ de M est la projection de l'axe d'un élément hyperbolique γ de Γ ; sa longueur $l(\wp)$ est le nombre $l(\gamma)$. Elle se relève dans le fibré unitaire T^1M en une orbite fermée pour le flot géodésique. Si elle diffère de la projection de l'axe d'une puissance d'un générateur hyperbolique, ce que nous supposerons dans toute la suite, elle correspond à une orbite fermée pour le flot spécial agissant sur $\mathcal{D}^0 \times \mathbf{R}/\langle T_f \rangle$. Il existe donc un point (x^-,x^+) appartenant à $\mathcal{D}^0$ et un entier $k \geqslant 1$ tels que

$$\bar{T}^k(x^-,x^+) = (x^-,x^+) \quad \text{et} \quad l(\wp) = \sum_{i=0}^{k-1} f\big(T^i x^+\big).$$

Notons que les points $\bar{T}(x^-,x^+),\ldots,\bar{T}^{k-1}(x^-,x^+)$ donnent lieu à la même orbite périodique, de sorte que les géodésiques fermées de M sont en bijection avec les orbites des points périodiques pour $\bar{T}$.

Il suffit en fait de considérer les points T-périodiques sur Λ^0 : un couple (x^-,x^+) fixé par $\bar{T}^k$ est codé par une suite bilatère $(a_i^{n_i})_{i\in\mathbf{Z}}$ invariante par k décalages, et par conséquent le point x^+, qui est codé par $(a_i^{n_i})_{i\in\mathbf{N}}$, est fixé par T^k. Observons que les points (x^-,x^+) associés à la suite périodique $(a_i^{n_i})_{i\in\mathbf{Z}}$ ne sont autres que les points fixes de l'isométrie $\gamma = a_1^{n_1}\cdots a_k^{n_k}$, et la géodésique fermée $\wp$ correspondante est la projection de l'axe de γ.

La classe d'homologie $[\wp]$ de $\wp$ est alors égale à l'image de γ dans $\Gamma\backslash[\Gamma,\Gamma]$. Pour tout $a \in \mathcal{A}$, considérons la fonction H_a définie sur Λ^0 et à valeurs entières définie par :

$$H_a(x) = n \quad \text{si } x \in \Lambda_{a^n}.$$

Alors, si $\wp$ est associée à l'orbite du point T-périodique x nous avons :

$$[\wp] = \sum_{a\in\mathcal{A}} S_k H_a(x)\,[a]$$

où l'on a posé $S_k H = H + H\circ T + \cdots + H\circ T^{k-1}$.

Le dénombrement des géodésiques fermées est donc lié à celui des points T-périodiques. Il nous faut ainsi étudier le système dynamique (Λ^0, T) et tout d'abord exhiber une mesure ν invariante pour T. Pour cela, rappellons la construction de la mesure de Bowen–Margulis.

1.4. Mesure de Bowen–Margulis, et mesures invariantes pour $\bar{T}$ et T_f

La mesure de Bowen–Margulis a été décrite par Sullivan [54, p. 431] pour les variétés hyperboliques de la façon suivante : on considère tout d'abord la *mesure de Patterson*, c'est-à-dire l'unique mesure de probabilité σ supportée par l'ensemble limite de Γ, et *δ-conforme* sous l'action de Γ :

$$\text{pour tout } x \text{ de } \Lambda \quad \frac{\mathrm{d}\gamma^{-1}\sigma}{\mathrm{d}\sigma}(x) = \left|\gamma'(x)\right|^{\delta}$$

où δ est la dimension de Hausdorff de Λ (Voir aussi [40]).

L'égalité des accroissements finis montre ensuite que la mesure μ définie sur $\Lambda \overset{\triangle}{\times} \Lambda$ par :

$$\mu(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = \frac{\sigma(\mathrm{d}x)\,\sigma(\mathrm{d}y)}{|x-y|^{2\delta}}$$

est invariante sous l'action diagonale de Γ. La mesure $\mu \otimes \mathrm{d}t$ sur $T^1\mathbf{H}^d$ est donc invariante par les deux actions de $\mathbf{R}$ et de Γ. Après passage au quotient, elle induit *la mesure de Bowen–Margulis* m sur Ω.

Comme la mesure de Patterson est diffuse [55, p. 264] et que Λ coïncide avec Λ^0 à un ensemble dénombrable près, nous pouvons restreindre m en une mesure non-nulle sur Ω^0. Le lemme suivant donne l'expression de m lorsque Ω^0 est identifié à $\mathcal{D}^0 \times \mathbf{R}/\langle T_f \rangle$:

LEMME 1.4. –
(i) *En restriction à $\mathcal{D}^0$, la mesure μ induit une mesure, encore notée μ, de masse totale finie et invariante par $\bar{T}$.*
(ii) *La mesure $\mu \otimes \mathrm{d}t$ sur $\mathcal{D}^0 \times \mathbf{R}$ est T_f invariante et induit par passage au quotient la mesure de Bowen–Margulis m sur Ω^0. Celle-ci est également de masse finie.*

Les assertions de ce lemme découlent directement de ce qui précède, excepté la finitude de $\mu(\mathcal{D}^0)$ et celle de $m(\Omega^0)$. Pour montrer que $\mu(\mathcal{D}^0)$ est fini, il suffit d'observer que $\mathcal{D}^0$ est contenu dans $\bigcup_{a \neq b} B_b \times B_a$ est qu'il est donc également relativement compact dans $S^N \overset{\triangle}{\times} S^N$.

La finitude de la mesure de Bowen–Margulis a été montrée par Sullivan pour tout groupe géométriquement fini [55, p. 269]. Pour les groupes de Schottky considérés ici, on peut également vérifier directement que la fonction f est intégrable relativement à μ [16, p. 762].

1.5. Le système dynamique (Λ^0, T, ν)

Revenons au système dynamique (Λ^0, T). La projection $p : (x^-, x^+) \to x^+$ de $\mathcal{D}^0$ sur Λ^0 conjugue les transformations $\bar{T}$ et T et par conséquent, l'image de μ par p est finie et T-invariante. On notera ν la probabilité correspondante.

Cette mesure ν est absolument continue par rapport à la mesure de Patterson et sa densité h est donnée par

$$\forall a \in \mathcal{A},\ \forall x \in \Lambda_{a^n} \quad h(x) = \frac{1}{\mu(\mathcal{D}^0)} \int_{\Lambda_{a^0}} \frac{\sigma(\mathrm{d}x^-)}{|x-x^-|^{2\delta}}.$$

Le lemme suivant étudie le comportement de ν au voisinage des points fixes des générateurs de Γ.

LEMME 1.5. – *Pour tout $a \in \mathcal{A}$ et $n \in \mathbf{N}$ on a $\nu(\Lambda_{a^n}) = \nu(\Lambda_{a^{-n}})$. De plus, pour tout $a \in \mathcal{A}$, il existe une constante C_a strictement positive telle que lorsque n tend vers $+\infty$,*

$$\nu(\Lambda_{a^n}) \sim C_a e^{-n\delta l(a)} \quad \text{si } a \text{ est hyperbolique,}$$
$$\nu(\Lambda_{a^n}) \sim C_a n^{-2\delta} \quad \text{si } a \text{ est parabolique.}$$

Démonstration. – Par définition, on a :

$$\nu(\Lambda_{a^n}) = \frac{\mu(\Lambda_{a^0} \times \Lambda_{a^n})}{\mu(\mathcal{D}^0)}.$$

L'invariance de μ par les isométries de Γ nous donne :

$$\mu(\Lambda_{a^0} \times \Lambda_{a^n}) = \mu\big(a^{-n}(\Lambda_{a^0} \times \Lambda_{a^n})\big) = \mu(\Lambda_{a^{-n}} \times \Lambda_{a^0}).$$

L'égalité $\nu(\Lambda_{a^n}) = \nu(\Lambda_{a^{-n}})$ résulte alors de l'invariance de μ par la symétrie $(x^-, x^+) \to (x^+, x^-)$. De plus

$$\begin{aligned}
\nu(\Lambda_{a^n}) &= \int_{\Lambda_{a^n}} h(x)\,\sigma(\mathrm{d}x) \\
&= \int_{\Lambda_{a^0}} h(a^n.x)\,\big|(a^n)'(x)\big|^\delta\,\sigma(\mathrm{d}x) \quad \text{par invariance conforme de } \sigma \\
&= \frac{1}{\mu(\mathcal{D}^0)} \int_{\Lambda_{a^0} \times \Lambda_{a^0}} \frac{|(a^n)'(x)|^\delta}{|y - a^n.x|^{2\delta}}\,\sigma(\mathrm{d}x)\,\sigma(\mathrm{d}y).
\end{aligned}$$

Les estimées du Lemme 1.1 donnent l'équivalent annoncé, avec :

$$C_a = \frac{1}{\mu(\mathcal{D}^0)} \int_{\Lambda_{a^0} \times \Lambda_{a^0}} \left(\frac{|x_a^+ - x_a^-|}{|x - x_a^-||y - x_a^+|}\right)^{2\delta} \sigma(\mathrm{d}x)\,\sigma(\mathrm{d}y)$$

si a est hyperbolique et

$$C_a = \frac{1}{\tau(a)^{2\delta}\mu(\mathcal{D}^0)} \left(\int_{\Lambda_{a^0}} \left(\frac{\sqrt{2}}{|x - x_a|}\right)^{2\delta} \sigma(\mathrm{d}x)\right)^2$$

si a est parabolique.

Ceci complète la démonstration du lemme. □

Remarque. – Comme $\sum_{n \in \mathbf{N}} \nu(\Lambda_{a^n}) = \nu(\bigcup_n \Lambda_{a^n}) < +\infty$, le lemme montre que l'exposant δ est strictement supérieur à $1/2$. Ceci est en fait est toujours vrai pour les groupes géométriquement finis contenant des transformations paraboliques [5].

2. Opérateurs de Ruelle

Un flot spécial au dessus d'un décalage $\overline{\sigma}$ sur un espace symbolique Σ s'étudie classiquement en considérant le système facteur (Σ^+, σ) des suites unilatères. On introduit alors l'opérateur de transfert $\mathcal{L}_f$:

$$\mathcal{L}_f\phi(x) = \sum_{\sigma y = x} e^{-f(y)}\phi(y)$$

associé à la fonction plafond f et on analyse le spectre de $\mathcal{L}_f$ sur des espaces fonctionnels convenables [42]. Cette section est consacrée à l'étude d'une famille d'opérateurs de transfert associés au système (Λ^0, T, ν) et aux fonctions f et $H = (H_a)_{a\in\mathcal{A}}$ introduites précedemment :

$$\text{pour } x \in \Lambda_{a^n} \quad f(x) = -b(a^n, x) \quad \text{et} \quad H_b(x) = \begin{cases} n & \text{si } b = a, \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$$

2.1. Définition des opérateurs de Ruelle

Soit $C(\Lambda)$ l'espace des fonctions continues sur Λ à valeurs dans $\mathbf{C}$, muni de la norme de la convergence uniforme $|.|_\infty$. Pour tout nombre complexe z, et tout $v = (v_a)_{a\in\mathcal{A}}$ du tore d-dimensionnel $\mathbf{T}^d$, identifié canoniquement au groupe dual de $\mathbf{Z}^d$, nous considérons l'opérateur $\mathcal{L}_{z,v}$ défini formellement par

$$\text{si } \phi \in C(\Lambda) \quad \mathcal{L}_{z,v}\phi(x) = \sum_{y/Ty=x} e^{-zf(y)+i\langle v|H(y)\rangle}\phi(y).$$

Nous noterons $\mathcal{L}_z$ l'opérateur $\mathcal{L}_{z,0}$, en remarquant que $\mathcal{L}_{z,v}\phi = \mathcal{L}_z(e^{i\langle v|H(.)\rangle}\phi)$.

Lorsque x appartient à Λ_{a^0}, un antécédent de x par T est de la forme $y = a^n.x$. On a donc $f(y) = -b(a^{-n}, y) = b(a^n, x)$ et $H_a(y) = n$, ce qui permet d'écrire encore :

$$\mathcal{L}_{z,v}\phi(x) = \sum_{a\in\mathcal{A}} \mathbf{1}_{\Lambda_{a^0}}(x) \sum_{n\in\mathbf{Z}^*} e^{-zb(a^n,x)+inv_a}\phi(a^n.x).$$

Cette dernière égalité implique que $\mathcal{L}_{z,v}\phi(x)$ est fini lorsque $\mathrm{Re}(z) > 1/2$, puisque d'après le Lemme 1.1 les séries $\sum_{n\in\mathbf{Z}^*} |e^{-zb(a^n,x)}|$ sont convergentes dans ce cas. Elle montre également que la fonction $\mathcal{L}_{z,v}\phi$, qui n'est définie a priori que sur $\Lambda^0 = \bigcup \Lambda_{a^0}$, s'étend par continuité à tout l'ensemble limite $\Lambda = \bigcup \overline{\Lambda_{a^0}}$. Dans la suite, l'opérateur $\mathcal{L}_{z,v}$ sera donc défini sur l'espace des fonctions continues sur tout l'ensemble limite Λ.

Dans ce paragraphe, nous allons montrer en particulier que $\mathcal{L}_{z,v}$ opère sur $C(\Lambda)$; néanmoins, afin de contrôler précisement son spectre, nous allons considérer sa restriction au sous-espace $L(\Lambda)$ de $C(\Lambda)$ défini par

$$L(\Lambda) = \{\phi \in C(\Lambda) \mid \|\phi\| = |\phi|_\infty + [\phi] < +\infty\}$$

où le coefficient de Lipschitz de ϕ est ici défini par

$$[\phi] = \sup_{a\in\mathcal{A}} \sup_{x,y\in\Lambda_{a^0}} \frac{|\phi(x) - \phi(y)|}{|x - y|}.$$

L'espace $(L(\Lambda), \|.\|)$ est un $\mathbf{C}$-espace de Banach et l'injection canonique de $(L(\Lambda), \|.\|)$ dans $(C(\Lambda), |.|_\infty)$ est compacte.

Notons $p_{z,v}(a^n, x)$ le poids $\mathbf{1}_{\Lambda_{a^0}}(x)e^{-zb(a^n,x)+inv_a}$. Sa taille et sa régularité sont données par le lemme suivant :

LEMME 2.1. – *Si a est parabolique (resp. hyperbolique) la suite $(n^{2\mathrm{Re}(z)}\|p_{z,v}(a^n, .)\|)_{n\geqslant 1}$ (resp. $(e^{nl(a)\mathrm{Re}(z)}\|p_{z,v}(a^n, .)\|)_{n\geqslant 1}$) est bornée pour chaque (z, v) appartenant à $\mathbf{C} \times \mathbf{T}^d$.*

Démonstration. – Le fait que les suites

$$\left(n^{2\mathrm{Re}(z)}\left|p_{z,v}(a^n,.)\right|_\infty\right)_{n\geqslant 1} \quad \text{et} \quad \left(e^{nl(a)\mathrm{Re}(z)}\left|p_{z,v}(a^n,.)\right|_\infty\right)_{n\geqslant 1}$$

soient bornées lorsque a est respectivement parabolique et hyperbolique est une conséquence directe du Lemme 1.1. Afin de contrôler le coefficient de Lipschitz de $p_{z,v}(a^n,.)$, nous devons estimer $p_{z,v}(a^n,x) - p_{z,v}(a^n,y)$ lorsque x et y appartiennent au même sous ensemble Λ_{a^0}. Comme le point $a^{-n}.o$ est proche de B_a pour n grand, il existe une constante $A > 0$ telle que $|b(a^n,x) - b(a^n,y)| \leqslant A|x-y|$ pour tous points $x,y \in \Lambda_{a^0}$ et tout $n \in \mathbf{Z}^*$ [16, p. 779]. Grâce à l'inégalité $|e^Z - 1| \leqslant 2|Z|e^{|\mathrm{Re}(Z)|}$ satisfaite pour tout nombre complexe Z, on obtient

$$\left|e^{-zb(a^n,x)} - e^{-zb(a^n,y)}\right| \leqslant 2A|z|e^{2A|\mathrm{Re}(z)|}\,|x-y|\,e^{-\mathrm{Re}(z)b(a^n,x)}.$$

Ainsi le coefficient de Lipschitz vérifie $[p_{z,v}(a^n,.)] \leqslant C|p_{\mathrm{Re}(z),0}(a^n,.)|_\infty$ pour une constante $C = C(z) > 0$, ce qui complète la démonstration du lemme. □

2.2. Le spectre de $\mathcal{L}_{z,v}$ sur $L(\Lambda)$

D'après le lemme 2.1, l'opérateur $\mathcal{L}_{z,v}$ est borné sur $L(\Lambda)$ lorsque $\mathrm{Re}(z) > 1/2$. On notera $\rho(z,v)$ son rayon spectral. Rappelons les résultats obtenus dans [16, pp. 788–796] lorsque $z = \delta + it$ et $v = 0$. Le rayon spectral $\rho(\delta + it, 0)$ de l'opérateur $\mathcal{L}_{\delta+it}$ est inférieur ou égal à 1, avec égalité si et seulement si $t = 0$. Dans ce cas, la fonction h introduite en 1.5 appartient à $L(\Lambda)$, vérifie $\mathcal{L}_\delta h = h$, et 1 est valeur propre simple isolée dans le spectre de $\mathcal{L}_\delta$. Lorsque $d = p+q \geqslant 3$, toute autre valeur spectrale est de module < 1. Lorsque $d = 2$, il n'existe que deux bassins d'attractions B_a et B_b, ce qui introduit une périodicité d'ordre 2 dans le jeu du tennis de table ; ceci implique que -1 est également valeur propre isolée, et les autres valeurs spectrales sont de module < 1. De plus, la mesure de Patterson est invariante pour $\mathcal{L}_\delta$: $\sigma(\mathcal{L}_\delta\phi) = \sigma(\phi)$ pour tout $\phi \in C(\Lambda)$. La proposition suivante prolonge cette étude aux valeurs de (z,v) telles que $\mathrm{Re}(z)$ est proche de δ et v est quelconque dans le tore :

PROPOSITION 2.2. – *Soit $\mathcal{L}_{z,v}$ l'opérateur de transfert introduit en* 2.1 *et $\rho(z,v)$ son rayon spectral sur $L(\Lambda)$.*

(i) *Il existe un voisinage U_0 de $(\delta,0)$ dans $\mathbf{C}\times\mathbf{T}^d$ et $\rho_0 \in]0,1[$ tel que pour tout (z,v) appartenant à U_0, on ait $\rho(z,v) > \rho_0$ et :*
   - *si $p+q \geqslant 3$ alors $\mathcal{L}_{z,v}$ a une unique valeur propre $\lambda(z,v)$ de module $\rho(z,v)$, cette valeur propre est simple et proche de* 1 *et le reste du spectre de $\mathcal{L}_{z,v}$ est inclus dans un disque de rayon ρ_0.*
   - *si $p+q = 2$ alors $\mathcal{L}_{z,v}$ a deux valeurs propres simples $\lambda(z,v)$ et $\lambda^-(z,v)$ proches de* 1 *et* -1 *respectivement et le reste du spectre de $\mathcal{L}_{z,v}$ est inclus dans un disque de rayon ρ_0.*

(ii) *Pour tout réel $A > 0$, il existe $\varepsilon(A) > 0$ et un nombre $\rho_1 < 1$ tel que $\rho(z,v) < \rho_1$ dès que $(z,v) \notin U_0$ vérifie* $\mathrm{Re}(z) \geqslant \delta - \varepsilon(A)$ *et* $|\mathrm{Im}(z)| \leqslant A$.

La démonstration de cette proposition se décompose en 3 étapes.

Étape 1. Le rayon spectral essentiel de $\mathcal{L}_{z,v}$ sur $L(\Lambda)$. Nous allons tout d'abord établir une inégalité de contraction pour les opérateurs itérés $\mathcal{L}^k_{z,v}$. Pour cela, écrivons

$$\mathcal{L}^k_{z,v}\phi(x) = \sum_{\gamma\in\Gamma(k)} p_{z,v}(\gamma,x)\phi(\gamma.x)$$

où $\Gamma(k)$ désigne l'ensemble des éléments $\gamma = a_1^{n_1} \cdots a_k^{n_k}$ de longueur k dans Γ (avec $a_{i+1} \neq a_i^{\pm 1}$), et $p_{z,v}(\gamma, .)$ la fonction qui vaut $e^{-zb(\gamma,.)+i\langle v|[\gamma]\rangle}$ sur $\Lambda_{a_k^0}$ et qui est nulle ailleurs. Observons que $p_{z,v}(\gamma, x)$ est le k-produit $\prod_{i=1}^n p_{z,v}(a_i^{n_i}, a_{i+1}^{n_{i+1}} \cdots a_k^{n_k}.x)$.

Fixons $a \in \mathcal{A}$ et $x, y \in \Lambda_{a^0}$. On a :

$$\left|\mathcal{L}_{z,v}^k \phi(x) - \mathcal{L}_{z,v}^k \phi(y)\right| \leqslant \sum_{\gamma \in \Gamma(k)} \left|p_{z,v}(\gamma, x)\right| \left|\phi(\gamma.x) - \phi(\gamma.y)\right| + \sum_{\gamma \in \Gamma(k)} \left[p_{z,v}(\gamma, .)\right] |\phi|_\infty |x-y|.$$

D'après le Lemme 1.2 il existe $C > 0$ et $0 < r < 1$ tels que $|\gamma.x - \gamma.y| \leqslant Cr^k|x-y|$. On obtient ainsi l'inégalité :

$$(*) \qquad \left[\mathcal{L}_{z,v}^k \phi\right] \leqslant r_k[\phi] + R_k|\phi|_\infty$$

avec $r_k = Cr^k \left|\mathcal{L}_{\mathrm{Re}(z)}^k 1\right|_\infty$ et $R_k = \sum[p_{z,v}(\gamma, .)]$.

Notons que

$$\limsup_k r_k^{1/k} = r \limsup_k \left|\mathcal{L}_{\mathrm{Re}(z)}^k 1\right|_\infty^{1/k} = r\rho_\infty\big(\mathrm{Re}(z)\big) \quad \text{où } \rho_\infty\big(\mathrm{Re}(z)\big)$$

est le rayon spectral de l'opérateur (positif) $\mathcal{L}_{\mathrm{Re}(z)}$ sur $C(\Lambda)$.

Une inégalité de ce type apparaît dans [14]. Elle est à la base du théorème de Ionescu–Tulcea–Marinescu sur les opérateurs quasi-compacts. Une version améliorée de ce théorème due à Hennion [26] nous donne ici que le rayon spectral essentiel de $\mathcal{L}_{z,v}$ sur $L(\Lambda)$ est inférieur ou égal à $r\rho_\infty(\mathrm{Re}(z))$, autrement dit que toute valeur spectrale de module strictement supérieur à $r\rho_\infty(\mathrm{Re}(z))$ est valeur propre isolée de multiplicité finie dans le spectre de $\mathcal{L}_{z,v}$.

Ceci implique en particulier que $\rho(z, v) \leqslant \rho_\infty(\mathrm{Re}(z))$. En effet, l'existence d'une valeur spectrale λ de module strictement supérieur à $\rho_\infty(\mathrm{Re}(z))$, entrainerait, d'après le résultat précédent, celle d'une fonction ϕ avec $\mathcal{L}_{z,v}\phi = \lambda\phi$. On aurait alors $|\lambda||\phi| \leqslant \mathcal{L}_{\mathrm{Re}(z)}|\phi|$ et donc $|\lambda| \leqslant \rho_\infty(\mathrm{Re}(z))$, d'où une contradiction.

Étape 2. Spectre de $\mathcal{L}_{\delta+it,v}$. Considérons maintenant l'opérateur $\mathcal{L}_{\delta+it,v}$. Comme $\rho_\infty(\delta) = 1$, son rayon spectral sur $L(\Lambda)$ est inférieur ou égal à 1 et toute valeur spectrale de module $> r$ est valeur propre, d'après l'étape 1. Montrons que $\rho(\delta + it, v) < 1$ si $(t, v) \neq (0, 0)$. Supposons $\rho(\delta + it, v) = 1$. Il existe alors une fonction $\phi \in L(\Lambda)$ et $\theta \in \mathbf{R}$ tels que $\mathcal{L}_{\delta+it,v}(\phi) = e^{i\theta}\phi$ d'où $|\phi| \leqslant \mathcal{L}_\delta|\phi|$. Comme $\sigma\mathcal{L}_\delta = \sigma$, on obtient $\mathcal{L}_\delta|\phi|(x) = |\phi|(x)$ pour σ-presque tout x ; les fonctions ϕ et $\mathcal{L}\phi$ étant continues sur Λ et le support de σ étant Λ, cette dernière égalité est en fait vérifiée pour tout x dans Λ et l'on en déduit que $|\phi|$ est proportionnelle à h. L'égalité $\mathcal{L}_{\delta+it,v}(\phi) = e^{i\theta}\phi$ peut alors s'écrire

$$\frac{1}{h(x)} \sum_{a \in \mathcal{A}\, n \in \mathbf{Z}^*} h(a^n.x) p_{\delta,0}(a^n,\, x) \frac{\phi(a^n.x)}{h(a^n.x)} e^{itb(a^n,\, x) + inv_a} = e^{i\theta} \frac{\phi(x)}{h(x)}$$

avec $|\phi|$ proportionnelle à h. Comme $\frac{1}{h}\mathcal{L}_\delta h = 1$, ceci n'est possible que si

$$(*) \qquad \forall a \in \mathcal{A},\ \forall x \in \Lambda_{a^0},\ \forall n \in \mathbf{Z}^* \quad \frac{\phi(a^n.x)}{h(a^n.x)} e^{itb(a^n,\, x) + inv_a} = e^{i\theta} \frac{\phi(x)}{h(x)}$$

et par conséquent

$$\frac{\phi(a^{n+1}.x)}{\phi(a^n.x)} \frac{h(a^n.x)}{h(a^{n+1}.x)} e^{it(b(a^{n+1},x) - b(a^n,\, x)) + iv_a} = 1.$$

Si a est parabolique, on a

$$\lim_{n\to+\infty} b(a^{n+1},x) - b(a^n,x) = 0$$

et donc $v_a = 0$. Comme de plus $\lim_{n\to+\infty} b(a^n,x) = +\infty$, l'ensemble $\{b(a^n,x) - b(a^m,x) \mid n,m \in \mathbf{Z}^*\}$ est dense dans $\mathbf{R}$ si bien que $t=0$; il vient

$$\frac{\phi(x_a)}{h(x_a)} = e^{i\theta}\frac{\phi(x)}{h(x)}$$

pour tout $x \in \Lambda$ d'où $e^{i\theta} = 1$ et $\phi \in \mathbf{C}h$. L'égalité $(*)$ entraîne $e^{inv_a} = 1$ pour a hyperbolique soit $v_a = 0$. Finalement, $\rho(\delta + it, v)$ n'est égal à 1 que lorsque $(t,v) = (0,0)$.

Remarque. – Rappelons que la propriété $\rho(\delta + it, 0) < 1$, c'est à dire l'absence de valeurs propres de module 1 pour l'opérateur $\mathcal{L}_{\delta+it}$ lorsque $t \neq 0$, équivaut au mélange topologique de la suspension, ou ici à la non-arithméticité du spectre des longueurs [23] ; ceci implique également le mélange du flot géodésique pour la mesure de Bowen–Margulis [4, p. 171].

Étape 3. Régularité de la fonction $(z,v) \mapsto \mathcal{L}_{z,v}$ Fixons un point $x \in \Lambda_{a^0}$ et $v \in \mathbf{T}^d$. La fonction $z \to p_{z,v}(a^n,x)$ est analytique, et

$$\frac{\partial^l}{\partial z^l} p_z(a^n,x) = \bigl(-b(a^n,x)\bigr)^l\, p_{z,v}(a^n,x).$$

Comme au Lemme 2.1, on voit qu'il existe une constante C telle que

$$\left\| \frac{\partial^l}{\partial z^l} p_{z,v}(a^n,.) \right\| \leqslant C\frac{(\log n)^l}{n^{2\mathrm{Re}(z)}}$$

lorsque a est parabolique et

$$\left\| \frac{\partial^l}{\partial z^l} p_{z,v}(a^n,.) \right\| \leqslant C\frac{n^l}{e^{nl(a)\mathrm{Re}(z)}}$$

lorsque a est hyperbolique. L'opérateur $\frac{\partial^l}{\partial z^l}\mathcal{L}_{z,v}$ est donc bien défini sur $L(\Lambda)$ pour toute valeur de l si $\mathrm{Re}(z) > 1/2$, ce qui montre l'analyticité de $z \to \mathcal{L}_{z,v}$ sur ce domaine.

De plus, pour tout $v \in \mathbf{T}^d$ nous avons $\|\mathcal{L}_{z',v} - \mathcal{L}_{z,v}\| \leqslant 2\|\mathcal{L}_{z'} - \mathcal{L}_z\|$ car $\mathcal{L}_{z,v}\phi = \mathcal{L}_z(e^{i\langle v|H(.)\rangle}\phi)$ et $\|e^{i\langle v|H(.)\rangle}\phi\| \leqslant 2\|\phi\|$; ainsi, la fonction $z \mapsto \mathcal{L}_{z,v}$ est analytique sur $\{z \in \mathbf{C};\ \mathrm{Re}(z) > 1/2\}$ uniformément par rapport à $v \in \mathbf{T}^d$.

Enfin,

$$\|\mathcal{L}_{z,v'} - \mathcal{L}_{z,v}\| \leqslant 2 \sum_{a\in\mathcal{A}\ n\in\mathbf{Z}^*} \|p_z(a^n,.)\| |e^{inv'_a} - e^{inv_a}|,$$

si bien que $\lim_{v'\to v} \|\mathcal{L}_{z,v'} - \mathcal{L}_{z,v}\| = 0$. De l'inégalité

$$\|\mathcal{L}_{z',v'} - \mathcal{L}_{z,v}\| \leqslant \|\mathcal{L}_{z',v'} - \mathcal{L}_{z,v'}\| + \|\mathcal{L}_{z,v'} - \mathcal{L}_{z,v}\|$$

résulte la continuité de l'application $(z,v) \mapsto \mathcal{L}_{z,v}$ sur $\{\mathrm{Re}(z) > 1/2\} \times \mathbf{T}^d$.

La Proposition 2.2 s'obtient alors pour $\mathrm{Re}(z)$ proche de δ par perturbation continue du cas $\mathrm{Re}(z) = \delta$ décrit à l'étape 2. Lorsque $\mathrm{Re}(z) > \delta$, on utilise la stricte décroissance de $s \to \rho_\infty(s)$ pour obtenir : $\rho(z,v) \leqslant \rho_\infty(\mathrm{Re}(z)) < 1$.

2.3. Régularité de la valeur propre dominante $\lambda(z,v)$

Il découle de la théorie des perturbations d'opérateurs que l'application $(z,v) \to \lambda(z,v)$, définie au voisinage de $(\delta,0)$ par la Proposition 2.2 possède la même régularité que $(z,v) \to \mathcal{L}_{z,v}$. Elle est donc analytique en z, et continue en v. Nous allons maintenant étudier le degré exact de régularité en v. Contrairement à ce qui se passe dans le cas de sous-décalages de type fini, nous verrons qu'il n'y a plus analyticité en v, mais une régularité de type Hölder en $|v|^\alpha$. Avant cela, établissons le lemme suivant :

LEMME 2.3. – *Il existe un voisinage $U = U_1 \times U_2$ de $(\delta,0)$ dans $\mathbf{C} \times \mathbf{T}^d$ tel que :*
(a) *pour tout $v \in U_2$, la fonction analytique $1 - \lambda(.,v)$ a un unique zéro $z(v)$ sur U_1,*
(b) *la fonction*

$$z \longrightarrow \frac{1-\lambda(z,v)}{z-z(v)}$$

est non-nulle et analytique sur U_1, uniformément en $v \in U_2$,
(c) *l'application $v \longrightarrow z(v)$ est continue sur U_2.*

Démonstration. – Rappelons tout d'abord que 1 est valeur propre de $\mathcal{L}_\delta$, avec $\mathcal{L}_\delta h = h$. Par conséquent $1 - \lambda(.\,,0)$ s'annule en δ. Montrons que δ est un zéro simple de $1-\lambda(.\,,0)$. Pour z suffisamment proche de δ, il existe une unique fonction h_z avec $\mathcal{L}_z h_z = \lambda(z,0)h_z$ normalisée par $\sigma(h_z) = 1$. De la théorie des perturbations, il résulte que $z \longrightarrow h_z$ est également analytique, et nous noterons $z \longrightarrow h'_z$ sa dérivée. On a alors

$$\mathcal{L}'_z h_z + \mathcal{L}_z h'_z = \lambda'(z,0)h_z + \lambda(z,0)h'_z.$$

Observons que $\mathcal{L}'_z\phi = -\mathcal{L}_z(f\phi)$. Lorsque $z=\delta$, cette égalité devient

$$-\mathcal{L}_\delta(fh) + \mathcal{L}_\delta h'_\delta = \lambda'(\delta,0)h + h'_\delta.$$

En intégrant par rapport à la mesure de Patterson σ, et en utilisant la relation d'invariance $\sigma\mathcal{L}_\delta = \sigma$, on obtient $\lambda'(\delta,0) = -\sigma(fh) = -\nu(f)$ où ν est la probabilité T-invariante introduite dans la Section 1.5. Or $f = \log(T')$ et (une puissance de) T est strictement dilatante sur Λ^0. Par conséquent, $\nu(f) > 0$ et $\lambda'(\delta,0)$ est non-nul. Ainsi, δ est zéro simple de $1-\lambda(.\,,0)$, et par analyticité, il est isolé.

Par continuité, pour v suffisamment proche de 0, la fonction $1-\lambda(.,v)$ est proche de $1-\lambda(.\,,0)$ et satisfait aux hypothèses du théorème de Rouché [48]. Par conséquent, elle admet également un zéro simple et isolé. Le lemme en résulte. □

Le théorème suivant décrit le comportement de $z(v)$ lorsque v est proche de 0. Il y a une différence essentielle suivant les coordonnées “paraboliques” ou “hyperboliques” de v et nous poserons donc :

$$\text{si } v = (v_a)_{a\in\mathcal{A}} \in \mathbf{T}^d \quad v = v_p + v_q \quad \text{avec } v_p = (v_a)_{a\in\mathcal{P}} \in \mathbf{T}^p \text{ et } v_q = (v_a)_{a\in\mathcal{Q}} \in \mathbf{T}^q.$$

THÉORÈME 2.4. – *Soit $z(v)$ l'unique zéro de $1-\lambda(.,v)$ défini pour $v \in U_2$ au Lemme* 2.3.
(a) *si $\delta > 3/2$, $z(v) = \delta - Q_\delta(v) + \mathrm{o}(|v|^2)$:*
où Q_δ est une forme quadratique définie positive sur $\mathbf{R}^d$.
(b) *si $\delta \leqslant 3/2$, $z(v) = \delta - P_\delta(v_p)(1+\mathrm{o}(1)) + Q_\delta(v_q)(1+\mathrm{o}(1)) + R_\delta(v)$ où :*

(i)

$$P_\delta(v_p) = \begin{cases} \sum_{a\in\mathcal{P}} D_a |v_a|^{2\delta-1} & \textit{lorsque } \delta < 3/2 \\ -\sum_{a\in\mathcal{P}} D_a |v_a|^2 \log|v_a| & \textit{lorsque } \delta = 3/2 \end{cases}$$

pour des constantes $D_a > 0$,

(ii) *Q_δ est une forme quadratique définie positive sur $\mathbf{R}^q$,*

(iii) *$|R_\delta(v)| \leqslant C R_{\delta,1}(v_p)\, R_{\delta,2}(v_q)$ avec*

$$R_{\delta,1}(v_p) = \begin{cases} \sum_{a\in\mathcal{P}} |v_a|^{2\delta-1} & \textit{si } 1/2 < \delta < 1 \\ -\sum_{a\in\mathcal{P}} |v_a| \log|v_a| & \textit{si } \delta = 1 \\ \sum_{a\in\mathcal{P}} |v_a| & \textit{si } 1 < \delta \leqslant 3/2 \end{cases} \quad \textit{et} \quad R_{\delta,2}(v_q) = \sum_{a\in\mathcal{Q}} |v_a|.$$

Démonstration du Théorème 2.4. – Nous avons

$$\lambda(z,v) = \lambda(\delta,v) - \nu(f)(z-\delta)\big(1+\varepsilon(z,v)\big)$$

avec $\lim_{(z,v)\to(\delta,0)} \varepsilon(z,v) = 0$; en particulier

$$\lambda\big(z(v),v\big) = 1 = \lambda(\delta,v) - \nu(f)\big(z(v)-\delta\big)\big(1+\varepsilon(v)\big)$$

avec $\lim_{v\to 0} \varepsilon(v) = 0$ ce qui s'écrit encore

$$z(v) = \delta + \frac{\lambda(\delta,v)-1}{\nu(f)}\big(1+\varepsilon(v)\big).$$

Le comportement de la fonction $z(v)$ au voisinage de 0 est donc gouverné par celui de $\lambda(\delta,v)$.

Premier cas : $\delta > 3/2$. Dans ce cas, d'après le Lemme 2.1, $\forall a \in \mathcal{A}$, la série $\sum_{n\in\mathbf{Z}^*} n^2 p_\delta(a^n,.)$ est normalement convergente dans $L(\Lambda)$ et donc la fonction $v \mapsto \mathcal{L}_{\delta,v}$ est de classe au moins C^2. La fonction $v \to \lambda(\delta,v)$ l'est donc également et nous allons expliciter ses dérivées premières et secondes. Pour cela, notons h_v l'unique fonction propre de $\mathcal{L}_{\delta,v}$ associée à $\lambda(\delta,v)$ et telle que $\sigma(h_v) = 1$. Remarquons tout d'abord que l'égalité $\mathcal{L}_{\delta,-v}\overline{h_v} = \overline{\lambda(\delta,v)}\,\overline{h_v}$ implique $\overline{h_v} = h_{-v}$ et $\overline{\lambda(\delta,v)} = \lambda(\delta,-v)$. En particulier, les dérivées de $v \to h_v$ en $v=0$ sont imaginaires pures, et nous poserons $\partial_a h_v|_{v=0} = i g_a$ en notant ∂_a la dérivation partielle par rapport à v_a.

Nous avons $\lambda(\delta,v) = \sigma(\mathcal{L}_{\delta,v} h_v) = \sigma(e^{i\langle v|H(.)\rangle} h_v)$ car σ est invariante par $\mathcal{L}_\delta$. En dérivant cette égalité par rapport à v, nous obtenons :

(1) $$\partial_a\lambda(\delta,v) = i\sigma\big(e^{i\langle v|H(.)\rangle} H_a h_v\big) + \sigma\big(e^{i\langle v|H(.)\rangle}\partial_a h_v\big)$$

soit pour $v = 0$:

$$\partial_a\lambda(\delta,0) = i\sigma(H_a\, h) + i\sigma(g_a).$$

Puisque $\sigma(h_v)$ est identiquement égal à 1, $\sigma(g_a)$ est nul. D'autre part,

$$\sigma(H_a h) = \nu(H_a) = \sum_{n\in\mathbf{Z}^*} n\nu(\Lambda_{a^n}) = 0$$

puisque $\nu(\Lambda_{a^n}) = \nu(\Lambda_{a^{-n}})$ d'après le Lemme 1.5. Finalement :

$$\partial_a \lambda(\delta, 0) = 0.$$

Dérivons à présent l'égalité (1). On obtient de la même façon pour $v = 0$:

$$\begin{aligned}\partial_b\partial_a \lambda(\delta, 0) &= -\sigma(H_a H_b h + H_a g_b + H_b g_a)\\ &= -\nu(H_a H_b + H_a G_b + H_b G_g) \quad \text{où l'on a posé : } g_a = hG_a.\end{aligned}$$

Il nous reste à montrer que $(\partial_a\partial_b\lambda(\delta, 0))$ est définie négative. Admettons pour l'instant l'égalité :

$$\nu(G_b \circ T\, H_a) = \nu\big((G_b - G_b \circ T)\, G_a\big). \tag{2}$$

Elle nous permet d'écrire : $\sum \partial_a\partial_b\lambda(\delta, 0)v_a v_b = -\nu(\langle v|H + G - G \circ T\rangle^2)$. Or si pour un vecteur v, cette dernière expression était nulle, on aurait $\langle v|H + G - G \circ T\rangle = 0$ d$\nu(x)$-p.s. Les fonctions h, H et G étant continues sur Λ^0 on a $\langle v|H(x)\rangle = \langle v|G \circ T(x) - G(x)\rangle$ pour tout $x \in \Lambda^0$ et en particulier $\langle v|\sum_{l=1}^{k} H \circ T^l(x)\rangle = 0$ pour tous les points $x \in \Lambda^0$ tels que $T^k x = x$. Donc $v = 0$.

Montrons (2). Rappellons que $\sigma(\phi \circ T\psi) = \sigma(\phi\, \mathcal{L}_\delta\psi)$ pour toute fonction ϕ et ψ sur Λ^0 (c'est une conséquence de l'identité $\mathcal{L}_\delta((\phi \circ T)\psi) = \phi\mathcal{L}_\delta\psi$ et de l'invariance de σ). Or, en dérivant l'égalité $\mathcal{L}_{\delta,v}h_v = \lambda(\delta, v)h_v$, on obtient pour $v = 0$ la relation $\mathcal{L}_\delta(H_a h) = g_a - \mathcal{L}_\delta g_a$. On a donc

$$\nu(\phi \circ TH_a) = \sigma(\phi \circ TH_a h) = \sigma\big(\phi(g_a - \mathcal{L}_\delta g_a)\big) = \sigma\big((\phi - \phi \circ T)g_a\big) = \nu\big((\phi - \phi \circ T)G_a\big).$$

L'affirmation (2) en découle avec $\phi = G_b$. Ceci complète la démonstration du théorème lorsque $\delta > 3/2$.

2ème cas : $\delta \leqslant 3/2$.

(a) Soulignons tout d'abord que sous la condition $\delta \leqslant 3/2$ la série $\sum_{n\in\mathbf{Z}^*} n^2 p_\delta(a^n, .)$ diverge lorsque a est parabolique ; la fonction $v \mapsto \mathcal{L}_{\delta,v}$ n'est donc plus de classe C^2 sur $\mathbf{T}^d$. Néanmoins sa restriction à $\mathbf{T}^q = \{v = v_p + v_q / \ v_p = 0\}$ reste de classe C^∞. Comme dans l'étape précédente, nous avons donc $\lambda(\delta, v_q) = 1 - \frac{1}{2}Q_\delta(v_q) + \mathrm{o}(|v_q|^2)$ pour une forme quadratique Q_δ définie positive sur $\mathbf{R}^q$.

(b) Étudions maintenant la fonction $v_p \mapsto \lambda(\delta, v_p)$; les égalités $\sigma\mathcal{L}_\delta = \sigma$ et $\sigma(h_v) = \sigma(h) = 1$ nous donnent $\lambda(\delta, v_p) = \sigma(\mathcal{L}_{\delta,v_p}h) + \sigma((\mathcal{L}_{\delta,v_p} - \mathcal{L}_\delta)(h_{v_p} - h))$. De plus

$$\begin{aligned}\sigma(\mathcal{L}_{\delta,v_p}h) - 1 &= \nu\big(e^{i\langle v_p|H\rangle}\big) - 1\\ &= \sum_{a\in\mathcal{P}}\sum_{n\in\mathbf{Z}^*} \nu(\Lambda_{a^n})(e^{inv_a} - 1)\\ &= 2\sum_{a\in\mathcal{P}}\sum_{n\geqslant 1}(\cos nv_a - 1)\,\nu(\Lambda_{a^n}) \quad \text{car } \nu(\Lambda_{a^n}) = \nu(\Lambda_{a^{-n}}).\end{aligned}$$

Le calcul qui suit apparaît lorsque l'on recherche la régularité de la fonction caractéristique d'une probabilité symétrique sur $\mathbf{Z}$ dans le domaine d'attraction d'une loi stable, voir [53, p. 87]. Donnons-en les grandes lignes. Les estimées du Lemme 1.5. impliquent lorsque $\delta < 3/2$:

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 1}(\cos nv_a - 1)\nu(\Lambda_{a^n}) &= -C_a\sum_{n\geqslant 1}\frac{1 - \cos nv_a}{n^{2\delta}} + C_a\sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos nv_a - 1}{n^{2\delta}}\varepsilon_a(n)\\ &= -C_a|v_a|^{2\delta-1}\int_0^{+\infty}\frac{1 - \cos x}{x^{2\delta}}\,\mathrm{d}x\big(1 + \mathrm{o}(1)\big)\end{aligned}$$

et, lorsque $\delta = 3/2$

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\geqslant 1}(\cos nv_a - 1)\nu(\Lambda_{a^n})\\
&\quad = -C_a \sum_{n=1}^{[1/|v_a|]} \frac{1+(nv_a)^2/2-\cos nv_a}{n^3}\big(1+\varepsilon_a(n)\big)\\
&\qquad + \frac{C_a}{2}v_a^2 \sum_{n=1}^{[1/|v_a|]} \frac{1+\varepsilon_a(n)}{n} + 2C_a \sum_{n>[1/|v_a|]} \frac{1+\varepsilon_a(n)}{n^3}\\
&\quad = -2C_a|v_a|^2 \int_0^1 \frac{1+x^2/2-\cos x}{x^3}\,\mathrm{d}x\big(1+\mathrm{o}(1)\big)\\
&\qquad - \frac{C_a}{2}v_a^2\big(\log|v_a|\big)\big(1+\mathrm{o}(1)\big) + 2C_a v_a^2\big(1+\mathrm{o}(1)\big)\\
&\quad = -\frac{C_a}{2}v_a^2\log|v_a|\big(1+\mathrm{o}(1)\big).
\end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi le terme "parabolique" $P_\delta(v_p)$ annoncé dans le Théorème 2.4.

Afin de contrôler le terme résiduel $\sigma((\mathcal{L}_{\delta,v_p} - \mathcal{L}_\delta)(h_{v_p} - h))$, énonçons tout d'abord le lemme suivant dont la démonstration est donnée en fin de paragraphe :

LEMME 2.5. – *Il existe un voisinage V de* 0 *et une constante C telle que pour tout $v \in V$ on ait* $\|h_v - h\| \leqslant C\|\mathcal{L}_{\delta,v} - \mathcal{L}_\delta\|$.

Or,

$$(\mathcal{L}_{\delta,v_p} - \mathcal{L}_\delta)\phi(x) = \sum_{a\in\mathcal{P},\ n\in\mathbf{Z}^*} (e^{inv_a} - 1)p_\delta(a^n, x)\,\phi(a^n.x).$$

Par conséquent

$$\|\mathcal{L}_{\delta,v_p} - \mathcal{L}_\delta\| \leqslant \sum_{a\in\mathcal{P},\ n\in\mathbf{Z}^*} |e^{inv_a} - 1|\big\|p_\delta(a^n,.)\big\| \leqslant C \sum_{a\in\mathcal{P},\ n\in\mathbf{Z}^*} \frac{|e^{inv_a} - 1|}{n^{2\delta}}.$$

Un calcul analogue au précédent nous donne alors

$$\|\mathcal{L}_{\delta,v_p} - \mathcal{L}_\delta\| \leqslant CR_\delta(v_p) \quad \text{où} \quad R_\delta(v_p) = \begin{cases} \sum_{a\in\mathcal{P}} |v_a|^{2\delta-1} & \text{si } 1/2<\delta<1\\ \sum_{a\in\mathcal{P}} -|v_a|\log|v_a| & \text{si } \delta = 1\\ \sum_{a\in\mathcal{P}} |v_a| & \text{si } \delta>1. \end{cases}$$

Comme $R_\delta(v_p)^2 = \mathrm{o}(P_\delta(v_p))$, on obtient $\lambda(\delta, v_p) = 1 + P_\delta(v_p)(1+\varepsilon(v_p))$.

(c) Pour conclure, écrivons

$$\lambda(\delta, v) - 1 = \lambda(\delta, v_p) - 1 + \lambda(\delta, v_q) - 1 + A_\delta(v)$$

avec $A_\delta(v) = \lambda(\delta, v) - \lambda(\delta, v_p) - \lambda(\delta, v_q) + 1$. En utilisant l'égalité $\mathcal{L}_{\delta,v} - \mathcal{L}_{\delta,v_q} = \mathcal{L}_{\delta,v_p} - \mathcal{L}_\delta$ on obtient

$$A_\delta(v) = \sigma\big((\mathcal{L}_{\delta,v} - \mathcal{L}_\delta)(h_v - h_{v_q})\big) + \sigma\big((\mathcal{L}_{\delta,v} - \mathcal{L}_{\delta,v_q})(h_{v_q} - h)\big) - \sigma\big((\mathcal{L}_{\delta,v_p} - \mathcal{L}_\delta)(h_{v_p} - h)\big).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}|A_\delta(v)| &\leqslant \|\mathcal{L}_{\delta,v}-\mathcal{L}_\delta\|\|h_v-h_{v_q}\|+\|\mathcal{L}_{\delta,v}-\mathcal{L}_{\delta,v_q}\|\|h_{v_q}-h\|\\&\quad+\|\mathcal{L}_{\delta,v_p}-\mathcal{L}_\delta\|\|h_{v_p}-h\|\\&\leqslant \mathit{cste}\big(\|\mathcal{L}_{\delta,v_p}-\mathcal{L}_\delta\|^2+\|\mathcal{L}_{\delta,v_p}-\mathcal{L}_\delta\|\|\mathcal{L}_{\delta,v_q}-\mathcal{L}_\delta\|\big)\end{aligned}$$

d'où la majoration souhaitée.

Démonstration du Lemme 2.5. – Rappelons que 1 est valeur propre simple et isolée de $\mathcal{L}_\delta$ et que la fonction $v\mapsto\mathcal{L}_{\delta,v}$ est continue sur $\mathbf{T}^d$. Il existe donc dans $\mathbf{C}$ un disque ouvert D centré en 1 et un ouvert relativement compact $O\subset\mathbf{C}-D$ tels que pour v assez proche de 0 l'ouvert D contienne $\lambda(\delta,v)$ et que le reste du spectre de $\mathcal{L}_{\delta,v}$ soit inclus dans O. Notons $\pi_{\delta,v}$ le projecteur de $L(\Lambda)$ sur $\mathbf{C}h_v$ tel que $\mathcal{L}_{\delta,v}\pi_{\delta,v}=\pi_{\delta,v}\mathcal{L}_{\delta,v}=\lambda(\delta,v)\,\pi_{\delta,v}$; nous avons

$$\pi_{\delta,v}=\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D}(ZI-\mathcal{L}_{\delta,v})^{-1}\,\mathrm{d}Z$$

et donc $\|\pi_{\delta,v}-\pi_\delta\|\leqslant \mathit{cste}\|\mathcal{L}_{\delta,v}-\mathcal{L}_\delta\|$. Par ailleurs on a $\pi_{\delta,v}(h)=C_vh_v$ avec $C_v=\sigma(\pi_{\delta,v}(h))$; comme $C_0=1$ on a $C_v\neq0$ lorsque v est proche de 0. Notons que

$$|C_v-1|\leqslant\big|\sigma(\pi_{\delta,v}(h))-\sigma(h)\big|\leqslant\|\sigma\|\|\pi_{\delta,v}-\pi_\delta\|\|h\|$$

si bien que

$$\|h-h_v\|\leqslant\|h\||1-1/C_v|+\|\pi_{\delta,v}-\pi_\delta\|/|C_v|\leqslant \mathit{cste}\|\pi_{\delta,v}-\pi_\delta\|\leqslant \mathit{cste}\|\mathcal{L}_{\delta,v}-\mathcal{L}_\delta\|.$$

Ceci complète la démonstration du Lemme 2.5, ainsi que celle du Théorème 2.4. □

2.4. Homogénéité de $\delta-z(v)$ sous l'action d'une famille de dilatations de $\mathbf{R}^d$

Le Théorème 2.4 sera utilisé au travers des deux corollaires qui suivent concernant le comportement de $\delta-z(v)$ lorsque v est proche de 0. Le premier est simple et consiste à comparer $\delta-z(v)$ avec la partie principale $U(v)$ de son développement. Notons que $U(v)=Q_\delta(v)$ est quadratique si $\delta>3/2$, $U(v)=P_\delta(v_p)+Q_\delta(v_q)$ est une somme de termes homogènes si $\delta<3/2$, et

$$U(v)=-\sum D_a|v_a|^2\log|v_a|+Q_\delta(v_q)$$

si $\delta=3/2$.

COROLLAIRE 2.6. – *Il existe une constante $C>0$ et un voisinage de 0 dans le tore $\mathbf{T}^d$ sur lequel $\delta-\mathrm{Re}(z(v))>CU(v)$.*

Démonstration. – C'est évident si $\delta>3/2$. Lorsque $\delta<3/2$, on utilise l'inégalité de Hölder pour majorer le terme résiduel $R_\delta(v)$ par $R'(v_p)^\alpha+R''(v_q)^\beta$ (avec $1/\alpha+1/\beta=1$) où $\alpha<2$ est choisi suffisamment proche de 2 pour que $R'(v_p)^\alpha$ soit négligeable devant $P_\delta(v_p)$. Comme $R''(v_q)^\beta$ est alors négligeable devant $Q_\delta(v_q)$, on peut, à une constante près, minorer $\delta-\mathrm{Re}(z(v))$ par $P_\delta(v_p)+Q_\delta(v_q)$ pour v suffisamment proche de 0. Pour $\delta=3/2$, le terme résiduel est majoré par une somme de termes de la forme $|v_a||v_b|$ pour $a\in\mathcal{P},b\in\mathcal{Q}$. Chacun d'entre eux est petit devant $|v_a|^2|\log v_a|+|v_b|^2$. En effet, si $|v_b|\leqslant|v_a|\sqrt{|\log|v_a||}$, alors

$$|v_a||v_b|\leqslant|v_a|^2\sqrt{|\log|v_a||}=\mathrm{o}\big(|v_a|^2|\log|v_a||\big),$$

tandis que si $|v_b| \geqslant |v_a|\sqrt{|\log|v_a||}$, alors

$$|v_a||v_b| \leqslant |v_b|^2/\sqrt{|\log|v_a||} \leqslant \varepsilon|v_b|^2.$$

Ceci complète la démonstration du corollaire. □

La deuxième conséquence est une propriété *d'homogénéité* de $\delta - z(v)$ pour l'action d'une famille $(k_r)_{r>1}$ de transformations sur $\mathbf{R}^d$. Notons que lorsque $\delta \neq 3/2$, cette famille de transformations est un semi-groupe et respecte l'homogénéité du terme principal $U(v)$. Par contre, lorsque $\delta = 3/2$, ce n'est plus un semi-groupe, et elle fait apparaître un terme *quadratique* qui remplace $U(v)$. Pour décrire cette propriété, on identifie un voisinage de 0 dans $\mathbf{T}^d$ à un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^d$ de sorte que $v \to z(v)$ est définie maintenant au voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^d$.

COROLLAIRE 2.7. – *Pour $r > 1$, notons k_r la transformation de $\mathbf{R}^d$ définie par :*

$$k_r(v_p, v_q) = \left(\frac{v_p}{d(r)}, \frac{v_q}{\sqrt{r}}\right) \quad \textit{avec} \quad d(r) = \begin{cases} r^{\frac{1}{2\delta-1}} & \textit{si } \delta < 3/2 \\ \sqrt{r\log r} & \textit{si } \delta = 3/2 \\ \sqrt{r} & \textit{si } \delta > 3/2. \end{cases}$$

Pour tout $v \in \mathbf{R}^d$, $r\,(\delta - z(k_r(v))$ converge lorsque $r \to +\infty$ vers une limite $V(v)$ non-nulle qui coï ncide avec $U(v)$ si $\delta \neq 3/2$ et qui vaut : $V(v) = \sum_{a\in\mathcal{P}} D_a|v_a|^2/2 + Q_\delta(v_q)$ *si $\delta = 3/2$.*

La démonstration est une simple vérification.

Signalons dès à présent que l'inverse du jacobien de k_r fournira précisément le terme $P(L)$ dans l'asymptotique du Théorème A.

3. La fonction Zêta dynamique

L'objet de cette section est l'étude de la régularité de la fonction Z définie pour $z \in \mathbf{C}$ et $v \in \mathbf{T}^d$ par

$$Z(z,v) := \sum_{\wp\in\mathcal{P}_{er}} e^{-zl(\wp)+i\langle v|[\wp]\rangle}.$$

Dans le cas d'une variété hyperbolique compacte, la fonction Zêta : $(z,v) \to \zeta_v(z) := \exp Z(z,v)$ est une fonction méromorphe en $z \in \mathbf{C}$ et analytique en $v \in \mathbf{T}^d$ [43]. Ici, ce n'est plus le cas ; cependant, nous allons montrer que, comme fonction de z, elle reste méromorphe sur un ouvert contenant $\{z; \mathrm{Re}(z) \geqslant \delta\}$, et possède un pôle en $z(v)$ pour chaque valeur de v proche de 0. De ce comportement, nous pourrons déduire dans la section suivante l'asymptotique précis du nombre de géodésiques fermées dans une classe d'homologie fixée.

Observons tout d'abord que grâce à la représentation symbolique du flot géodésique, nous pouvons écrire

$$Z(z,v) = Z_1(z,v) + \sum_{k\geqslant 2} \frac{Z_k(z,v)}{k}$$

avec :

$$Z_k(z,v) = \sum_{x\in\Lambda^0,\ T^kx=x} e^{-zS_kf(x)+i\langle v|S_kH(x)\rangle}.$$

si $k \geqslant 2$. Le terme $Z_1(z,v)$ prend en compte les géodésiques fermées associées aux générateurs hyperboliques de Γ ; le nombre de telles géodésiques croit au plus polynomialement avec la longueur, et dans la suite, nous négligerons $Z_1(z,v)$.

3.1.

Chacun des termes Z_k est une série et il nous faut dans un premier temps décrire son domaine de convergence :

LEMME 3.1. – *La série*

$$Z_k(z,v) = \sum_{x \in \Lambda^0,\ T^k x = x} e^{-zS_k f(x) + i\langle v | S_k H(x)\rangle}$$

est absolument convergente lorsque $\mathrm{Re}(z) > 1/2$ *pour tout* $v \in \mathbf{T}^d$.

Afin de prouver ce lemme, nous avons besoin de quelques notations et remarques préliminaires. Soit $k \geqslant 2$ un entier fixé, et $\Gamma(k)$ l'ensemble des mots de Γ de longueur k. Pour $a \in \mathcal{A}$, nous noterons $\Gamma(k,a)$ l'ensemble des mots de longueur k dont la dernière lettre coïncide avec une puissance non-nulle de a. Si $\gamma \in \Gamma(k,a)$, posons :

$$\Lambda_\gamma := \gamma \Lambda_{a^0}.$$

Alors, la famille $(\Lambda_\gamma;\ \gamma \in \Gamma(k))$ forme une partition de Λ^0 en sous-ensembles d'adhérences deux à deux disjointes. Rappelons que nous avons défini (cf. Section 2.2) :

$$\text{pour } \gamma \in \Gamma(k,a) \quad p_{z,v}(\gamma,.) = e^{-zb(\gamma,.) + i\langle v,[\gamma]\rangle}\, \mathbf{1}_{\Lambda_{a^0}}$$

de sorte que

$$\mathcal{L}^k_{z,v}\phi(x) = \sum_{a \in \mathcal{A}} \mathbf{1}_{\Lambda_{a^0}}(x) \sum_{\gamma \in \Gamma(k,a)} p_{z,v}(\gamma,x)\phi(\gamma.x)$$

pour toute fonction continue ϕ sur Λ. En particulier, si $\gamma \in \Gamma(k,a)$, nous avons :

$$\mathcal{L}^k_{z,v}\mathbf{1}_{\Lambda_\gamma} = p_{z,v}(\gamma,.).$$

Pour chaque élément $\gamma = a_1^{n_1} \cdots a^{n_k}$ de $\Gamma(k,a)$, on a l'alternative suivante :
- soit $a_1 \neq a$, alors Λ_γ contient le point fixe attracteur x_γ de γ. Dans ce cas $T^k x_\gamma = x_\gamma$, et x_γ appartient également à Λ_{a^0},
- soit $a_1 = a$ et Λ_γ ne contient pas de point fixe par T^k.

Fixons un point y_a dans chaque sous-ensemble Λ_{a^0} et posons $x'_\gamma = x_\gamma = \gamma.x_\gamma$ dans le premier cas, et $x'_\gamma = \gamma.y_a$ dans le deuxième cas. Notons que l'on a toujours $x'_\gamma \in \Lambda_\gamma$.

Démonstration du Lemme 3.1. – L'observation-clef, due à Haydn pour des sous-décalages de type fini [24], est la suivante : $\mathcal{L}^k_{z,v}\mathbf{1}_{\Lambda_\gamma}(x'_\gamma) = 0$ dès que $T^k x'_\gamma \neq x'_\gamma$ ce qui permet d'écrire :

$$Z_k(z,v) = \sum_{\gamma \in \Gamma(k)} \mathcal{L}^k_{z,v}\mathbf{1}_{\Lambda_\gamma}(x'_\gamma).$$

Par conséquent,

$$\left|Z_k(z,v)\right| \leqslant \sum_{\gamma \in \Gamma(k)} \left|\mathcal{L}^k_{z,v}\mathbf{1}_{\Lambda_\gamma}\right|_\infty \leqslant \sum_{\gamma \in \Gamma(k)} \left|p_{\mathrm{Re}(z),0}(\gamma,.)\right|_\infty$$

et la série Z_k converge pour tout complexe z avec $\mathrm{Re}(z) > 1/2$, d'après les estimées sur $|p_{\mathrm{Re}(z),0}(\gamma,.)|_\infty$ du Lemme 2.1. $\square$

3.2. La formule des traces de Haydn

Nous allons maintenant comparer chacun des termes Z_k avec la valeur propre de plus haut module du k-ième itéré de l'opérateur de transfert :

THÉORÈME 3.2. –
(a) *Il existe un nombre $\rho < 1$ et un voisinage U de $(\delta, 0)$ dans $\mathbf{C} \times \mathbf{T}^d$ sur lequel*
  (i) *si $d \geqslant 3$ alors $|Z_k(z,v) - \lambda(z,v)^k| \leqslant C\rho^k$,*
  (ii) *si $d = 2$ alors $|Z_k(z,v) - \lambda(z,v)^k - \lambda^-(z,v)^k| \leqslant C\rho^k$.*
(b) *Pour tout réel $A > 0$, il existe un nombre $\rho_2 < 1$ tel que $|Z_k(z,v)| \leqslant C\rho_2^k$ pour tout (z,v) en dehors de U avec $\mathrm{Re}(z) \geqslant \delta$ et $|\mathrm{Im}(z)| \leqslant A$.*

La démonstration du Théorème 3.2 suit de près l'approche de Haydn ([24],[42, Chapter 10]). Cependant, en certains endroits, l'existence d'une partition dénombrable au lieu d'une partition finie provoque des difficultés nouvelles. Pour les lever, nous utiliserons pleinement le fait que la transformation T envoie la partition $(\Lambda_{a^n},\ a \in A,\ n \in \mathbf{Z}^*)$ sur la réunion *finie* $\bigcup_{a\in\mathcal{A}} \Lambda_{a^0}$.

(a) *Le terme principal pour (z,v) proche de $(\delta,0)$.* On fixe un voisinage de $(\delta,0)$ dans $\mathbf{C}\times\mathbf{T}^d$ comme dans la Proposition 2.2 et (z,v) dans ce voisinage. Dans ce qui suit, nous supposons $d \geqslant 3$, la démonstration étant similaire pour $d = 2$. Alors $\mathcal{L}_{z,v}$ a une seule valeur propre $\lambda(z,v)$ de module maximal. De plus, le projecteur spectral $\pi_{z,v}$ sur le sous-espace propre associé à $\lambda(z,v)$ opère de la façon suivante :

$$\pi_{z,v}(\phi) = \sigma_{z,v}(\phi)\, h_{z,v}$$

où $h_{z,v}$ est l'unique fonction propre pour la valeur propre $\lambda(z,v)$ telle que $\sigma(h_{z,v}) = 1$, et $\sigma_{z,v}$ est une forme linéaire continue sur $L(\Lambda)$ vérifiant $\sigma_{z,v}(h_{z,v}) = 1$. Nous notons N le projecteur $N = \mathrm{Id} - \pi_{z,v}$. D'après l'expression obtenue pour Z_k dans la démonstration du Lemme 3.1, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} Z_k(z,v) &= \sum_{\gamma\in\Gamma(k)} \pi_{z,v}\mathcal{L}_{z,v}^k \mathbf{1}_{\Lambda_\gamma}(x'_\gamma) + \sum_{\gamma\in\Gamma(k)} N\mathcal{L}_{z,v}^k \mathbf{1}_{\Lambda_\gamma}(x'_\gamma) \\ &:= I(z,v) + II(z,v). \end{aligned}$$

Le terme principal $I(z,v)$ s'écrit encore

$$I(z,v) = \sum_{\gamma\in\Gamma(k)} \sigma_{z,v}\big(p_{z,v}(\gamma,.)\big) h_{z,v}(x'_\gamma) = \sigma_{z,v}\left(\sum_{\gamma\in\Gamma(k)} h_{z,v}(x'_\gamma) p_{z,v}(\gamma,.)\right)$$

puisque la série $\Phi = \sum_{\gamma\in\Gamma(k)} h_{z,v}(x'_\gamma)\, p_{z,v}(\gamma,.)$ est normalement convergente dans $L(\Lambda)$. Nous allons comparer Φ à $\mathcal{L}_{z,v}^k h_{z,v}$, et pour cela estimer la norme de $\Phi - \mathcal{L}_{z,v}^k h_{z,v}$. Tout d'abord,

$$\begin{aligned} \big|\Phi(x) - \mathcal{L}_{z,v}^k h_{z,v}(x)\big| &\leqslant \sum_{a\in\mathcal{A}} \mathbf{1}_{\Lambda_{a^0}}(x) \sum_{\gamma\in\Gamma(k,a)} \big|h_{z,v}(x'_\gamma) - h_{z,v}(\gamma.x)\big|\, \big|p_{z,v}(\gamma,x)\big| \\ &\leqslant Cr^k[h_{z,v}] \sum_{\gamma\in\Gamma(k)} \big|p_{\mathrm{Re}(z),0}(\gamma,.)\big|_\infty \end{aligned}$$

puisque x'_γ et $\gamma.x$ appartiennent tous deux à Λ_γ. Par conséquent,

$$\big|\Phi - \mathcal{L}_{z,v}^k h_{z,v}\big|_\infty \leqslant Cr^k \big|\mathcal{L}_{\mathrm{Re}(z)}^k 1\big|_\infty,$$

ce qui est inférieur à $C\rho^k$ pour tout réel $\rho > r\rho_\infty(z)$. Si Re(z) est suffisamment proche de δ, ρ peut être pris strictement inférieur à 1.

De plus, l'égalité :

$$\begin{aligned}&\big(\Phi(x) - \mathcal{L}_{z,v}^k h_{z,v}(x)\big) - \big(\Phi(y) - \mathcal{L}_{z,v}^k h_{z,v}(y)\big)\\ &\quad= \sum_{a\in\mathcal{A}} \mathbf{1}_{\Lambda_{a^0}}(x) \sum_{\gamma\in\Gamma(k,a)} \big(h_{z,v}(x'_\gamma) - h_{z,v}(\gamma.x)\big)\big(p_{z,v}(\gamma,x) - p_{z,v}(\gamma,y)\big)\\ &\qquad+ \big(h_{z,v}(\gamma.y) - h_{z,v}(\gamma.x)\big)p_{z,v}(\gamma,y)\end{aligned}$$

montre que le coefficient de Lipschitz de $\Phi - \mathcal{L}_{z,v}^k h_{z,v}$ est majoré par

$$C'r^k[h_{z,v}] \sum_{\gamma\in\Gamma(k)} \big\|p_{z,v}(\gamma,.)\big\|.$$

Or, comme dans la démonstration du Lemme 2.1, on trouve une constante $C(z)$ telle que $\|p_{z,v}(\gamma,.)\| \leqslant C(z)|p_{\mathrm{Re}(z),0}(\gamma,.)|_\infty$, de sorte que pour (z,v) proche de $(\delta,0)$ le coefficient de Lipschitz de $\Phi - \mathcal{L}_{z,v}^k h_{z,v}$ est encore majoré par $Cr^k|\mathcal{L}_{\mathrm{Re}(z)}^k 1|_\infty \leqslant C\rho^k$ pour une constante C indépendante de z. Finalement, comme $\sigma_{z,v}(\mathcal{L}_{z,v}^k h_{z,v}) = \lambda^k(z,v)\,\sigma_{z,v}(h_{z,v}) = \lambda^k(z,v)$, nous trouvons :

$$\big|I(z,v) - \lambda^k(z,v)\big| \leqslant C\rho^k$$

pour tout (z,v) proche de $(\delta,0)$.

(b) *Le terme résiduel* $II(z,v)$ *si* (z,v) *est proche de* $(\delta,0)$. Pour étudier

$$II(z,v) = \sum_{\gamma\in\Gamma(k)} N\mathcal{L}_{z,v}^k \mathbf{1}_{\Lambda_\gamma}(x'_\gamma)$$

lorsque (z,v) est proche de $(\delta,0)$, nous introduisons les fonctions X_γ définies par :

$$X_\gamma = e^{zb(\gamma,y_a)-i\langle v|[\gamma]\rangle}\mathcal{L}_{z,v}^k \mathbf{1}_{\Lambda_\gamma} = e^{zb(\gamma,y_a)-zb(\gamma,.)}\mathbf{1}_{\Lambda_{a^0}} \quad \text{si } \gamma\in\Gamma(k,a).$$

Comme dans le Lemme 2.1, on vérifie que $\|X_\gamma\| \leqslant D$ pour une constante D indépendante de k,γ et z. Nous avons donc

$$II(z,v) = \sum_{a\in A}\sum_{\gamma\in\Gamma(k,a)} e^{-zb(\gamma,y_a)+i\langle v|[\gamma]\rangle} NX_\gamma(x'_\gamma) = II_1(z,v) + II_2(z,v)$$

avec :

$$II_1(z,v) = \sum_{a\in A}\sum_{\gamma\in\Gamma(k,a)} e^{-zb(\gamma,y_a)+i\langle v|[\gamma]\rangle}\big(NX_\gamma(x'_\gamma) - NX_\gamma(\gamma.y_a)\big).$$

Alors :

$$\big|II_1(z,v)\big| \leqslant D\|N\|\,r^k \sum_{a\in\mathcal{A}}\sum_{\gamma\in\Gamma(k,a)} e^{-\mathrm{Re}(z)b(\gamma,y_a)} \leqslant D\|N\|\,r^k \sum_{a\in\mathcal{A}}\big|\mathcal{L}_{\mathrm{Re}\,z}^k \mathbf{1}(y_a)\big|$$

et par conséquent, $|II_1(z,v)|$ est inférieur à $r^k|\mathcal{L}_{\mathrm{Re}(z)}^k\mathbf{1}|_\infty \leqslant \rho^k$ à une constante près.

Nous allons majorer

$$II_2(z,v) = \sum_{a\in\mathcal{A}}\sum_{\gamma\in\Gamma(k,a)} e^{-zb(\gamma,y_a)+i\langle v|[\gamma]\rangle} NX_\gamma(\gamma.y_a)$$

par $C(k+1)\rho^k$.

Pour $\gamma = a_1^{n_1}\cdots a_k^{n_k}$ et j variant de 0 à k, on pose $\gamma_0 = \gamma^k = e$, $\gamma^0 = \gamma_k = \gamma$, puis pour $1 \leqslant j < k$, $\gamma_j = a_1^{n_1}\cdots a_j^{n_j}$ et $\gamma^j = a_{j+1}^{n_{j+1}}\cdots a_k^{n_k}$. On considère les fonctions X_{γ^j} définies par :

$$X_{\gamma^j} = e^{zb(\gamma^j, y_a) - zb(\gamma^j, .)}\mathbf{1}_{\Lambda_{a^0}} \quad \text{si } \gamma \in \Gamma(k,a).$$

On a : $X_{\gamma^0} = X_\gamma$, $X_{\gamma^k} = \mathbf{1}$ et pour tout $0 \leqslant j \leqslant k$, $\|X_{\gamma^j}\| \leqslant D$. De plus, la relation :

$$X_{\gamma^{j-1}}(x) = \exp\bigl(zb\bigl(a_j^{n_j}, \gamma^j.y_a\bigr) - zb\bigl(a_j^{n_j}, \gamma^j.x\bigr)\bigr)X_{\gamma^j}(x)$$

permet de vérifier que la norme de la fonction $Y_{\gamma^j} := X_{\gamma^{j-1}} - X_{\gamma^j}$ est, à une constante près, majorée par r^{k-j}, puisque les points $\gamma^j.x$ et $\gamma^j.y_a$ sont à distance $\leqslant r^{k-j}$.

En écrivant : $X_\gamma = \sum_{j=1}^{k+1} Y_{\gamma^j}$ (avec $Y_{\gamma^{k+1}} = \mathbf{1}$), on obtient :

$$II_2(z,v) = \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{a\in\mathcal{A}}\sum_{\gamma\in\Gamma(k,a)} e^{-zb(\gamma,y_a)+i\langle v|[\gamma]\rangle}\, NY_{\gamma^j}(\gamma.y_a).$$

Or :

$$\begin{aligned}
&\sum_{\gamma\in\Gamma(k,a)} e^{-zb(\gamma,y_a)+i\langle v|[\gamma]\rangle} NY_{\gamma^j}(\gamma.y_a)\\
&\quad = \sum_{\gamma_j\ \gamma^j} e^{-zb(\gamma_j,\gamma^j.y_a)-zb(\gamma^j,y_a)+i\langle v|[\gamma_j]\rangle+i\langle v|[\gamma^j]\rangle} NY_{\gamma^j}(\gamma_j.\gamma^j.y_a)\\
&\quad = \sum_{\gamma^j\in\Gamma(k-j,a)} e^{-zb(\gamma^j,y_a)+i\langle v|[\gamma^j]\rangle}\bigl(\mathcal{L}_{z,v}^j NY_{\gamma^j}\bigr)(\gamma^j.y_a).
\end{aligned}$$

On utilise maintenant que l'opérateur $\mathcal{L}_{z,v}^j N = N\mathcal{L}_{z,v}^j$ est de rayon spectral inférieur ou égal à $\rho_0 < 1$ lorsque (z,v) est proche de $(\delta,0)$ (voir Proposition 2.2), et par conséquent, $\|\mathcal{L}_{z,v}^j NY_{\gamma^j}\| \leqslant C\rho^j r^{k-j}$ dès que $\rho > \rho_0$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\Biggl|\sum_{\gamma\in\Gamma(k,a)} e^{-zb(\gamma,y_a)+i\langle v|[\gamma]\rangle} NY_{\gamma^j}(\gamma.y_a)\Biggr| &\leqslant \rho^j r^{k-j}\sum_{\gamma^j\in\Gamma(k-j,a)} e^{-\mathrm{Re}(z)b(\gamma^j,y_a)}\\
&\leqslant \rho^j r^{k-j}\bigl|\mathcal{L}_{\mathrm{Re}(z)}^{k-j}\mathbf{1}\bigr|_\infty.
\end{aligned}$$

Finalement, dès que $\rho > \max(r\rho_\infty(\mathrm{Re}(z)), \rho_0)$, on obtient $|II_2(z,v)| \leqslant Cd(k+1)\rho^k$.

(c) *Le comportement de* $Z_k(z,v)$ *pour* (z,v) *loin de* $(\delta,0)$. Fixons un réel $A > 0$ arbitraire. D'après la Proposition 2.2, il existe un réel $\rho_1 < 1$ qui majore le rayon spectral de $\mathcal{L}_{z,v}$ lorsque (z,v) n'appartient pas au voisinage de $(\delta,0)$ mais satisfait aux conditions $\mathrm{Re}(z) \geqslant \delta$ et $|\mathrm{Im}(z)| \leqslant A$. L'estimée de Z_k dans ce cas est alors identique à celle du terme résiduel $II(z,v)$ et donne la majoration annoncée avec $\rho_2 = \max(r,\rho_1)$. Ceci complète la démonstration du Théorème 3.2.

3.3. Propriétés de la fonction Zêta

Nous pouvons maintenant décrire les propriétés de la fonction $Z = \sum_k Z_k/k$ au voisinage de son axe de convergence. En effet, pour (z,v) loin de $(\delta,0)$ et $\mathrm{Re}(z) \geqslant \delta$, la série définissant Z converge normalement. Par contre, au voisinage de $(\delta,0)$, Z possède une singularité de l'ordre de $-\log(1-\lambda(z,v))$ (notons que dans le cas $d=2$, la série $\sum_k \lambda^-(z,v)^k/k$ converge pour $(z,v)\neq(\delta,0)$ vers $-\log(1-\lambda^-(z,v))$ et se prolonge en une fonction régulière en $(\delta,0)$ puisque $\lambda^-(\delta,0)=-1$). En utilisant le fait que $\lambda(z,v)<1$ lorsque $(z,v)\neq(\delta,0)$ et $\mathrm{Re}(z)\geqslant\delta$ ainsi que la factorisation $1-\lambda(z,v)=(z-z(v))Q(z,v)$ du Lemme 2.3, nous obtenons le :

COROLLAIRE 3.3. – *La série $Z(z,v)=\sum_{k\geqslant 2}\frac{1}{k}Z_k(z,v)$ est absolument convergente dès que $\mathrm{Re}(z)>\delta$. De plus, pour tout $(t,v)\neq(0,0)$, la limite de $Z(s+it,v)$ lorsque $s\searrow\delta$ existe, et définit une fonction $Z(\delta+it,v)$ telle que :*

(a) *pour (t,v) proche de $(0,0)$, l'application $(t,v)\to Z(\delta+it,v)+\log(\delta+it-z(v))$ se prolonge en $(0,0)$ en une fonction continue en v et analytique en t uniformément par rapport à v.*

(b) *pour (t,v) en dehors d'un voisinage de $(0,0)$, la fonction $(t,v)\to Z(\delta+it,v)$ est continue en v et analytique en t uniformément par rapport à v.*

Terminons cette section avec un résultat sur l'intégrabilité de Z en $(\delta,0)$ qui nous sera utile dans la suite :

LEMME 3.4. – *Les fonctions*

$$(t,v)\to\frac{1}{|\delta+it-z(v)|}\quad \textit{et}\quad (t,v)\to Z(\delta+it,v)$$

sont intégrables au voisinage de $(0,0)$ dans $\mathbf{R}\times\mathbf{T}^d$.

Démonstration. – Vérifions tout d'abord que $1/|it+U(v)|$ est intégrable au voisinage de $(0,0)$ où $U(v)$ est le terme principal dans le développement de $\delta-z(v)$ au voisinage de 0 ($U(v)=Q(v)$ si $\delta>3/2$ et $U(v)=P_\delta(v_p)+Q_\delta(v_q)$ si $1/2<\delta\leqslant 3/2$, voir 2.4). Pour cela, notons que pour toutes les valeurs de δ, $U(v)$ est réel et minoré par $C|v|^2$. Comme $|it+U(v)|\geqslant U(v)\geqslant C|v|^2$ si v est proche de 0, la fonction $1/|it+U(v)|$ est intégrable en $(0,0)$ dès que $d\geqslant 3$. Si $d=2$, on choisit α avec $0<\alpha<1$ et on minore $|it+U(v)|$ par $C|t|^\alpha|v|^{2-2\alpha}$, dont l'inverse est intégrable en $(0,0)$ sur $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^2$.

Grâce au Lemme 2.6, nous pouvons comparer $\delta-\mathrm{Re}(z(v))$ à son terme principal, ce qui permet de minorer $|it+\delta-z(v)|$ par $U(v)$ en dimension $d\geqslant 3$ et par $C|t-\mathrm{Im}\,z(v)|^\alpha|U(v)|^{1-\alpha}$ en dimension 2. Le lemme suit. □

4. Démonstrations des Théorèmes A et B

Dans cette section, nous considérons comme précédemment un groupe de Schottky Γ opérant sur l'espace hyperbolique $\mathbf{H}^{N+1}$, et nous nous intéressons au nombre et à la répartition des géodésiques fermées de la variété $M=\Gamma/\mathbf{H}^{N+1}$. Nous donnons ainsi la démonstration des Théorèmes A et B énoncés dans l'introduction.

Pour prouver le Théorème A, il nous faut estimer lorsque L est grand la quantité

$$N_c(L)=\sum_{\wp\in\mathcal{P}_{er}}\mathbf{1}_{l(\wp)\leqslant L}\,\mathbf{1}_{[\wp]=c}.$$

Nous allons voir que sa transformée de Heavyside

$$(z,v)\to z\int\limits_{\mathbf{R}\times\mathbf{Z}^d}e^{-zL+i\langle v|c\rangle}N_c(L)\,\mathrm{d}L\,\mathrm{d}c$$

n'est autre que la fonction Z étudiée précédemment. Dans un cadre classique, l'utilisation du théorème taubérien de Delange (cf. [42, p. 195]) permet de déduire le comportement asymptotique de $N_c(L)$ lorsque $L \to +\infty$ à partir de la connaissance de la régularité de Z. Comme il n'existe à notre connaissance pas de théorème taubérien adapté au type de singularités rencontrées ici, nous introduisons une famille de *mesures de comptage* $(M^s(L,.),\ L>0)$ et adaptons l'approche de [7], afin de déduire le comportement asymptotique de $M^\delta(L,.)$ de la description de Z donnée dans le Corollaire 3.2.

4.1. Démonstration du Théorème A

Fixons un élément c dans $\Gamma/[\Gamma,\Gamma]$. En omettant les géodésiques fermées associées aux puissances des générateurs hyperboliques de Γ, nous avons l'égalité suivante :

$$N_c(L) = \sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{k} \sum_{x\in\Lambda^0,\, T^k x = x} \mathbf{1}_{S_k f(x) - L \leqslant 0}\, \mathbf{1}_{S_k H(x) = c}.$$

Pour tout réel $s>0$, et tout $L \geqslant 0$ notons $M^s(L,.)$ la mesure sur $\mathbf{R}$ définie, pour toute fonction $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, par :

$$M^s(L,g) = \sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{k} \sum_{x\in\Lambda^0,\, T^k x = x} e^{-sS_k f(x)} g\big(S_k f(x) - L\big) \mathbf{1}_{S_k H(x) = c}.$$

Notons que $M^s(L,g) < \infty$ si g a un support compact, puisqu'il existe un nombre fini de géodésiques fermées de longueur bornée, et que $M^\delta(L,g)$ coïncide avec $e^{-\delta L} N_c(L)$ lorsque $g(t) = e^{\delta t}\mathbf{1}_{t\leqslant 0}$.

Soit $P(L)$ la fonction décrite dans le Théorème A. Si nous montrons que, pour toute fonction g à support compact,

$$(*) \qquad M^\delta(L,g) \sim \frac{\mathrm{c}^{\mathrm{ste}}}{LP(L)} \int_{\mathbf{R}} g(x)\,\mathrm{d}x$$

il suffira d'écrire $N_c(L) = e^{\delta L}\sum_{n\in\mathbf{N}} M^\delta(L, e^{\delta t} 1_{](n+1)\alpha\,,\,n\alpha]})$ avec $\alpha<0$ arbitraire pour obtenir l'énoncé du Théorème A. Or, pour prouver la convergence vague des mesures $LP(L)M^\delta(L,.)$, il suffit, grâce à un résultat de Stone [11, p. 218], de vérifier que $LP(L)M^\delta(L,g)$ est fini et converge si $L\to+\infty$ vers $\int_{\mathbf{R}} g(x)\,\mathrm{d}x$ lorsque g n'est plus supposée à support compact, mais admet une transformée de Fourier régulière et à support compact.

Précisément, il suffit de considérer la classe $\mathcal{H}_n$ des *fonctions test* g du type $g(x) = e^{it.x} g_0(x)$ où t varie dans $\mathbf{R}$ et g_0 varie dans l'ensemble des fonctions positives de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, intégrables, et dont la transformée de Fourier est à support compact et de classe C^n. L'entier n est choisi assez grand pour que $LP(L)/L^n$ tende vers 0 si $L\to+\infty$.

Pour une fonction g dans la classe $\mathcal{H}_n$, nous pouvons écrire par inversion de Fourier :

$$g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} e^{it.x}\hat{g}(-t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathbf{1}_{y=c} = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbf{T}^d} e^{i\langle c-y|v\rangle}\,\mathrm{d}v$$

et par conséquent :

$$M^s(L,g) = \frac{1}{(2\pi)^{d+1}} \sum_{k\geqslant 2}\frac{1}{k} \sum_{x,\, T^k x = x} \iint_{\mathbf{R}\times\mathbf{T}^d} e^{itL} e^{-i\langle c|v\rangle}\hat{g}(-t)$$

$$\times\, e^{-(s+it)S_k f(x)+i\langle v|S_k H(x)\rangle}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}v. \tag{3.1}$$

Nous voyons apparaître le logarithme de la fonction Zêta dynamique $Z(z,v)=\sum_k Z_k(z,v)/k$ dont nous savons qu'elle converge normalement pour tout complexe z avec $\mathrm{Re}(z)>\delta$ (Corollaire 3.3) et $\mathrm{Im}\,z$ dans le support (compact) de $\hat{g}$. Pour $s>\delta$, nous avons donc :

$$M^s(L,g)=\frac{1}{(2\pi)^{d+1}}\iint\limits_{\mathbf{R}\times\mathbf{T}^d} e^{itL}e^{-i\langle c|v\rangle}\hat{g}(-t)Z(s+it,v)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}v.$$

Nous savons que la fonction Z est intégrable au voisinage de $(\delta,0)$ (Lemme 3.4). Grâce au fait que la transformée de Fourier de g a un support compact, nous pouvons utiliser le théorème de convergence dominée et écrire :

$$\lim_{s\searrow\delta} M^s(L,g)=\frac{1}{(2\pi)^{d+1}}\iint\limits_{\mathbf{R}\times\mathbf{T}^d} e^{itL}e^{-i\langle c|v\rangle}\hat{g}(-t)\,Z(\delta+it,v)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}v.$$

Par le théorème de convergence monotone, si g est positive, $M^s(L,g)$ converge vers $M^\delta(L,g)$ lorsque $s\searrow\delta$. Ceci montre en particulier que pour toute fonction test g positive, $M^\delta(L,g)$ est fini, puisque Z est intégrable (Lemme 3.4). Si maintenant g est une fonction test de signe quelconque, $|g|$ est encore une fonction test, $M^\delta(L,|g|)$ est fini et l'égalité $M^\delta(L,g)=\lim_{s\searrow\delta}M^s(L,g)$ découle cette fois du théorème de convergence dominée. Nous avons obtenu, pour toute fonction test :

$$M^\delta(L,g)=\frac{1}{(2\pi)^{d+1}}\iint\limits_{\mathbf{R}\times\mathbf{T}^d} e^{itL}e^{-i\langle c|v\rangle}\hat{g}(-t)Z(\delta+it,v)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}v.$$

Le Théorème A sera démontré si l'on montre :

PROPOSITION 4.1. – *Pour toute fonction test g, $LP(L)M^\delta(g,L)$ converge vers $C\int_{\mathbf{R}}g(x)\,\mathrm{d}x$ lorsque $L\to+\infty$, pour une constante $C>0$, où $P(L)$ est la fonction décrite dans l'énoncé du Théorème* A.

Démonstration de la proposition. – On se donne une fonction de troncation $\rho(t,v)=\rho_1(t)\rho_2(v)$ régulière, valant identiquement 1 sur un voisinage de $(0,0)$ dans $\mathbf{R}\times\mathbf{T}^d$ et nulle sur un voisinage légèrement plus grand, et l'on écrit

$$M^\delta(L,g)=A(L)+B(L)+C(L)$$

avec :

$$A(L)=\frac{-1}{(2\pi)^{d+1}}\iint\limits_{\mathbf{R}\times\mathbf{T}^d} e^{itL}e^{-i\langle c|v\rangle}\hat{g}(-t)\rho(t,v)\log\bigl(\delta+it-z(v)\bigr)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}v$$

$$B(L)=\frac{1}{(2\pi)^{d+1}}\iint\limits_{\mathbf{R}\times\mathbf{T}^d} e^{itL}e^{-i\langle c|v\rangle}\hat{g}(-t)\rho(t,v)\bigl(Z(\delta+it,v)+\log\bigl(\delta+it-z(v)\bigr)\bigr)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}v,$$

$$C(L)=\frac{1}{(2\pi)^{d+1}}\iint\limits_{\mathbf{R}\times\mathbf{T}^d} e^{itL}e^{-i\langle c|v\rangle}\hat{g}(-t)\bigl(1-\rho(t,v)\bigr)Z(\delta+it,v)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}v.$$

Les termes $B(L)$ et $C(L)$ sont négligeables devant $1/(LP(L))$. En effet, ce sont les transformées de Fourier de fonctions qui sont de classe au moins C^n en t uniformément en v (Corollaire 3.3) et à support compact. Leurs dérivées en t sont toujours intégrables sur $\mathbf{R} \times \mathbf{T}^d$ et le lemme de Riemann–Lebesgue montre que $L^n B(L)$ et $L^n C(L)$ tendent vers 0 lorsque $L \to +\infty$.

Le lemme suivant, appliqué à la fonction $\Phi(t,v) = \rho_1(t)\hat{g}(-t)\rho_2(v)e^{-i\langle c|v\rangle}$ donne l'équivalent pour L grand de $A(L)$:

LEMME 4.2. – *Pour toute fonction $\Phi(t,v) = \phi(t)\psi(v)$ supportée dans un voisinage de* $(0,0)$, *de classe* C^n *en t et continue en v,*

$$S(\Phi, L) := \frac{1}{(2\pi)^{d+1}} \iint\limits_{\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d} e^{itL} \log\bigl(\delta + it - z(v)\bigr)\Phi(t,v)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}v$$

$$\sim C\frac{\Phi(0,0)}{LP(L)} \quad \textit{lorsque } L \to +\infty.$$

Démonstration. – Notons $S'(\Phi, L)$ la fonctionelle

$$S'(\Phi, L) := \frac{1}{(2\pi)^{d+1}} \iint\limits_{\mathbf{R}\times\mathbf{T}^d} e^{itL} \frac{\Phi(t,v)}{\delta + it - z(v)}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}v.$$

Cette fonctionelle est bien définie d'après le Lemme 3.4. La dérivée en t de $(t,v) \mapsto \log(\delta + it - z(v))$ étant intégrable au voisinage de $(0,0)$, elle coïncide avec sa dérivée au sens des distributions et l'on peut intégrer par parties pour obtenir :

$$S(\Phi, L) = \frac{S'(\Phi, L)}{L} + i\frac{S(\Phi', L)}{L}$$

$$= \frac{S'(\Phi, L)}{L} + \sum_{k=1}^{n-1} i^k \frac{S'(\Phi^{(k)}, L)}{L^{k+1}} + i^n \frac{S(\Phi^{(n)}, L)}{L^n}$$

avec $\Phi^{(k)} := \phi^{(k)} \otimes \psi$. Dans cette somme, $S'(\Phi, L)$ donne l'équivalent annoncé : nous allons voir que $P(L)S'(\Phi, L) \to C\Phi(0,0)$ lorsque L tend vers l'infini si ϕ est classe C^n. Nous verrons également au cours de la démonstration que si ϕ est seulement supposée de classe C^{n-k}, alors $\sup_{L\to\infty} L^{n-1-k} S'(\Phi, L)$ est fini. En appliquant cette remarque aux termes du type $S'(\Phi^{(k)}, L)/L^{k+1}$ nous voyons que ces termes sont majorés par $1/L^n$ et donc négligeables devant $1/(LP(L))$. Comme de plus $\sup_L S(\Phi^{(n)}, L)$ est fini, le dernier terme est également négligeable devant $1/(LP(L))$.

De l'égalité $1/w = \int_0^{+\infty} e^{-Rw}\,\mathrm{d}R$ satisfaite pour tout nombre complexe w dont la partie réelle est strictement positive, il résulte que :

$$S'(\Phi, L) = \frac{1}{(2\pi)^{d+1}} \iint\limits_{\mathbf{R}\times\mathbf{T}^d} \int\limits_0^{+\infty} e^{itL}\phi(t)\psi(v)e^{-iRt - R(\delta - z(v))}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}R$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_0^{+\infty} \hat{\phi}(L - R) \int\limits_{\mathbf{T}^d} \psi(v)e^{-R(\delta - z(v))}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}R.$$

Posons : $K(R) = \int_{\mathbf{T}^d} \psi(v) e^{-R(\delta - z(v))}\,\mathrm{d}v$. Alors :

$$S'(\Phi, L) = \int_0^{L/2} \hat{\phi}(L-R) K(R)\,\mathrm{d}R + \int_{L/2}^{+\infty} \hat{\phi}(L-R) K(R)\,\mathrm{d}R.$$

Comme ϕ est de classe C^n à support compact, le nombre $A = \sup_x |x|^n |\hat{\phi}(x)|$ est fini. Par conséquent, $\hat{\phi}(L-R) \leqslant A/(L-R)^n \leqslant 2^n A/L^n$ si $R \leqslant L/2$. Le premier terme se majore par $A \sup_R K(R) 2^{n-1}/L^{n-1}$ et il est petit devant $1/P(L)$. Notons que si ϕ est seulement de classe C^{n-k}, on obtient de même une majoration du premier terme en C/L^{n-k-1}.

Pour étudier le deuxième terme, on utilise l'homogénéité de $\delta - z(v)$ sous l'action de la famille de transformations (k_r) décrite au Corollaire 2.6. En effet, le changement de variable $v = k_R(w)$, nous donne :

$$K(R) = \frac{1}{P(R)} \int_{\mathbf{R}^d} \psi\big(k_R(w)\big) e^{-R(\delta - z(k_R(w)))}\,\mathrm{d}w$$

puisque $1/P(R)$ est précisément le jacobien de la transformation k_R. D'après le Corollaire 2.7, lorsque R tend vers l'infini, $\psi(k_R(w)) e^{-R(\delta - z(k_R(w))}$ converge simplement vers $\psi(0) e^{-V(w)}$ qui est intégrable sur $\mathbf{R}^d$. Il n'est pas difficile de voir en utilisant le Corollaire 2.6 que cette convergence est dominée. Par conséquent $K(R)$ est équivalent à $C\psi(0)/P(R)$ lorsque R tend vers l'infini. On en déduit alors que le deuxième terme, qui s'écrit encore $\int_{-\infty}^{L/2} \hat{\phi}(R) K(L-R)\,\mathrm{d}R$ est équivalent à $C \int_{\mathbf{R}} \hat{\phi}(x)\,\mathrm{d}x\ \psi(0)/P(L)$, i.e., à $\Phi(0,0)/(LP(L))$. Notons enfin que pour ce dernier terme, seule l'intégrabilité de $\hat{\phi}$ est nécessaire pour pouvoir le majorer par $C/P(L)$. Celle-ci est assurée si ϕ est de classe au moins C^2 puisque dans ce cas, $\sup_x |x|^2 |\hat{\phi}(x)| < +\infty$. Le lemme est démontré, ce qui complète la démonstration de la Proposition 4.1 et celle du Théorème A. □

4.2. Démonstration du Théorème B

Soit G une fonction définie sur $T^1 M$ à valeurs réelles et $\bar{G}$ son relèvement à $T^1 \mathbf{H}^{N+1} \simeq S^N \overset{\triangle}{\times} S^N \times \mathbf{R}$. Alors, $\bar{G}$ est Γ-invariante, et donc sa restriction à $\mathcal{D}_0 \times \mathbf{R}$ est T_f-invariante. Si $\wp$ est une géodésique fermée de M, associée à un point (x^-, x^+) fixé par $\bar{T}^k$ et de longueur $l(\wp) = S_k f(x^+)$ (voir Section 1.3) nous avons :

$$\int_{\wp} G = \int_0^{S_k f(x^+)} \bar{G}(x^-, x^+, -s)\,\mathrm{d}s = \sum_{i=0}^{k-1} \bar{g}\big(\bar{T}^i(x^-, x^+)\big)$$

où l'on a posé :

$$\bar{g}(x^-, x^+) = \int_0^{f(x^+)} \bar{G}(x^-, x^+, -s)\,\mathrm{d}s.$$

Tout d'abord, remplaçons la fonction $\bar{g}$ par une fonction ne dépendant que de x^+ :

LEMME 4.3. – *Supposons que G est une fonction bornée et Lipschitzienne sur T^1M. Alors, il existe une fonction mesurable $\phi:\mathcal{D}^0 \to \mathbf{R}$ et une fonction $g:\Lambda^0 \to \mathbf{R}$ telles que :*

$$\bar{g}(x^-,x^+) = g(x^+) + \phi(x^-,x^+) - \phi\circ\bar{T}(x^-,x^+).$$

De plus, il existe une constante C telle que

(i) $|g(x^+)| \leqslant C|f(x^+)| + C$, *pour tout point x^+ de Λ^0,*

(ii) $|g(a^n.x) - g(a^n.y)| \leqslant C|x-y|^{1/2}$ *pour tout $a\in\mathcal{A}$, $n\in\mathbf{Z}^*$ et tous points x,y de Λ_{a^0}.*

Démonstration du Lemme 4.3. – Nous adaptons la démonstration du lemme analogue pour les sous-shifts de type fini [42, Chapter 1], en vérifiant que le fait que la fonction f soit non-bornée sur Λ^0 ne gène pas.

Notons tout d'abord que l'application qui à (x^-,x^+,r) associe le vecteur tangent correspondant de T^1M est une application différentiable. Comme l'ensemble $\mathcal{D}^0\times\{0\}$ est relativement compact dans $T^1\mathbf{H}^{N+1}$, il existe une constante A telle que

$$\operatorname{dist}\big((x^-,x^+,0);(y^-,y^+,0)\big) \leqslant A\big(|x^+-y^+| + |x^- - y^-|\big)$$

pour tout (x^-,x^+) et (y^-,y^+) dans $\mathcal{D}_0$. On en déduit l'inégalité pour tout $s>0$:

$$(C)\qquad \operatorname{dist}\big((x^-,x^+,-s);(y^-,x^+,-s)\big) \leqslant B^+e^{-s}|x^- - y^-|$$

pour (x^-,x^+) et (y^-,x^+) dans $\mathcal{D}^0$, puisque la distance entre deux vecteurs tangents pointant vers le même point à l'infini est contractée par un facteur $\mathrm{O}(e^{-s})$ par le flot géodésique g_s. On a de même :

$$(D)\qquad \operatorname{dist}\big((x^-,x^+,-s);(x^-,y^+,-s)\big) \leqslant B^-e^{s}|x^+ - y^+|.$$

Fixons un point y_a dans chaque sous-ensemble Λ_{a^0}, et notons $p(x) = y_a$ si $x\in\bigcup_{n\neq 0}\Lambda_{a^n}$. L'inégalité (C) montre que la fonction $\phi:\mathcal{D}_0\to\mathbf{R}$ définie par :

$$\phi(x^-,x^+) = \int_0^{+\infty} \bar{G}(x^-,x^+,-s) - \bar{G}\big(p(x^+),x^+,-s\big)\,\mathrm{d}s$$

est finie dès que G est une fonction Lipschitzienne. On vérifie alors que :

$$\phi(x^-,x^+) = \bar{g}(x^-,x^+) - g(x^+) + \phi\circ\bar{T}(x^-,x^+)$$

si l'on pose :

$$g(x^+) = \int_0^{f(x^+)} \bar{G}\big(p(x^+),x^+,-s\big) - \int_0^{+\infty} \bar{G}\big(p(Tx^+),Tx^+,-s\big) - \bar{G}\big(\bar{T}\big(p(x^+),x^+\big),-s\big)\,\mathrm{d}s.$$

La majoration (i) de g est alors claire. Posons maintenant $x^+ = a^n.x$ et $y^+ = a^n.y$ où x et y sont deux points de Λ_{a^0}. Il nous suffit de montrer la majoration (ii) lorsque x et y sont suffisamment proches. On peut en particulier supposer qu'ils appartiennent au même ensemble $\bigcup_{m\neq 0}\Lambda_{b^m}$, et nous avons alors :

$$g(x^+) - g(y^+) = \int_0^{f(x^+)} \bar{G}(y_a, x^+, -s) - \bar{G}(y_a, y^+, -s)\,\mathrm{d}s - \int_{f(x^+)}^{f(y^+)} \bar{G}(y_a, y^+, -s)\,\mathrm{d}s$$

$$- \int_0^{+\infty} \bar{G}(y_b, x, -s) - \bar{G}(a^{-n}y_a, x, -s) - \bar{G}(y_b, y, -s) + \bar{G}(a^{-n}y_a, y, -s)\,\mathrm{d}s.$$

D'après l'inégalité (D), l'intégrale $\int_0^{f(x^+)} \bar{G}(y_a, x^+, -s) - \bar{G}(y_a, y^+, -s)\,\mathrm{d}s$ est majorée à une constante près par $[G]e^{f(x^+)}|x^+ - y^+|$, soit par $[G]e^{b(a^n,x)}|a^n.x - a^n.y|$. Comme $|b(a^n,x) - b(a^n,y)|$ est uniformément borné en n pour $x, y \in \Lambda_{a^0}$, l'égalité des accroissements finis montre que cette dernière quantité est majorée par $C_1|x-y|$.

Le terme $\int_{f(x^+)}^{f(y^+)} \bar{G}(y_a, y^+, -s)\,\mathrm{d}s$ se majore quant à lui par $|G|_\infty |f(x^+) - f(y^+)|$ qui est égal à $|G|_\infty |b(a^n,x) - b(a^n,y)|$ et donc inférieur à $C_2|x-y|$.

La perte de régularité de g provient du troisième terme ; pour l'étudier, on le découpe en deux suivant $s \leqslant S$ ou $s > S$ pour un réel S à déterminer. On a d'une part :

$$\int_0^S \left|\bar{G}(y_b, x, -s) - \bar{G}(y_b, y, -s)\right| + \left|\bar{G}(a^{-n}y_a, y, -s) - \bar{G}(a^{-n}y_a, x, -s)\right|\mathrm{d}s$$
$$\leqslant 2[G]B^-|x-y|e^S$$

d'après l'inégalité (D) et d'autre part :

$$\int_S^{+\infty} \left|\bar{G}(y_b, x, -s) - \bar{G}(a^{-n}y_a, x), -s)\right| + \left|\bar{G}(y_b, y, -s) - \bar{G}(a^{-n}y_a, y), -s)\right|\mathrm{d}s$$
$$\leqslant 2[G]B^+e^{-S}$$

d'après (C). La majoration (ii) s'obtient en minimisant en S l'expression $B^-|x-y|e^S + B^+e^{-S}$. Ceci complète la démonstration du lemme. □

En conséquence, l'intégrale de G sur une géodésique fermée peut s'écrire comme la somme $S_k g(x^+)$ où x^+ est un point périodique pour T. Ceci va nous permettre de montrer le résultat de grandes déviations suivant :

PROPOSITION 4.4. – *Soit $G : T^1M \to \mathbf{R}$ comme dans le lemme précédent. Supposons que G soit d'intégrale strictement positive pour la mesure de Bowen Margulis, soit* : $m(G) > 0$. *Alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que le nombre $N_G(L)$ de géodésiques fermées $\wp$ de longueur $\leqslant L$ telles que $\int_\wp G \leqslant 0$ vérifie* :

$$N_G(L) \leqslant e^{(\delta-\varepsilon)L}.$$

Démonstration. – Notons que si la mesure m est normalisée et que si $g : \Lambda^0 \to \mathbf{R}$ est la fonction associée à G par le Lemme 4.3, nous avons $m(G) = \nu(g)/\nu(f)$, où ν est la mesure T-invariante sur Λ^0 introduite en Section 1.5. Ainsi, $\nu(g) > 0$. Il nous faut estimer la quantité :

$$N_G(L) := \sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{k} \sum_{T^k x = x} \mathbf{1}_{S_k g(x) \leqslant 0}\, \mathbf{1}_{S_k f(x) \leqslant L}.$$

Pour cela, considérons l'opérateur de transfert défini pour $\alpha > 0$, $\beta > 0$ par :

$$\mathcal{L}_{\alpha,\beta}\phi(x) = \sum_{Ty=x} e^{-\alpha f(y)-\beta g(y)}\phi(y) = \sum_{a\in\mathcal{A}} 1_{\Lambda_{a^0}}(x) \sum_{n\in\mathbf{Z}^*} e^{-\alpha f(a^n.x)-\beta g(a^n.x)}\phi(a^n.x).$$

D'après la majoration (i) du Lemme 4.3 et les estimées du Lemme 1.1, cet opérateur est bien défini lorsque $\alpha - C\beta > 1/2$ (où C est la constante donnée par le Lemme 4.3) et en particulier pour tout (α,β) dans un voisinage de $(\delta,0)$. Grâce à l'estimée (ii) du lemme, on vérifie que l'opérateur $\mathcal{L}_{\alpha,\beta}$ opère sur l'espace des fonctions continues sur Λ et Höldériennes d'exposant $1/2$. Supposons maintenant $p+q \geqslant 3$ (le cas $p+q=2$ se traite de manière analogue) ; par perturbation continue du cas $(\alpha,\beta)=(\delta,0)$, on obtient que, pour tout (α,β) suffisamment proche de $(\delta,0)$, le spectre de $\mathcal{L}_{\alpha,\beta}$ sur cet espace est constitué d'une valeur propre réelle simple proche de 1 que nous noterons $\lambda(\alpha,\beta)$ (en espérant que que cela ne créera pas de confusion avec la notation antérieure $\lambda(z,v)$) et d'une partie contenue dans un disque de rayon strictement inférieur à $\min(1,\lambda(\alpha,\beta))$. L'application $(\alpha,\beta)\to\lambda(\alpha,\beta)$ est analytique et vérifie : (voir la démonstration du Lemme 2.3)

$$\lambda(\delta,0)=1, \quad \frac{\partial\lambda}{\partial\alpha}(\delta,0) = -\nu(f) < 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial\lambda}{\partial\beta}(\delta,0) = -\nu(g) < 0.$$

Par conséquent, il existe $0<\alpha<\delta$ et $\beta>0$ tels que $\lambda(\alpha,\beta)<1$. On peut alors choisir ρ strictement compris entre $\lambda(\alpha,\beta)$ et 1 tel que $\|\mathcal{L}^k_{\alpha,\beta}\| \leqslant \rho^k$ pour tout entier k suffisamment grand. En reprenant les arguments du Lemme 3.1 nous obtenons la majoration :

$$\sum_{T^k x=x} e^{-\alpha S_k f(x)-\beta S_k g(x)} \leqslant \rho^k$$

et donc la convergence de la série

$$Z(\alpha,\beta) := \sum_{k\geqslant 2}\frac{1}{k}\sum_{T^k x=x} e^{-\alpha S_k f(x)-\beta S_k g(x)}.$$

Comme $\mathbf{1}_{x\leqslant 0} \leqslant e^{-x}$ on a finalement :

$$N_g(L) \leqslant \sum_{k\geqslant 2}\frac{1}{k}\sum_{T^k x=x} e^{-\alpha(S_k f(x)-L)-\beta S_k g(x)} \leqslant Z(\alpha,\beta)e^{\alpha L}.$$

La Proposition 4.4 en résulte. □

Pour démontrer le Théorème B, on peut se restreindre aux fonctions G bornées et Lipschitziennes sur T^1M. En appliquant la Proposition 4.4 aux fonctions $G-a$ et $b-G$ où les nombres réels a et b vérifient $a<m(G)<b$, on trouve ε_1 et ε_2 strictement positifs tels que

$$\operatorname{card}\left\{\wp;\ \int_\wp G \leqslant al(\wp),\ l(\wp)\leqslant L\right\} \leqslant e^{(\delta-\varepsilon_1)L}$$

et

$$\operatorname{card}\left\{\wp;\ \int_\wp G \geqslant bl(\wp),\ l(\wp)\leqslant L\right\} \leqslant e^{(\delta-\varepsilon_2)L}.$$

Finalement, pour tout $\eta > 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\operatorname{card}\left\{\wp;\ \left|\frac{1}{l(\wp)}\int_{\wp} G - m(G)\right| \geqslant \eta,\ l(\wp) \leqslant L\right\} \leqslant e^{(\delta-\varepsilon)L}.$$

Comme par ailleurs $N(L) := \operatorname{card}\{\wp;\ l(\wp) \leqslant L\} \sim e^{\delta L}/(\delta L)$ [16] on en déduit la convergence de $1/N(L)\sum_{\wp;\ l(\wp)\leqslant L} 1/l(\wp)\int_{\wp} G$ vers $m(G)$. De manière analogue, on obtient grâce au Théorème A la convergence vers m du barycentre des mesures supportées par les géodésiques fermées dans une classe d'homologie fixée. Le Théorème B est prouvé.

5. Variétés avec bouts cuspidaux abéliens de rang $\geqslant 2$

Nous avons considéré jusqu'à présent des groupes de Schottky, c'est-à-dire une classe particulière de produits libres de groupes élémentaires. Les groupes paraboliques étaient cycliques et nous allons à présent aborder le cas de groupes paraboliques isomorphes à $\mathbf{Z}^k$ avec $k \geqslant 2$.

5.1. Exemple d'une variété avec un bout cuspidal de rang k, $2 \leqslant k \leqslant N$

Pour décrire le groupe que nous allons considérer ici, nous utilisons le modèle du demi-espace $\mathbf{H}^{N+1} = \{(x,y);\ x \in \mathbf{R}^N,\ y \in \mathbf{R}^{*+}\}$; le fait de considérer des pointes de rang $k \geqslant 2$ impose $N \geqslant 2$. Fixons une base $(\vec{\tau}_1,\dots,\vec{\tau}_N)$ de $\mathbf{R}^N$, et notons $(\vec{\tau}_1^*,\dots,\vec{\tau}_N^*)$ la base duale de $\mathbf{R}^N$ définie par les égalités $\langle\vec{\tau}_i|\vec{\tau}_j^*\rangle = \delta_{ij}$ pour tout $i,j = 1,\dots,N$.

On considère les k transformations paraboliques $a_1,\dots,a_k$ fixant le point à l'infini et dont l'action sur $\mathbf{H}^{N+1}$ est donnée par

$$a_i(x,y) = (x + \vec{\tau}_i, y).$$

L'ensemble

$$D_a = \left\{x \in \partial\mathbf{H}^{N+1};\ x = \sum_{i=1}^{N} x_i\vec{\tau}_i \text{ avec } 0 \leqslant x_1,\dots,x_k < 1\right\}$$

est un domaine fondamental du groupe Γ_a engendré par $a_1,\dots,a_k$. Fixons alors 2 fermés disjoints B^- et B^+ contenus dans l'intérieur de D_a et une transformation hyperbolique b qui envoie l'extérieur de B^- sur l'intérieur de B^+. Le groupe Γ engendré par $a_1,\dots a_k, b$ est discret isomorphe au produit libre de Γ_a et du groupe cyclique Γ_b engendré par b ; nous noterons M la variété quotient $\mathbf{H}^{N+1}/\Gamma$. Le groupe Γ_a étant abélien de rang k, on dit que M *contient une pointe de rang* k. Rappelons que la dimension de Hausdorff δ de l'ensemble limite Γ vérifie $\delta > k/2$.

Nous allons démontrer le résultat suivant.

THÉORÈME 5.1. – *Pour toute classe d'homologie c dans $H_1(M,\mathbf{Z})$, lorsque L tend vers l'infini,*

$$N_c(L) \sim C\frac{e^{\delta L}}{LP(L)} \quad \textit{avec} \quad \begin{cases} \textit{si } \delta < 1 + k/2 & P(L) = L^{k/(2\delta-k)+1/2} \\ \textit{si } \delta = 1 + k/2 & P(L) = (L\log L)^{k/2}L^{1/2} \\ \textit{si } \delta > 1 + k/2 & P(L) = L^{(k+1)/2} \end{cases}$$

pour une constante $C = C(\Gamma) > 0$ indépendante de la classe d'homologie c donnée.

Cet énoncé correspond au Théorème A$'$ de l'introduction dans le cas $q=1$; l'extension au cas q quelconque est immédiate.

Nous donnons seulement les grandes lignes de la démonstration de ce théorème, en développant les aspects nouveaux dus à la présence d'une pointe de rang $k \geqslant 2$.

Étape 1. Codage des points de Λ et action de Γ sur $\partial\mathbf{H}^{N+1}$. Notons x_a le point fixe de Γ_a sur S^N et (x_b^-, x_b^+) les deux points fixes de b. Soit Λ^0 le complémentaire dans Λ des orbites des points x_a, x_b^- et x_b^+ ; en utilisant le lemme du tennis de table de Klein, on associe à chaque point x de Λ^0 une unique suite $(\gamma_i)_{i\geqslant 1}$ formée d'éléments de $\Gamma_a \cup \Gamma_b$ telle que $\gamma_{i+1} \in \Gamma_a$ si et seulement si $\gamma_i \in \Gamma_b$ et $\lim_{k\to+\infty} \gamma_1 \cdots \gamma_k.o = x$; une telle suite de lettres sera dite (Γ_a, Γ_b)-*admissible*.

Soit Λ_{a^0} (resp. Λ_{b^0}) l'ensemble des points de Λ^0 dont la première lettre appartient à Γ_b (resp. Γ_a). L'ensemble Λ^0 est maintenant la réunion dénombrable des ensembles $\gamma\Lambda_{a^0}$ et $\gamma'\Lambda_{b^0}$ lorsque γ et γ' décrivent respectivement $\Gamma_a - \{\mathrm{id}\}$ et $\Gamma_b - \{\mathrm{id}\}$.

L'opérateur de décalage $(\gamma_i)_{i\geqslant 1} \mapsto (\gamma_{i+1})_{i\geqslant 1}$ sur l'ensemble des suites de lettres (Γ_a, Γ_b)-admissibles induit une transformation T sur Λ_0 définie sur chacun des $\gamma\Lambda_{a^0}$ (resp. $\gamma'\Lambda_{b^0}$) par l'action de γ^{-1} (resp. γ'^{-1}). Comme ces sous-ensembles sont d'adhérences disjointes deux à deux, on montre comme dans [16] que la transformation T est dilatante sur Λ^0.

La mesure de Patterson σ en restriction à Λ^0 permet encore de construire une mesure de probabilité $\nu = h\sigma$ invariante par T en posant :

$$h(x) = \frac{1}{C}\int_{\Lambda_{b^0}} \frac{\sigma(\mathrm{d}y)}{|x-y|^{2\delta}} \quad \text{si } x \in \Lambda_{a^0} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{1}{C}\int_{\Lambda_{a^0}} \frac{\sigma(\mathrm{d}y)}{|x-y|^{2\delta}} \quad \text{si } x \in \Lambda_{b^0}$$

où C est la constante de normalisation

$$C = \int_{\Lambda_{a^0}\times\Lambda_{b^0}} \frac{\sigma(\mathrm{d}x)\,\sigma(\mathrm{d}y)}{|x-y|^{2\delta}}.$$

Rappellons qu'est associé à un élément parabolique $\gamma \in \Gamma_a$ de vecteur de translation $\vec{\tau} = \sum_{i=1}^k n_i \vec{\tau}_i$, le nombre $\tau(\gamma) := |\vec{\tau}|$. Il suit du Lemme 1.1 que $b(\gamma, x) - 2\log\tau(\gamma)$ converge lorsque γ tend vers l'infini dans Γ_a, uniformément en $x \in \Lambda_{a^0}$, et que $b(\gamma, x) - l(\gamma)$ converge lorsque γ tend vers l'infini dans Γ_b, uniformément en $x \in \Lambda_{b^0}$. On en déduit, comme au Lemme 1.5 le comportement de ν au voisinage des points x_a et $x_b^\pm$:

$$\nu(\gamma\Lambda_{b^0}) \sim \frac{C_a}{\tau(\gamma)^{2\delta}} \quad \text{lorsque } \gamma \text{ tend vers l'infini dans } \Gamma_a$$

et

$$\nu(\gamma\Lambda_{a^0}) \sim \frac{C_b}{e^{\delta l(\gamma)}} \quad \text{lorsque } \gamma \text{ tend vers l'infini dans } \Gamma_b,$$

pour des constantes C_a, C_b strictement positives.

Comme dans la Partie I, les orbites des points périodiques de T correspondent aux géodésiques fermées de M qui ne représentent pas la classe de conjugaison d'une puissance de b. Si x est un point périodique de période k codé par la suite $(\gamma_i)_{i\geqslant 1}$, la longueur de la géodésique fermée $\wp$ qui lui est associée est donnée par $l(\wp) = S_k f(x)$ où f est la fonction définie maintenant par

$$f(x) = b(\gamma_1, \gamma_1^{-1}.x).$$

Par ailleurs, le groupe Γ étant égal au produit libre des groupes abéliens Γ_a et Γ_b, on a $H_1(M,\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}^k + \mathbf{Z}$. Lorsque $\gamma \in \Gamma_a$ a pour vecteur de translation $\vec{\tau} = \sum_{i=1}^k n_i \vec{\tau}_i$, sa classe d'homologie $[\gamma]$ est l'élément $(n_1, \ldots, n_k)$ de $\mathbf{Z}^k$. De même $[\gamma'] = m$ si $\gamma' = b^m$. On introduit les fonctions H_p et H_q définies sur Λ^0 par :

$$H_p(x) = [\gamma] \quad \text{et} \quad H_q(x) = [\gamma'] \quad \text{lorsque } x \in \gamma.\Lambda_{a^0} \cap \gamma'.\Lambda_{b^0} \quad \text{avec } \gamma \in \Gamma_a, \gamma' \in \Gamma_b.$$

La classe d'homologie de $\wp$ est alors donnée par $[\wp] = (S_k H_p(x), S_k H_q(x))$.

Étape 2. Spectre des opérateurs de Ruelle. Soit $C(\Lambda)$ l'espace des fonctions continues sur Λ à valeurs dans $\mathbf{C}$, muni de la norme de la convergence uniforme $|.|_\infty$. Pour tout nombre complexe z et tout point (v_p, v_q) du tore $k+1$-dimensionnel $\mathbf{T}^k \times \mathbf{T}^1$, identifié au groupe dual de $\mathbf{Z}^k + \mathbf{Z}$, on considère l'opérateur de Ruelle $\mathcal{L}_{z,v_p,v_q}$ défini pour $\phi \in C(\Lambda)$ par :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{z,v_p,v_q}\phi(x) &= \sum_{y/Ty=x} e^{-zf(y)+i\langle v_p|H_p(y)\rangle + i\langle v_q|H_q(y)\rangle}\phi(y)\\ &= \mathbf{1}_{\Lambda_{a^0}}(x)\sum_{\gamma\in\Gamma_a} e^{-zb(\gamma,x)+i\langle v_p|[\gamma]\rangle}\phi(\gamma.x) + \mathbf{1}_{\Lambda_{b^0}}(x)\sum_{\gamma\in\Gamma_b} e^{-zb(\gamma,x)+i\langle v_q|[\gamma]\rangle}\phi(\gamma.x).\end{aligned}$$

Comme la série $\sum_{\gamma\in\Gamma_a}\tau(\gamma)^{-2s}$ converge si et seulement si $s > k/2$, il découle du comportement asymptotique de $b(\gamma,x)$ lorsque γ tend vers l'infini que l'opérateur $\mathcal{L}_{z,v_p,v_q}$ est bien défini lorsque $\mathrm{Re}(z) > k/2$. Introduisons le sous-espace $L(\Lambda)$ de $C(\Lambda)$ formé des fonctions Lipschitziennes sur Λ ; le spectre des opérateurs $\mathcal{L}_{z,v_p,v_q}$ en restriction à $L(\Lambda)$ est décrit dans la proposition suivante :

PROPOSITION 5.2. – *Pour tout nombre complexe z tel que* $\mathrm{Re}(z) > k/2$ *et tout* $(v_p, v_q) \in \mathbf{T}^k \times \mathbf{T}$:

(a) *$\mathcal{L}_{z,v_p,v_q}$ est un opérateur borné sur $L(\Lambda)$ et son rayon spectral $\rho(z,v_p,v_q)$ vérifie l'inégalité $\rho(z,v_p,v_q) \leqslant \rho(\mathrm{Re}(z),0,0)$; de plus, $\rho(\delta,0,0)=1$.*
(b) *Il existe un réel $\rho_0 < 1$ et un voisinage U de $(\delta,0,0)$ dans $\mathbf{C}\times\mathbf{T}^k\times\mathbf{T}$ sur lequel $\mathcal{L}_{z,v_p,v_q}$ a deux valeurs propres simples $\lambda(z,v_p,v_q)$ et $\lambda^-(z,v_p,v_q)$ proches respectivement de* 1 *et* -1, *le reste du spectre de $\mathcal{L}_{z,v_p,v_q}$ étant inclus dans un disque de rayon ρ_0.*
(c) *Pour tout réel $A > 0$, il existe $\varepsilon(A) > 0$ et $\rho_1 < 1$ tel que $\rho(z,v_p,v_q) < \rho_1$ si $(z,v_p,v_q) \notin U$ vérifie* $\mathrm{Re}(z) \geqslant \delta - \varepsilon$ *et* $|\mathrm{Im}(z)| \leqslant A$.

Les arguments pour prouver ce résultat sont similaires à ceux de la Proposition 2.2.

Étape 3. Régularité de la fonction $(z,v_p,v_q) \mapsto \lambda(z,v_p,v_q)$. La fonction $z \mapsto \mathcal{L}_{z,v_p,v_q}$ est analytique sur le domaine $\{z \in \mathbf{C};\ \mathrm{Re}(z) > k/2\}$, uniformément par rapport à $(v_p,v_q) \in \mathbf{T}^k \times \mathbf{T}$ et il en est donc de même pour la fonction $z \mapsto \lambda(z,v_p,v_q)$. Nous allons décrire à présent la régularité en v_p et v_q de cette fonction. Pour cela, si $v_p = (v_i)_{1\leqslant i\leqslant k} \in [0,2\pi]^k$, on notera $|v_p|$ la norme euclidienne du vecteur $\sum_{i=1}^k v_i \vec{\tau}_i^*$.

PROPOSITION 5.3. – *Il existe un voisinage V de* $(0,0)$ *dans* $\mathbf{T}^k \times \mathbf{T}^1$ *et une fonction continue $z(v_p,v_q)$ définie sur V telle que la fonction*

$$z \mapsto \frac{1-\lambda(z,v_p,v_q)}{z - z(v_p,v_q)}$$

est analytique sur un voisinage de δ uniformément par rapport à $(v_p,v_q) \in V$. De plus, le comportement de $z(v_p,v_q)$ pour (v_p,v_q) proche de $(0,0)$ *est, à des termes d'ordre supérieur* *près, le suivant :*

$$z(v_p, v_q) = \begin{cases} \delta - Q(v_p, v_q) & si\ \delta > 1 + k/2 \\ \delta + D_a|v_p|^2 \log|v_p| - D_b v_q^2 & si\ \delta = 1 + k/2 \\ \delta - D_a|v_p|^{2\delta - k} - D_b v_q^2 & si\ \delta < 1 + k/2 \end{cases}$$

où Q est une forme quadratique définie positive sur $\mathbf{R}^{k+1}$ et D_a et D_b des constantes > 0.

La démonstration de cette proposition est presqu'identique à celle du Lemme 2.3 et du Théorème 2.4 ; le seul point nouveau concerne le cas où $\delta \leqslant 1 + k/2$ et plus particulièrement la régularité au voisinage de 0 de la fonction $v_p \mapsto \lambda(\delta, v_p, 0) - 1$. Rappelons que l'on a

$$\lambda(\delta, v_p, 0) - 1 = \sigma(\mathcal{L}_{\delta, v_p, 0} h) - 1 + \sigma\big((\mathcal{L}_{\delta, v_p, 0} - \mathcal{L}_\delta)(h_{\delta, v_p, 0} - h)\big)$$

où $h_{\delta, v_p, 0}$ est l'unique fonction propre associée à $\lambda(\delta, v_p, 0)$ vérifiant $\sigma(h_{\delta, v_p, 0}) = 1$. Le terme principal est $\sigma(\mathcal{L}_{\delta, v_p, 0} h) -.1$; on a

$$\begin{aligned} \sigma(\mathcal{L}_{\delta, v_p, 0} h) - 1 &= \int_\Lambda (\mathcal{L}_{\delta, v_p, 0} - \mathcal{L}_\delta) h(x)\, \sigma(\mathrm{d}x) = \int_\Lambda \big(e^{i\langle v_p | H_p(.)\rangle}\big) h(x)\, \sigma(\mathrm{d}x) \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma_a} \big(e^{i\langle v_p | [\gamma]\rangle} - 1\big) \nu(\gamma.\Lambda_{a^0}) = \sum_{\gamma \in \Gamma_a} \big(\cos\langle v_p | [\gamma]\rangle - 1\big) \nu(\gamma.\Lambda_{a^0}). \end{aligned}$$

La connaissance d'un équivalent de $\nu(\gamma.\Lambda_{a^0})$ lorsque γ est grand permet de se ramener à l'étude de la série k-dimensionnelle

$$\sum_{(n_1, \ldots, n_k) \in \mathbf{Z}^k} \frac{1 - \cos\langle \sum v_i \vec{\tau}_i^* \mid \sum n_i \vec{\tau}_i \rangle}{|\sum n_i \vec{\tau}_i|^{2\delta}}$$

lorsque $|v_p|$ tend vers 0. Un calcul comparable à celui indiqué dans la démonstration du Théorème 2.4 conduit au terme principal annoncé.

Étape 4. Fin de la démonstration. Considérons la fonction Zêta :

$$Z(z, v_p, v_q) = \sum_{\wp \in \mathcal{P}_{er}} e^{-z l(\wp) + i\langle v | [\wp]\rangle}.$$

La Proposition 5.1 permet de montrer que pour toute valeur de $v = (v_p, v_q) \in \mathbf{T}^{k+1}$, la fonction $\zeta_v(z) = \exp Z(z, v_p, v_q)$ est méromorphe sur un ouvert contenant $\{\mathrm{Re}(z) \geqslant \delta\}$ uniformément en v. De plus, lorsque v est dans un voisinage de 0, ζ_v a un pole simple en $z = z(v_p, v_q)$. On en déduit que $(t, v_p, v_q) \mapsto Z(\delta + it, v_p, v_q)$ a une singularité au voisinage de $(0, 0, 0)$ de l'ordre de $\log(it + \delta - z(v_p, v_q))$, et qu'elle y est intégrable.

Soit k_r la transformation de $\mathbf{R}^{k+1}$ définie par :

$$k_r(v_p, v_q) = \left(\frac{v_p}{d(r)}, \frac{v_q}{\sqrt{r}}\right) \quad \text{avec} \quad d(r) = \begin{cases} r^{\frac{1}{2\delta - k}} & \text{si } \delta < 1 + k/2 \\ \sqrt{r \log r} & \text{si } \delta = 1 + k/2 \\ \sqrt{r} & \text{sii } \delta > 1 + k/2. \end{cases}$$

La Proposition 5.3 montre que la limite de $r(\delta - z \circ k_r(v_p, v_q))$ est non dégénérée lorsque $r \to +\infty$. En utilisant les arguments développés dans la Partie 4, on vérifie enfin que c'est le jacobien $1/P(r)$ de l'application k_r qui donne la décroissance de $N_c(L)$ énoncée au Théorème 5.1.

5.2. Produit de groupes abéliens en position Schottky

Soient $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ une famille de n groupes discrets et sans torsion du groupe d'isométries de $\mathbf{H}^{N+1}$. Ces groupes sont dits *en position Schottky* s'il existe n fermés non vides $B_1, \ldots, B_n$ de la sphère S^N deux à deux disjoints tels que $\Gamma_i(S^N - B_i) \subset B_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$.

Si n groupes sont en position Schottky, le groupe Γ qu'ils engendrent est égal à leur produit libre et opère librement et discontinuement sur $\mathbf{H}^{N+1}$.

Considérons à présent $n = p + q$ groupes élémentaires $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ en position Schottky ; nous supposons que les p premiers groupes sont des groupes abéliens opérant par transformations paraboliques sur $\mathbf{H}^{N+1}$ tandis que les q derniers sont cycliques et opèrent par transformations hyperboliques. Dans ce cas, le groupe Γ engendré par $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ est géométriquement fini, et si l'on note $\bar{k}$ le rang maximum des groupes paraboliques $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_p$, la dimension de Hausdorff δ de l'ensemble limite de Γ coïncide avec l'exposant de convergence de la série de Poincaré associée à Γ et satisfait l'inégalité $\delta > \bar{k}/2$ [5].

Les points x de l'ensemble limite de Γ pourront ainsi être codés par une suite de lettres $(\gamma_i)_{i\geqslant 1}$ formée d'éléments de $\Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_n$ et telles que deux lettres successives n'appartiennent pas au même groupe élémentaire. Cette suite de lettre est unique dès que x n'appartient pas à l'orbite sous Γ des points fixes de chaque groupe $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$.

Dans le paragraphe précédent, nous avons vu que la présence d'une pointe abélienne de rang k sur $M = \mathbf{H}^{N+1}/\Gamma$ n'affecte le comportement asymptotique de $N_c(L)$ que lorsque δ appartient à l'intervalle $]k/2, 1 + k/2]$; par conséquent, seules les pointes de rang $\bar{k}$ et $\bar{k} - 1$ auront une réelle influence sur le comportement de $N_c(L)$. Il suffit de réécrire les arguments des parties précédentes pour obtenir le résultat suivant qui illustre la complexité des phénomènes liés à la présence de bouts cuspidaux de rang divers sur la variété M.

THÉORÈME A″. – *Soit Γ un groupe d'isométries de $\mathbf{H}^{N+1}$ engendré par p groupes paraboliques abéliens et q groupes hyperboliques en position Schottky. On note $\bar{k}$ le rang maximun des groupes $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_p$ et pour $1 \leqslant k \leqslant \bar{k}$, on note p_k le nombre de groupes paraboliques de rang k. On introduit les trois dimensions $D_0 = \bar{k}p_{\bar{k}}$, puis $D_1 = (\bar{k} - 1)p_{\bar{k}-1}$ et enfin $D_2 = \sum_{k=1}^{\bar{k}-2} kp_k$ de sorte que le premier nombre de Betti de la variété $M = \mathbf{H}^{N+1}/\Gamma$ vaut $D_0 + D_1 + D_2 + q$.*

Le nombre $N_c(L)$ de géodésiques fermées de longueur $\leqslant L$ dans une classe d'homologie fixée vérifie

$$N_c(L) \sim \mathrm{C}^{\mathrm{ste}} \frac{e^{\delta L}}{L^{1+\alpha+q/2} \log^{\beta} L}$$

lorsque L tend vers l'infini avec :

$$\alpha = \frac{D_2}{2} + \frac{D_1}{2\delta - \bar{k} + 1} + \frac{D_0}{2\delta - \bar{k}} \quad \textit{et} \quad \beta = 0 \qquad \textit{si } \delta \in \left] \frac{\bar{k}}{2} \quad \frac{\bar{k}}{2} + \frac{1}{2} \right[$$

$$\alpha = \frac{D_2}{2} + \frac{D_1}{2} + \frac{D_0}{2\delta - \bar{k}} \quad \textit{et} \quad \beta = \frac{D_1}{2} \qquad \textit{si } \delta = \frac{\bar{k}}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \frac{D_2}{2} + \frac{D_1}{2} + \frac{D_0}{2\delta - \bar{k}} \quad \textit{et} \quad \beta = 0 \qquad \textit{si } \delta \in \left] \frac{\bar{k}}{2} + \frac{1}{2} \quad \frac{\bar{k}}{2} + 1 \right[$$

$$\alpha = \frac{D_2}{2} + \frac{D_1}{2} + \frac{D_0}{2} \quad et \quad \beta = \frac{D_0}{2} \quad si\ \delta = \frac{\bar{k}}{2} + 1$$

$$\alpha = \frac{D_2}{2} + \frac{D_1}{2} + \frac{D_0}{2} \quad et \quad \beta = 0 \quad si\ \delta \in \left]\frac{\bar{k}}{2} + 1 \quad N\right[.$$

De même, le Théorème B sur l'équirépartition des géodésiques fermées s'étend sans difficulté pour les groupes du type considéré ici.

Remerciements

Nous tenons à remercier F. Dal'bo, Y. Guivarc'h, E. Le Page, F. Ledrappier et J.-P. Otal pour leur intérêt constant durant ce travail. Martine Babillot est particulièrement reconnaissante envers F. Dal'bo pour lui avoir longuement parlé du problème des géodésiques fermées.

Nous remercions également les rapporteurs pour leur lecture approfondie de cet article ; leurs nombreuses suggestions et références ont contribué à en améliorer la rédaction. La question nous a été posée de savoir si toutes les valeurs possibles de la dimension de Hausdorff, et notamment la valeur critique $\delta = 3/2$ apparaissant dans le Théorème A, pouvaient être réalisées par des groupes du type considéré ici. J.-P. Otal nous a indiqué que cela était vrai en dimension 3, en adaptant les arguments de C. McMullen [37] I concernant la continuité de l'application $\Gamma \to \delta(\Gamma)$. Par contre, il n'existe pas à notre connaissance d'exemples explicites de tels groupes, le calcul précis de $\delta(\Gamma)$ étant souvent très difficile à mener à bout ; voir cependant l'article de T. Akaza où la valeur 3/2 est atteinte pour un groupe de Schottky purement hyperbolique [1], et les exemples de C. McMullen [37] III.

Le Théorème A a été annoncé dans une Note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris [10].

RÉFÉRENCES

[1] T. AKAZA, 3/2-dimensional measure of singular sets of some Kleinian groups, *J. Math. Soc. Japan* 24 (1972) 448–464.

[2] E. ARTIN, Ein mechanisches System mit quasiergodischen Bahnen, in: *Collected Papers*, Addison-Wesley, 1965, pp. 499–501.

[3] T. ADACHI and T. SUNADA, Homology of closed geodesics in a negatively curved manifold, *J. Differential Geom.* 26 (1987) 81–99.

[4] A. BROISE, F. DAL'BO and M. PEIGNÉ, Méthode des opérateurs de transfert: transformations dilatantes de l'intervalle et dénombrement de géodésiques fermées, Soc. Math. France, *Astérisque* 238, 1996.

[5] A.F. BEARDON, The exponent of convergence of Poincaré series, *Proc. London Math. Soc.* 3 (18) (1968) 461–483.

[6] V. BALADI and G. KELLER, Zeta functions and transfer operators for piecewise monotone transformations, *Comm. Math. Phys.* 127 (1990) 459–477.

[7] M. BABILLOT and F. LEDRAPPIER, Lalley's theorem on periodic orbits of hyperbolic flows, *Ergodic Theory Dynamical Systems* 18 (1998) 17–39.

[8] R. BOWEN, The equidistribution of closed geodesics, *Amer. J. Math.* 94 (1972) 413–423.

[9] R. BOWEN, Hausdorff dimenson of quasi-circles, *Publ. Math. IHES* 50 (1979).

[10] M. BABILLOT and M. PEIGNÉ, Closed geodesics in homology classes on hyperbolic manifolds with cusps, *C. R. Acad. Sci. Paris Série I* 324 (1997) 901–906.

[11] L. BREIMAN, *Probability*, Addison-Wesley, 1968.

[12] X. BRESSAUD, Opérateurs de transfert sur le décalage à alphabet infini et applications, Thèse de l'Université Paris 6, 1996.

[13] R. BOWEN and C. SERIES, Markov maps associated with Fuchsian groups, *Publ. Math. IHES* 50 (1979) 153–170.
[14] W. DOEBLIN and R. FORTET, Sur les chaines à liaison complètes, *Bull. Soc. Math. France* 65 (1937) 132–148.
[15] P.G. DOYLE, On the bass note of a Schottky group, *Acta Math.* 160 (1988) 249–284.
[16] F. DAL'BO and M. PEIGNÉ, Groupes du ping-pong et géodésiques fermées en courbure -1, *Ann. Inst. Fourier* 46 (3) (1996) 755–799.
[17] N. ENRIQUEZ, J. FRANCHI and Y. LE JAN, Stable windings for geodesics under Patterson–Sullivan measure, Prépublication 431 du Laboratoire de Probabilités de l'Université Paris VI, 1998.
[18] N. ENRIQUEZ and Y. LE JAN, Statistic of the winding of geodesics on a Riemann surface with finite area and constant negative curvature, *Rev. Mat. Iber.* 13 (1997) 377–401.
[19] C. EPSTEIN, Asymptotics for closed geodesics in a homology class-the finite volume case, *Duke Math. J.* 55 (1987) 717–757.
[20] J. FRANCHI, Asymptotic singular homology of a complete hyperbolic 3-manifold of finite volume, *Proc. London Math. Soc.* 79 (1999) 451–480.
[21] Y. GUIVARC'H and Y. LE JAN, Asymptotic winding of the geodesic flow on modular surfaces and continued fractions, *Ann. Sci. ENS* 26 (1993) 23–50.
[22] L. GUILLOPÉ, Fonctions Zêta de Selberg et surfaces de géométrie finie, *Adv. Studies in Pure Math.* 21 (1992) 33–72.
[23] Y. GUIVARC'H and J. HARDY, Théorèmes limites pour une classe de chaînes de Markov, et applications aux difféomorphismes d'Anosov, *Ann. IHP* 24 73–98.
[24] N.T.A. HAYDN, Meromorphic extensions of the Zeta function for Axiom A flows, *Ergodic Theory Dynamical Systems* 10 (1990) 347–360.
[25] D. HEIJHAL, The Selberg trace formula and the Riemann Zeta function, *Duke Math. J.* 43 (1976) 441–482.
[26] H. HENNION, Sur un théorème spectral et son application aux noyaux Lipschitziens, *Proc. AMS* 118 (1993) 637–634.
[27] H. HUBER, Zur analytischen Theorie hyperbolischer Raumformen und Bewegungsgruppen (I), *Math. Ann.* 138 (1959) 1–26; (II), *Math. Ann.* 142 (1961) 385–398; (III), *Math. Ann.* 143 (1961) 463–464.
[28] S. ISOLA, On the rate of convergence to equilibrium of countable ergodic Markov chains, Prépublication, Università degli Studi di Bologna, 1997.
[29] S. ISOLA, Dynamical Zeta functions and correlation functions for intermittent interval maps, Prépublication, Università degli Studi di Bologna, 1997.
[30] S. ISOLA, Renewal sequences and intermittency, Prépublication, Università degli Studi di Bologna, 1997.
[31] A. KATSUDA and T. SUNADA, Closed orbits in homology classes, *Publ. Math. IHES* 71 (1990) 5–32.
[32] S. LALLEY, Renewal theorems in symbolic dynamics with applications to geodesic flows, non euclidean tesselations and their fractal limits, *Acta Math.* 163 (1989) 1–55.
[33] S. LALLEY, Closed geodesics in homology classes on surfaces of variable negative curvature, *Duke Math. J.* 58 (1989) 795–821.
[34] S. LALLEY, Probabilistic methods in certain counting problems in ergodic theory, in: T. Bedford, M. Keane and C. Series, eds., *Ergodic Theory, Symbolic Dynamics and Hyperbolic Spaces*, Oxford University Press, Oxford, 1991.
[35] B. MASKITT, *Kleinian Groups*, Springer, Berlin, 1988.
[36] G.A. MARGULIS, Applications of ergodic theory for the investigation of manifolds of negative curvature, *Func. Anal. Appl.* 3 (1969) 335–336.
[37] C. MCMULLEN, Hausdorff dimension and conformal dynamics, I: Kleinian Groups and strong limits, à paraître *J. Diff. Geom.* III: Computation of dimension, *Amer. J. Math.* 120 (1998) 691–721.
[38] R. MIATELLO and N.R. WALLACH, The resolvant of the Laplacian on locally symmetric spaces, *J. Differential Geom.* 36 (1992) 663–698.
[39] W. PARRY, An analogue of the prime number theorem for closed orbits of shifts of finite type and their suspensions, *Israel J. Math.* 45 (1983) 573–591.
[40] S.J. PATTERSON, The limit set of a Fuchsian group, *Acta Math.* 136 (1976) 241–273.

[41] M. POLLICOTT, Homology and closed geodesics in a compact negatively curved surface, *Amer. J. Math.* 113 (1991) 379–385.
[42] W. PARRY and M. POLLICOTT, Zeta functions and the periodic orbit structure of hyperbolic dynamics, *Astérisque* 187–188, Soc. Math. France, 1990.
[43] R. PHILLIPS and P. SARNAK, Geodesics in homology classes, *Duke Math. J.* 55 (1987) 287–297.
[44] T. PRELLBERG and J. SLAWNY, Maps of intervals with indifferent fixed points: thermodynamic formalism and phase transitions, *J. Stat. Phys.* 66 (1992) 503–514.
[45] J.G. RATCLIFFE, *Foundations of Hyperbolic Geometry*, Springer, New York, 1994.
[46] T. ROBLIN, Sur la théorie ergodique des groupes discrets en géométrie hyperbolique, Thèse de doctorat de l'Université Paris XI, 1999.
[47] J. ROUSSEAU-EGELE, Un théorème de la limite locale pour une classe de fonctions dilatantes et monotones par morceaux, *Ann. Probab.* 11 (1983) 772–788.
[48] W. RUDIN, *Analyse Réelle et Complexe*, Masson, Paris, 1975.
[49] H.H. RUGH, Intermittency and regularized Fredholm determinants, *Invent. Math.* 135 (1999) 1–24.
[50] A. SELBERG, Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric spaces with applications to Dirichlet series, *J. Indian Math. Soc.* 20 (1956) 47–87.
[51] C. SERIES, The modular surface and continued fractions, *J. London Math. Soc.* 31 (1985) 69–80.
[52] R. SHARP, Closed orbits in homology classes for Anosov flows, *Ergodic Theory Dynamical Systems* 13 (1993) 387–408.
[53] F. SPITZER, *Principles of Random Walks*, Van Nostrand, Princeton, 1964.
[54] D. SULLIVAN, The density at infinity of a discrete group of hyperbolic isometries, *Publ. Math. IHES* 50 (1979) 171–209.
[55] D. SULLIVAN, Entropy, Hausdorff measure old and new, and limit sets of geometrically finite Kleinian groups, *Acta Math.* 153 (1984) 259–277.
[56] L.S. YOUNG, Recurrence times and rates of mixing, à paraître, *Israel J. Math.* (1999).
[57] S. ZELDITCH, Trace formula for compact $\Gamma\backslash PSL_2(R)$ and the equidistribution theory of closed geodesics, *Duke Math. J.* 59 (1989) 27–81.

(Manuscrit reçu le 29 juin 1998.)

Martine BABILLOT
Université d'Orléans, Département de
Mathématique ; BP 6759, 45067 Orléans
Cedex, France
e-mail: mbab@labomath.univ-orleans.fr

Marc PEIGNÉ
Laboratoire de Mathématiques et de
Physique théorique, Faculté des Sciences
et Techniques, Université de Tours,
Parc de Grandmont, 37200 Tours, France
e-mail: peigne@univ-tours.fr