C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 357 (2019) 413–417

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Théorie des nombres

Somme translatée sur des suites primitives et la conjecture d'Erdös

Translated sum on primitive sequences and Erdös conjecture

Ilias Laib [a], Abdellah Derbal [a], Rachid Mechik [b]

[a] *Département de mathématiques, laboratoire d'équations aux dérivées partielles non linéaires, ENS Vieux Kouba, Alger, Algérie*
[b] *Faculté de mathématiques, université des sciences et de la technologie Houari-Boumédiène, Alger, Algérie*

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 12 mars 2019
Accepté après révision le 14 mai 2019
Disponible sur Internet le 29 mai 2019

Présenté par le comité de rédaction

RÉSUMÉ

Dans cette note, on construit un ensemble $\boldsymbol{S}$ de suites primitives telles que, pour tout nombre réel $x \geq 81$, on ait

$$\sum_{a \in \mathcal{A}} \frac{1}{a(\log a + x)} > \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p(\log p + x)}, \quad \mathcal{A} \in \boldsymbol{S}$$

où $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers.

ABSTRACT

In this note, we construct a set $\boldsymbol{S}$ of primitive sequences such that, for any real number $x \geq 81$, we get

$$\sum_{a \in \mathcal{A}} \frac{1}{a(\log a + x)} > \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p(\log p + x)}, \quad \mathcal{A} \in \boldsymbol{S}$$

where $\mathcal{P}$ denotes the set of prime numbers.
© 2019 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

1. Introduction

Une suite $\mathcal{A}$ de nombres entiers strictement positifs est dite primitive si et seulement si aucun de ses éléments ne divise les autres. Il est clair que la suite des nombres premiers $\mathcal{P} = (p_n)_{n \geq 1}$ est une suite primitive. À partir de $\mathcal{P}$, on peut construire une infinité de suites primitives. En effet, toute suite de la forme

$$\mathcal{A}_d^k = \left\{ p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k} | \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{N}, \ \alpha_1 + \ldots + \alpha_k = d, \ \text{les } \alpha_i \text{ non tous nuls} \right\}$$

Adresses e-mail : laib23@yahoo.fr (I. Laib), abderbal@yahoo.fr (A. Derbal), mechikrachid@yahoo.fr (R. Mechik).

https://doi.org/10.1016/j.crma.2019.05.005
1631-073X/

est primitive. D'après le théorème des nombres premiers, le n-iéme nombre premier p_n équivaut à $n \log n$; ceci assure la convergence de la série

$$S(\mathcal{P}) = \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p \log p}$$

Un calcul sur ordinateur donne $S(\mathcal{P}) \simeq 1{,}63$. Dans [1] et [2], les auteurs démontrent la convergence de la série $S(\mathcal{A}) = \sum_{a \in \mathcal{A}} \frac{1}{a \log a}$ et établissent la majoration $S(\mathcal{A}) \leq 1{,}84$ pour toute suite primitive $\mathcal{A}$. Dans [2], Erdös a conjecturé que $S(\mathcal{A}) \leq S(\mathcal{P})$ pour toute suite primitive. Dans cet article, nous nous sommes intéressés à des sommes translatées de la forme ([3])

$$S(\mathcal{A}, x) = \sum_{a \in \mathcal{A}} \frac{1}{a(\log a + x)}, \; x \in \mathbb{R}_+$$

sur des suites primitives $\mathcal{A}$, et nous avons construit des suites primitives pour lesquelles l'analogue de la conjecture d'Erdös n'est pas satisfait pour x plus grand qu'une valeur donnée x_0, c'est-à-dire que $S(\mathcal{A}, x) > S(\mathcal{P}, x)$ pour $x \geq x_0$. Les résultats obtenus sont résumés dans le théorème suivant.

Théorème 1.1. *Soit $k_0 = 27\,775\,592$ et $x_0 = 81$. Pour toute suite primitive*

$$B_2^k = \left\{ p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}, \; \alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{N}, \; \alpha_1 + ... + \alpha_k = 2, \; k \geq k_0 \right\} \cup \{ p_n \in \mathcal{P} \mid n > k \}$$

on a

$$S(B_2^k, x) > S(\mathcal{P}, x) \text{ pour } x \geq x_0$$

Dans la suite, $\mathcal{A}^k$ (resp. $\mathcal{B}_d^k$) désigne les suites primitives de la forme $\{p_n \in \mathcal{P}, \; n > k\}$ (resp. la réunion $\mathcal{A}_d^k \cup \mathcal{A}^k$).

Pour démontrer ce théorème, on a besoin des lemmes ci-après.

2. Lemmes

Lemme 2.1. *[5] Pour tout nombre réel $x > 1$, on a*

$$\sum_{p \in \mathcal{P}, \; p \leq x} \frac{1}{p} > \log \log x$$

Lemme 2.2. *Pour tout entier $n > 1$, on a*

$$n^{n-1} \geq n! > 2{,}5 n^n \mathrm{e}^{-n} \sqrt{n}$$

Preuve. Pour $n = 2$, l'inégalité est vérifiée. Pour $n > 2$, elle découle de l'inégalité ([4])

$$n^n \mathrm{e}^{-n} \sqrt{2\pi n}\, \mathrm{e}^{\frac{1}{12n}} > n! > n^n \mathrm{e}^{-n} \sqrt{2\pi n}\, \mathrm{e}^{\frac{1}{12n+1}} \quad \square$$

Lemme 2.3. *Soit ϵ un nombre réel > 1 et n un entier > 1, on a*

$$\inf_{n > 1, \, \epsilon > 1} \left(\frac{n n! \mathrm{e}^{\epsilon n}}{\epsilon^{n-1} n^{n-1} - n!} \right) = 4 \mathrm{e}^3$$

Preuve. Soit $(t_n(\epsilon))_{n \geq 2}$ la suite définie par

$$t_n(\epsilon) = \frac{n n! \mathrm{e}^{\epsilon n}}{\epsilon^{n-1} n^{n-1} - n!}, \text{ pour } \epsilon > 1$$

d'après le Lemme 2.2

$$\frac{\epsilon^{n-1} n^{n-1} - n!}{n n!} < \frac{\epsilon^{n-1} \mathrm{e}^n - 2{,}5 n \sqrt{n}}{2{,}5 n^2 \sqrt{n}}, \text{ pour } n \geq 2, \; \epsilon > 1$$

la dernière inégalité équivaut à

$$t_n(\epsilon) > \frac{2.5 n^2 \sqrt{n}\, \mathrm{e}^{\epsilon n}}{\epsilon^{n-1} \mathrm{e}^n - 2.5 n \sqrt{n}}, \text{ pour } n \geq 2, \; \epsilon > 1$$

Sachant que la fonction réelle

$$x \to f_\epsilon(x) = \frac{2{,}5x^2\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{\epsilon x}}{\mathrm{e}^{x+(x-1)\log\epsilon} - 2{,}5x\sqrt{x}}, \text{ pour } \epsilon > 1$$

est strictement croissante pour x réel ≥ 4, alors

$$t_n(\epsilon) > f_\epsilon(x) \geq f_\epsilon(4) \text{ pour } n \geq 4$$

et comme $t_3(\epsilon) < f_\epsilon(4)$, pour $\epsilon > 1$, on a

$$\inf_{n>1,\,\epsilon>1}\left(\frac{nn!\,\mathrm{e}^{\epsilon n}}{\epsilon^{n-1}n^{n-1} - n!}\right) = \inf_{n>1,\,\epsilon>1}\{t_3(\epsilon),\ t_2(\epsilon)\} = t_2(3/2) = 4\,\mathrm{e}^3.$$

Lemme 2.4. *Pour tout entier $k \geq 1$ et tout entier $d \geq 2$, on a la réunion (disjointe)*

$$\mathcal{A}_d^{k+1} = \mathcal{A}_d^k \cup \left\{ap_{k+1} | a \in \mathcal{A}_{d-1}^{k+1}\right\}$$

Preuve. Soit $y \in \mathcal{A}_d^{k+1}$ tel que $p_{k+1}|y$. Alors, $y = ap_{k+1}$ où $a \in \mathcal{A}_{d-1}^{k+1}$, d'où

$$\mathcal{A}_d^{k+1} = \left\{y \in \mathcal{A}_d^{k+1} |\ p_{k+1} \nmid y\right\} \cup \left\{y \in \mathcal{A}_d^{k+1} |\ p_{k+1} | y\right\}$$

donc $\mathcal{A}_d^{k+1} = \mathcal{A}_d^k \cup \left\{ap_{k+1} | a \in \mathcal{A}_{d-1}^{k+1}\right\}$. □

Lemme 2.5. *Soit $k_0 = 27775592$. Pour tout nombre réel $x > 0$, la suite $\left(\mathcal{S}(\mathcal{B}_2^k, x)\right)_{k \geq k_0}$ est strictement croissante.*

Preuve. Pour tout entier $k \geq 1$ et tout entier $d \geq 2$, la formule multinomiale assure que

$$\sum_{a \in \mathcal{A}_d^k} \frac{1}{a} = \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_k = d} \frac{1}{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}} \geq \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_k = d} \frac{(1/p_1)^{\alpha_1}}{(\alpha_1)!} \ldots \frac{(1/p_k)^{\alpha_k}}{(\alpha_k)!} = \frac{1}{d!}\left(\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{p_n}\right)^d$$

donc

$$\sum_{a \in \mathcal{A}_d^k} \frac{1}{a} \geq \frac{1}{d!}\left(\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{p_n}\right)^d. \tag{1}$$

D'après le Lemme 2.4, on a

$$B_2^{k+1} = \mathcal{A}_2^{k+1} \cup \mathcal{A}^{k+1} = \mathcal{A}_2^k \cup \left\{ap_{k+1} | a \in \mathcal{A}_1^{k+1}\right\} \cup \mathcal{A}^{k+1}$$

alors

$$S\left(B_2^{k+1}, x\right) = S\left(B_2^k, x\right) + E$$

où

$$E = \frac{1}{p_{k+1}}\left(S\left(\mathcal{A}_1^{k+1}, \log p_{k+1} + x\right) - \frac{1}{\log p_{k+1} + x}\right)$$

Sachant que p_{k+1} est le plus grand élément de $\mathcal{A}_1^{k+1}$, on a

$$S\left(\mathcal{A}_1^{k+1}, \log p_{k+1} + x\right) = \sum_{a \in \mathcal{A}_1^{k+1}} \frac{1}{a(\log a + \log p_{k+1} + x)} \geq \frac{1}{2\log p_{k+1} + x} \sum_{a \in \mathcal{A}_1^{k+1}} \frac{1}{a}$$

et d'après (1) et le Lemme 2.1, on obtient

$$\sum_{a \in \mathcal{A}_1^{k+1}} \frac{1}{a} \geq \sum_{n=1}^{k+1} \frac{1}{p_n} \geq \log\log p_{k+1} > 2, \text{ pour } k \geq k_0$$

alors

$$S\left(\mathcal{A}_1^{k+1}, \log p_{k+1} + x\right) - \frac{1}{\log p_{k+1} + x} > \frac{2}{2\log p_{k+1} + x} - \frac{1}{\log p_{k+1} + x}$$
$$= \frac{x}{\left(2\log p_{k+1} + x\right)\left(\log p_{k+1} + x\right)} > 0$$

donc $S\left(B_2^{k+1}, x\right) - S\left(B_2^k, x\right) > 0$. □

3. Démonstration du théorème

Pour tout entier $k \geq 1$ et tout entier $d \geq 2$, le nombre p_k^d est le plus grand élément de la suite primitive $\mathcal{A}_d^k$, donc $\log a \leq d \log p_k$ pour tout $a \in \mathcal{A}_d^k$. Alors, pour tout $x > 0$, on a

$$\sum_{a\in\mathcal{B}_d^k} \frac{1}{a(\log a + x)} = \sum_{a\in\mathcal{A}_d^k\cup\mathcal{A}^k} \frac{1}{a(\log a + x)} = \sum_{a\in\mathcal{A}_d^k} \frac{1}{a(\log a + x)} + \sum_{a\in\mathcal{A}^k} \frac{1}{a(\log a + x)}$$
$$\geq \frac{1}{d\log p_k + x} \sum_{a\in\mathcal{A}_d^k} \frac{1}{a} + \sum_{n>k} \frac{1}{p_n(\log p_n + x)}$$

et d'après (1) et le Lemme 2.1, il vient

$$\sum_{a\in\mathcal{A}_d^k} \frac{1}{a} > \frac{(\log\log p_k)^{d-1}}{d!} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{p_n}$$

donc

$$\sum_{a\in\mathcal{B}_d^k} \frac{1}{a(\log a + x)} \geq \frac{x\,(\log\log p_k)^{d-1}}{d!(d\log p_k + x)} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{xp_n} + \sum_{n>k} \frac{1}{p_n(\log p_n + x)}$$
$$> \frac{x\,(\log\log p_k)^{d-1}}{d!(d\log p_k + x)} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{p_n(\log p_n + x)} + \sum_{n>k} \frac{1}{p_n(\log p_n + x)}.$$

Pour obtenir l'inégalité requise dans le Théorème 1.1, il faut choisir d, k et x de sorte que

$$\frac{x\,(\log\log p_k)^{d-1}}{d!(d\log p_k + x)} > 1$$

Il est clair que la fonction réelle

$$x \to h_{k,d}(x) = \frac{x\,(\log\log p_k)^{d-1}}{d!(d\log p_k + x)}, \text{ pour } d \geq 2, k > 1$$

est strictement croissante pour x réel > 0. Soit x_0 la valeur minimale pour laquelle l'inégalité ci-dessus est vérifiée. Alors,

$$\frac{(\log\log p_k)^{d-1} - d!}{dd!\log p_k} > \frac{1}{x_0} \tag{2}$$

Puisque $x_0 > 0$, il faut qu'on choisisse k tel que $(\log\log p_k)^{d-1} - d! > 0$, donc, d'après le Lemme 2.2, il faut que

$$\log\log p_k > d$$

donc il existe $\epsilon > 1$ tel que

$$\log\log p_k = \epsilon d$$

alors (2) est équivalente à

$$\frac{dd!\,\mathrm{e}^{\epsilon d}}{\epsilon^{d-1}d^{d-1} - d!} < x_0$$

donc il faut choisir d et ϵ de manière à ce que le nombre $\frac{dd!\,e^{\epsilon d}}{\epsilon^{d-1}d^{d-1}-d!}$ soit le plus petit possible. D'après le Lemme 2.3, on obtient $d=2$, $\epsilon=\frac{3}{2}$ et $x_0>4e^3$, donc on doit rechercher un entier k_0 tel que $\log\log p_{k_0}$ soit assez voisin de 3. Un calcul sur ordinateur donne $\left(p_{k_0},k_0\right)=(528\,491\,303,\ 27\,775\,592)$ ou $\left(p_{k_0},k_0\right)=(528\,491\,329,\ 27\,775\,593)$. Donc, si on prend $k_0=27\,775\,592$ et $d=2$, on obtient $\mathcal{A}=\mathcal{B}_2^{k_0}$ et approximativement $x_0=81$. Alors, $S(\mathcal{B}_2^{k_0},x)>S(\mathcal{P},x)$; pour $x\geq x_0$, d'après le Lemme 2.5, on a

$$S(\mathcal{B}_2^{k},x)>S(\mathcal{B}_2^{k_0},x)>S(\mathcal{P},x)\text{ pour }k\geq k_0,\ x\geq x_0$$

ce qui achève la démonstration.

Remarque 1. D'après le Lemme 2.5, le choix de x_0 peut être amélioré.

Références

[1] P. Erdös, Note on sequences of integers no one of which is divisible by any other, J. Lond. Math. Soc. 10 (1935) 126–128.
[2] P. Erdös, Z. Zhang, Upper bound of $\sum 1/(a_i \log a_i)$ for primitive sequences, Proc. Amer. Math. Soc. 117 (1993) 891–895.
[3] B. Farhi, Results and conjectures related to a conjecture of Erdős concerning primitive sequences, arXiv:1709.08708v2 [math.NT], 25 September 2017.
[4] H. Robbins, A remark on Stirling's formula, Amer. Math. Mon. 62 (1955) 26–29.
[5] J.B. Rosser, L. Schoenfeld, Approximates formulas for some functions of prime numbers, Ill. J. Math. 6 (1962) 64–94.