C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 357 (2019) 130–142

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Analyse complexe/Géométrie analytique

Courants résidus et opérateurs de Monge–Ampère

Residue currents and Monge–Ampère operators

Michel Méo

Institut Élie Cartan de Lorraine, Université de Lorraine, boulevard des Aiguillettes, BP 70239, 54506 Vandœuvre-lès-Nancy, France

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 15 juin 2018
Accepté après révision le 4 février 2019
Disponible sur Internet le 10 février 2019

Présenté par Jean-Pierre Demailly

RÉSUMÉ

On étend au cas où le support est un sous-ensemble analytique éventuellement singulier le théorème de Federer de structure du courant résidu. Par ailleurs, on détermine la loi générale de transformation de la distribution γ_f associée à une application holomorphe $f = (f_1, \ldots, f_N)$. On arrive ainsi à l'interprétation cohomologique de la classe fondamentale associée à un cycle analytique effectif, qui n'est pas nécessairement localement intersection complète. Par cette même loi, on obtient une caractérisation des sous-ensembles algébriques de dimension pure de $\mathbb{C}^n$, qui sont des intersections complètes. On caractérise aussi les intersections complètes de codimension q dans $\mathbb{P}_n$ en termes des solutions de l'équation de Monge–Ampère singulière dans $\mathbb{P}_q$. Enfin, on exprime la condition sur la dimension des pôles de la fonction plurisousharmonique u impliquant que l'opérateur de Monge–Ampère $Q \wedge \mathrm{d}^c u$ est d'ordre 0, pour tout courant positif fermé Q de bidimension (k, k).

ABSTRACT

We extend to the case when the support is a possibly singular analytic subvariety the Federer theorem on the structure of the residue current. On another hand, we determine the general law of transformation of the distribution γ_f associated with a holomorphic map $f = (f_1, \ldots, f_N)$. In such a way, we arrive at the cohomological interpretation of the fundamental class of an effective analytic cycle, which is not necessarily a local complete intersection. By this same law, we obtain a characterization of the pure dimensional algebraic subsets of $\mathbb{C}^n$, which are complete intersections. We also characterize the complete intersections of codimension q in $\mathbb{P}_n$ in terms of the solutions of the singular Monge–Ampère equation in $\mathbb{P}_q$. Lastly, we express the condition on the dimension of the poles of the plurisubharmonic function u, so that the Monge–Ampère operator $Q \wedge \mathrm{d}^c u$ has measure coefficients, for all closed positive current Q of bidimension (k, k).

Adresse e-mail : michel.meo@univ-lorraine.fr.

https://doi.org/10.1016/j.crma.2019.01.011

1. Courant résidu non nécessairement fermé à support dans un ensemble analytique éventuellement singulier

Soit X une variété complexe de dimension pure n et $Z \subset X$ un sous-ensemble analytique de dimension $p = n - q$. Soit T une forme différentielle de degré $2q - 1$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $X \setminus Z$ telle que T et $\mathrm{d}T$ sont à coefficients $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$ dans X ; le courant résidu associé est

$$R = \mathrm{d}\widetilde{T} - \widetilde{\mathrm{d}T}$$

en désignant par $\widetilde{\ }$ le courant dans X associé à chaque forme différentielle à coefficients $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$ dans X. Le courant R, qui est de dimension $2p$, est localement plat dans X au sens de Federer (cf. [9]) et est à support dans Z.

On peut exprimer R à l'aide d'intégrales résiduelles de la façon suivante. Soit U un ouvert de X tel que $Z \cap U = f^{-1}(0)$ où $f : U \to \mathbb{C}^N$ est holomorphe. Alors $R_{|U}$ est le résidu de $T_{|U}$ et, pour θ de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans U, on a

$$\langle R, \theta \rangle = -\int_{U \setminus Z} \mathrm{d}(T \wedge \theta) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\|f\| > \varepsilon} \mathrm{d}(T \wedge \theta) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\|f\| = \varepsilon} T \wedge \theta,$$

en prenant pour $\varepsilon > 0$ des valeurs régulières de $\|f\|$.

On va déterminer la structure de R pour Z quelconque, c'est-à-dire Z éventuellement singulier. Soit Z' la réunion des composantes connexes de dimension exactement p de la partie régulière Z_{reg} de Z.

1.1. Cas Z lisse

Dans ce cas, d'après le théorème de structure de Federer, il existe une fonction r qui est $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$ dans Z' telle que

$$\langle R, \theta \rangle = \int_{Z'} r\theta$$

pour toute $2p$-forme différentielle θ de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans X. En particulier, R est de bidimension (p, p) et d'ordre 0. La fonction r est appelé le résidu de T.

Remarquons aussi que $\langle R, \theta \rangle = \int_X \mathrm{d}\widetilde{T} \wedge \theta - \int_{X \setminus Z} \mathrm{d}T \wedge \theta$ est la masse sur Z de la mesure $\mathrm{d}\widetilde{T} \wedge \theta$.

1.2. Cas Z éventuellement singulier

Tout d'abord, si R, i.e. $\widetilde{\mathrm{d}T}$, est fermé dans X, alors (cf. [13]) on a

$$r = \sum_j m_j \mathbb{1}_{Z_j},$$

où les Z_j sont les composantes analytiques irréductibles de Z de dimension exactement p et les m_j des nombres complexes.

Sans l'hypothèse que R est fermé dans X, on va voir que R est un courant de la forme suivante.

Proposition 1. *Soit r une fonction $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$ dans Z', telle que pour toute $2p$-forme différentielle θ de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans X, la mesure $r\theta_{|Z'}$ est bornée dans Z'. Alors $\theta \to \int_{Z'} r\theta$ définit un courant localement plat dans X.*

Démonstration. On peut supposer que X est un ouvert U de $\mathbb{C}^n$. L'hypothèse se traduit alors en disant que, pour tout compact K de U, l'intégrale $\int_{Z' \cap K} |r| \beta^p$ est finie avec $\beta = \mathrm{i}\partial\bar{\partial}\|z\|^2$ et $z \in \mathbb{C}^n$. Soit $(r_l)_l$ une suite de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans Z' telles que $\lim_l \int_{Z' \cap K} |r - r_l| \beta^p = 0$. Alors,

$$\left| \int_{Z'} r\theta - \int_{Z'} r_l \theta \right| \leq C \|\theta\|_\infty \int_{Z' \cap K} |r - r_l| \beta^p$$

si supp $\theta \subset K$. Donc $r[Z']$ est la limite pour la topologie plate de la suite des $r_l[Z']$ qui sont des courants localement normaux dans X. □

Donnons d'abord la construction de r en suivant [13]. Soit $Z'' = Z \setminus Z'$ la réunion de Z_{sing} et des composantes analytiques irréductibles de Z de dimension $< p$. Comme Z' est fermé dans $X \setminus Z''$, l'injection $i : Z' \to X \setminus Z''$ est propre. Le support du courant localement plat $R_{|X \setminus Z''}$ étant inclus dans Z', il existe par le théorème de structure de Federer (cf. [9]) une fonction $r \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(Z')$ telle que

$$R_{|X \setminus Z''} = i_* r$$

i.e. $\langle R, \theta \rangle = \int_{Z'} r\theta$ pour toute θ lorsque $Z'' \cap \operatorname{supp} \theta$ est vide.

Sans cette hypothèse sur supp θ, nous allons voir que la mesure $r\theta_{|Z'}$ est bornée, i.e. que

$$\sup \{|\int_{Z'} \chi r\theta|, \chi \text{ fonction continue dans } Z' \text{ à support compact avec } |\chi| \leq 1\}$$

est fini. On peut supposer que X est un ouvert U de $\mathbb{C}^n$, et il s'agit alors de voir que, pour tout compact K de U l'intégrale $\int_{Z'\cap K} |r|\beta^p$ est finie ou encore que, pour tout $x \in Z$, il existe un voisinage ouvert V de x dans U tel que

$$\int_{Z'\cap V} |r|\beta^p$$

est finie.

On peut supposer que $x = 0$, que le germe de $\overline{Z'}$ en 0 est irréductible de dimension p et qu'en notant $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$, pour tout multi-indice $I = (i_1, \dots, i_p)$ avec $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$, la restriction

$$\pi_I : \overline{Z'} \cap V_I \to B'_I$$

de la projection orthogonale pr_I sur Vect $(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$, est propre à fibres finies, avec $V_I = B'_I + B''_I$ où $B'_I \subset$ Vect $(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$ et $B''_I \subset$ Vect $(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})^{\perp}$ sont des boules ouvertes centrées aux origines.

On peut aussi supposer la propriété suivante vérifiée : omettant l'indice I et considérant $B' \subset$ Vect $(e_1, \dots, e_p) \simeq \mathbb{C}^p$ et $B'' \subset$ Vect $(e_{p+1}, \dots, e_n) \simeq \mathbb{C}^q$ de sorte que $\mathrm{pr}(z', z'') = z'$, il existe $d \in \mathbb{N}^*$ et $\delta \in \mathcal{O}(B')$ non nulle tels que

$$\overline{Z'} \cap \{z \in V, \delta(z') \neq 0\} = \{z \in V, \delta(z') \neq 0, P(z', z_{p+1}) = 0, \delta(z')z_k - Q_k(z_{p+1}) = 0 \text{ pour } k \geq p+2\}$$

avec P et les $Q_k \in \mathcal{O}(B')[z_{p+1}]$, P étant de degré d, de coefficient dominant 1 et de discriminant δ.

Il suffit alors de voir que

$$\int_{Z'\cap V} |r|\pi^*\beta'^{\,p}$$

est finie, avec $\beta' = \frac{i}{2}\partial\bar{\partial}\|w\|^2$, $w \in \mathbb{C}^p$.

Soit B'_0 (respectivement B''_0) une boule ouverte de $\mathbb{C}^p$ (respectivement $\mathbb{C}^q$) centrée en 0 assez petite, déjà telle que $\overline{B'_0} \subset B'$ et que la projection

$$\pi_0 : \overline{Z'} \cap V_0 \to B'_0$$

avec $V_0 = B'_0 \times B''_0$ est encore propre. Le théorème de Lojasiewicz (cf. [16]) fournit une triangulation localement finie de $B' \setminus (\delta^{-1}(0) \cup \partial B'_0)$, d'où on déduit une triangulation finie de $B'_0 \setminus \delta^{-1}(0)$. On obtient un fermé négligeable $\mathcal{N}$ de B'_0 contenant $B'_0 \cap \delta^{-1}(0)$ tel que $B'_0 \setminus \mathcal{N}$ est la réunion d'une famille finie $(\mathcal{T}_m)_{1\leq m\leq s}$ d'ouverts simplement connexes disjoints tels que, pour tout m, on ait $\partial\mathcal{T}_m \cap B'_0 \subset \mathcal{N}$, de sorte que $\mathcal{T}_m$ est fermé dans $B'_0 \setminus \mathcal{N}$.

Comme le complémentaire de $\pi_0^{-1}(B'_0 \setminus \mathcal{N})$ dans la sous-variété connexe $Z' \cap V_0$ y est négligeable, il suffit de voir que chaque intégrale

$$\int_{\pi_0^{-1}(\mathcal{T}_m)} |r|\pi_0^*\beta'^{\,p}$$

est finie. Omettons l'indice m, fixons $a \in \mathcal{T}$ et écrivons $\pi_0^{-1}(a) = \{b_1, \dots, b_d\}$. Pour $1 \leq l \leq d$, soit σ_l la section holomorphe au-dessus de $\mathcal{T}$ du revêtement

$$\pi_0 : (Z' \cap V_0) \setminus \pi_0^{-1}\big(\delta^{-1}(0)\big) \to B'_0 \setminus \delta^{-1}(0)$$

telle que $\sigma_l(a) = b_l$. Alors $\pi_0^{-1}(\mathcal{T})$ est la réunion disjointe des $Y_l = \sigma_l(\mathcal{T})$ qui sont des ouverts de $Z' \cap V_0$ tels que chaque

$$\pi_0 : Y_l \to \mathcal{T}$$

est un biholomorphisme. Les Y_l sont des fermés deux à deux disjoints de l'ouvert $\mathcal{T} \times B''_0$. Il existe donc des ouverts $W_1, \dots, W_d$ contenus dans $\mathcal{T} \times B''_0$ deux à deux disjoints tels que $W_l \supset Y_l$ pour tout l.

Soit $U_l \supset Y_l$ un ouvert de W_l tel que, pour tout compact K de $\mathcal{T}$, l'intersection de $K \times B''_0$ avec l'adhérence dans W_l de U_l est compacte. On considère λ_l, une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ dans W_l égale à 1 sur un voisinage dans W_l de Y_l et 0 sur $W_l \setminus U_l$. Comme $W_l \subset V_0 \setminus \pi_0^{-1}(\mathcal{N})$ ne rencontre pas Z'', le courant $\lambda_l R_{|W_l}$ est d'ordre 0 et il est obtenu par intégration sur Y_l par rapport à la densité $\lambda_l r$. De plus, la restriction de pr à supp $(\lambda_l R_{|W_l})$ est propre.

Pour χ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ dans Y_l à support compact, les restrictions des formes différentielles $\chi\pi_0^*(\beta'^p)$ et $\mathrm{pr}^*(((\mathrm{pr}_{|Y_l})_*\chi)\beta'^p)$ à Y_l sont égales et on a

$$\int_{Y_l} r\chi\pi_0^*\beta'^p = \langle \lambda_l R_{|W_l}, (\mathrm{pr}_{|W_l})^*\big(\big(((\mathrm{pr}_{|Y_l})_*\chi\big)\beta'^p\big)\rangle.$$

À cause de son degré, $(\mathrm{pr}_{|W_l})_*(\lambda_l\widetilde{T}_{|W_l}) = 0$ et on trouve donc que cette expression est égale à

$$-\int_{\mathcal{T}} (\mathrm{pr}_{|W_l})_*\big(\big(\mathrm{d}(\lambda_l T_{|W_l})\big)^{\sim}\big)\wedge\big((\mathrm{pr}_{|Y_l})_*\chi\big)\beta'^p,$$

ce qui donne une première expression

$$(\mathrm{pr}_{|Y_l})_* r = -(\mathrm{pr}_{|W_l})_*\big(\big(\mathrm{d}(\lambda_l T_{|W_l})\big)^{\sim}\big). \tag{1}$$

Ensuite, on a $(1-\lambda_l)\mathrm{d}\widetilde{T}_{|W_l} = (1-\lambda_l)\widetilde{\mathrm{d}T}_{|W_l}$ puisque $W_l \smallsetminus Y_l$ ne rencontre pas Z et donc

$$-\big(\mathrm{d}(\lambda_l T_{|W_l})\big)^{\sim} = -\widetilde{\mathrm{d}T}_{|W_l} + \mathrm{d}\big((1-\lambda_l)\widetilde{T}_{|W_l}\big).$$

Pour γ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $\mathcal{T}$, comme $(1-\lambda_l)T$ est $\mathcal{C}^\infty$ dans W_l, on a, par la formule de Stokes

$$\int_{U_l}\big(\mathrm{d}(\lambda_l T_{|W_l})\big)^{\sim}\wedge(\mathrm{pr}_{|W_l})^*(\gamma\beta'^p) = \int_{U_l}\widetilde{\mathrm{d}T}\wedge(\mathrm{pr}_{|W_l})^*(\gamma\beta'^p) - \int_{\partial U_l} T\wedge(\mathrm{pr}_{|W_l})^*(\gamma\beta'^p)$$

et donc la seconde expression

$$(\mathrm{pr}_{|Y_l})_* r = (\mathrm{pr}_{|W_l})_*(-\mathbb{1}_{U_l}\widetilde{\mathrm{d}T} + [\partial U_l]\wedge T). \tag{2}$$

On a supposé ici, pour pouvoir appliquer la formule de Stokes, que ∂U_l est une réunion finie $\bigcup_j \overline{\mathcal{M}}_j$ avec pour $\mathcal{M}_j$ des triangles ouverts deux à deux disjoints dans $\overline{W}_l$ de $\dim_{\mathbb{R}} = 2n-1$, quitte à rétrécir les Y_l.

Il reste à montrer que $(\mathrm{pr}_{|\partial U_l})_*(T_{|\partial U_l})$ est intégrable dans $\mathcal{T}$ près de 0.

Chaque $\overline{\mathcal{M}}_j$ contient 0 et on peut avoir $\overline{\mathcal{M}}_j$ contenant $Z_{\mathrm{sing}}\cap(\mathcal{T}\times B_0'')$. On se ramène donc au cas où 0 est un point isolé de Z_{sing}.

En effet, il existe une application holomorphe surjective $\varphi : V' \to V''$ où $V' \subset V_0$ est un voisinage ouvert de 0 et où $V'' \ni 0$ est ouvert dans $\mathbb{C}^n$, vérifiant : l'image $\varphi(Z\cap V')$ est analytique de dimension p, la restriction

$$\varphi : V' \setminus \varphi^{-1}\big(\varphi(Z\cap V')\big) \to V'' \setminus \varphi(Z\cap V')$$

est un biholomorphisme et l'image $\varphi(Z''\cap V') = \{0\}$.

Pour la construction de φ, on considère $E \subset V'$ un sous-ensemble analytique propre contenant $Z\cap V'$ et $\varphi_0 : E \to A$ une application holomorphe surjective avec $A \subset V''$ un sous-ensemble analytique de dimension p contenant 0. On peut choisir φ_0 telle que $\varphi_0(Z\cap V') = A$ et $\varphi_0(Z''\cap V') = \{0\}$. On peut aussi choisir E tel que $V'\setminus E$ est en biholomorphisme avec $V''\setminus A$ et φ s'obtient alors par recollement.

Quitte à remplacer V' par un voisinage ouvert de 0 relativement compact dans V', on peut supposer que les formes différentielles $\varphi_*(T_{|V'})$ et $\varphi_*(\mathrm{d}T_{|V'})$ sont à coefficients L^1_{loc}. Alors, le courant

$$\varphi_*(R_{|V'}) = \mathrm{d}\big(\varphi_*(T_{|V'})\big)^{\sim} - \big(\mathrm{d}\varphi_*(T_{|V'})\big)^{\sim}$$

est localement plat et on sait d'après [9] que l'image directe par une application propre d'un courant localement plat est encore un courant localement plat.

On pose $S = \varphi_*(T_{|V'})$ et on peut supposer que $\mathrm{d}S - \varphi_*(\mathrm{d}T_{|V'})$ est presque partout égale à une forme différentielle L^1_{loc}.

On prend $\mathcal{M}_j = \varphi^*(\Delta)$ où Δ est un triangle ouvert vérifiant $0 \in \partial\Delta$ et $\overline{\Delta} \subset V''$. On aura $\mathcal{M}_j \cap (Z'\cap V') = \emptyset$ en choisissant Δ tel que, de plus, $\Delta\cap\varphi(Z'\cap V') = \emptyset$.

Comme $\varphi_*(R_{|V'}) = \mathrm{d}\tilde{S} - (\mathrm{d}S)^{\sim}$ est à support dans $\varphi(Z\cap V') = \varphi(Z'\cap V')\cup\{0\}$, on aura alors $(\mathrm{d}\tilde{S} - (\mathrm{d}S)^{\sim})_{|\Delta} = 0$.

Proposition 2. *Pour $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^m)$, pour presque tout hyperplan H de $\mathbb{R}^m$ passant par* 0*, la fonction $\|x\|g_{|H} \in \mathrm{L}^1(H)$.*

Démonstration. En désignant par $\langle , \rangle$ le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^m$, soit

$$\Gamma = \{(x,u) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{S}^{m-1}, \langle x,u\rangle = 0\}$$

qui est une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{S}^{m-1}$ de $\dim_{\mathbb{R}}$ égale à $2m-2$. On note τ la forme volume sur $\mathbb{S}^{m-1}$ égale à la restriction à $\mathbb{S}^{m-1}$ de $\sum_{1\le j\le m}(-1)^{j-1}\frac{u_j}{\|u\|}\mathrm{d}u_1\wedge\ldots\wedge\widehat{\mathrm{d}u_j}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}u_m$ et ω la forme volume sur Γ obtenue en restreignant

$$\frac{(-1)^{i-1}}{u_i}\mathrm{d}x_1\wedge\ldots\wedge\widehat{\mathrm{d}x_i}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_m\wedge\tau(u)$$

là où $u_i\neq 0$. Écrivons

$$\int_{\mathbb{S}^{m-1}}\mathrm{pr}_{2*}(g\omega)=\int_{\mathbb{R}^m}\mathrm{pr}_{1*}(g\,\omega)$$

i.e.

$$\int_{\mathbb{S}^{m-1}}\tau(u)\int_{H_u}g\frac{(-1)^{i-1}}{u_i}\mathrm{d}x_1\wedge\ldots\wedge\widehat{\mathrm{d}x_i}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_m=\int_{\mathbb{R}^m}g(-1)^{i-1}\mathrm{d}x_1\wedge\ldots\wedge\widehat{\mathrm{d}x_i}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_m\wedge\mathrm{pr}_{1*}(\frac{\tau(u)}{u_i})$$

pour g telle que $\frac{g}{\|x\|}\in\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^m)$ et avec H_u l'hyperplan vectoriel dont u est un vecteur normal. Exprimons

$$\mathrm{pr}_{1*}(\frac{\tau(u)}{u_i})(x;\frac{\partial}{\partial x_i})=\int_{u\in\mathbb{S}^{m-1}\cap H_x}\Omega(u)$$

avec

$$\Omega(u)=\tau(u)\llcorner\sigma_i(u)$$

où $\sigma_i(u)\in T_u\mathbb{S}^{m-1}$ est tel que $(\frac{1}{u_i}\frac{\partial}{\partial x_i},\sigma_i(u))\in T_{(x,u)}\Gamma$. En considérant

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x+t\frac{e_\mathrm{i}}{u_i},\frac{u(t)}{\|u(t)\|})_{|t=0}$$

avec $u(t)=u-\frac{t}{t+x_i}e_i$ et $(e_1,\ldots,e_m)$ la base canonique de $\mathbb{R}^m$, on voit qu'on peut prendre $\sigma_i(u)=\frac{1}{x_i}(u_iu-e_i)$. Écrivons $\frac{x}{\|x\|}=Ae_i$ avec $A:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ orthogonal direct de sorte que $H_x=A(H_{e_i})$. Il s'agit de calculer

$$\int_{\mathbb{S}^{m-1}\cap H_{e_i}}A^*\Omega$$

avec

$$(A^*\Omega)(u)=\tau(u)\llcorner\frac{1}{x_i}(\langle y,u\rangle u-y)$$

et $y=({}^{\intercal}A)e_i$. Mais $A^*\Omega_{|\mathbb{S}^{m-1}\cap H_{e_i}}$ est le produit de $\frac{(-1)^{i-1}}{\|x\|}$ par la restriction à $\mathbb{S}^{m-1}\cap H_{e_i}$ de la forme différentielle

$$\sum_{j<i}(-1)^{j-1}\frac{u_j}{\|u\|}\mathrm{d}u_1\wedge\ldots\wedge\widehat{\mathrm{d}u_j}\wedge\ldots\wedge\widehat{\mathrm{d}u_i}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}u_m+\sum_{i<j}(-1)^{j}\frac{u_j}{\|u\|}\mathrm{d}u_1\wedge\ldots\wedge\widehat{\mathrm{d}u_i}\wedge\ldots\wedge\widehat{\mathrm{d}u_j}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}u_m.$$

Cette restriction est égale à $(-1)^{m-i}\times$ forme volume standard sur $\mathbb{S}^{m-1}\cap H_{e_i}$. Ainsi

$$\mathrm{pr}_{1*}(\frac{\tau(u)}{u_i})=\mathrm{Cte}\frac{(-1)^{m-1}}{\|x\|}\mathrm{d}x_i$$

et on trouve donc Cte $\int_{\mathbb{R}^m}\frac{g}{\|x\|}\mathrm{d}x_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_m$. □

Pour S une $(2q-1)$-forme différentielle dans un voisinage ouvert $V''\subset\mathbb{C}^n$ de 0, telle que S et $\mathrm{d}S$ sont à coefficients L^1_{loc} dans V'', on peut donc supposer que $\|x\|S_{|V''\cap H}$ est à coefficients L^1_{loc} dans $V''\cap H$. Par le théorème de division d'une distribution par une fonction analytique réelle (cf. [12,15]), on sait que

$$S_{|V''\cap H}=\frac{1}{\|x\|^2}(\|x\|^2S_{|V''\cap H})$$

est bien défini comme courant dans $V''\cap H$.

En supposant, de plus, $\overline{\Delta} \subset H$, on a une écriture de $S_{|\Delta}$ obtenue à l'aide d'une parametrix pour l'opérateur d.

Proposition 3. *Pour presque tout hyperplan réel H de $\mathbb{C}^n$ passant par 0 et pour $\Delta \subset V'' \cap H$ ouvert relativement compact, on peut écrire $S_{|\Delta} = (F + \mathrm{d}G)_{|\Delta}$ avec F et G à coefficients L^1_{loc} dans $V'' \cap H$, sous l'hypothèse $\mathrm{d}\tilde{S}_{|\Delta} = (\mathrm{d}S)\tilde{}_{|\Delta}$.*

Démonstration. On sait que $x_j S_{|V'' \cap H}$ et $x_j(\mathrm{d}S)_{|V''\cap H}$ sont à coefficients L^1_{loc} dans $V'' \cap H$. Donc le courant $\mathrm{d}(x_j S_{|V''\cap H})\tilde{} - (x_j \mathrm{d}S_{|V''\cap H})\tilde{}$ est localement plat dans $V'' \cap H$. Ensuite,

$$\mathrm{d}(x_j S_{|\Delta})\tilde{} - (x_j \mathrm{d}S_{|\Delta})\tilde{} = \mathrm{d}x_j \wedge (S_{|\Delta})\tilde{} + x_j \mathrm{d}\tilde{S}_{|\Delta} - x_j(\mathrm{d}S)\tilde{}_{|\Delta} = \mathrm{d}x_j \wedge (S_{|\Delta})\tilde{}$$

s'écrit $(F_j + \mathrm{d}G_j)_{|\Delta}$ avec F_j et G_j à coefficients L^1_{loc} dans $V'' \cap H$, pour tout j. Cela entraîne $S_{|\Delta} = (F + \mathrm{d}G)_{|\Delta}$ avec F et G à coefficients L^1_{loc} dans $V'' \cap H$. En effet, toute forme différentielle v de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans Δ s'écrit $v = \sum_j u_j \wedge \mathrm{d}x_j$ avec $\mathrm{d}v = \sum_j \mathrm{d}u_j \wedge \mathrm{d}x_j$, où les u_j sont $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans Δ et vérifient

$$\|u_j\|_\infty + \|\mathrm{d}u_j\|_\infty \le C(\|v\|_\infty + \|\mathrm{d}v\|_\infty)$$

pour une constante $C \ge 0$. Alors,

$$|\int_\Delta S_{|\Delta} \wedge v| = |\sum_j \int_\Delta S_{|\Delta} \wedge u_j \wedge \mathrm{d}x_j| \le C' \sum_j (\|u_j\|_\infty + \|\mathrm{d}u_j\|_\infty) \le C''(\|v\|_\infty + \|\mathrm{d}v\|_\infty),$$

ce qui entraîne bien $S_{|\Delta}$ localement plat. □

Maintenant, sans supposer $\overline{\Delta} \subset H$, on peut de la même façon choisir Δ tel que $S_{|\Delta} = (F + \mathrm{d}G)_{|\Delta}$ avec F et G à coefficients L^1_{loc} dans Δ. On considère $P =]0,1[^{2n-1} \times \{0\}$ qui est inclus dans l'hyperplan réel de $\mathbb{C}^n$ d'équation $\mathrm{Im}\, z_n = 0$. Il existe un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme $\psi : P \to \Delta$ se prolongeant en une application continue $\overline{P} \to \overline{\Delta}$. On peut choisir Δ tel que, de plus, $\psi^* F$ et $\psi^* G$ sont à coefficients L^1 dans $\overline{P}$.

Maintenant, la restriction $T_{|\mathcal{M}_j}$ est bien définie de la façon suivante

$$T_{|\mathcal{M}_j} = (\varphi_{|\mathcal{M}_j})^*(S_{|\Delta}).$$

Proposition 4. *On peut choisir $\overline{\mathcal{M}}_j$ contenant $Z_{\mathrm{sing}} \cap (\mathcal{T} \times B''_0)$ et tel que $(\mathrm{pr}_{|\mathcal{M}_j})_*(T_{|\mathcal{M}_j})$ est une mesure bornée dans $\mathcal{T}$.*

Démonstration. On écrit

$$(\mathrm{pr}_{|\mathcal{M}_j})_*(T_{|\mathcal{M}_j}) = \left(\mathrm{pr}_{|\mathcal{M}_j} \circ (\varphi^{-1})_{|\Delta}\right)_*(S_{|\Delta}) = \sigma_*(S_{|\Delta})$$

qui est l'intégrale de $S_{|\Delta}$ sur les fibres de l'application $\sigma = \mathrm{pr}_{|\mathcal{M}_j} \circ (\varphi^{-1})_{|\Delta} : \Delta \to \mathcal{T}$. Pour $w \in \mathcal{T}$, la fibre

$$\sigma^{-1}(w) = \left(\mathrm{pr}_{|\mathcal{M}_j} \circ (\varphi^{-1})_{|\Delta}\right)^{-1}(w) = (\varphi_{|\mathcal{M}_j})\left((\mathrm{pr}_{|\mathcal{M}_j})^{-1}(w)\right)$$

est semi-analytique.

Mais on peut écrire $S_{|\Delta} = (F + \mathrm{d}G)_{|\Delta}$ avec F et G à coefficients L^1_{loc} dans $V'' \cap H$. Pour $w \in \mathcal{T}$, on a, par la formule de Stokes,

$$\sigma_*(S_{|\Delta})(w) = \int_{\sigma^{-1}(w)} S_{|\Delta} = \int_{\sigma^{-1}(w)} F + \int_{\partial(\sigma^{-1}(w))} G.$$

Par ailleurs, $\sigma_*(F_{|\Delta})$ définit une mesure bornée dans $\mathcal{T}$, puisque l'image directe par une application propre d'un courant d'ordre 0 est encore un courant d'ordre 0. D'autre part, les termes $(\sigma_{|\partial\Delta})_*(G_{|\partial\Delta})$ fournissent une mesure bornée dans $\mathcal{T}$, car il y a une compensation lorsqu'on somme sur j, puisque $\partial U_l = \bigcup_j \overline{\mathcal{M}}_j$ est fermée. □

Proposition 5. *Le résidu r est une distribution d'ordre 0 dans Z et on a $R = i_* r$ avec $i : Z \to X$ l'injection canonique. En particulier R est un courant d'ordre 0 dans X.*

Démonstration. D'après la Proposition 1, le courant $i_* r$ est localement plat dans X, donc $R - i_* r$ l'est aussi. On sait que $(R - i_* r)_{|X \setminus Z''} = 0$, donc que supp $(R - i_* r) \subset Z''$ avec $\dim Z'' < p$. Cela entraîne $R - i_* r = 0$. □

2. Opérateurs de Monge–Ampère de la forme $Q \wedge \mathrm{d^c}u$

On rappelle d'abord la théorie de Demailly, Fornaess–Sibony (cf. [6,10]) des opérateurs de Monge–Ampère de la forme $Q \wedge \mathrm{dd^c}u$ associés à des fonctions plurisousharmoniques non bornées, dans le cas particulier suivant.

Soit Q un courant positif fermé de bidimension (k,k) dans un ouvert U de $\mathbb{C}^n$ et u une fonction plurisousharmonique dans U, de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $U \smallsetminus A$, où A est un sous-ensemble analytique de U avec $\dim A < k$. Alors, avec $\beta = \mathrm{i}\partial\bar\partial\|z\|^2$, la mesure $uQ \wedge \beta^k$ est localement de masse finie dans $U \smallsetminus A$ et l'opérateur de Monge–Ampère

$$Q \wedge \mathrm{dd^c}u = \mathrm{dd^c}\big((uQ)\tilde{\ }\big)$$

est un courant positif fermé dans U. De la même façon,

$$Q \wedge \mathrm{d^c}u = \mathrm{d^c}\big((uQ)\tilde{\ }\big)$$

est bien défini comme courant dans U sous la même hypothèse $\dim A < k$. Remarquons que $\mathrm{d}(Q \wedge \mathrm{d^c}u) = Q \wedge \mathrm{dd^c}u$ est positif fermé dans U. Mais les résultats de [6,10] ne donnent pas que $Q \wedge \mathrm{d^c}u$ est d'ordre 0 dans U. On a seulement le résultat suivant.

Proposition 6. *Si $\dim A \le k-2$, les coefficients du courant $Q \wedge \mathrm{d^c}u$, qui est bien défini dans $U \smallsetminus A$, sont des mesures bornées dans $K \smallsetminus A$ pour tout compact K de U.*

Démonstration. Supposant $0 \in U$ et $u < 0$, pour $\frac{1}{2} \le a < 1$, on note $v_a = -(-u)^a$ qui est une fonction plurisousharmonique dans U. Pour $c \neq 0$ tel que $|c| < (1-a)^{\frac{1}{2}}$, la fonction $(1 - |z_k - c|^2)v_a$ est plurisousharmonique dans $U_a = \{z \in U, |z_k - c| < (1-a)^{\frac{1}{2}}\}$. La formule

$$\mathrm{d^c}(|z_k - c|^2) \wedge \mathrm{d}v_a - \mathrm{d}(|z_k - c|^2) \wedge \mathrm{d^c}v_a = \mathrm{dd^c}((1 - |z_k - c|^2)v_a) + v_a\mathrm{dd^c}(|z_k - c|^2) + (|z_k - c|^2 - 1)\mathrm{dd^c}v_a$$

permet de prolonger

$$v_a^{-1}\big(\mathrm{i}\,\bar\partial v_a \wedge \overline{(z_k - c)}\mathrm{d}z_k - \mathrm{i}\partial v_a \wedge (z_k - c)\mathrm{d}\bar z_k\big) \wedge uQ$$

donc $\bar\partial u \wedge Q \wedge \mathrm{i}\mathrm{d}z_k \wedge \mathrm{d}\bar z_k$ en un courant d'ordre 0 au voisinage de 0. En utilisant des changements de coordonnées, on voit que, pour tous j,k, la restriction du courant $\bar\partial u \wedge Q \wedge \mathrm{i}\mathrm{d}z_j \wedge \mathrm{d}\bar z_k$ à $U \smallsetminus A$ se prolonge en un courant d'ordre 0 au voisinage de 0 et qu'il en est de même pour la restriction de $\bar\partial u \wedge Q$. □

Voici maintenant une autre démonstration de la Proposition 6.

Soit τ une $(k-1,0)$-forme différentielle à coefficients constants, χ une fonction continue à support compact dans $U \smallsetminus A$. L'inégalité de Cauchy–Schwarz permet d'écrire

$$\begin{aligned}|\int_U \chi\,\mathrm{i}\mathrm{d}z_k \wedge \bar\partial u \wedge Q \wedge \mathrm{i}^{(k-1)^2}\tau \wedge \bar\tau|^2 \le (&\int_U |\chi|^2\mathrm{i}\mathrm{d}z_k \wedge \mathrm{d}\bar z_k \wedge |u|Q \wedge \mathrm{i}^{(k-1)^2}\tau \wedge \bar\tau) \\ &\times (\int_{U\smallsetminus A} |u|^{-1}\mathrm{i}\partial u \wedge \bar\partial u \wedge Q \wedge \mathrm{i}^{(k-1)^2}\tau \wedge \bar\tau).\end{aligned}$$

En supposant $u < 0$ et avec $v = v_{\frac{1}{2}} = -(-u)^{\frac{1}{2}}$, il suffit de savoir que $\mathrm{i}\partial v \wedge \bar\partial v \wedge Q = (-\frac{\mathrm{i}}{2}\partial\bar\partial u - v\mathrm{i}\partial\bar\partial v) \wedge Q$ est de masse finie dans $K \smallsetminus A$ et pour cela que $v\mathrm{i}\partial\bar\partial v \wedge Q$ l'est ; on a donc bien besoin de l'hypothèse $\dim A \le k-2$.

3. Interprétation cohomologique dans le cas du courant d'intégration associé à Z

Soit $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ un sous-faisceau cohérent d'idéaux et $Z = \operatorname{supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})$ le support du cycle analytique $V(\mathcal{I})$ de X de codimension q associé à $\mathcal{I}$. On note $\mathcal{D}_X'^{0,q}$ le faisceau dans X des germes de $(0,q)$-courants. On va associer à Z une section $\mathcal{R}$ continue dans X du faisceau

$$\bigwedge^q(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X'^{0,q}$$

annulée par $\mathrm{id} \otimes \bar\partial$ et par $\mathcal{I}$. On obtiendra ensuite un élément

$$\{\mathcal{R}\} \in H^q_Z\big(X, \bigwedge^q(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)\big)$$

à partir duquel on retrouvera la classe de cohomologie fondamentale $\{Z\} \in H^q_Z(X, \Omega^q_X)$.

Dans [7], la classe $\{\mathcal{R}\}$ est définie lorsque Z est lisse. Pour Z quelconque, on considère $\mu : \tilde{X} \to X$ une modification, avec $\tilde{Z} = \mu^{-1}Z$ lisse, et la classe

$$\{\tilde{\mathcal{R}}\} \in H^q_{\tilde{Z}}\big(\tilde{X}, \bigwedge^q \big((\mu^*\mathcal{I})/(\mu^*\mathcal{I})^2\big)\big)$$

associée à $\tilde{Z}$ dans $\tilde{X}$. On va donner ici une construction explicite générale de $\{\mathcal{R}\} = \mu_*\{\tilde{\mathcal{R}}\}$.

Soit $f_1, \dots, f_N$ des générateurs de $\mathcal{I}$ sur un ouvert U de X et $f = (f_1, \dots, f_N)$. D'après [17] (voir aussi [2,5]), on a la factorisation

$$[Z]_{|U} = \gamma_f(\frac{\mathrm{i}}{2}\partial\bar{\partial}\|f\|^2)^q/q!$$

avec une distribution $\gamma_f = \lim_{\lambda\to 0^+} \frac{(q-1)!}{\pi^q}\lambda\|f\|^{2(\lambda-q)}$. Avec

$$R_{j_1\dots j_q}(f) = \frac{\mathrm{i}^{q^2}}{2^q}\gamma_f\overline{\partial f_{j_1} \wedge \dots \wedge \partial f_{j_q}}$$

qui est un $(0,q)$-courant dans U, cela s'écrit

$$[Z]_{|U} = \sum_{j_1,\dots,j_q} \partial f_{j_1} \wedge \dots \wedge \partial f_{j_q} \wedge R_{j_1\dots j_q}(f). \tag{3}$$

On note $\tilde{f}_j$ l'image de f_j dans $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ et on définit

$$\mathcal{R}_{|U} = \sum_{j_1,\dots,j_q} (\tilde{f}_{j_1} \wedge \dots \wedge \tilde{f}_{j_q}) \otimes R_{j_1\dots j_q}(f).$$

En utilisant la loi de transformation de γ_f, on va montrer que $\mathcal{R}$ ne dépend pas du choix des $f_1, \dots, f_N$. En effet, soit $g_1, \dots, g_{N'}$ d'autres générateurs de $\mathcal{I}$ sur l'ouvert U et $g = (g_1, \dots, g_{N'})$. Pour $1 \le i \le N'$, on peut écrire

$$g_i = \sum_j h_{ij} f_j$$

où les $h_{ij} \in \mathcal{O}(U)$. Alors pour $I = (i_1, \dots, i_q)$ avec $1 \le i_1 < \dots < i_q \le N'$, on a d'abord

$$\tilde{g}_I = \tilde{g}_{i_1} \wedge \dots \wedge \tilde{g}_{i_q} = \sum_J \det(h_{ij})_{\substack{i\in I\\ j\in J}} \tilde{f}_J.$$

Ensuite, en tout point de $Z \cap U$, on a $\partial g_i = \sum_j h_{ij}\partial f_j$ et donc

$$\partial g_I = \partial g_{i_1} \wedge \dots \wedge \partial g_{i_q} = \sum_J \det(h_{ij})_{\substack{i\in I\\ j\in J}} \partial f_J$$

de sorte que

$$\sum_I \tilde{g}_I \otimes R_I(g) = \frac{\mathrm{i}^{q^2}}{2^q}\gamma_g \sum_{J,K}\sum_I \det(\bar{h}_{ij})_{\substack{i\in I\\ j\in J}} \det(h_{ij})_{\substack{i\in I\\ j\in K}} \tilde{f}_K \otimes \overline{\partial f_J}.$$

Mais le courant d'intégration $[Z]_{|U}$ ne dépend pas des $f_1, \dots, f_N$ et on a donc, d'après la formule (3)

$$\sum_I \partial g_I \wedge R_I(g) = \frac{\mathrm{i}^{q^2}}{2^q}\gamma_g \sum_{J,K}\sum_I \det(\bar{h}_{ij})_{\substack{i\in I\\ j\in J}} \det(h_{ij})_{\substack{i\in I\\ j\in K}} \partial f_K \wedge \overline{\partial f_J}.$$

En notant

$$Q_{KJ} = \sum_I \det(\bar{h}_{ij})_{\substack{i\in I\\ j\in J}} \det(h_{ij})_{\substack{i\in I\\ j\in K}},$$

cela entraîne la relation

$$\gamma_g \sum_{J,K} Q_{KJ}\tilde{f}_K \otimes \overline{\partial f_J} = \gamma_f \sum_J \tilde{f}_J \otimes \overline{\partial f_J} \Leftrightarrow \sum_{J,K}(\gamma_g Q_{KJ} - \gamma_f \delta^K_J)\tilde{f}_K \otimes \overline{\partial f_J} = 0$$

avec δ^K_J le symbole de Kronecker. Puisque $f^{-1}(0) = Z \cap U = g^{-1}(0)$, il existe une fonction a continue dans U telle que $\gamma_f = a\gamma_g$. En tout point de $Z \cap U$, on obtient

$$\sum_{J,K}(Q_{KJ} - a\delta_J^K)\tilde{f}_K \otimes \overline{\partial f_J} = 0. \tag{4}$$

La loi générale de transformation de γ_f s'exprime donc de la façon suivante (voir aussi [4]).

Proposition 7. *Avec a une fonction continue dans U, vérifiant dans $Z \cap U$ la relation (4), on a $\gamma_f = a\gamma_g$.*

On conclut que

$$\sum_I \tilde{g}_I \otimes R_I(g) = \frac{\mathrm{i}^{q^2}}{2^q}\gamma_f \sum_{J,K}\delta_J^K \tilde{f}_K \otimes \overline{\partial f_J} = \sum_J \tilde{f}_J \otimes R_J(f)$$

définit donc bien une section continue de $\bigwedge^q(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X'^{0,q}$. Son image par $\mathrm{id} \otimes \bar\partial$ est égale à

$$\sum_J \tilde{f}_J \otimes \bar\partial\big(R_J(f)\big)$$

avec

$$\bar\partial\big(R_J(f)\big) = \frac{\mathrm{i}^{q^2}}{2^q}\bar\partial\gamma_f \wedge \overline{\partial f_J}.$$

Or γ_f ne dépend que de $\|f\|^2$ et $\bar\partial(\|f\|^2) = \sum_j f_j \overline{\partial f_j}$. Comme $f_j \tilde{f}_J = 0$ dans $\bigwedge^q(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)$, cette image est donc égale à 0 et on obtient bien une classe de cohomologie $\{\mathcal{R}\}$. Pour en déduire la classe fondamentale $\{Z\}$, on introduit la section

$$D \in H^0\big(X, \mathcal{H}om\big(\bigwedge^q(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2), \Omega_X^q/\mathcal{I}\Omega_X^q\big)\big)$$

définie par

$$D_x(\tilde{h}_1 \wedge \ldots \wedge \tilde{h}_q) = (\partial h_1 \wedge \ldots \wedge \partial h_q)\tilde{}$$

qui est l'image de $\partial h_1 \wedge \ldots \wedge \partial h_q$ dans $\Omega_X^q/\mathcal{I}\Omega_X^q$ pour $h_1, \ldots, h_q \in \mathcal{I}_x$.

Proposition 8. *La classe fondamentale $\{Z\}$ est l'image de $\{\mathcal{R}\} \otimes D$ par l'application de Yoneda*

$$H_Z^q\big(X, \bigwedge^q(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)\big) \otimes_{\mathbb{C}} H^0\big(X, \mathcal{H}om\big(\bigwedge^q(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2), \Omega_X^q/\mathcal{I}\Omega_X^q\big)\big) \to H_Z^q(X, \Omega_X^q).$$

Cette Proposition étend au cas général le résultat de [7] et par la même méthode (voir [11] pour l'accouplement de Yoneda).

4. Caractérisation des intersections complètes dans $\mathbb{P}_n$

Soit $Z \subset \mathbb{P}_n$ un sous-ensemble algébrique de dimension pure $p = n - q$, défini par des équations $0 = F_1 = \ldots = F_N$ où les $F_j(X_0, \ldots, X_n)$ sont des polynômes homogènes en $(X_0, \ldots, X_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$. On va déterminer des conditions sur les F_j pour que Z soit une intersection complète.

On note ω la forme de Fubini–Study dans $\mathbb{P}_n$ et $\deg Z = \int_{\mathbb{P}_n}[Z] \wedge \omega^p$ le degré de Z.

Proposition 9. *Le sous-ensemble algébrique Z est intersection complète dans $\mathbb{P}_n$ d'hypersurfaces algébriques de même degré lorsqu'il existe une fonction quasi plurisousharmonique U dans $\mathbb{P}_n$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $\mathbb{P}_n \setminus Z$, telle que l'égalité*

$$[Z] = (\deg Z)(\omega + \mathrm{dd^c}U)^q$$

entre courants soit vérifiée dans $\mathbb{P}_n$.

Démonstration. Soit $\delta > 0$ défini par $\delta^q = \deg Z$. Sachant que $\omega - [\mathbb{P}_{n-1}]$ est $\mathrm{dd^c}$-exact dans $\mathbb{P}_n$, on peut écrire

$$\delta(\omega + \mathrm{dd^c}U)_{|\mathbb{C}^n} = \mathrm{dd^c}\varphi$$

avec $\mathbb{C}^n = \mathbb{P}_n \setminus \mathbb{P}_{n-1}$ et φ de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $\mathbb{C}^n \setminus Z \cap \mathbb{C}^n$ telle que $[Z \cap \mathbb{C}^n] = (\mathrm{dd^c}\varphi)^q$. Comme

$$(\omega + \mathrm{dd^c}U)^q_{|\mathbb{P}_n \setminus Z} = 0,$$

on peut, d'après [1], associer à U un sous-fibré $\mathcal{V} \subset T\mathbb{P}_{n|\mathbb{P}_n \setminus Z}$ holomorphe intégrable de rang $p+1$, défini par

$$\mathcal{V}_x = \{X \in T_x\mathbb{P}_n, (\omega + \mathrm{dd^c}U)_x(X, \bar{v}) = 0, \forall v \in T_x\mathbb{P}_n\}$$

pour tout $x \in \mathbb{P}_n \setminus Z$. En fait, pour $x \in \mathbb{C}^n \setminus Z \cap \mathbb{C}^n$, on a

$$\mathcal{V}_x = \{X \in \mathbb{C}^n, (\mathrm{dd^c}\varphi)_x(X, \bar{v}) = 0, \forall v \in \mathbb{C}^n\},$$

autrement dit $\mathcal{V}_{|\mathbb{C}^n \setminus Z \cap \mathbb{C}^n}$ est défini par les $(1,0)$-formes différentielles $\partial(\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}_1}), \ldots, \partial(\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}_n})$.

On obtient ainsi un feuilletage holomorphe $(\mathcal{M}_\alpha)_{\alpha \in A}$ de $\mathbb{P}_n \setminus Z$. Alors $\overline{\mathcal{M}_\alpha}$ est un sous-ensemble algébrique de $\mathbb{P}_n$ de dimension $p+1$ et $\overline{\mathcal{M}_\alpha} \supset Z$ pour chaque α.

On va maintenant calculer $\deg \overline{\mathcal{M}_\alpha}$ en utilisant l'application holomorphe $\pi : \mathbb{P}_n \setminus Z \to A$ définie par $\pi(x) = \alpha$ si $x \in \mathcal{M}_\alpha$. Signalons que $\dim A = n - \dim \overline{\mathcal{M}_\alpha} = q-1$. Comme $\varphi_{|\mathcal{M}_\alpha \cap \mathbb{C}^n}$ est pluriharmonique, on a

$$(\omega + \mathrm{dd^c}U)_{|\mathcal{M}_\alpha \cap \mathbb{C}^n} = 0 \Rightarrow (\omega + \mathrm{dd^c}U)^{q-1}_{|\mathcal{M}_\alpha \cap \mathbb{C}^n} = 0$$

et on peut donc écrire $\delta^{q-1}(\omega + \mathrm{dd^c}U)^{q-1} = \pi^*\nu$ pour une forme volume ν sur A. Pour w une $(p+1,p+1)$-forme différentielle de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $\mathbb{P}_n$, on peut écrire

$$\int_{\mathbb{P}_n} \delta^{q-1}(\omega + \mathrm{dd^c}U)^{q-1} \wedge w = \int_A \pi_* w \wedge \nu = \int_{\alpha \in A} (\int_{\overline{\mathcal{M}_\alpha}} w)\nu(\alpha)$$

autrement dit, dans $\mathbb{P}_n$, on a la lamination

$$\delta^{q-1}(\omega + \mathrm{dd^c}U)^{q-1} = \int_{\alpha \in A} [\overline{\mathcal{M}_\alpha}]\nu(\alpha)$$

qui entraîne l'égalité $\delta^{q-1} = (\deg \overline{\mathcal{M}_\alpha}) \int_A \nu$ entre degrés. En fait, A est rationnelle et $\int_A \nu = 1$, ce qui donne $\deg \overline{\mathcal{M}_\alpha} = \delta^{q-1}$.

Soit $H \subset \mathbb{P}_n$ une hypersurface algébrique de degré δ contenant Z. Alors $\overline{\mathcal{M}_\alpha} \cap H$ contient Z et a pour degré $\delta^q = \deg Z$, donc $\overline{\mathcal{M}_\alpha} \cap H = Z$.

Localement, dans $\mathbb{C}^n \setminus Z \cap \mathbb{C}^n$, on peut définir $\mathcal{M}_\alpha$ par des équations $g_1 = \alpha_1, \ldots, g_{q-1} = \alpha_{q-1}$ avec des fonctions holomorphes locales $g_1, \ldots, g_{q-1}$ pour $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{q-1}) \in \mathbb{C}^{q-1}$. Le sous-fibré $\mathcal{V}_{|\mathbb{C}^n \setminus Z \cap \mathbb{C}^n}$ est alors défini localement par les 1-formes différentielles holomorphes $\partial g_1, \ldots, \partial g_{q-1}$ et donc

$$\mathrm{vect}\big((\partial g_1)_x, \ldots, (\partial g_{q-1})_x\big) = \mathrm{vect}\big(\partial(\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}_1})_x, \ldots, \partial(\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}_n})_x\big)$$

avec les $\partial(\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}_j})_x$ définies globalement pour $x \in \mathbb{C}^n \setminus Z \cap \mathbb{C}^n$. Par la formule (3), dans le cas intersection complète locale, on a

$$[\mathcal{M}_\alpha \cap \mathbb{C}^n] = \frac{\mathrm{i}^{(q-1)^2}}{2^{q-1}} \delta_0(g_1 - \alpha_1, \ldots, g_{q-1} - \alpha_{q-1}) \partial g_1 \wedge \ldots \wedge \partial g_{q-1} \wedge \overline{\partial g_1 \wedge \ldots \wedge \partial g_{q-1}}$$

avec δ_0 la masse de Dirac en 0 dans $\mathbb{C}^{q-1}$. En conséquence on peut écrire

$$[\overline{\mathcal{M}_\alpha}] = \delta^{q-1}(\omega + \mathrm{dd^c}V_\alpha)^{q-1}$$

pour une fonction quasi-plurisousharmonique V_α globale dans $\mathbb{P}_n$ et on conclut par récurrence sur q. □

4.1. *Équations différentielles caractérisant les intersections complètes dans $\mathbb{P}_n$*

Nous allons mettre en équations la condition nécessaire et suffisante de la Proposition 9, en effectuant un slicing.

Soit $G(q+1, \mathbb{C}^{n+1}) = \mathbb{G}_{q,n}$ la grassmannienne des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^{n+1}$ de dimension $q+1$. Pour $W \in \mathbb{G}_{q,n}$, on note $P(W)$ le sous-espace projectif de $\mathbb{P}_n$ associé à W. Pour W générique, on peut alors écrire la restriction

$$[Z]_{|P(W)} = [Z \cap P(W)] = g_W \omega^q_{|P(W)}$$

avec g_W une mesure positive sur $P(W)$ qui est somme de $\deg Z$ masses de Dirac. On obtient donc la condition

$$(\deg Z)(\omega_{|P(W)} + \mathrm{dd^c}U_{|P(W)})^q = g_W \omega^q_{|P(W)}$$

sur $U_{|P(W)}$. On doit donc résoudre dans $P(W)$ l'équation de Monge–Ampère singulière

$$\frac{(\omega_{|P(W)} + \mathrm{dd^c}\Phi_W)^q}{\omega^q_{|P(W)}} = \frac{g_W}{\int_{P(W)} g_W \omega^q_{|P(W)}} \tag{5}$$

avec Φ_W fonction quasi plurisousharmonique dans $P(W)$. L'existence de Φ_W est garantie, sans hypothèse sur Z, par le fait que tout sous-ensemble fini de $\mathbb{P}_n$ est intersection complète, d'après Eisenbud–Evans (cf. [8]). En revanche, [3] ne semble pas s'appliquer ici.

Pour $[x] \in \mathbb{P}_n$, on écrit $W \ni x$ sous la forme $W = \mathrm{vect}(x, v_1, \ldots, v_q)$ avec $v_1, \ldots, v_q$ dans $\mathbb{C}^{n+1}$. Si $\Phi_W([x])$ pour $W \ni x$ ne dépend pas de $W \ni x$, alors Z est intersection complète. Cela revient à dire que les équations différentielles

$$\frac{\partial}{\partial v_I}\Phi_W([x]) = 0 = \frac{\partial}{\partial \bar{v}_I}\Phi_W([x]) \tag{6}$$

sont vérifiées pour tout multi-indice $I = (i_1, \ldots, i_q)$ où $0 \le i_1 < \ldots < i_q \le n$, avec l'opérateur différentiel

$$\frac{\partial}{\partial v_I} = \det\Big(\frac{\partial}{\partial v_{k,i_l}}\Big)_{1\le k,l\le q}$$

en désignant par $v_{k,i}$ les composantes de v_k.

Proposition 10. *Le sous-ensemble algébrique Z est intersection complète dans $\mathbb{P}_n$ lorsque la solution Φ_W de (5) vérifie les conditions (6) pour tout $W \ni x$.*

Signalons qu'une caractérisation différentielle des intersections complètes de $\mathbb{P}_n$ figure aussi dans [14].

4.2. Cas où $Z \subset \mathbb{C}^n$

Soit $Z \subset \mathbb{C}^n$ un sous-ensemble algébrique de dimension pure $p = n - q$, défini par des équations $0 = f_1 = \ldots = f_N$ où les $f_j(x_1, \ldots, x_n)$ sont des polynômes en $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$. On va déterminer des conditions sur les f_j pour que Z soit une intersection complète, toujours en utilisant la factorisation du courant d'intégration $[Z]$ de [17].

Pour $1 \le i \le q$, on note $g_i = \sum_j h_{ij} f_j$ où les $h_{ij}(x_1, \ldots, x_n)$ sont des polynômes en $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$. Alors

$$(\mathrm{dd^c} \log \|g\|)^q_{|\mathbb{C}^n \setminus g^{-1}(0)} = 0$$

et $g^{-1}(0) \supset Z$ avec $g = (g_1, \ldots, g_q) \in \mathbb{C}^q$. On va déterminer les conditions sur les h_{ij} pour que

$$[Z] = [g^{-1}(0)] = (\mathrm{dd^c} \log \|g\|)^q$$

en écrivant

$$(\mathrm{dd^c} \log \|g\|)^q = \frac{\mathrm{i}^{q^2}}{2^q}\delta_0(g_1, \ldots, g_q)\partial g_1 \wedge \ldots \wedge \partial g_q \wedge \overline{\partial g_1 \wedge \ldots \wedge \partial g_q}$$

avec $\delta_0(g_1, \ldots, g_q)$ l'image inverse par g de δ_0 la masse de Dirac en 0 dans $\mathbb{C}^q$. On peut obtenir $\delta_0(g_1, \ldots, g_q)$ par la formule

$$\delta_0(g_1, \ldots, g_q) = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{(q-1)!}{\pi^q}\lambda \|g\|^{2(\lambda - q)} = \gamma_g.$$

Avec $f = (f_1, \ldots, f_N) \in \mathbb{C}^N$, on a, de l'autre côté,

$$[Z] = [f^{-1}(0)] = (\mathrm{dd^c} \log \|f\|)^q - (\mathrm{dd^c} \log \|f\|)^q_{|\mathbb{C}^n \setminus f^{-1}(0)} = \gamma_f\Big(\frac{\mathrm{i}}{2}\partial\bar\partial \|f\|^2\Big)^q/q!$$

avec de même $\gamma_f = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{(q-1)!}{\pi^q}\lambda \|f\|^{2(\lambda-q)}$. La formule (4) revient ici à

$$\sum_{|J|=|K|=q} (P_K \bar{P}_J - a\delta_J^K)\tilde{f}_K \otimes \overline{\partial f_J} = 0$$

et la Proposition 7 s'écrit

$$\gamma_g = \frac{\gamma_f}{a}$$

où $K = (k_1, \ldots, k_q)$ avec $1 \le k_1 < \ldots < k_q \le N$ et $P_K = \det(h_{ij})_{\substack{1\le i\le q \\ j \in K}}$, puisque la seule possibilité est ici $I = (1, \ldots, q)$.

La condition est

$$\gamma_g(\partial\bar\partial \|g\|^2)^q = \gamma_f(\partial\bar\partial \|f\|^2)^q,$$

et on a alors

$$(\partial\bar\partial \|g\|^2)^q = a(\partial\bar\partial \|f\|^2)^q$$

en tout point $x \in Z$. Mais en tout point $x \in Z$, on a $\partial g_i = \sum_j h_{ij} \partial f_j$ et donc

$$(\partial\bar\partial \|g\|^2)^q = q!(-1)^{q(q-1)/2} \sum_{|J|=|J'|=q} P_J \overline{P}_{J'} \partial f_J \wedge \overline{\partial f}_{J'}$$

avec $\partial f_J = \partial f_{j_1} \wedge \ldots \wedge \partial f_{j_q}$ pour $J = (j_1, \ldots, j_q)$ avec $1 \le j_1 < \ldots < j_q \le N$. De l'autre côté,

$$(\partial\bar\partial \|f\|^2)^q = q!(-1)^{q(q-1)/2} \sum_{|J|=q} \partial f_J \wedge \overline{\partial f}_J$$

et en tout point de Z, il vient

$$\sum_{|J|=|J'|=q} P_J \overline{P}_{J'} \partial f_J \wedge \overline{\partial f}_{J'} = a \sum_{|J|=q} \partial f_J \wedge \overline{\partial f}_J \in \bigwedge^{q,q} (\mathbb{C}^n)^*.$$

Proposition 11. *Le sous-ensemble algébrique Z est intersection complète de codimension q dans $\mathbb{C}^n$ lorsqu'il existe des $(h_{ij})_{\substack{1 \le i \le q,\\ 1 \le j \le N}}$ tels que la fonction a dans $Z = f_1^{-1}(0) \cap \ldots \cap f_N^{-1}(0)$, définie par la relation*

$$\sum_{|J|=|J'|=q} P_J \overline{P}_{J'} \partial f_J \wedge \overline{\partial f}_{J'} = a \sum_{|J|=q} \partial f_J \wedge \overline{\partial f}_J,$$

vérifie $a > 0$ en tout point de Z.

Démonstration. Comme on a toujours $g^{-1}(0) \supset f^{-1}(0)$, on peut toujours écrire $\gamma_f = a_1 \gamma_g$ avec une fonction $a_1 \ge 0$ et on aura $g^{-1}(0) = f^{-1}(0)$ lorsque $a_1 > 0$. Nécessairement $a_1 = a$. $\square$

Si x est un point lisse de Z, alors $\partial f_J(x) \in \bigwedge^q (\mathbb{C}^n / T_x Z)^*$, qui est de dimension 1. Il existe donc des coefficients $c_{JJ'}(x)$ tels que

$$(\partial f_J \wedge \overline{\partial f}_{J'})(x) = c_{JJ'}(x) \sum_{|J|=q} \partial f_J(x) \wedge \overline{\partial f}_J(x)$$

et on obtient

$$\sum_{|J|=|J'|=q} P_J \overline{P}_{J'} c_{JJ'} = a$$

avec $(P_J)_J \in \mathbb{C}^{C_N^q}$ où C_N^q est le coefficient du binôme. En fait $c_{JJ'}$ est de la forme

$$c_{JJ'} = \frac{b_J \bar b_{J'}}{\sum_{|K|=q} |b_K|^2}$$

pour certaines fonctions b_J holomorphes dans Z et cela devient

$$|\sum_{|J|=q} P_J b_J|^2 = a \sum_{|K|=q} |b_K|^2. \tag{7}$$

En conclusion, la condition est l'existence de $(h_{ij})_{\substack{1 \le i \le q,\\ 1 \le j \le N}}$ tels que $\sum_{|J|=q} P_J b_J \ne 0$ en tout point de Z.

Références

[1] E. Bedford, M. Kalka, Foliations and complex Monge–Ampère equations, Commun. Pure Appl. Math. 30 (5) (1977) 543–571.
[2] C.A. Berenstein, A. Yger, Analytic residue theory in the non-complete intersection case, J. Reine Angew. Math. 527 (2000) 203–235.
[3] S. Boucksom, P. Eyssidieux, V. Guedj, A. Zeriahi, Monge–Ampère equations in big cohomology classes, Acta Math. 205 (2) (2010) 199–262.
[4] J.-Y. Boyer, M. Hickel, Une généralisation de la loi de transformation pour les résidus, Bull. Soc. Math. Fr. 125 (3) (1997) 315–335.
[5] N. Coleff, M. Herrera, D. Lieberman, Algebraic cycles as residues of meromorphic forms, Math. Ann. 254 (1980) 73–87.
[6] J.-P. Demailly, Monge–Ampère operators, Lelong numbers and intersection theory, in : Complex Analysis and Geometry, in : The University Series in Mathematics, Plenum Press, 1993, pp. 115–193.
[7] J.-P. Demailly, M. Passare, Courants résiduels et classe fondamentale, Bull. Sci. Math. 119 (1) (1995) 85–94.
[8] D. Eisenbud, E.G. Evans, Every algebraic set in n-space is the intersection of n hypersurfaces, Invent. Math. 19 (1973) 107–112.
[9] H. Federer, Geometric Measure Theory, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 153, Springer Verlag, 1969.
[10] J.E. Fornaess, N. Sibony, Oka's inequality for currents and applications, Math. Ann. 301 (1995) 399–419.
[11] P. Griffiths, J. Harris, Principles of Algebraic Geometry, John Wiley and Sons, 1978.

[12] L. Hörmander, On the division of distributions by polynomials, Ark. Mat. 3 (1958) 555–568.
[13] J.R. King, The currents defined by analytic varieties, Acta Math. 127 (3–4) (1971) 185–220.
[14] J.M. Landsberg, Differential-geometric characterizations of complete intersections, J. Differ. Geom. 44 (1) (1996) 32–73.
[15] S. Lojasiewicz, Division d'une distribution par une fonction analytique de variables réelles, C. R. Hebd. Séances Acad. Sci. 246 (1958) 683–686.
[16] S. Lojasiewicz, Triangulation of semi-analytic sets, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa (3) 18 (1964) 449–474.
[17] M. Méo, Résidus dans le cas non nécessairement intersection complète, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 333 (2001) 33–38.