C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 354 (2016) 1205–1208

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Analyse fonctionnelle

Interpolation : $B^\theta = B_\theta$ pour un θ entraîne $B^\theta = B_\theta$ pour tout θ

Interpolation: $B^\theta = B_\theta$ for some beta implies $B^\theta = B_\theta$ for all θ

Daher Mohammad

16, Square Albert Schweitzer-77350 Le Mée-sur-Seine, France

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 14 juin 2016
Accepté après révision le 27 octobre 2016
Disponible sur Internet le 10 novembre 2016

Présenté par Gilles Pisier

RÉSUMÉ

Soit (B_0, B_1) un couple d'interpolation. On montre que, si les interpolés complexes B^β et B_β coïncident pour un $\beta \in]0, 1[$, alors on a l'égalité $B^\theta = B_\theta$ pour tout $\theta \in]0, 1[$.

ABSTRACT

Let (B_0, B_1) be an interpolation couple. We show that, if the complex interpolation spaces B^β and B_β coincide for some $\beta \in]0, 1[$, then $B^\theta = B_\theta$ holds for every $\theta \in]0, 1[$.

1. Introduction, notations, rappels

Soit $\overline{B} = (B_0, B_1)$ un couple d'interpolation complexe au sens de [2, Chap. II]. Les espaces d'interpolation B_θ, B^θ, $\theta \in [0, 1[$ obtenus par les deux méthodes d'interpolation complexe [2, Chap. IV] ne coincident pas en général : B_θ est toujours un sous-espace isométrique de B^θ [1], et il existe un couple (B_0, B_1) tel que $B_\theta \subsetneq B^\theta$ pour tout $\theta \in]0, 1[$ [3, p. 125]. Est-il possible que $B_\theta = B^\theta$ pour certains θ, mais pas pour tous ? Nous donnons au théorème 2.3 la réponse négative attendue : si $B_\beta = B^\beta$ pour un $\beta \in]0, 1[$, alors $B_\theta = B^\theta$ pour tout $\theta \in]0, 1[$. Dans [4, Prop.16], nous le montrions sous l'hypothèse supplémentaire (plus faible que la séparabilité) que B_β est un espace faiblement de Lindelöf. Nous utilisons ici des résultats de [4].

Soient $S = \{z \in \mathbb{C};\ 0 \le \mathrm{Re}(z) \le 1\}$ et S_0 son intérieur. On note $\mathcal{F}(\overline{B})$ l'espace des fonctions $f : S \to B_0 + B_1$, continues bornées sur S, holomorphes sur S_0, telles que l'application $\tau \to f(j + i\tau)$ soit continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans B_j et $\|f(j + i\tau)\|_{B_j} \to 0$ quand $|\tau| \to \infty$, pour $j \in \{0, 1\}$. Si $f \in \mathcal{F}(\overline{B})$, on pose :

$$\|f\|_{\mathcal{F}(\overline{B})} = \max\Big\{\sup_{\tau\in\mathbb{R}} \|f(i\tau)\|_{B_0}, \sup_{\tau\in\mathbb{R}} \|f(1 + i\tau)\|_{B_1}\Big\}.$$

Adresse e-mail : m.daher@orange.fr.

http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2016.10.023
1631-073X/

Soit $\theta \in]0,1[$. L'espace d'interpolation $(B_0, B_1)_\theta = B_\theta$ est l'espace $\{f(\theta);\ f \in \mathcal{F}(\overline{B})\}$, de Banach [2, th. 4.1.2] pour la norme quotient

$$\|a\|_{B_\theta} = \inf\{\|f\|_{\mathcal{F}(\overline{B})};\ f(\theta) = a\}.$$

On note $\mathcal{G}(\overline{B})$ l'espace des fonctions g à valeurs dans $B_0 + B_1$, continues sur S, holomorphes sur S_0 et telles que

(C) $\sup_{z\in S} \frac{\|g(z)\|_{B_0+B_1}}{1+|z|} < +\infty$,

(C') on a $g(j + i\tau) - g(j + i\tau') \in B_j$, pour tous $\tau, \tau' \in \mathbb{R}$, $j \in \{0,1\}$ et la quantité suivante (qui définit une norme sur le quotient de $\mathcal{G}(\overline{B})$ par les constantes à valeurs dans $B_0 + B_1$) est finie :

$$\|g\|_{\mathcal{G}(\overline{B})} = \max\begin{bmatrix} \sup_{\tau\neq\tau'\in\mathbb{R}}\left(\frac{\|g(i\tau)-g(i\tau')\|_{B_0}}{|\tau-\tau'|}\right), \\ \sup_{\tau\neq\tau'\in\mathbb{R}}\left(\frac{\|(g(1+i\tau)-g(1+i\tau')\|_{B_1}}{|\tau-\tau'|}\right) \end{bmatrix}.$$

L'espace $(B_0, B_1)^\theta = B^\theta = \{g'(\theta);\ g \in \mathcal{G}(\overline{B})\}$ est de Banach [2, th. 4.1.4] pour la norme

$$\|a\|_{B^\theta} = \inf\{\|g\|_{\mathcal{G}(\overline{B})};\ g'(\theta) = a\}.$$

Rappelons que (B_0, B_1) est un couple régulier si $B_0 \cap B_1$ est dense dans B_0 et B_1.On utilisera les faits suivants :
rappel 1 : pour tout couple (B_0, B_1) et tout $\theta \in]0,1[$, $B_0 \cap B_1$ est dense dans B_θ [2, Th.4.2.2] ;
rappel 2 : si (B_0, B_1) est un couple régulier, le dual de $B_0 \cap B_1$ est $B_0^* + B_1^*$ [2, Th. 2.7.1] ;
rappel 3 : si (B_0, B_1) est un couple régulier, le dual de B_θ est $(B_0^*, B_1^*)^\theta$, $\theta \in]0,1[$ [2, Th.4.5.1] ;
rappel 4 : B_θ est toujours un sous-espace isométrique de B^θ [1].
Pour un Banach X, on note $\langle x, x^*\rangle$ l'accouplement entre un élément de X et un élément de son dual X^*.

2. Résultats

La preuve du résultat principal (théorème 2.3 ci-dessous) nécessite les deux lemmes suivants.

Lemme 2.1. *Soient (B_0, B_1) un couple régulier, $\beta \in]0,1[$, $a \in B_\beta$ et $\psi \in \mathcal{G}(B_0^*, B_1^*)$. Alors l'application $\tau \in \mathbb{R} \to \langle a, \psi'(\beta + i\tau)\rangle$ est continue.*

Démonstration. D'après le rappel 1, il existe une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ dans $B_0 \cap B_1$ convergeant vers a dans B_β. D'après le rappel 2 et la continuité de $\psi' : S_0 \to B_0^* + B_1^*$, les applicatons $\tau \to \langle a_n, \psi'(\beta + i\tau)\rangle$ sont continues sur $\mathbb{R}$. Elles convergent uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $\tau \to \langle a, \psi'(\beta + i\tau)\rangle$ car, d'après le rappel 3,

$$\begin{aligned}\left|\langle a_n - a, \psi'(\beta + i\tau)\rangle\right| &\leq \|a_n - a\|_{B_\beta} \left\|\psi'(\beta + i\tau)\right\|_{(B_0^*, B_1^*)^\beta} \\ &\leq \|a_n - a\|_{B_\beta} \|\psi\|_{\mathcal{G}(B_0^*, B_1^*)}.\end{aligned}$$

Donc l'application $\tau \to \langle a, \psi'(\beta + i\tau)\rangle$ est continue. □

Lemme 2.2. *Soient (B_0, B_1), β, a, ψ comme dans le lemme 2.1. Notons, pour $n \geq 1$, $z \in S$,*

$$\psi_n(z) = -in e^{z^2} [\psi(z + i/n) - \psi(z)].$$

Alors $\langle a, \psi_n(\beta)\rangle \to_{n\to+\infty} \langle a, e^{\beta^2}\psi'(\beta)\rangle$.

Démonstration. Comme ψ_n est dans $\mathcal{F}(B_0^*, B_1^*)$, avec

$$\|\psi_n\|_{\mathcal{F}(B_0^*, B_1^*)} \leq e\, \|\psi\|_{\mathcal{G}(B_0^*, B_1^*)},$$

$\psi_n(\theta)$ est dans $(B_0^*, B_1^*)_\theta$ et, pour tout $\theta \in]0,1[$,

$$\|\psi_n(\beta)\|_{(B_0^*, B_1^*)_\theta} \leq e\, \|\psi\|_{\mathcal{G}(B_0^*, B_1^*)}. \tag{2.1}$$

En particulier $\langle a, \psi_n(\beta)\rangle$ a bien un sens d'après les rappels 3 et 4.

Comme dans la preuve du lemme 2.1, soit $(a_k)_{k\geq 0}$ une suite dans $B_0 \cap B_1$ telle que $a_k \to_{k\to+\infty} a$ dans B_β. Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$e\,\|\psi\|_{\mathcal{G}(B_0^*,B_1^*)}\,\|a_{k_0}-a\|_{B_\beta}<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Par le rappel 2, comme ψ est holomorphe : $S_0\to B_0^*+B_1^*$, $\langle a_{k_0},\psi_n(\beta)\rangle\to_{n\to+\infty}\left\langle a_{k_0},\mathrm{e}^{\beta^2}\psi'(\beta)\right\rangle$; il existe donc $n_0\in\mathbb{N}$ tel que, pour $n\ge n_0$,

$$\left|\left\langle a_{k_0},\psi_n(\beta)-\mathrm{e}^{\beta^2}\psi'(\beta)\right\rangle\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Pour $n\ge n_0$ nous avons donc, en utilisant (2.1) et le rappel 4,

$$\begin{aligned}&\left|\left\langle a,\psi_n(\beta)-\mathrm{e}^{\beta^2}\psi'(\beta)\right\rangle\right|\\ &\le\left|\left\langle a_{k_0},\psi_n(\beta)-\mathrm{e}^{\beta^2}\psi'(\beta)\right\rangle\right|+\left|\left\langle a-a_{k_0},\mathrm{e}^{\beta^2}\psi'(\beta)\right\rangle\right|+\left|\langle a-a_{k_0},\psi_n(\beta)\rangle\right|\\ &\le\frac{\varepsilon}{3}+\|a_{k_0}-a\|_{B_\beta}\,(\mathrm{e}^{\beta^2}\,\|\psi'(\beta)\|_{(B_0^*,B_1^*)^\beta}+\|\psi_n(\beta)\|_{(B_0^*,B_1^*)_\beta})\le\varepsilon.\end{aligned}$$

Ceci prouve le lemme. $\square$

Théorème 2.3. *Soit (B_0,B_1) un couple d'interpolation. Si $B_\beta=B^\beta$ pour un $\beta\in\,]0,1[$, alors $B_\theta=B^\theta$ pour tout $\theta\in\,]0,1[$.*

Démonstration. a) On peut supposer que (B_0,B_1) est un couple régulier. En effet, soit B'_j l'adhérence de $B_0\cap B_1$ dans B_j, $j\in\{0,1\}$. D'après [1, Lemme, p. 776], pour tout $\theta\in\,]0,1[$,

$$B_\theta=(B'_0,B'_1)_\theta\quad et\quad B^\theta=(B'_0,B'_1)^\theta.$$

D'après [4, Lemme 4 c) $\Longrightarrow$ a) et théorème 5], il suffit de montrer que, pour toute $g\in\mathcal{G}(B_0,B_1)$, l'application $\phi_g:\tau\in\mathbb{R}\to g'(\beta+\mathrm{i}\tau)$ est à valeurs dans un sous-espace fermé séparable de B_β.

Soient V le sous-espace fermé engendré par l'image de ϕ_g dans $B_\beta=B^\beta$ et V' le sous-espace fermé (séparable) engendré par les $\phi_g(\tau_k)$, où $(\tau_k)_{k\ge1}$ est une suite dense dans $\mathbb{R}$. Si $V'\subsetneq V$, il existe, d'après le théorème de Hahn–Banach, $a^*\in(B_\beta)^*$ et un $\tau_0\in\mathbb{R}$ tels que $\langle\phi_g(\tau_k),a^*\rangle=0$ pour tout $k\ge1$ et $\langle\phi_g(\tau_0),a^*\rangle\ne0$; en particulier, $\tau\to\langle\phi_g(\tau),a^*\rangle$ n'est pas continue. La continuité des applications : $\tau\in\mathbb{R}\to\langle g'(\beta+\mathrm{i}\tau),a^*\rangle$ pour tout $a^*\in(B_\beta)^*$ impliquera donc le théorème.

Soient $g\in\mathcal{G}(B_0,B_1)$ et $a^*\in(B_\beta)^*$. D'après le rappel 3, il existe $\psi\in\mathcal{G}(B_0^*,B_1^*)$ telle que $\psi'(\beta)=a^*$. D'après ce qui précède, il suffit de montrer la continuité sur $\mathbb{R}$ de l'application

$$\tau\to H(\beta+\mathrm{i}\tau)=\left\langle g'(\beta+\mathrm{i}\tau),\mathrm{e}^{\beta^2}\psi'(\beta)\right\rangle,$$

qui est bien définie puisque $B_\beta=B^\beta$. Quitte à translater g, il suffit d'en montrer la continuité à l'origine.

Notons, pour $\tau\in\mathbb{R}$, $z\in S_0$ et ψ_n associée à ψ comme dans le lemme 2.2,

$$H_{n,\tau}(z)=\langle g'(z+\mathrm{i}\tau),\psi_n(z)\rangle,\ n\ge1.$$

Le lemme 2.2 implique, pour tout $\tau\in\mathbb{R}$,

$$H(\beta+\mathrm{i}\tau)=\lim_{n\to+\infty}H_{n,\tau}(\beta).\tag{2.2}$$

b) Montrons que les fonctions $H_{n,\tau}$ sont bien définies, uniformément bornées et holomorphes sur S_0.

Soit $z\in S_0$. On a vu que $\psi_n(z)\in(B_0^*,B_1^*)_{\mathrm{Re}(z)}$ et que, par définition, $g'(z+\mathrm{i}\tau)\in B^{\mathrm{Re}(z)}$. D'après [4, Lemme 6] et [4, (9), (8)], $B^{\mathrm{Re}(z)}$ s'injecte continûment dans $\left[(B_0^*,B_1^*)_{\mathrm{Re}(z)}\right]^*$. Donc $H_{n,\tau}$ est bien définie et, d'après (2.1),

$$\begin{aligned}|H_{n,\tau}(z)|&\le\|g'(z+\mathrm{i}\tau)\|_{B^{\mathrm{Re}(z)}}\,\|\psi_n(z)\|_{(B_0^*,B_1^*)_{\mathrm{Re}(z)}}\\ &\le e\,\|g\|_{\mathcal{G}(B_0,B_1)}\,\|\psi\|_{\mathcal{G}(B_0^*,B_1^*)}=C.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Plus généralement, si $F\in\mathcal{F}(B_0^*,B_1^*)$, la fonction

$$K_F:z\to\langle g'(z+\mathrm{i}\tau),F(z)\rangle$$

satisfait $|K_F(z)|\le\|g\|_{\mathcal{G}(B_0,B_1)}\|F\|_{\mathcal{F}(B_0^*,B_1^*)}$ sur S_0. Soit $\mathcal{F}_0(B_0^*,B_1^*)$ défini dans [2, Lemme 4.2.3]. Les éléments de $\mathcal{F}_0(B_0^*,B_1^*)$ sont en particulier des combinaisons linéaires finies d'atomes $f\otimes b^*$, où $b^*\in B_0^*\cap B_1^*$ et $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ est holomorphe. Si $F\in\mathcal{F}_0(B_0^*,B_1^*)$, la fonction K_F est holomorphe sur S_0. Comme $\mathcal{F}_0(B_0^*,B_1^*)$ est dense dans $\mathcal{F}(B_0^*,B_1^*)$ [2, Lemme 4.2.3], la fonction K_F est holomorphe sur S_0, comme limite uniforme sur S_0 d'une suite de fonctions holomorphes. Comme $\psi_n\in\mathcal{F}(B_0^*,B_1^*)$, $H_{n,\tau}=K_{\psi_n}$ est holomorphe sur S_0.

c) L'application $u\to\langle g'(u),\psi_n(u-\mathrm{i}\tau)\rangle$, translatée de $H_{n,\tau}$, est holomorphe sur S_0 d'après b). Soit $\delta>0$ tel que le disque fermé $\overline{B(\beta,\delta)}$ est dans S_0 et soit Γ son bord. Soit $u=\beta+\mathrm{i}\tau\in B(\beta,\delta)$. D'après la formule de Cauchy,

$$H_{n,\tau}(\beta) = \langle g'(u), \psi_n(u - \mathrm{i}\tau)\rangle = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_\Gamma \frac{\langle g'(\xi), \psi_n(\xi - \mathrm{i}\tau)\rangle}{\xi - (\beta + \mathrm{i}\tau)} \mathrm{d}\xi. \tag{2.4}$$

D'après (2.3) et (2.4), si $\beta + \mathrm{i}\tau \in B(\beta, \delta)$,

$$\begin{aligned}
&\left|H_{n,\tau}(\beta) - H_{n,0}(\beta)\right| \\
&= \frac{1}{2\pi}\left|\int_\Gamma \frac{\langle g'(\xi), \psi_n(\xi - \mathrm{i}\tau)\rangle}{\xi - (\beta + \mathrm{i}\tau)}\mathrm{d}\xi - \int_\Gamma \frac{\langle g'(\xi), \psi_n(\xi)\rangle}{\xi - \beta}\mathrm{d}\xi\right| \\
&\le \frac{1}{2\pi}\left|\int_\Gamma \langle g'(\xi), \psi_n(\xi - \mathrm{i}\tau)\rangle \left(\frac{1}{\xi - (\beta + \mathrm{i}\tau)} - \frac{1}{\xi - \beta}\right)\mathrm{d}\xi\right| \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\left|\int_\Gamma \frac{\langle g'(\xi), \psi_n(\xi - \mathrm{i}\tau) - \psi_n(\xi)\rangle}{\xi - \beta}\mathrm{d}\xi\right| \\
&\le \int_\Gamma \left|\frac{C}{\xi - (\beta + \mathrm{i}\tau)} - \frac{C}{\xi - \beta}\right|\frac{\mathrm{d}\xi}{2\pi} + \left|\langle g'(\beta), \psi_n(\beta - \mathrm{i}\tau) - \psi_n(\beta)\rangle\right|.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

d) Montrons la continuité à l'origine de $H(\beta + i.)$. Passant à la limite en n dans (2.5) grâce à (2.2), on obtient, grâce au lemme 2.2, si $\beta + \mathrm{i}\tau \in B(\beta, \delta)$,

$$\begin{aligned}
&|H(\beta + \mathrm{i}\tau) - H(\beta)| \\
&\le \frac{C}{2\pi}\int_\Gamma \left|\frac{1}{\xi - (\beta + \mathrm{i}\tau)} - \frac{1}{\xi - \beta}\right|\mathrm{d}\xi + e\left|\langle g'(\beta), \psi'(\beta - \mathrm{i}\tau)) - \psi'(\beta)\rangle\right|.
\end{aligned}$$

Lorsque $\tau \to 0$, le lemme 2.1 et le théorème de convergence dominée impliquent alors que $H(\beta + \mathrm{i}\tau) - H(\beta) \to 0$. Ceci achève la démonstration d'après a). □

Références

[1] J. Bergh, On the relation between the two complex methods of interpolation, Indiana Univ. Math. J. 28 (1979) 775–777.
[2] J. Bergh, J. Löfström, Interpolation Spaces. An Introduction, Grundlehren Math. Wiss., vol. 223, Springer-Verlag, 1976.
[3] A.P. Caldéron, Intermediate spaces and interpolation the complex method, Stud. Math. XXIV (1964) 113–190.
[4] M. Daher, Some remarks on the interpolation spaces A^θ, A_θ, Comment. Math. Univ. Carol. (2016), à paraître.