C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 354 (2016) 1225–1229

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Géométrie algébrique

Revêtements tangentiels et tours infinies d'Artin–Schreier

Tangential covers and infinite Artin–Schreier towers

Armando Treibich [a,b]

[a] *EA2462 LML, Université d'Artois, France*
[b] *RN, Universidad de la República, Uruguay*

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 5 juillet 2016
Accepté après révision le 25 octobre 2016
Disponible sur Internet le 10 novembre 2016

Présenté par Claire Voisin

RÉSUMÉ

Soit (X,q) une courbe lisse marquée, de genre $g>0$ et définie sur un corps algébriquement fermé de caractéristique $\boldsymbol{p}\geq 0$. On considère tous les revêtements $\pi:\Gamma\to X$, génériquement étales, marqués en un sous-ensemble $D\subset\pi^{-1}(q)$ de cardinal $d\geq 0$ et satisfaisant une condition de tangence dans $Jac\Gamma$. On caractérise ces revêtements, appelés d-tangentiels, comme diviseurs de zéros de certains polynômes. Nous montrons enfin quelques pathologies en caractéristique positive, notamment des tours infinies de revêtements 1-tangentiels, étales au-dessus de $X\setminus\{q\}$, mais sauvagement ramifiées au-dessus de q. Elles existent si et seulement si $q\in X$ est un point de Cartier.

ABSTRACT

Let (X,q) be a smooth marked curve of genus $g>0$, defined over an algebraic closed field of characteristic $\boldsymbol{p}\geq 0$. We consider all generically étale covers $\pi:\Gamma\to X$, marked at a subset $D\subset\pi^{-1}(q)$ of cardinality $d\geq 0$, satisfying a natural tangency condition inside $Jac\Gamma$. We characterize the latter, so-called d-tangential covers, as zero-divisors of certain polynomials. We focus at last on some funny behaviour in positive characteristic. Namely, infinite towers of 1-tangential covers, étale over $X\setminus\{q\}$, but wildly ramified over q. The latter exist if and only if $q\in X$ is a Cartier point.

1. Revêtements tangentiels et tours infinies d'Artin–Schreier

On fixe dorénavant une courbe marquée, lisse et projective (X,q), de genre $g>0$ et définie sur un corps algébriquement fermé $\mathbb{K}$ de caractéristique $\boldsymbol{p}\geq 0$. On note $K(X)$ son corps de fonctions. À tout revêtement génériquement étale $\pi:\Gamma\to X$ on associe son dual $\pi^*:JacX\to Jac\Gamma$. De plus, étant donné un point lisse r_o de Γ, on note $Ab_\Gamma:\Gamma\to Jac\Gamma$ le plongement d'Abel qui associe à tout point lisse $r\in\Gamma$ la classe d'équivalence de $\mathcal{O}_\Gamma(r-r_o)$. On identifie alors l'espace tangent à Γ au

Adresse e-mail : treibich@cmat.edu.uy.

http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2016.10.021

point r, noté $T_{\Gamma,r}$, avec son image dans $\mathrm{H}^1(\Gamma, \mathcal{O}_\Gamma)$, l'espace tangent à l'origine de $Jac\Gamma$. Cette identification ne dépend pas du point lisse r_o choisi préalablement. On dira désormais que $q \in X$ est de Weierstrass si $\mathrm{h}^0\big(X, \mathcal{O}_X(gq)\big) > 1$.

Les revêtements d-tangentiels de (X, q), définis ci-dessous, répondent à un problème géométrique motivé par la formule de Its–Matveev dans le cadre de l'équation KP. Ils ont été étudiés pour toute courbe elliptique complexe X (i.e. $g = 1$ et $\boldsymbol{p} = 0$) dans [2,3] et [4], suivant les travaux de I. Krichever, reliant les solutions doublement périodiques de KP avec le système intégrable de Calogero–Moser. Nous montrons que la plupart des résultats se généralisent au cas $g \geq 1$ et $\boldsymbol{p} \geq 0$, au prix de quelques hypothèses, e.g., q n'est pas un point de Weierstrass de X. Par ailleurs, de nouvelles propriétés propres à la caractéristique positive voient le jour (cf. Corollaire 1.16).

Définition 1.1. Soit $\pi : \Gamma \to X$ un revêtement marqué en un sous-ensemble $D \subset \pi^{-1}(q)$. Admettons en plus que, soit $d(\pi^*)(T_{X,q}) = \{0\}$ et $D = \emptyset$, soit $d(\pi^*)(T_{X,q}) \neq \{0\}$ et D est minimal pour la propriété :

$$d(\pi^*)(T_{X,q}) \subset \sum_{r \in D} T_{\Gamma,r}.$$

Dans ce cas, si d est le cardinal de D, on dira que π est d-tangentiel. On l'appelera en plus décomposable s'il existe un revêtement $\underline{d}$-tangentiel $\underline{\pi} : (\underline{\Gamma}, \underline{D}) \to X$, avec $\underline{d} < d$, et $\varphi : \Gamma \to \underline{\Gamma}$, tels que $\pi = \underline{\pi} \circ \varphi$ et $D = \varphi^*(\underline{D})$. Dans le cas contraire, on dira que π est d-tangentiel indécomposable.

Théorème 1.2 *(Critère de d-tangence ([3]-1.8)). Soient $\pi : (\Gamma, D) \to X$ comme ci-dessus et z une coordonnée locale en $q \in X$. Alors, π est d-tangentiel si et seulement si $\mathrm{h}^0(\Gamma, \mathcal{O}_\Gamma(\sum_D r)) = 1$ et il existe $\kappa : \Gamma \to \mathbb{P}^1$, appelée fonction d-tangentielle associée à π, telle que :*

κ est holomorphe en dehors de $\pi^{-1}(q)$;
dans un voisinage de $\pi^{-1}(q)$, le diviseur de pôles de $\kappa + \pi^*(\frac{1}{z})$ est égal à $\sum_D r$.

Définition 1.3. Un polynôme unitaire $P(T) = T^n + \sum_{j=1}^n \alpha_j T^{n-j} \in K(X)[T]$ sera appelé d-tangentiel si et seulement si il satisfait les propriétés suivantes :

- pour tout $j = 1, \cdots, n$, le coefficient α_j appartient à $\mathrm{H}^0\big(X, \mathcal{O}_X(jq)\big)$;
- tous les coefficients de $z^d P(T - \frac{1}{z}) =: z^d T^n + \sum_{j=1}^n a_j T^{n-j}$ sont holomorphes en q ;
- d est le plus petit naturel satisfaisant la propriété ci-dessus, i.e. : $z^d P(T - \frac{1}{z})_{|z=0} \neq 0$.

On notera $\theta_{d,n}(X, z)$ le sous-ensemble des polynômes d-tangentiels de degré n. Le sous-espace affine défini par les deux premières conditions est l'union $\Theta_{d,n}(X, z) := \cup_{i=0}^d \theta_{i,n}(X, z)$.

Proposition 1.4. *Soit $\pi : (\Gamma, D) \to X$ un revêtement d-tangentiel de degré n, muni d'une fonction d-tangentielle $\kappa : \Gamma \to \mathbb{P}^1$, et notons $P_\kappa(T) = T^n + \sum_{j=1}^n \alpha_{j,\kappa} T^{n-j}$ son polynôme caractéristique par rapport à l'extension algébrique $K(\Gamma)/K(X)$. Alors P_κ appartient à $\theta_{d,n}(X, z)$, et il est irréductible dans $K(X)[T]$ si π est indécomposable, ou puissance d'un autre polynôme si π est décomposable.*

Démonstration. Au signe près, $\alpha_{j,\kappa}$ est la j-ième fonction symétrique de κ par rapport à π. Rappelons aussi que κ est holomorphe en dehors de $\pi^{-1}(q)$ et a, en tout point $r \in \pi^{-1}(q)$, un pôle d'ordre majoré par $ind_\pi(r)$, l'indice de ramification de π en r. Il s'ensuit que $\alpha_{j,\kappa} \in \mathrm{H}^0\big(X, \mathcal{O}_X(jq)\big)$. D'où P_κ satisfait la première propriété. Vérifions les deux restantes.

La j-ieme fonction symmetrique de $\kappa + \pi^*(\frac{1}{z})$ par rapport à π est égale, au signe près, à $a_{j,\kappa} z^{-d}$. Celle-ci a un pôle simple en tout point $r \in D$ et est holomorphe en tout autre point de $\pi^{-1}(q)$. Donc, $a_{j,\kappa} z^{-d}$ doit avoir un pôle en q, d'ordre majoré par $\min\{d, j\}$. De plus, on peut vérifier que $a_{j,\kappa} z^{-d}$ a un pôle d'ordre égal à d (au moins) pour $l = \sum_{r \in D} \mathrm{ind}_\pi(r)$. D'où $P_\kappa \in \theta_{d,n}(X, z)$. Finalement, P_κ est irréductible si et seulement si le morphisme $(\kappa, \pi) : \Gamma \to \mathbb{P}^1 \times X$ a degré 1 sur son image $\{P_\kappa(T) = 0\}$. Dans le cas contraire, il est une puissance d'un autre polynôme. Par exemple, si π est décomposable, il existe un revêtement $\underline{d}$-tangentiel $\underline{\pi} : (\underline{\Gamma}, \underline{D}) \to X$ et un morphisme $\varphi : \Gamma \to \underline{\Gamma}$, de degré $m > 1$, tels que $\pi := \underline{\pi} \circ \varphi$ et $D = \varphi^{-1}(\underline{D})$. Il s'ensuit que $\kappa = \underline{\kappa} \circ \varphi$, où $\underline{\kappa}$ est une fonction tangentielle pour $\underline{\pi}$, et $P_\kappa(T) = P_{\overline{\kappa}}(T)^m$. $\square$

Lemme 1.5 *(Critère d'irréductibilité). Le polynôme $P \in \theta_{d,n}(X, z)$ n'est pas irréductible dans $K(X)[T]$ si et seulement si il existe $Q \in \theta_{d',n'}(X, z)$ et $R \in \theta_{d-d',n-n'}(X, z)$, où $0 \leq d' \leq d$ et $0 < n' < n$, tels que $P = QR$.*

Démonstration. Soit $P \in \theta_{d,n}(X, z)$ tel que $P = QR$ avec $1 < n' := deg Q < n$. Alors, pour $t \in \mathbb{K}$ générique, le produit $P(t) = Q(t)R(t)$ est holomorphe en dehors de q. Il s'ensuit que les coefficients de $Q(T)$ et $R(T)$ le sont aussi. On montre alors, par un calcul simple, qu'ils doivent satisfaire la propriété 1.3.1 ci-dessus, de même que 1.3.2 pour $d', d'' \in \mathbb{N}$. En particulier, $z^{d'+d''} P(T - \frac{1}{z}) = z^{d'} Q(T - \frac{1}{z}) z^{d''} R(T - \frac{1}{z})$ doit avoir tous ses coefficients holomorphes en q et sa restriction en $z = 0$ ne peut pas s'annuler. Donc $d' + d'' = d$. En d'autres termes, $Q \in \theta_{d',n'}(X, z)$ et $R \in \theta_{d-d',n-n'}(X, z)$. $\square$

Lemme 1.6. *Soit $P(T) = T^n + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j T^{n-j} \in K(X)[T]$ et notons $z^d P(T - \frac{1}{z}) =: z^d T^n + \sum_{j=1}^{n} a_j T^{n-j}$. Alors, pour tout $j = 1, \cdots, n$, le coefficient a_j satisfait, au voisinage de q, l'égalité :*

$$a_j(z) = \frac{(-1)^j}{z^{j-d}} \left(\binom{n}{j} + \sum_{i=1}^{j} \binom{n-i}{j-i} (-z)^i \alpha_i \right).$$

Si en plus $q \in X$ n'est pas de Weierstrass, $g \le d \le n$ et $\alpha_j \in \mathrm{H}^0\big(X, \mathcal{O}_X(jq)\big)$ pour tout $j = 1, \cdots, n$, alors pour tout $j \le d$ le coefficient $a_j(z)$ est égal à $a_j(z) = z^{d-j} b_j(z)$, avec :

$$b_j(z) \text{holomorphe telle que } b_j(0) = \binom{n}{j} (-1)^j \text{ si } j \le g$$

et

$$b_j(0) = \binom{n}{j} (-1)^j + \sum_{g<i\le j} \binom{n-i}{j-i} (-1)^{j-i} z^i \alpha_i(z)_{|z=0} \quad \text{pour tout } g < j \le d.$$

Enfin, demander que les coefficients restants (éventuels) $\{a_j, d < j \le n\}$ soient holomorphes en q revient à résoudre un système triangulaire en les développements polaires des coefficients $\{\alpha_j, d < j \le n\}$, où à chaque pas la solution est unique modulo $\mathrm{H}^0\big(X, \mathcal{O}_X(dq)\big)$.

Le lemme ci-dessus se demontre par calcul direct et implique que $\Theta_{d,n}(X, z)$ est vide dans tous les cas cités ci-après.

Proposition 1.7.

1. *$\Theta_{0,n}(X, z) = \emptyset$ si $\boldsymbol{p} = 0$, ou si $\boldsymbol{p} > 0$ et $n \notin \boldsymbol{p}\mathbb{N}^*$.*
2. *$\Theta_{1,2}(X, z) \neq \emptyset$ si et seulement si X est hyperelliptique et q de Weierstrass.*
3. *Soit $n > 2$ et $g > 1$, alors $\Theta_{1,n}(X, z) = \emptyset$ chaque fois que, soit $\boldsymbol{p} = 0$, soit $\boldsymbol{p} \ge 5$ et $n(n-1)(n-2) \notin \boldsymbol{p}\mathbb{N}$, soit $\boldsymbol{p} = 3$ et $(n+1)(n+4) \in 9\mathbb{N}$, ou finalement, $\boldsymbol{p} = 2$ et $n - 3 \in 4\mathbb{N}$.*
4. *Supposons $\mathrm{h}^0\big(X, \mathcal{O}_X(gq)\big) = 1$ et $d < \min\{g, n\}$. Alors $\Theta_{d,n}(X, z) = \emptyset$ si $d < n \le g$ ou si $\boldsymbol{p} = 0$. Si au contraire $\boldsymbol{p} > 0$ et $d < g < n$, soit $\Theta_{d,n}(X, z) = \emptyset$, soit $\dim\big(\Theta_{d,n}(X, z)\big) < n$.*

Démonstration.

1. Quand $d = 0$ on a $a_1 = -\frac{n}{z} + \alpha_1$, lequel devrait être holomorphe en $z = 0$, forçant α_1 à avoir un pôle simple. Contradiction !
2. Quand $d = 1$ on a $a_2 = \frac{1}{z} - \alpha_1 + z\alpha_2$, lequel devrait être holomorphe en $z = 0$. Donc, α_2 doit avoir un pôle double en q, i.e. X est hyperelliptique et q un point de Weierstrass.
3. Soit $n > 2$ et $P(T) = T^n + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j T^{n-j} \in \Theta_{1,n}(X, z)$. Alors les coefficients a_2 et a_3 sont égaux à $a_2 = \binom{n}{2}\frac{1}{z} + (1-n)\alpha_1 + z\alpha_2$ et $a_3 = -\binom{n}{3}\frac{1}{z^2} + \binom{n-1}{2}\frac{1}{z}\alpha_1 + (2-n)\alpha_2 + z\alpha_3$. Il s'ensuit, sous les conditions annoncées, que α_2 et α_3 ont un pôle double et triple en q, respectivement. Donc, X est une courbe elliptique (i.e. $g = 1$).
4. Supposons $\mathrm{h}^0\big(X, \mathcal{O}_X(gq)\big) = 1$ et soit $P(T) = T^n + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j T^{n-j} \in K(X)[T]$, avec chaque $\alpha_j \in \mathrm{H}^0\big(X, \mathcal{O}_X(jq)\big)$, et notons $z^d P(T - \frac{1}{z}) = z^d T^n + \sum_{j=1}^{n} a_j T^{n-j}$. Rappelons que

$$a_j = \frac{(-1)^j}{z^{j-d}} \left(\binom{n}{j} + \sum_{i=1}^{j} \binom{n-i}{j-i} (-z)^i \alpha_i \right) \quad \text{et} \quad a_n(z) = \frac{(-1)^n}{z^{n-d}} \Big(1 + \sum_{i=1}^{n} (-z)^i \alpha_i \Big).$$

Si $d < n \le g$, le coefficient $a_n(z) = \frac{(-1)^n}{z^{n-d}} \Big(1 + \sum_{i=1}^{n} (-z)^i \alpha_i\Big)$ a un pôle d'ordre $n - d$ en q. D'où $\Theta_{d,n}(X, z) = \emptyset$. Supposons dorénavant $d < g < n$. Si $j \le d$, la fonction a_j est holomorphe en q, quelles que soient les constantes $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_j\}$. Pour tout autre $j > d$, une fois choisis $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_{j-1}\}$, il existe au plus un élément $\alpha_j \in \mathrm{H}^0\big(X, \mathcal{O}_X(jq)\big)$ tel que le coefficient a_j correspondant soit holomorphe en q. Pour cela, il faut que $\boldsymbol{p} > 0$ et $\binom{n}{j} \in \boldsymbol{p}\mathbb{N}$. Il s'ensuit que $\Theta_{d,n}(X, z) = \emptyset$ si $\boldsymbol{p} = 0$ ou s'il existe $j > d$ tel que $\binom{n}{j} \notin \boldsymbol{p}\mathbb{N}$. Dans le cas contraire, on en déduit tout d'abord que $\dim\big(\Theta_{d,n}(X, z)\big) \le n$. Par ailleurs, du fait que $(-1)^n z^{n-d} a_n(z) = 1 + \sum_{i=1}^{n} (-z)^i \alpha_i$ a un zéro d'ordre $\ge n - d \ge 2$, la constante α_1 satisfait l'équation $1 - \alpha_1 z + \sum_{i=g+1}^{n} (-z)^i \alpha_i = 0 \bmod (z^2)$. D'où $\dim\big(\Theta_{d,n}(X, z)\big) < n$. $\square$

Théorème 1.8. *Soient $g \le d \le n$, mais $g < n$ et supposons en plus que $q \in X$ ne soit pas de Weierstrass. Alors, $\theta_{d,n}(X, z)$ est un ouvert dense de $\Theta_{d,n}(X, z)$, de dimension $n(d - g + 1) - \frac{1}{2}(d - g)(d + g - 1)$, et son élément générique est irréductible. De plus, $\theta_{g,n}(X, z) = \Theta_{g,n}(X, z)$ et tout $P \in \theta_{g,n}(X, z)$ est irréductible, si $\binom{n}{g} \notin \boldsymbol{p}\mathbb{N}$.*

Démonstration. D'après le lemme ci-dessus, les d premiers coefficients (i.e. : $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_d\}$) peuvent être choisis arbitrairement. On vérifie également que les $n-d$ restants s'obtiennent, modulo un élément arbitraire de $\mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X(dq))$ chacun, en résolvant un système triangulaire en les coefficients précédents. Donc

$$\dim \Theta_{d,n}(X,z) = \sum_{j=1}^{d} \mathrm{h}^0(X, \mathcal{O}_X(jq)) + (n-d)\mathrm{h}^0(X, \mathcal{O}_X(dq)).$$

Or, le point $q \in X$ n'étant pas de Weierstrass, on a $\mathrm{h}^0(X, \mathcal{O}_X(jq)) = 1$ pour tout $j \le g$ et $\mathrm{h}^0(X, \mathcal{O}_X(jq)) = d-g+1$ pour tout $j > g$. En remplaçant dans la formule ci-dessus, on obtient la dimension annoncée. Il en résulte aussi (avec 1.7.4), que $\dim\left(\Theta_{d',n'}(X,z)\right) + \dim\left(\Theta_{d-d',n-n'}(X,z)\right) < \dim\left(\Theta_{d,n}(X,z)\right)$, pour tous $d' \le d$ et $n' < n$. Donc, d'après le Critère 1.5, les éléments irréductibles dans $\Theta_{d,n}(X,z)$ forment un ouvert dense.

Il reste à prouver que $\theta_{d,n}(X,z) = \Theta_{d,n}(X,z) \setminus \Theta_{d-1,n}(X,z)$ est un ouvert dense de $\Theta_{d,n}(X,z)$. Si $d > g$, on a $\dim\left(\Theta_{d,n}(X,z)\right) - \dim\left(\Theta_{d-1,n}(X,z)\right) = n+1-d > 0$, d'où le résultat. Pour $d = g$ enfin, si $\boldsymbol{p} = 0$ ou $\binom{n}{g} \notin \boldsymbol{p}\mathbb{N}$, on sait que $\Theta_{g-1,n}(X,z) = \emptyset$. Cela implique que $\theta_{g,n}(X,z) = \Theta_{g,n}(X,z)$ et que tout élément est forcément irréductible. Dans le cas contraire, c'est-à-dire $\boldsymbol{p} > 0$ et $\binom{n}{g} \in \boldsymbol{p}\mathbb{N}$, on a $\dim\left(\Theta_{g,n}(X,z)\right) - \dim\left(\Theta_{g-1,n}(X,z)\right) = n - \dim\left(\Theta_{g-1,n}(X,z)\right) > 0$, d'après 1.7.4. Donc, $\theta_{g,n}(X,z)$ est un ouvert dense de $\Theta_{g,n}(X,z)$. $\square$

Définition 1.9.

1. Fixons $z : X \to \mathbb{P}^1$, fonction méromorphe avec un zéro simple en q et l autres notés $\{\alpha_i\}$ $(l \ge 1)$. On considère les ouverts affines $U := X \setminus \{q\}$ et $\overline{U} := X \setminus \{\alpha_i\}$. On note $\pi_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \to X$ la surface réglée obtenue par recollement des fibres au-dessus de $q' \in U \cap \overline{U}$, entre $\mathbb{P}^1 \times U$ et $\mathbb{P}^1 \times \overline{U}$, au moyen de la translation ci-dessous :

   quel que soit $q' \in U \cap \overline{U}$, *on identifie* $(T, q') \in \mathbb{P}^1 \times U$ *avec* $(\overline{T} - \frac{1}{z(q')}, q') \in \mathbb{P}^1 \times \overline{U}$.

2. Les sections à l'infini, $q' \in U \mapsto (\infty, q') \in \mathbb{P}^1 \times U$ et $q' \in \overline{U} \mapsto (\infty, q') \in \mathbb{P}^1 \times \overline{U}$, coïncident et définissent une section particulière not ée $C_o \subset \mathcal{S}$.
3. On note $\mathcal{S}_q$ la fibre $\pi_{\mathcal{S}}^{-1}(q)$, $p_{\mathcal{S}} := C_o \cap \mathcal{S}_q$ et $K_{\mathcal{S}}$ le diviseur canonique de $\mathcal{S}$. Ce dernier est numériquement équivalent à celui de la 2-forme $\mathrm{d}T \wedge \mathrm{d}z$ (donc à $-2C_o + (2g-2)\mathcal{S}_q$).
4. Étant donné $P(T) \in K(X)[T]$, vu comme morphisme rationnel $\mathbb{P}^1 \times U \subset \mathcal{S} \to \mathbb{P}^1$, les diviseurs de zéros $\{P(T) = 0\} \subset \mathbb{P}^1 \times U$ et $\{P(\overline{T} - \frac{1}{z}) = 0\} \subset \mathbb{P}^1 \times \overline{U}$ se recollent au-dessus de $U \cap \overline{U}$ et définissent un diviseur effectif de $\mathcal{S}$ noté Y_P.

Proposition 1.10. *Soit $\pi : (\Gamma, D) \to X$ un revêtement d-tangentiel indécomposable de degré n. Alors, son genre arithmétique est majoré par $n(d+g-1) + 1 - \frac{1}{2}d(d+1)$.*

Démonstration. Soit $\kappa : \Gamma \to \mathbb{P}^1$ une fonction d-tangentielle associée à π et $P(T)$ son polynôme caractéristique. Alors π se factorise via la projection naturelle $Y_P \subset S \to X$ du diviseur irréductible associé à P dans 1.9.4. Par ailleurs, du fait que $P \in \theta_{d,n}(X,z)$, on en déduit que Y_P est linéairement équivalent à $nC_o + \mathcal{S}_q$ et n'intersecte C_o qu'au point $p_{\mathcal{S}}$, où il a une singularité de multiplicité d. Donc, son genre arithmétique vaut $p_a(Y_P) = n(d+g-1) + 1 - d$ et celui de Γ est majoré par $p_a(\Gamma) \le n(d+g-1) + 1 - d - \frac{1}{2}d(d-1) = n(d+g-1) + 1 - \frac{1}{2}d(d+1)$. $\square$

Remarque 1.11. Fixons $P \in \theta_{d,n}(X,z)$ tel que $Y_P \subset S$ soit une courbe irréductible, ayant une singularité ordinaire de multiplicité d en $p_{\mathcal{S}}$. En éclatant $p_{\mathcal{S}} \in Y_P \subset S$, on lui associe naturellement un revêtement $\pi_P : (\Gamma_P, D) \to X$ de genre arithmétique $p_a(\Gamma_P) = n(d+g-1) + 1 - \frac{1}{2}d(d+1)$, marqué en d points de la fibre $\pi_P^{-1}(q)$. Si, en plus, celui-ci vérifie $\mathrm{h}^0\left(\Gamma_P, \mathcal{O}_{\Gamma_P}(D)\right) = 1$, on peut affirmer qu'il est d-tangentiel. Nous énonçons ci-dessous, mais sans preuve car trop longue, des conditions assurant que cela est vrai pour $P \in \theta_{d,n}(X,z)$ suffisamment générique. Nous construisons enfin des tours infinies de revêtements 1-tangentiels, qui n'existent qu'en caractéristique positive.

Proposition 1.12. *Soient $g \le d \le n$ et $g < n$, mais $(n-g)\binom{n}{g} \notin \boldsymbol{p}\mathbb{N}$ si $g = d$. Supposons en plus que $q \in X$ ne soit pas de Weierstrass. Pour tout $P \in \theta_{d,n}(X,z)$, on note $e : \Gamma_P \subset \hat{\mathcal{S}} \to Y_P \subset \mathcal{S}$ le transformé strict de Y_P par l'éclatement de $p_{\mathcal{S}} \in \mathcal{S}$. Alors, pour P suffisement générique :*

- *Y_P est irréductible et a une singularité ordinaire de multiplicit é d en $p_{\mathcal{S}}$;*
- *$\pi := \pi_{\mathcal{S}} \circ e : \Gamma_P \to X$ est étale aux d pré-images $e^{-1}(p_S) \subset \pi^{-1}(q)$;*
- *Γ_P a un genre arithmétique égal à $n(d+g-1) - \frac{1}{2}d(d+1) + 1$, et est lisse si $\boldsymbol{p} = 0$.*

Corollaire 1.13. *Soient $g \le d \le n$ et $g < n$, mais $(n-g)\binom{n}{g} \notin \boldsymbol{p}\mathbb{N}$ si $g = d$, et supposons que $q \in X$ ne soit pas de Weierstrass. Alors, il existe une famille de revêtements d-tangentiels de X, lisses si $\boldsymbol{p} = 0$, de degré n, dimension $n(d-g+1) - \frac{1}{2}(d-g)(d+g-1)$ et genre arithmétique $n(d+g-1) - \frac{1}{2}d(d+1) + 1$.*

Définition 1.14 (*[1]-2.1*). Le point $q \in X$ est dit de Cartier si $\boldsymbol{p} > 0$ et il existe $f \in \mathrm{H}^0\big(X, \mathcal{O}_X(\boldsymbol{p}q)\big)$ avec développement de Laurent $f = \frac{1}{z^{\boldsymbol{p}}} - \frac{c}{z} + O(z)$, pour un certain $c \in \mathbb{K}$. Quel que soit $a \in \mathbb{K}^*$, on note alors $\Gamma_a \subset \mathcal{S}$ le diviseur associé à $P_a(T) := T^{\boldsymbol{p}} - aT + f$, muni de la projection $\pi_a := \pi_{\mathcal{S}|\Gamma_a}$, dite d'Artin–Schreier, et $\kappa_a : \Gamma_a \to \mathbb{P}^1$, la restriction du morphisme naturel $\mathbb{P}^1 \times X \subset \mathcal{S} \to \mathbb{P}^1$ défini par T (1.9.4.).

Théorème 1.15. *Pour tout $a \in \mathbb{K}^*$, la courbe Γ_a ci-dessus est lisse et irréductible. De plus, π_a est cyclique et étale au-dessus de $X \setminus \{q\}$. Au cas où $a = c \neq 0$, le genre de Γ_c vaut $\boldsymbol{p}(g-1)+1$ et π_c est étale et 0-tangentiel. En particulier, $P_c(T) \in \theta_{0,\boldsymbol{p}}(X,z)$. En revanche, si $a \notin \{c, 0\}$, on a :*

- *le genre de Γ_a vaut $\boldsymbol{p}g$ et $p_{\mathcal{S}}$ est un point de Cartier de Γ_a ;*
- *le revêtement π_a est (uniquement et) sauvagement ramifi é en $p_{\mathcal{S}}$;*
- *$\pi_a : (\Gamma_a, p_{\mathcal{S}}) \to X$ est 1-tangentiel et κ_a est une fonction tangentielle associée à π_a.*

Démonstration. Le diviseur $\Gamma_a \subset \mathcal{S}$ est défini, dans l'ouvert $\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_q$ et au voisinage de la fibre $\mathcal{S}_q$, par les équations $P_a(T) = T^{\boldsymbol{p}} - aT + \frac{1}{z^{\boldsymbol{p}}} - \frac{c}{z} + O(z) = 0$ et $P_a(T - \frac{1}{z}) = T^{\boldsymbol{p}} - aT + \frac{a-c}{z} + O(z) = 0$, respectivement. En particulier, π_a et P_a sont 0-tangentiels si $a = c$ et 1-tangentiels si $a \neq c$. Par ailleurs, du fait que $\Theta_{0,m}(X,z) = \emptyset$ pour tout $0 < m < \boldsymbol{p}$ (cf. Proposition 1.7.1), le Critère d'irréductibilité nous assure que P_a l'est. On voit également que l'automorphisme $(T, z) \in \mathcal{S} \mapsto (T + b, z) \in \mathcal{S}$ laisse Γ_a invariante, si $b^{\boldsymbol{p}} = a$. Cela implique que Γ_a est irréductible et que π_a est cyclique et étale au-dessus de $X \setminus \{q\}$. Regardons à présent π_a le long de la fibre $\Gamma_a \cap \mathcal{S}_q$.

1. Si $a = c \neq 0$ alors $p_{\mathcal{S}} \notin \Gamma_a$ et π_a est partout étale. De plus, Γ_a est lisse, linéairement equivalent à $\boldsymbol{p}C_o$, et donc de genre $\boldsymbol{p}(g-1)+1$ d'après la formule d'adjonction.
2. Si $a \notin \{c, 0\}$ alors $p_{\mathcal{S}} \in \Gamma_a$, où elle est lisse d'équation $z - azT^{1-\boldsymbol{p}} + (a-c)T^{-\boldsymbol{p}} + O(z^2)T^{-\boldsymbol{p}} = 0$.
   Il en résulte que z a un zéro d'ordre $\boldsymbol{p}$ en $p_{\mathcal{S}}$, donc π_a y est complètement ramifiée. De plus Γ_a est de genre $\boldsymbol{p}g$, car linéairement équivalente à $\boldsymbol{p}C_o + \mathcal{S}_q$, et κ_a satisfait l'équation $(\kappa_a + \frac{1}{z})^{\boldsymbol{p}} - a(\kappa_a + \frac{1}{z}) + \frac{a-c}{z} + O(z) = 0$. Il en résulte que κ_a est la fonction tangentielle associée à π_a et que $\kappa_a + \frac{1}{z}$ a un pôle simple en $p_{\mathcal{S}}$. Son inverse, noté λ_a, est alors une coordonnée locale en $p_{\mathcal{S}}$ telle que $\frac{c-a}{z} = \frac{1}{\lambda_a^{\boldsymbol{p}}} - \frac{a}{\lambda_a} + O(\lambda_a)$. Du fait que $\frac{1}{\lambda_a} := \kappa_a + \frac{1}{z}$, on obtient finalement $(a-c)\kappa_a = \frac{1}{\lambda_a^{\boldsymbol{p}}} - \frac{c}{\lambda_a} + O(\lambda_a)$, i.e. $p_{\mathcal{S}}$ est un point de Cartier de Γ_a. □

Corollaire 1.16 *(Tours infinies de revêtements 1-tangentiels). Supposons $\boldsymbol{p} > 0$ et $q \in X$ de Cartier. Soit $f \in \mathrm{H}^0\big(X, \mathcal{O}_X(\boldsymbol{p}q)\big)$ avec développement de Laurent $f = \frac{1}{z^{\boldsymbol{p}}} - \frac{c}{z} + O(z)$ et $(a_j)_{\mathbb{N}^*}$ une suite dans $\mathbb{K} \setminus \{0, c\}$. En itérant le procédé ci-dessus à partir de $(\Gamma_0, r_0, \lambda_0) := (X, q, z)$, on obtient une tour $\{\pi_j : (\Gamma_j, r_j) \to (\Gamma_{j-1}, r_{j-1}),\ j \in \mathbb{N}^*\}$ de revêtements 1-tangentiels, munis pour tout $j \geq 1$ d'une fonction tangentielle $\kappa_j : \Gamma_j \to \mathbb{P}^1$. Il en résulte que le revêtement abélien $\pi_1 \circ \cdots \circ \pi_j : (\Gamma_j, r_j) \to (X, q)$ est 1-tangentiel, de genre $g\boldsymbol{p}^j$ et marqué en un point de Cartier ($\forall j \geq 2$), avec fonction tangentielle $\kappa_j + \pi_j^*(\kappa_{j-1}) + \cdots + (\pi_2 \circ \cdots \circ \pi_j)^*(\kappa_1)$.*

Remarque 1.17. Le résultat précédent est à l'opposé de la situation en caractéristique zéro. En effet, si $\boldsymbol{p} = 0$ et $g > 1$, l'existence d'un revêtement 1-tangentiel $\pi : (\Gamma, r) \to X$ ne peut avoir lieu que si $\deg(\pi) = 2$, Γ et X sont hyperelliptiques et $q = \pi(r) \in X$ est un point de Weierstrass. Dans ce cas, $r \in \Gamma$ n'en est pas un. En particulier, s'il existe une tour de revêtements 1-tangentiels au-dessus de (X, q), elle ne comporte qu'un seul étage, lequel doit avoir degré 2 ([2]-2.5).

Références

[1] C. Baker, Points on curves, Int. Math. Res. Not. 7 (2000) 353–370.
[2] A. Treibich, Tangential polynomials and elliptic solitons, Duke Math. J. 59 (3) (1989) 611–627.
[3] A. Treibich, Matrix elliptic solitons, Duke Math. J. 90 (3) (1997) 523–547.
[4] A. Treibich, Tangential polynomials and matrix KdV elliptic solitons, http://premat.fing.edu.uy/papers/2015/178.pdf (à paraître dans Funct. Anal. Appl.).