C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 354 (2016) 1209–1213

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Analyse fonctionnelle

Plongements de Carleson absolument sommants

Absolutely summing Carleson embedding

Pascal Lefèvre [a], Luis Rodríguez-Piazza [b]

[a] *Université d'Artois, EA 2462, Laboratoire de mathématiques de Lens (LML), Fédération CNRS Nord-Pas-de-Calais FR 2956, 62300 Lens, France*
[b] *Universidad de Sevilla, Facultad de Matematicas, Dpto de Análisis Matemático, Apartado de Correos 1160, 41080 Sevilla, Spain*

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 27 septembre 2016
Accepté après révision le 10 octobre 2016
Disponible sur Internet le 27 octobre 2016

Présenté par Gilles Pisier

RÉSUMÉ

Nous étudions les plongements de Carleson sur les espaces de Hardy H^p où $p > 1$. Nous caractérisons leur appartenance à la classe des opérateurs r-sommants quelle que soit la valeur de $r \geq 1$. Ceci généralise complètement des résultats antérieurs et résout un problème ouvert depuis les années 1970. Cette caractérisation est de nature différente suivant la valeur du couple (p, r). Ces résultats englobent le cas des opérateurs de composition, et des opérateurs de composition à poids.

ABSTRACT

We study the Carleson embeddings on the Hardy spaces H^p with $p > 1$. We characterize their membership in the class of r-summing operators for any $r \geq 1$. This generalizes in a strong way former results and solves a problem open since the 1970s. This characterization is different in nature according to the value of the couple (p, r). As particular cases, this settles the case of composition and weighted composition operators.

Abridged English version

In this note, we announce results whose proofs will appear elsewhere [4].

We investigate Carleson embeddings on classical Hardy spaces H^p for $p > 1$. In the following, the unit disc of the complex plane is denoted $\mathbb{D} = \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| < 1\right\}$ and λ stands for the Lebesgue measure on the torus $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$.

Now, let us turn to our main subject. Given a positive Borel measure μ on the closed unit disk $\overline{\mathbb{D}}$, we consider the formal identity J_μ from the Hardy space H^p into $L^p(\mu)$:

$$\begin{array}{rccc} J_\mu : & H^p & \longrightarrow & L^p(\mu) \\ & f & \longmapsto & f \end{array}$$

Adresses e-mail : pascal.lefevre@univ-artois.fr (P. Lefèvre), piazza@us.es (L. Rodríguez-Piazza).

http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2016.10.010

It is well known that J_μ is well defined and bounded if and only if μ is a Carleson measure, i.e.

$$\sup_{\xi\in\mathbb{T}} \mu\Big(\mathcal{W}(\xi,h)\Big) = O(h), \quad \text{when } h \to 0,$$

where $\mathcal{W}(\xi,h)$ is the Carleson window

$$\mathcal{W}(\xi,h) = \{z \in \mathbb{C} \mid 1-h \le |z| \le 1 \quad \text{and} \quad |arg(z\bar{\xi})| \le h\}.$$

Let us recall that J_μ is compact if and only if μ is a vanishing Carleson measure:

$$\sup_{\xi\in\mathbb{T}} \mu\Big(\mathcal{W}(\xi,h)\Big) = o(h), \quad \text{when } h \to 0.$$

In fact, there is no real restriction in assuming in the sequel that μ is actually a measure carried by the open unit disk since every absolutely summing operator on H^p is compact.

These classes of operators on spaces of analytic functions on the unit disc were (and are still) widely studied. One of their interest is to generalize the case of composition operators on H^p. Let us recall that, given a symbol, *i.e.* an analytic function $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, the composition operator $C_\varphi : H^p \to H^p$ is well defined and bounded (see the monographs [1] or [5] for example). Moreover, many operator properties of C_φ can be expressed in terms of Carleson measures thanks to the transfer formula:

$$\forall f \in H^p, \qquad \|f\circ\varphi\|_{H^p} = \|f\|_{L^p(\mathbb{D},\lambda_\varphi)},$$

where λ_φ is the pullback measure of λ associated with φ.

The case of weighted composition operators can also be solved in the same manner.

We are going to characterize those Carleson embeddings (in particular the composition operators), which are r-summing for some $r \ge 1$ on H^p. Before standing the results, let us recall the definitions.

Definition 0.1. Suppose $1 \le r < +\infty$ and let $T : X \to Y$ be a (bounded) operator between Banach spaces. We say that T is an r-summing operator if there exists $C \ge 0$ such that

$$\Big(\sum_{j=1}^n \|Tx_j\|^r\Big)^{1/r} \le C \sup_{x^*\in B_{X^*}} \Big(\sum_{j=1}^n |\langle x^*, x_j\rangle|^r\Big)^{1/r} = C \sup_{a\in B_{\ell^{r'}}} \Big\|\sum_{j=1}^n a_j x_j\Big\|$$

for every finite sequence $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in X.

The r-summing norm of T, denoted by $\pi_r(T)$, is the least suitable constant $C \ge 0$.

The class of r-summing operators forms an operator ideal (for instance, see [2] for more details).

Very few results were known until now on r-summing composition operators on H^p. There is a characterization of r-summing composition operators due to Shapiro and Taylor in [6] when $r = p \ge 2$. The same result (with an obviously adapted proof) is actually valid for general Carleson embeddings: for $p \ge 2$, the operator J_μ is p-summing if and only if

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{1}{1-|z|}\, \mathrm{d}\mu < \infty. \tag{1}$$

In fact, for every $p \ge 1$, the condition (1) is satisfied if and only if J_μ is order bounded. Since we know that L^p-valued order bounded operators are p-summing (see [2], Prop. 5.18), condition (1) is sufficient to ensure that J_μ is a p-summing operator. On the other hand, every r-summing operator (for some $r \ge 1$) acting between spaces with cotype 2, is actually 1-summing. Therefore, when $1 \le p \le 2$ and condition (1) is satisfied, J_μ is actually even 1-summing.

A natural question then arises: is (1) the good condition (i.e. a necessary condition) when $1 \le p \le 2$? This is false in general: Domenig proved in [3] that, given $p \in [1,2)$, there exists an absolutely summing composition operator on H^p which is not order bounded. Domenig was able to give some necessary condition, but without any characterization.

Now we state our main result, which characterizes any absolutely summing Carleson embedding. As usual, the notation $A \approx B$ means that there exist two constants $c, c' > 0$ (depending on r and p only) such that $A \le cB \le c'A$. In addition to the Carleson windows, these characterizations involve special domains like Hastings–Luecking windows

$$R_{n,j} = \Big\{z \in \mathbb{D} \mid 1 - \frac{1}{2^n} \le |z| \le 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \text{ and } \arg(z) \in \big(2\pi j/2^n, 2\pi(j+1)/2^n\big]\Big\},$$

and Stolz domain Σ_ξ at $\xi \in \mathbb{T}$, which is the interior of the convex hull of $D(0,1/2) \cup \{\xi\}$.

Theorem 0.2. *Let μ be a Carleson measure on $\mathbb{D}$.*

1) Let $1 < p \leq 2$. The natural injection $J_\mu \colon H^p(\mathbb{D}) \to L^p(\mu)$ is 2-summing if and only if

$$\xi \longmapsto \int_{\Sigma_\xi} \frac{1}{\big(1-|z|\big)^{1+\frac{p}{2}}}\, \mathrm{d}\mu(z)$$

belongs to $L^{2/p}(\mathbb{T}, dm)$, where Σ_ξ is the Stolz domain at $\xi \in \mathbb{T}$.

2) Let $p \geq 2$ and $r \geq 1$. Let p' be the conjugate exponent of p.

- *When $1 \leq r \leq p'$, we have*

$$\pi_r(J_\mu) \approx \pi_1(J_\mu) \approx \|F\|_{L^{p'}(\mathbb{T})} \quad \textit{where } F(\xi) = \left[\sum_{n\geq 0} 2^{2n}\Big(\mu\big(W(\xi, 2^{-n})\big)\Big)^{\frac{2}{p}}\right]^{1/2}. \tag{2}$$

- *When $p' < r \leq p$, we have*

$$\pi_r(J_\mu) \approx \left[\sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{0\leq j<2^n} \Big(2^n \mu(R_{n,j})\Big)^{r/p}\right]^{1/r}. \tag{3}$$

- *When $p \leq r$, we have*

$$\pi_r(J_\mu) \approx \left[\sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{0\leq j<2^n} 2^n \mu(R_{n,j})\right]^{1/p} \approx \left(\int_{\mathbb{D}} \frac{1}{1-|z|}\, \mathrm{d}\mu\right)^{1/p}. \tag{4}$$

As an immediate corollary, specifying to the measure $\mu = \lambda_\varphi$, we get the characterization of r-summing composition operators for any $r \geq 1$ and any $p > 1$.

1. Introduction

Les opérateurs de composition C_φ sur les espaces de fonctions analytiques ont reçu beaucoup d'attention depuis la fin des années 1960 (voir les ouvrages [1] et [5], notamment). Dans le cas de l'espace de Hardy H^2, Shapiro et Taylor ont caractérisé le fait pour C_φ d'être Hilbert–Schmidt (sur H^2) et plus généralement le fait d'être p-sommant sur H^p pour $p \geq 2$.

Dans cette note, nous annonçons des résultats dont les détails seront publiés par ailleurs [4].

Dans la suite, le disque unité du plan complexe est noté $\mathbb{D} = \big\{z \in \mathbb{C} \big| \, |z| < 1\big\}$ et λ désignera la mesure de Lebesgue normalisée sur le tore $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$.

Nous étudions ici les plongements de Carleson pour les espaces de Hardy H^p pour $p > 1$, et nous allons caractériser leur appartenance à la classe des opérateurs r-sommants.

Rappelons qu'un plongement de Carleson est l'identité vue de H^p dans $L^p(\mu)$, où μ est une mesure borélienne positive sur le disque unité fermé $\overline{\mathbb{D}}$:

$$\begin{array}{llll} J_\mu : & H^p & \longrightarrow & L^p(\mu) \\ & f & \longmapsto & f \end{array}$$

Il est bien connu que J_μ est bien défini et borné exactement lorsque μ est une mesure de Carleson, c'est-à-dire lorsque

$$\sup_{\xi\in\mathbb{T}} \mu\Big(\mathcal{W}(\xi, h)\Big) = O(h), \quad \text{quand } h \to 0,$$

où $\mathcal{W}(\xi, h)$ est la fenêtre de Carleson

$$\mathcal{W}(\xi, h) = \{z \in \mathbb{C} \mid 1-h \leq |z| \leq 1 \quad \text{et} \quad |arg(z\bar{\xi})| \leq h\}.$$

Rappelons aussi que J_μ est compact si et seulement si μ est une mesure de Carleson évanescente :

$$\sup_{\xi\in\mathbb{T}} \mu\Big(\mathcal{W}(\xi, h)\Big) = o(h) \quad \text{quand } h \to 0.$$

Par ailleurs, il n'y a pas de restriction à supposer dans la suite que $\mu(\mathbb{T}) = 0$, puisqu'un opérateur sommant sur H^p (qui ici est réflexif) est nécessairement compact.

Ces classes d'opérateurs sur des espaces de fonctions analytiques sur le disque unité ont été beaucoup étudiées. Un de leurs intérêts est que cette étude englobe le cas des opérateurs de composition sur H^p. Rappelons qu'étant donné un symbole, *i.e.* une fonction analytique $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, l'opérateur de composition $C_\varphi : H^p \to H^p$ est bien défini et borné (voir par exemple les monographies [1] ou [5]). Les propriétés des opérateurs C_φ se ramènent à l'étude d'un plongement de Carleson grâce à la formule de transfert :

$$\forall f \in H^p, \qquad \|f \circ \varphi\|_{H^p} = \|f\|_{L^p(\mathbb{D},\lambda_\varphi)},$$

où λ_φ est la mesure image de λ induite par φ.

Les opérateurs de composition à poids se traitent de la même manière.

Nous allons caractériser les plongements de Carleson (et donc en particulier les opérateurs de composition), qui sont r-sommants pour un certain $r \geq 1$, sur H^p. Avant de donner les résultats, rappelons en la définition

Définition 1.1. Soit $1 \leq r < +\infty$ et $T : X \to Y$ opérateur (borné) entre deux espaces de Banach. L'opérateur T est r-sommant s'il existe $C \geq 0$ tel que

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} \|Tx_j\|^r\Big)^{1/r} \leq C \sup_{x^* \in B_{X^*}} \Big(\sum_{j=1}^{n} |\langle x^*, x_j\rangle|^r\Big)^{1/r} = C \sup_{a \in B_{\ell^{r'}}} \Big\|\sum_{j=1}^{n} a_j x_j\Big\|$$

pour toute suite finie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dans X.

La norme r-sommante de T, notée $\pi_r(T)$, est la plus petite constante $C \geq 0$ admissible.

La classe des opérateurs r-sommants forme un idéal d'opérateurs (voir par exemple [2] pour plus de détails).

Très peu de résultats étaient connus jusqu'à présent à propos des opérateurs de composition r-sommants sur H^p. Il y a une caractérisation des opérateurs de composition r-sommants due à Shapiro et Taylor [6] dans le cas particulier où $r = p \geq 2$. Le même résultat est en fait valide pour les plongements de Carleson : pour $p \geq 2$, l'opérateur J_μ est p-sommant si et seulement si

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{1}{1-|z|}\, d\mu < \infty. \tag{5}$$

En fait, pour $p \geq 1$, la condition (5) est réalisée si et seulement si J_μ est borné pour l'ordre. Mais, comme on sait qu'un opérateur à valeurs dans un espace L^p qui est borné pour l'ordre est p-sommant (cf. [2], Prop. 5.18), la condition (5) implique donc que J_μ est p-sommant. Par ailleurs, tout opérateur r-sommant agissant entre deux espaces de cotype 2 est en fait 1-sommant. Ainsi, lorsque $1 \leq p \leq 2$ et que la condition (5) est réalisée, J_μ est en fait 1-sommant.

Une question naturelle se pose alors dans ce cas : est-ce que (5) est la bonne condition (i.e. une condition nécessaire aussi) lorsque $1 \leq p \leq 2$? En fait, ceci est faux en général : Domenig a prouvé dans [3] que, lorsque $p \in [1, 2)$, il existe un opérateur de composition absolument sommant sur H^p qui n'est pas borné pour l'ordre. Domenig n'a pour autant établi aucune caractérisation.

Nous pouvons énoncer maintenant notre résultat principal, qui caractérise les plongements de Carleson r-sommants pour $r \geq 1$. Comme d'habitude, la notation $A \approx B$ signifie qu'il existe deux constantes $c, c' > 0$ (dépendant de r et p seulement) telles que $A \leq cB \leq c'A$. Notre caractérisation repose sur le comportement de la mesure μ sur certains domaines particuliers. Outre les fenêtres de Carleson, on utilise les fenêtres de Hastings–Luecking dyadiques

$$R_{n,j} = \Big\{z \in \mathbb{D} \mid 1 - \frac{1}{2^n} \leq |z| \leq 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \text{ et } \arg(z) \in \big(2\pi j/2^n, 2\pi(j+1)/2^n\big]\Big\},$$

et le domaine de Stolz Σ_ξ en $\xi \in \mathbb{T}$, qui est l'intérieur de l'enveloppe convexe de $D(0, 1/2) \cup \{\xi\}$.

Théorème 1.2. *Soit μ une mesure de Carleson sur $\mathbb{D}$.*

1) Soient $1 < p \leq 2$ et $r \geq 1$. L'opérateur $J_\mu : H^p(\mathbb{D}) \to L^p(\mu)$ est absolument sommant si et seulement si J_μ est r-sommant et ceci si et seulement si

$$\xi \longmapsto \int_{\Sigma_\xi} \frac{1}{(1-|z|)^{1+\frac{p}{2}}}\, d\mu(z)$$

appartient à $L^{2/p}(\mathbb{T}, dm)$, où Σ_ξ est le domaine de Stolz en $\xi \in \mathbb{T}$.

2) Soient $p \geq 2$ et $r \geq 1$. Soit p' l'exposant conjugué de p.

– *Lorsque $1 \leq r \leq p'$, on a*

$$\pi_r(J_\mu) \approx \pi_1(J_\mu) \approx \|F\|_{L^{p'}(\mathbb{T})} \quad \textit{avec } F(\xi) = \Big[\sum_{n\geq 0} 2^{2n}\Big(\mu\big(W(\xi, 2^{-n})\big)\Big)^{\frac{2}{p}}\Big]^{1/2}. \tag{6}$$

– *Lorsque $p' < r \leq p$, on a*

$$\pi_r(J_\mu) \approx \left[\sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{0\leq j<2^n} \Big(2^n \mu(R_{n,j})\Big)^{r/p}\right]^{1/r}. \tag{7}$$

– *Lorsque $p \leq r$, on a*

$$\pi_r(J_\mu) \approx \left[\sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{0\leq j<2^n} 2^n \mu(R_{n,j})\right]^{1/p} \approx \left(\int_{\mathbb{D}} \frac{1}{1-|z|}\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}. \tag{8}$$

Les preuves ne peuvent être détaillées ici.

Une partie des résultats s'obtient en utilisant les caractérisations (cf. section suivante) établies dans le cas particulier où la mesure μ est portée par les couronnes dyadiques $\left\{z \in \mathbb{D} \mid 1 - \dfrac{1}{2^n} \leq |z| \leq 1 - \dfrac{1}{2^{n+1}}\right\}$ et l'utilisation de la décomposition de Littlewood–Paley. Il faut alors également utiliser de nouveaux résultats de recollement d'opérateurs sommants.

Le cas $1 < p \leq 2$ se traite complètement différemment. On utilise notamment un théorème de factorisation de Maurey pour caractériser les opérateurs 2-sommants à valeurs dans L^p, ainsi qu'un théorème de mini–max de Ky Fan. La conclusion finale repose sur des travaux de Luecking, Blasco–Jarchow, qui caractérisent l'injection de H^p dans $L^q(\nu)$ quand $q < p$.

Le cas $p \geq 2$ et $1 \leq r \leq p'$ doit lui aussi faire appel à d'autres idées.

2. Le cas d'une couronne

Nous mentionnons dans cette section les caractérisations que l'on établit dans le cas particulier où la mesure μ est portée par la couronne

$$\Gamma_N = \left\{z \in \mathbb{D} \mid 1 - \frac{1}{N} \leq |z| \leq 1 - \frac{1}{2N}\right\},$$

où N est un entier.

Cela repose en partie sur le fait que H^p_N qui est le sous-espace de H^p engendré par les monômes $1, \dots, z^{N-1}$ est isomorphe à l'espace des suites ℓ^p_N, et ce avec des constantes d'isomorphismes indépendantes de N.

On note alors μ_N la trace de μ sur Γ_N. L'opérateur τ_N désigne la restriction de J_{μ_N} à H^p_N.

En notant $L_{N,j} = \Gamma_N \cap \big\{z \in \mathbb{D} \mid arg(z) \in \big(2\pi j/N, 2\pi(j+1)/N\big]\big\}$, on remarque que $\Gamma_N = \bigcup\limits_{0\leq j<N} L_{N,j}$.

Ci-dessous, pour $\alpha \in \ell^\infty_N$, l'opérateur $\mathfrak{M}_\alpha$ est le multiplicateur par α agissant de ℓ^p_N dans lui-même.

La proposition suivante joue un rôle clé pour traiter par recollement les cas correspondant aux couples (p, r) avec $p \geq 2$ et $r > p'$.

Proposition 2.1. *Soient $r \geq 1$ et $p > 1$, on a*

$$\pi_r\big(J_{\mu_N}\big) \approx \pi_r\big(\tau_N\big) \approx \pi_r\big(\mathfrak{M}_\alpha\big),$$

où $\alpha_j = \Big(N\cdot\mu\big(L_{N,j}\big)\Big)^{1/p}$ avec $0 \leq j < N$.

Remerciements

Ces travaux ont été partiellement financés par le projet de recherche MTM2015-63699-P (Spanish MINECO and FEDER funds).

Références

[1] C.C. Cowen, B.D. MacCluer, Composition Operators on Spaces of Analytic Functions, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, États-Unis, 1995.
[2] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge, Absolutely Summing Operators, Cambridge University Press, Cambridge, Royaume-Uni, 1995.
[3] T. Domenig, Composition operators belonging to operator ideals, J. Math. Anal. Appl. 237 (1) (1999) 327–349.
[4] P. Lefèvre, L. Rodríguez-Piazza, Absolutely summing Carleson embeddings, arXiv:1610.02246, 2016.
[5] J.H. Shapiro, Composition Operators and Classical Function Theory, Universitext: Tracts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1993.
[6] J.H. Shapiro, P.D. Taylor, Compact, nuclear, and Hilbert–Schmidt composition operators on H^2, Indiana Univ. Math. J. 23 (6) (1973) 471–496.