



Contrôle optimal

## Une nouvelle approche pour la synchronisation approchée d'un système couplé d'équations des ondes : contrôles directs et indirects



*A new approach for the approximate synchronization for a coupled system of wave equations: Direct and indirect controls*

Tatsien Li <sup>a,1,2</sup>, Bopeng Rao <sup>b</sup>

<sup>a</sup> School of Mathematical Sciences, Fudan University, Shanghai 200433, China

<sup>b</sup> Institut de recherche Mathématique avancée, Université de Strasbourg, 67084 Strasbourg, France

### INFO ARTICLE

Historique de l'article :

Reçu le 14 juillet 2016

Accepté le 30 août 2016

Disponible sur Internet le 6 septembre 2016

Présenté par Philippe G. Ciarlet

### RÉSUMÉ

Dans cette Note, nous donnons une nouvelle définition plus naturelle de la synchronisation approchée par  $p$ -groupes ( $p \geq 1$ ) pour un système couplé de  $N$  équations des ondes par des contrôles frontières de Dirichlet. Au moyen du critère de Kalman, nous introduisons la notion de nombre de contrôles totaux (directs et indirects). Nous montrons que, si  $(N - p)$  est le nombre minimal de contrôles totaux pour la synchronisation approchée par  $p$ -groupes, alors on aura nécessairement l'existence de l'état approximativement synchronisable, ainsi que la condition de  $C_p$ -compatibilité. Dans le cas contraire, la synchronisation approchée par  $p$ -groupes peut entraîner certaines propriétés supplémentaires inattendues.

© 2016 Publié par Elsevier Masson SAS au nom de Académie des sciences.

### ABSTRACT

In this Note, we give a new and more natural definition of the approximate synchronization by  $p$ -groups ( $p \geq 1$ ) for a coupled system of  $N$  wave equations with Dirichlet boundary controls. By means of Kalman's criterion, the concept of the number of total (direct and indirect) controls is introduced. If the minimal number of total controls is equal to  $(N - p)$ , then the existence of the approximately synchronizable state as well as the necessity of the  $C_p$ -compatibility condition are the consequence of the approximate synchronization by  $p$ -groups. Otherwise, the approximate synchronization by  $p$ -groups could imply some unexpected additional properties.

© 2016 Publié par Elsevier Masson SAS au nom de Académie des sciences.

Adresses e-mail : [dqli@fudan.edu.cn](mailto:dqli@fudan.edu.cn) (T. Li), [bopeng.rao@math.unistra.fr](mailto:bopeng.rao@math.unistra.fr) (B. Rao).

<sup>1</sup> Shanghai Key Laboratory for Contemporary Applied Mathematics; Nonlinear Mathematical Modeling and Methods Laboratory.

<sup>2</sup> Project supported by the National Basic Research Program of China (No. 2013CB834100), and the National Natural Science Foundation of China (No. 11121101).

<http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2016.08.005>

1631-073X/© 2016 Publié par Elsevier Masson SAS au nom de Académie des sciences.

**Abridged English version**

Let  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  be a bounded domain with smooth boundary  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_0$  such that  $\bar{\Gamma}_1 \cap \bar{\Gamma}_0 = \emptyset$ . Let

$$U = (u^{(1)}, \dots, u^{(N)})^T, \quad H = (h^{(1)}, \dots, h^{(M)})^T$$

with  $M \leq N$  be the state variable and the boundary control acting on  $\Gamma_1$ , respectively. Consider the following problem for a coupled system of wave equations with Dirichlet boundary controls:

$$\begin{cases} U'' - \Delta U + AU = 0 & \text{in } (0, +\infty) \times \Omega, \\ U = 0 & \text{on } (0, +\infty) \times \Gamma_0, \\ U = DH & \text{on } (0, +\infty) \times \Gamma_1, \\ t = 0: \quad U = U_0, \quad U' = U_1 & \text{in } \Omega, \end{cases} \tag{0.1}$$

where the  $N \times N$  coupling matrix  $A$  and the full column-rank  $N \times M$  boundary control matrix  $D$  are both with constant entries.

Let  $p \geq 1$  be an integer and let  $0 = n_0 < n_1 < n_2 < \dots < n_p = N$  be integers. We rearrange the components of the state variable  $U$  into  $p$  groups

$$(u^{(1)}, \dots, u^{(n_1)}), \quad (u^{(n_1+1)}, \dots, u^{(n_2)}), \dots, (u^{(n_{p-1}+1)}, \dots, u^{(n_p)}).$$

**Definition.** The system (0.1) is approximately synchronizable by  $p$ -groups at the time  $T > 0$ , if for any given initial data  $(U_0, U_1) \in (L^2(\Omega))^N \times (H^{-1}(\Omega))^N$ , there exists a sequence of boundary controls  $H_n \in (L^2(0, +\infty; L^2(\Gamma_1)))^M$  with compact support in  $[0, T]$ , such that the corresponding sequence  $\{U_n\}$  of solutions to problem (0.1) satisfies

$$u_n^{(k)} - u_n^{(l)} \rightarrow 0 \quad \text{in } C_{loc}^0([T, +\infty); L^2(\Omega)) \cap C_{loc}^1([T, +\infty); H^{-1}(\Omega)) \tag{0.2}$$

as  $n \rightarrow +\infty$  for all  $n_{r-1} + 1 \leq k, l \leq n_r$  and  $1 \leq r \leq p$ .

**Main Theorem.** If the system (0.1) is approximately synchronizable by  $p$ -groups, then we necessarily have

$$\text{rank}(D, AD, \dots, A^{N-1}D) \geq N - p. \tag{0.3}$$

Moreover, assume that the system (0.1) is approximately synchronizable by  $p$ -groups under the minimal rank condition

$$\text{rank}(D, AD, \dots, A^{N-1}D) = N - p \tag{0.4}$$

then the following properties hold:

(i) there exist linearly independent scalar functions  $u_1, u_2, \dots, u_p$  such that

$$u_n^{(k)} \rightarrow u_r \quad \text{in } C_{loc}^0([T, +\infty); L^2(\Omega)) \cap C_{loc}^1([T, +\infty); H^{-1}(\Omega)) \tag{0.5}$$

as  $n \rightarrow +\infty$  for all  $n_{r-1} + 1 \leq k \leq n_r$  and  $1 \leq r \leq p$ ;

(ii) there exists a unique matrix  $\bar{A}_p$  of order  $(N - p)$ , such that  $C_p A = \bar{A}_p C_p$ , where, here and subsequently,  $C_p$  is defined by (1.4) below;

(iii) we have the rank condition

$$\text{rank}(C_p D, C_p AD, \dots, C_p A^{N-1}D) = N - p. \tag{0.6}$$

(iv) The matrix  $A^T$  admits an invariant subspace which is biorthonormal to  $\text{Ker}(C_p)$ .

**Remark.** The new definition given by (0.2) is more natural, but it cannot imply the convergence (0.5) in general. The existence of the functions  $u_1, \dots, u_p$  in (0.5) is based on the minimality of the rank condition (0.4) and on the convergence (0.2). Unfortunately, we cannot always realize the approximate synchronization by  $p$ -groups under the minimal rank condition (0.4). Whether we can do so depends on the algebraic structure of the coupling matrix  $A$  relative to the matrix  $C_p$ . More specifically, the matrix  $A^T$  should admit an invariant subspace, which is biorthonormal to  $\text{Ker}(C_p)$ . Otherwise, we have to use more than  $(N - p)$  total controls, and could obtain some unexpected additional properties. The reader is referred to [8] for complete proofs and various complements.

**1. Introduction**

On désigne par  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert borné de frontière régulière  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_0$  telle que  $\bar{\Gamma}_1 \cap \bar{\Gamma}_0 = \emptyset$ . On suppose que  $\Omega$  satisfasse la condition géométrique usuelle de contrôle (voir [1]). On pose  $U = (u^{(1)}, \dots, u^{(N)})^T$  et  $H = (h^{(1)}, \dots, h^{(M)})^T$  avec  $M \leq N$ . Étant donné une matrice  $A \in \mathbb{M}^{N \times N}(\mathbb{R})$  et une matrice de rang plein  $D \in \mathbb{M}^{N \times M}(\mathbb{R})$ , nous considérons le système suivant :

$$\begin{cases} U'' - \Delta U + AU = 0 & \text{dans } (0, +\infty) \times \Omega, \\ U = 0 & \text{sur } (0, +\infty) \times \Gamma_0, \\ U = DH & \text{sur } (0, +\infty) \times \Gamma_1, \\ t = 0: U = U_0, \quad U' = U_1 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

Dans [4], nous avons établi l'équivalence entre la contrôlabilité nulle approchée du système (1.1) et la  $D$ -observabilité du système adjoint suivant :

$$\begin{cases} \Phi'' - \Delta \Phi + A^T \Phi = 0 & \text{dans } (0, +\infty) \times \Omega, \\ \Phi = 0 & \text{sur } (0, +\infty) \times \Gamma. \end{cases} \tag{1.2}$$

Puis, dans [7], nous avons montré que le critère de Kalman (voir [2,10]) :

$$\text{rank}(D, AD, \dots, A^{N-1}D) = N \tag{1.3}$$

est une condition nécessaire pour la  $D$ -observabilité du système adjoint (1.2). La suffisance a été aussi établie dans des cas spécifiques : 1-D système, 2 × 2 système et système cascade.

Dans [3,5,6], nous avons montré que le système (1.1) est exactement contrôlable si et seulement si le rang de la matrice  $D$ , qui représente le nombre de contrôles directement appliqués sur la frontière  $\Gamma_1$ , est égal à  $N$ . En revanche, pour la contrôlabilité approchée, il y a deux sortes de contrôles : une partie est directement appliquée sur la frontière  $\Gamma_1$  dont le nombre est représenté par le rang de  $D$ , et une autre partie est déduite de la première partie via les couplages successifs :  $AD, \dots, A^{N-1}D$ , dont le nombre est représenté par  $\text{rang}(D, AD, \dots, A^{N-1}D) - \text{rang}(D)$ . De ce point de vue, le critère de Kalman (1.3) signifie que le nombre total de contrôles (directs et indirects) nécessaire pour la contrôlabilité approchée est aussi égale à  $N$ .

Soit  $0 = n_0 < n_1 < n_2 < \dots < n_p = N$  des entiers. Nous séparons les composantes de la variable d'état  $U = (u^{(1)}, \dots, u^{(N)})^T$  en  $p$  groupes :

$$(u^{(1)}, \dots, u^{(n_1)}), \quad (u^{(n_1+1)}, \dots, u^{(n_2)}), \dots, (u^{(n_{p-1}+1)}, \dots, u^{(n_p)}).$$

Désignons par  $S_r$  la matrice d'ordre  $(n_r - n_{r-1} - 1) \times (n_r - n_{r-1})$  pour  $1 \leq r \leq p$  et par  $C_p$  la matrice de synchronisation d'ordre  $(N - p) \times N$  :

$$S_r = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & \dots & & \\ & & & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C_p = \begin{pmatrix} S_1 & & & & \\ & S_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & S_p \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

**Définition 1.1.** Le système (1.1) est approximativement synchronisable par  $p$ -groupes ( $p \geq 1$ ) au temps  $T > 0$  si, pour toute donnée initiale  $(U_0, U_1) \in (L^2(\Omega))^N \times (H^{-1}(\Omega))^N$ , il existe une suite de contrôles  $H_n \in (L^2(0, +\infty; L^2(\Gamma_1)))^M$  de support compact dans  $[0, T]$ , telle que la suite  $\{U_n\}$  de solutions correspondantes du problème (1.1) satisfait la condition suivante :

$$C_p U_n \rightarrow 0 \quad \text{dans } C_{\text{loc}}^0([T, +\infty); L^2(\Omega))^{N-p} \cap C_{\text{loc}}^1([T, +\infty); H^{-1}(\Omega))^{N-p} \tag{1.5}$$

quand  $n \rightarrow +\infty$ .

La condition (1.5) s'écrit sous la forme suivante :

$$u_n^{(k)} - u_n^{(l)} \rightarrow 0 \quad \text{dans } C_{\text{loc}}^0([T, +\infty); L^2(\Omega)) \cap C_{\text{loc}}^1([T, +\infty); H^{-1}(\Omega)) \tag{1.6}$$

quand  $n \rightarrow +\infty$  pour tout  $n_{r-1} + 1 \leq k, l \leq n_r$  et  $1 \leq r \leq p$ , par contraste avec l'ancienne Définition 4.1 dans [4], à savoir

$$u_n^{(k)} \rightarrow u_r \quad \text{dans } C_{\text{loc}}^0([T, +\infty); L^2(\Omega)) \cap C_{\text{loc}}^1([T, +\infty); H^{-1}(\Omega)) \tag{1.7}$$

quand  $n \rightarrow +\infty$  pour tout  $n_{r-1} + 1 \leq k \leq n_r$  et  $1 \leq r \leq p$ . En revanche, la nouvelle définition (1.6) n'implique pas, en général, l'existence des fonctions  $u_1, \dots, u_p$  telles que (1.7) ait lieu.

On dit que  $A$  satisfait la condition de  $C_p$ -compatibilité s'il existe une matrice  $\bar{A}_p$  d'ordre  $(N - p)$  telle que

$$C_p A = \bar{A}_p C_p. \tag{1.8}$$

Alors, en posant  $W_p = C_p U$ , on transforme le problème (1.1) en un problème réduit :

$$\begin{cases} W_p'' - \Delta W_p + \bar{A}_p W_p = 0 & \text{dans } (0, +\infty) \times \Omega, \\ W_p = 0 & \text{sur } (0, +\infty) \times \Gamma_0, \\ W_q = C_p D H & \text{sur } (0, +\infty) \times \Gamma_1, \\ t = 0: W_p = C_p U_0, \quad W_p' = C_p U_1 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (1.9)$$

dont la contrôlabilité nulle approchée équivaut à la synchronisation approchée de (1.1). Par conséquent, le critère de Kalman

$$\text{rank}(C_p D, C_p A D, \dots, C_p A^{N-1} D) = N - p \quad (1.10)$$

est une condition nécessaire, et même suffisante dans des cas spécifiques mentionnés ci-dessus. Or, la nécessité de la condition de  $C_p$ -compatibilité (1.8), qui est fondamentale pour la synchronisation approchée, dépend du nombre total de contrôles (directs et indirects), c'est-à-dire du rang de la matrice de Kalman. C'est l'un des thèmes que l'on va développer dans cette Note.

Désignons par  $\mathbb{D}_p$  l'ensemble des matrices qui réalisent la synchronisation approchée par  $p$ -groupes du système (1.1). Posons

$$N_p = \inf_{D \in \mathbb{D}_p} \text{rank}(D, AD, \dots, A^{N-1} D). \quad (1.11)$$

On a  $N_p \geq N - p$  en général. Lorsque  $N_p = N - p$ , on pourra montrer la nécessité de la condition de  $C_p$ -compatibilité (1.8), le critère de Kalman (1.10), ainsi que l'existence des fonctions  $u_1, u_2, \dots, u_p$  linéairement indépendantes telles que les convergences (1.7) aient lieu.

Dans le cas contraire :  $N_p > N - p$ , la situation est beaucoup plus compliquée. Pour réaliser la synchronisation approchée par  $p$ -groupes, on est obligé d'utiliser plus que  $(N - p)$  contrôles directs et indirects. De ce fait, la condition de  $C_p$ -compatibilité n'est plus nécessaire, d'une part, et la suite des solutions  $U_n$  devrait incorporer des informations autres que la synchronisation approchée par  $p$ -groupes (1.5), d'autre part. Plus précisément, soit  $q (< p)$  un entier tel que  $N_p = N - q$ . Désignons par  $C_q^*$  une matrice d'ordre  $(N - q) \times N$ , appelée l'extension de  $C_p$ , telle que  $A^T$  admette un sous-espace invariant qui est bi-orthogonal à  $\text{Ker}(C_q^*)$ , d'une part, et telle que  $\text{Ker}(C_q^*)$  soit le plus grand sous-espace invariant de  $A$ , contenu dans  $\text{Ker}(C_p)$ , d'autre part.

**Définition 1.2.** Le système (1.1) possède la propriété de synchronisation induite au temps  $T > 0$  si, pour toute donnée initiale  $(U_0, U_1) \in (L^2(\Omega))^N \times (H^{-1}(\Omega))^N$ , il existe une suite de contrôles  $H_n \in (L^2(0, +\infty; L^2(\Gamma_1)))^M$  de support compact dans  $[0, T]$ , telle que la suite  $\{U_n\}$  de solutions correspondantes du problème (1.1) satisfasse la condition suivante :

$$C_q^* U_n \rightarrow 0 \quad \text{dans } C_{\text{loc}}^0([T, +\infty); L^2(\Omega))^{N-q} \cap C_{\text{loc}}^1([T, +\infty); H^{-1}(\Omega))^{N-q} \quad (1.12)$$

quand  $n \rightarrow +\infty$ .

Remarquons que  $\text{Im}(C_p) \subset \text{Im}(C_q^*)$  et  $\text{Im}(C_q^*) \setminus \text{Im}(C_p) \neq \{\emptyset\}$ . Par suite, la convergence (1.12) entraîne non seulement celle dans (1.5), mais aussi certaines propriétés supplémentaires inattendues. En fait, nous montrons la nécessité de la condition de  $C_q^*$ -compatibilité et l'existence des fonctions  $u_1, u_2, \dots, u_p$  telles que la relation (1.7) reste vraie, mais les fonctions  $u_1, u_2, \dots, u_p$  ne sont plus linéairement indépendantes dans ce cas. Par exemple, il se peut que  $u_p \equiv 0$ , ce qui constitue une information supplémentaire et intéressante. Nous renvoyons le lecteur à [8] pour les preuves et des compléments variés.

## 2. Synchronisation approchée par groupes

Soit  $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N\}$  la base canonique dans  $\mathbb{R}^N$ . Posons

$$e_r = \sum_{l=n_{r-1}+1}^{n_r} \epsilon_l, \quad 1 \leq r \leq p.$$

Alors, on a

$$\text{Ker}(C_p) = \text{Span}\{e_1, \dots, e_p\}. \quad (2.1)$$

Comme nous avons expliqué dans l'introduction, la condition de  $C_p$ -compatibilité (1.8) joue un rôle fondamental dans la procédure de réduction du problème. Or, sa nécessité dépend du nombre de contrôles totaux employés. Le résultat suivant montre que  $(N - p)$  contrôles totaux sont nécessaires pour réaliser la synchronisation approchée par  $p$ -groupes du système (1.1).

**Théorème 2.1.** *Supposons que le système (1.1) soit approximativement synchronisable par  $p$ -groupes. Alors, on a nécessairement*

$$\text{rank}(D, AD, \dots, A^{N-1} D) \geq N - p. \quad (2.2)$$

**Théorème 2.2.** *Supposons que le système (1.1) soit approximativement synchronisable par  $p$ -groupes sous la condition de rang minimal suivante :*

$$\text{rank}(D, AD, \dots, A^{N-1}D) = N - p. \tag{2.3}$$

Alors on a les propriétés suivantes :

(i) *il existe des fonctions  $u_1, \dots, u_p$  linéairement indépendantes telles que*

$$u_n^{(k)} \rightarrow u_r \quad \text{dans} \quad C_{\text{loc}}^0([T, +\infty); L^2(\Omega)) \cap C_{\text{loc}}^1([T, +\infty); H^{-1}(\Omega)) \tag{2.4}$$

*quand  $n \rightarrow +\infty$ , pour tout  $n_{r-1} + 1 \leq k \leq n_r$  et  $1 \leq r \leq p$  ;*

(ii) *la matrice  $A$  satisfait la condition de  $C_p$ -compatibilité (1.8) ;*

(iii) *la condition de rang (1.10) a lieu ;*

(iv) *la matrice  $A^T$  admet un sous-espace invariant, qui est bi-orthogonal à  $\text{Ker}(C_p)$ .*

**Preuve.** Par la caractérisation du critère de Kalman (voir Lemme 2.1 dans [7]), la condition (2.3) implique l'existence d'un sous-espace invariant  $V = \text{Span}\{E_1, \dots, E_p\}$  de  $A^T$ , contenu dans  $\text{Ker}(D^T)$ . Alors, en appliquant  $E_r$  au problème (1.1) et en posant  $\phi_r = (E_r, U_n)$  on obtient

$$\begin{cases} \phi_r'' - \Delta\phi_r + \sum_{s=1}^p \alpha_{rs}\phi_s = 0 & \text{dans } (0, +\infty) \times \Omega, \\ \phi_r = 0 & \text{sur } (0, +\infty) \times \Gamma, \\ t = 0: \quad \phi_r = (E_r, U_0) := \phi_{r0}, \quad \phi_r' = (E_r, U_1) := \phi_{r1} & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{2.5}$$

pour  $r = 1, \dots, p$ . Clairement, les fonctions  $\phi_1, \dots, \phi_p$  sont indépendantes de  $n$ . On peut montrer, par ailleurs, que  $\text{Im}(C^T) \cap V = \{0\}$ . Ainsi, la convergence de synchronisation (1.5) implique que  $U_n$  tend vers une fonction  $U$  dans l'espace  $(C_{\text{loc}}^0([T, +\infty); (L^2(\Omega)))^N \cap (C_{\text{loc}}^1([T, +\infty); (H^{-1}(\Omega)))^N$  telle que  $C_p U = 0$ . Ceci, combiné avec (2.1), implique l'existence de fonctions  $u_r$  ( $r = 1, \dots, p$ ) telles que

$$U = \sum_{r=1}^p u_r e_r \quad \text{pour} \quad t \geq T. \tag{2.6}$$

(ii) Grâce à l'expression (2.6), on a

$$\phi_s = \sum_{r=1}^p (E_s, e_r) u_r, \quad s = 1, \dots, p \quad \text{pour} \quad t \geq T. \tag{2.7}$$

L'application  $(\phi_{10}, \dots, \phi_{p0}) \rightarrow (\phi_1, \dots, \phi_p)$  étant un isomorphisme dans  $(H_0^1(\Omega))^p$ , les fonctions  $u_1, \dots, u_p$  sont donc linéairement indépendantes. Puis, en appliquant  $C_p$  au problème (1.1), quand  $n \rightarrow +\infty$ , on déduit de (2.6) que

$$\sum_{r=1}^p u_r C_p A e_r = 0 \quad \text{pour} \quad t \geq T.$$

Puisque les fonctions  $u_1, \dots, u_p$  sont linéairement indépendantes, on en déduit que  $C_p A e_r = 0$  pour tout  $1 \leq r \leq p$  ; donc,  $A \text{Ker}(C_p) \subseteq \text{Ker}(C_p)$ . Utilisant le Lemme 3.3 de [9], on obtient la condition de  $C_p$ -compatibilité (1.8).

(iii) Une fois que la condition de  $C_p$ -compatibilité est établie, on obtient en posant  $W = C_p U$ , le problème réduit (1.9), qui est approximativement nul contrôlable. Par conséquent, la condition de rang (1.10) est vérifiée.

(iv) Il suffit de remarquer que la matrice  $((E_s, e_r))_{1 \leq s, r \leq p}$  est inversible ; donc les bases  $(E_1, \dots, E_p)$  et  $(e_1, \dots, e_p)$  sont bi-orthogonalisables par un procédé de Gram-Schmidt.

**Remarque 2.1.** La nouvelle définition 1.1 est plus naturelle et plus faible que la définition (1.7) introduite précédemment dans [4]. Ce qui est surprenant est que, sous la condition de rang minimal (2.3), la convergence de synchronisation (1.5) implique l'existence de l'état approximativement synchronisable  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ . Ces propriétés ne sont pas *a priori* des conséquences de la convergence (1.5), mais sont dues à la condition de rang minimal (2.3).

**Remarque 2.2.** La condition de rang (1.10) signifie que, lorsqu'on réduit le problème original (1.1) au problème (1.9), le nombre  $(N - p)$  de contrôles totaux reste inchangé. Ainsi, nous obtenons un problème réduit de  $(N - p)$  équations encore soumises à  $(N - p)$  contrôles totaux.

**Théorème 2.3.** *Supposons que  $A$  satisfasse la condition de  $C_p$ -compatibilité (1.8) et que  $A$  admette un sous-espace invariant bi-orthogonal à  $\text{Ker}(C_p)$ . Alors, la matrice  $D = C_p^T C_p$  vérifie la condition de rang minimal (2.3) et réalise la synchronisation approchée par  $p$ -groupes du système (1.1).*

### 3. Synchronisation approchée par groupes (induite)

En général, on ne peut pas réaliser la synchronisation approchée par  $p$ -groupes sous la condition de rang minimal (2.3), même si  $A$  satisfait la condition de  $C_p$ -compatibilité. Cette défaillance est causée par le fait que  $A^T$  n'admet pas de sous-espace invariant bi-orthogonal à  $\text{Ker}(C_p)$ . L'objectif de ce paragraphe est de déterminer le nombre minimal de contrôles totaux nécessaires pour la synchronisation approchée par  $p$ -groupes dans le cas général.

**Définition 3.1.** Une matrice  $C_q^*$  d'ordre  $(N - q) \times N$  ( $q \leq p$ ) est appelée l'extension de la matrice  $C_p$  relativement à la matrice  $A$  si elle possède les propriétés suivantes :

- (i)  $A$  admet un sous-espace invariant qui est bi-orthogonal à  $\text{Im}(C_q^{*T})$  ;
- (ii)  $\text{Im}(C_q^{*T})$  est le plus petit sous-espace invariant de  $A^T$ , contenant  $\text{Im}(C_p^T)$ .

**Remarque 3.1.** (i) Notons  $q = \dim \text{Ker}(C_q^*)$  ; (ii) on a  $\text{Im}(C_q^{*T}) = \text{Im}(\tilde{C}_q^{*T})$  ; (iii)  $\text{Im}(C_q^{*T}) \setminus \text{Im}(C_p^T)$  ne contient pas de vecteur propre de  $A^T$ .

Comme  $A$  admet un sous-espace invariant qui est bi-orthogonal à  $\text{Im}(C_q^{*T})$ , en vertu des Théorèmes 2.1 et 2.2, on voit que  $(N - q)$  est le nombre minimal de contrôles totaux pour la synchronisation induite (1.12). Bien que la convergence (1.5) n'implique pas celle dans (1.12) en général, on a néanmoins le resultat suivant.

**Théorème 3.1.** Supposons que le système (1.1) soit approximativement synchronisable par  $p$ -groupes. Alors

$$\text{rank}(D, AD, \dots, A^{N-1}D) \geq N - q, \tag{3.1}$$

où  $q = \dim \text{Ker}(C_q^*)$ .

Ce resultat relie la dépendance du nombre minimal de contrôles totaux à la structure algébrique de la matrice  $A$  relativement à la matrice  $C_p$ .

**Théorème 3.2.** Le système (1.1) est approximativement synchronisable par  $p$ -groupes sous la condition de rang minimal

$$\text{rank}(D, AD, \dots, A^{N-1}D) = N - q. \tag{3.2}$$

**Corollaire 3.1.** En combinant les Théorèmes 3.1 et 3.2, on obtient

$$N_p = N - q. \tag{3.3}$$

**Théorème 3.3.** Supposons que le système (1.1) soit approximativement synchronisable par  $p$ -groupes sous la condition de rang minimal (3.2). Alors, on a les propriétés suivantes :

- (i) il existe des fonctions  $u_1, \dots, u_p$  telles que

$$u_n^{(k)} \rightarrow u_r \quad \text{dans} \quad C_{\text{loc}}^0([T, +\infty); L^2(\Omega)) \cap C_{\text{loc}}^1([T, +\infty); H^{-1}(\Omega)) \tag{3.4}$$

quand  $n \rightarrow +\infty$ , pour tout  $n_{r-1} + 1 \leq k \leq n_r$  et  $1 \leq r \leq p$  ;

- (ii) on a la condition de rang

$$\text{rank}(C_q^*D, C_q^*AD, \dots, C_q^*A^{N-1}D) = N - q. \tag{3.5}$$

Soit ensuite  $\bar{A}_q$  une matrice d'ordre  $(N - q)$  telle que  $C_q^*A = \bar{A}_qC_q^*$ . En posant  $W_q = C_q^*U$ , on réduit le problème (1.1) au problème suivant :

$$\begin{cases} W_q'' - \Delta W_q + \bar{A}_q W_q = 0 & \text{dans } (0, +\infty) \times \Omega, \\ W_q = 0 & \text{sur } (0, +\infty) \times \Gamma_0, \\ W_q = C_q^*DH & \text{sur } (0, +\infty) \times \Gamma_1, \\ t = 0: \quad W_q = C_q^*U_0, \quad W_q' = C_q^*U_1 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{3.6}$$

La condition de rang (3.5) est en effet le critère de Kalman pour la contrôlabilité nulle approchée du problème réduit (3.6). Elle représente le nombre de contrôles totaux apparaissant dans le problème réduit (3.6) par l'intermédiaire de la matrice d'extension  $C_q^*$ . Sous la condition de rang (3.2), il y a deux façons pour effectuer la réduction. La première se fait par la matrice  $C_p$  comme dans l'introduction et conduit au problème (1.9), puis donne la synchronisation approchée (1.5) pour laquelle la condition de rang (1.10) est nécessaire. Ainsi quand on réduit le problème (1.1) de  $N$  équations au

problème (1.9) de  $(N - p)$  équations, le nombre de contrôles totaux étant également réduit de  $(N - q)$  à  $(N - p)$ . Il y a donc une perte de  $(p - q)$  contrôles directs et indirects. En revanche, si on effectue la réduction par la matrice d'extension  $C_q^*$  comme ci-dessus, alors on obtient un problème réduit (3.6) avec  $(N - q)$  équations, mais le nombre  $(N - q)$  de contrôles totaux, donné par (3.5), reste inchangé. Par conséquent, on obtient la synchronisation induite (1.12), qui est meilleure que la synchronisation approchée (1.5).

**Exemple.** Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} u'' - \Delta u + v = 0 & \text{dans } (0, +\infty) \times \Omega, \\ v'' - \Delta v - u + 2v = 0 & \text{dans } (0, +\infty) \times \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sur } (0, +\infty) \times \Gamma_0, \\ u = \alpha h, \quad v = \beta h & \text{sur } (0, +\infty) \times \Gamma_1. \end{cases} \quad (3.7)$$

Posons

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad C_1 = (1, -1).$$

La matrice  $A$  satisfait clairement la condition de  $C_1$ -compatibilité avec  $\bar{A}_1 = 1$ . De plus, un calcul direct donne

$$C_1 D = \alpha - \beta, \quad (D, AD) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & 2\beta - \alpha \end{pmatrix}, \quad \det(D, AD) = -(\alpha - \beta)^2.$$

Ainsi, pour tout  $\alpha \neq \beta$ , la condition  $\text{rang}(C_1 D) = 1$  implique la condition  $\text{rang}(D, AD) = 2$ , celle-ci étant nécessaire et suffisante pour la contrôlabilité nulle approchée du même système. Par suite, quand le système (3.7) est approximativement synchronisable, il est aussi approximativement nul contrôlable sous l'action de la même matrice de contrôle  $D$ . On trouvera d'autres exemples intéressants dans [8].

## Références

- [1] C. Bardos, G. Lebeau, J. Rauch, Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary, *SIAM J. Control Optim.* 30 (1992) 1024–1065.
- [2] R.E. Kalman, Contributions to the theory of optimal control, *Bol. Soc. Mat. Mexicana* 5 (1960) 102–119.
- [3] T-T. Li, B. Rao, Exact synchronization for a coupled system of wave equations with Dirichlet boundary controls, *Chin. Ann. Math.* 34B (2013) 139–160.
- [4] T-T. Li, B. Rao, Asymptotic controllability and asymptotic synchronization for a coupled system of wave equations with Dirichlet boundary controls, *Asymptot. Anal.* 86 (2014) 199–225.
- [5] T-T. Li, B. Rao, On the exactly synchronizable state to a coupled system of wave equations, *Port. Math.* 72 (2015) 83–106.
- [6] T-T. Li, B. Rao, Exact synchronization by groups for a coupled system of wave equations with Dirichlet boundary controls, *J. Math. Pures Appl.* 105 (2016) 86–101.
- [7] T-T. Li, B. Rao, Kalman-type criteria for the approximate controllability and approximate synchronization of a coupled system of wave equations, *SIAM J. Control Optim.* 54 (2016) 49–72.
- [8] T-T. Li, B. Rao, A new approach for the approximate synchronization for a coupled system of wave equations: direct and indirect controls, Preprint.
- [9] T-T. Li, B. Rao, Y. Wei, Generalized exact boundary synchronization for a coupled system of wave equations, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 34 (2014) 2893–2906.
- [10] D.L. Russell, Controllability and stabilization theory for linear partial differential equations: recent progress and open questions, *SIAM Rev.* 20 (1978) 639–739.