C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 353 (2015) 767–771

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Combinatoire/Théorie des nombres

Les nombres de Stirling associés avec succession d'ordre 2, nombres de Fibonacci–Stirling et unimodalité

The 2-successive associated Stirling numbers, Fibonacci–Stirling numbers and unimodality

Hacène Belbachir, Assia Fettouma Tebtoub

USTHB, faculté des mathématiques, laboratoire RECITS, équipe CATI, DG-RSDT, BP 32, El Alia, 16111, Alger, Algérie

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 4 avril 2015
Accepté après révision le 29 juin 2015
Disponible sur Internet le 14 juillet 2015

Présenté par le comité de rédaction

RÉSUMÉ

Par une approche combinatoire, nous introduisons les *nombres de Stirling associés avec succession d'ordre* 2. On donne leur relation de récurrence et leur fonction génératrice. Par la suite, nous prouvons l'unimodalité des suites parcourant les transversales principales du triangle de Stirling de seconde espèce. Nous concluons par l'introduction des nombres de Fibonacci–Stirling.

© 2015 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

ABSTRACT

Using a combinatorial approach, we introduce the 2-*successive associated Stirling numbers*, we give the recurrence relation, the generating function, prove their unimodality and introduce their link with the Fibonacci–Stirling numbers. We conclude by establishing the unimodality of sequences lying over diagonal rays of second kind's Stirling triangle.

© 2015 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

The 2-successive associated Stirling numbers, denoted $\left\{ {n \atop k} \right\}^{[2]}$, count the number of partitions of the set $\{1, 2, \ldots, n\}$ into k non-empty parts, so that each part contains at least two consecutive numbers. Moreover, the last element n must either form a part with its predecessor or belong to another part satisfying the previous property.

They satisfy the following recurrence relation: $\left\{ {n \atop k} \right\}^{[2]} = k\left\{ {n-1 \atop k} \right\}^{[2]} + \left\{ {n-2 \atop k-1} \right\}^{[2]}$, $n \geq 2k$, where $\left\{ {0 \atop 0} \right\}^{[2]} = 1$, $\left\{ {n \atop n-1} \right\}^{[2]} = 0$ and $\left\{ {n \atop 0} \right\}^{[2]} = 0$ $(n \geq 1)$.

The ordinary generating function of the 2-successive associated Stirling numbers is given, for $k \geq 1$, by $A_k(x) := \sum_{n \geq 2k} \left\{ {n \atop k} \right\}^{[2]} x^n = \frac{x^{2k}}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)}$, with $A_0(x) = 1$.

Adresses e-mail : hbelbachir@usthb.dz, hacenebelbachir@gmail.com (H. Belbachir), atebtoub@usthb.dz, atebtoub@gmail.com (A.F. Tebtoub).

http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2015.06.008
1631-073X/© 2015 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

We establish that the sequence $\left(\left\{ {n \atop k} \right\}^{[2]}\right)_k$ is strictly log-concave, thus unimodal with at most two consecutive modes, which corresponds, for a fixed n, to a sequence lying over the diagonal rays of a second kind's Stirling triangle.

We define the sequence of Fibonacci–Stirling numbers $(\varphi_n)_n$, $n \geq 2k$, by $\varphi_{n+1} := \sum_k \left\{ {n-k \atop k} \right\}$, where $\varphi_0 = 1, \varphi_1 = 0$.

The Fibonacci–Stirling numbers are linked to the 2-successive associated Stirling numbers as well: $\varphi_{n+1} = \sum_k \left\{ {n \atop k} \right\}^{[2]}$. The sequence (φ_n) is called the sequence of *the 2-successive associated Bell numbers*.

1. Introduction

Les nombres de Stirling de seconde espèce, notés $\left\{ {n \atop k} \right\}$, comptent le nombre de partitions de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ en k sous-ensembles non vides. Ils sont définis, pour $1 \leq k \leq n$, par la relation de récurrence suivante :

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = k \left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}.$$

Les nombres de Stirling associés de seconde espèce [11], notés par $S_2(n, k)$, comptent le nombre de partitions de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ en k sous-ensembles de taille ≥ 2. Ils vérifient la récurrence suivante :

$$S_2(n,k) = k\, S_2(n-1,k) + (n-1) S_2(n-2,k-1), \ \textit{pour} \ \ 1 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor.$$

Une suite $(a_n)_{k=0}^n$ est dite unimodale si : $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k \geq a_{k+1} \geq \dots \geq a_n$, et est dite log-concave si, pour $k = 2, \dots, n-1$, on a : $a_k^2 \geq a_{k+1} a_{k-1}$. Elle est strictement log-concave si l'inégalité est stricte. La log-concavité implique l'unimodalité [13].

Théorème 1.1 *(Inégalité de Newton [10]). Si le polynôme $a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ n'admet que des racines réelles (négatives), alors :*

$$a_k^2 \geq a_{k-1} a_{k+1} \frac{k}{k-1} \frac{n-k+1}{n-k}, \ \textit{pour} \ \ k = 2, \dots, n-1.$$

L'inégalité de Newton implique la log-concavité stricte, voir Hammersley [8] et Erdös [7].

Le premier résultat, sur l'unimodalité dans le triangle de Pascal autre que la suite des coefficients binomiaux, est dû à Tanny et Zuker [12]. Ces derniers ont prouvé l'unimodalité de la suite $\binom{n-k}{k}$, $k = 0, 1, \dots$. Des travaux sur l'unimodalité des suites associées aux diagonales principales du triangle de Pascal ont été réalisés, voir [2] et [4]. Plus généralement, Belbachir et Szalay [3] ont établi que les suites parcourants toutes les transversales du triangle de Pascal $\left(\binom{n-\alpha k}{u+\beta k}\right)_k$ sont log-concave et donc unimodales. La question d'identification des modes reste ouverte dans sa généralité.

Par analogie avec ces travaux, nous nous proposons d'établir l'unimodalité des suites parcourant les transversales principales du triangle de Stirling de seconde espèce. Harper [9] démontre que $\sum_k \left\{ {n \atop k} \right\} x^k$ possède seulement des racines réelles négatives, il en déduit l'unimodalité. Canfield [6] établit autrement l'unimodalité de la suite $\left(\left\{ {n \atop k} \right\}\right)_k$.

Dans la Section 2, nous introduisons les *nombres de Stirling associés avec succession d'ordre* 2 avec quelques propriétés combinatoires, dont la fonction génératrice. En s'inspirant de la preuve de Bòna [5], on prouve, dans la troisième section, la log-concavité des *nombres de Stirling associés avec succession d'ordre* 2 et donc l'unimodalité. Nous montrons par la suite dans la Section 4, le lien entre les *nombres de Stirling associés avec succession d'ordre* 2 et les nombres de Stirling de seconde espèce. Ce lien va nous permettre de conclure quant à l'unimodalité des transversales principales du triangle de Stirling de seconde espèce. Nous terminons notre travail en introduisant les nombres de Fibonacci–Stirling.

2. Relation de récurrence, fonction génératrice et forme explicite

On commence par introduire les nombres de Stirling associés avec succession d'ordre 2.

Définition 2.1. Les nombres de Stirling associés avec succession d'ordre 2, notés par $\left\{ {n \atop k} \right\}^{[2]}$, comptent le nombre de partitions de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ en k parts non vides, tel que chaque part contient au moins deux éléments consécutifs et que l'élément n satisfait l'une des conditions suivantes : soit il forme avec son prédécesseur une part en soi, soit il appartient à une part qui vérifie déja la propriété précédente.

Exemple 1. Pour $n = 5$, $\left\{ {5 \atop 2} \right\}^{[2]}$ compte le nombre de partitions de $\{1, 2, \dots, 5\}$ en deux parts contenant au moins deux éléments consécutifs et tel que, une des conditions soit satisfaite ; en effet, on a les partitions suivantes : $\{1, 2, 3\}\{4, 5\}$; $\{1, 2\}\{3, 4, 5\}$; $\{1, 2, 5\}\{3, 4\}$. La partition $\{2, 3\}\{1, 4, 5\}$ ne peut être considérée, car le cinquième élément n'est pas dans une part qui contient au préalable deux éléments consécutifs.

La relation de récurrence suivante est satisfaite.

Théorème 2.2. *Pour $n \geq 2k$, on a*

$$\left\{ {n \atop k} \right\}^{[2]} = k \left\{ {n-1 \atop k} \right\}^{[2]} + \left\{ {n-2 \atop k-1} \right\}^{[2]}, \tag{1}$$

où $\left\{ {0 \atop 0} \right\}^{[2]} = 1$, $\left\{ {n \atop n-1} \right\}^{[2]} = 0$ *et* $\left\{ {n \atop 0} \right\}^{[2]} = 0$ $(n \geq 1)$.

Preuve. Il suffit de raisonner sur la part qui contient l'élément n. □

La fonction génératrice ordinaire des nombres de Stirling associés avec succession d'ordre 2 est donnée par :

Théorème 2.3. *Pour tout $k \geq 1$,*

$$A_k(x) := \sum_{n \geq 2k} \left\{ {n \atop k} \right\}^{[2]} x^n = \frac{x^{2k}}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)}, \tag{2}$$

avec : $A_0(x) = 1$.

Preuve. De la relation de récurrence (1), on a, pour tout $k = 1, 2, \ldots$, $A_k(x) = kxA_k(x) + x^2 A_{k-1}(x)$, donc : $A_k(x) = x^2(1 - kx)^{-1} A_{k-1}(x)$, ainsi,

$$A_k(x) = x^2(1-(k-1)x)^{-1} x^2(1-(k-2)x)^{-1} \cdots x^2(1-x)^{-1} A_0(x). \qquad \square$$

Il n'est pas difficile de déduire la forme explicite suivante :

Corollaire 2.4. *Les nombres de Stirling associés avec succession d'ordre 2,* $\left\{ {n \atop k} \right\}^{[2]}$, $k = 0, 1, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor$ *sont donnés par la forme explicite suivante.*

$$\left\{ {n \atop k} \right\}^{[2]} = \sum_{r_1 + r_2 + \cdots + r_k = n-2k} 1^{r_1} 2^{r_2} \cdots k^{r_k}. \tag{3}$$

3. Unimodalité des nombres de Stirling associés avec succession d'ordre 2

Dans cette section, nous nous inspirons de la preuve de Bòna [5] pour prouver que le polynôme qui génère les nombres de Stirling associés avec succession d'ordre 2 vérifie le théorème de Newton. Par conséquent, la suite générée par ces nombres, est log-concave et donc unimodale.

Théorème 3.1. *Soit* $P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \left\{ {n \atop j} \right\}^{[2]} x^j$, *alors les racines de $P_n(x)$ sont rèelles, distinctes, et nègatives pour tout $n = 1, 2, \ldots$.*

De plus, les racines de $P_n(x)$ et de $P_{n-1}(x)$ s'interlacent de la manière suivante :

- *si $P_n(x)$ et $P_{n-1}(x)$ sont tous les deux de même degré d et tels que leurs racines sont $0 = x_0 > x_1 > \cdots > x_{d-1}$ et $0 = y_0 > y_1 > \cdots > y_{d-1}$, respectivement, alors $0 > x_1 > y_1 > x_2 > y_2 > \cdots > x_{d-1} > y_{d-1}$;*
- *si $P_n(x)$ est de degré $d+1$ et si $P_{n-1}(x)$ est de degré d et si leurs racines sont : $0 = x_0 > x_1 > \cdots > x_d$ et $0 = y_0 > y_1 > \cdots > y_{d-1}$, respectivement, alors $0 > x_1 > y_1 > x_2 > y_2 > \cdots > x_{d-1} > y_{d-1} > x_d$.*

Expression de $P_n(x)$ pour $n \leq 6$:
$P_0(x) = 1$, $P_1(x) = 0$, $P_2(x) = x$, $P_3(x) = x$, $P_4(x) = x + x^2$, $P_5(x) = x + 3x^2$, $P_6(x) = x + 7x^2 + x^3$.

Preuve. La relation (1) donne

$$P_n(x) = x\left[P'_{n-1}(x) + P_{n-2}(x)\right]. \tag{4}$$

Prouvons notre théorème par récurrence sur n. Le résultat est vrai pour les premières valeurs de n.

Supposons que le résultat soit vrai jusqu'à l'ordre $n-1$ et montrons qu'il reste vrai à l'ordre n.

En premier lieu, considérons le cas où $P_n(x)$ et $P_{n-1}(x)$ ont le même degré d, ce qui veut dire que n est impair. Soit $0 = y_0 > y_1 > \cdots > y_{d-1}$ les racines de $P_{n-1}(x)$.

Etape 1 : Soient 0 et y_1 les deux plus grandes racines de $P_{n-1}(x)$. Par le théorème de Rolle, il existe $c \in]y_1, 0[$ tel que $P'_{n-1}(c) = 0$. Vu que les coefficients de $P_{n-1}(x)$ sont positifs, alors $P_{n-1}(x)$ est décroissante sur $]y_1, c[$ et croissante sur $]c, 0[$, ce qui implique que $P_{n-1}(x) < 0$, pour tout $x \in [y_1, 0[$.

Etape 2 : Posons maintenant $x = y_1$ dans (4).

- On sait par hypothèse de récurrence que les racines de $P_{n-2}(x)$ sont $0 = z_0 > z_1 \cdots > z_{d-2}$ et s'interlacent avec celles de $P_{n-1}(x)$ comme suit : $0 > y_1 > z_1 > y_2 > z_2 \cdots > z_{d-2} > y_{d-1}$.
  D'aprés l'étape 1, on a $P_{n-2}(x) < 0$, pour tout $x \in [z_1, 0[$, et particulièrement pour $x = y_1$, ce qui implique que $P_{n-2}(y_1) < 0$.
- On sait que $P_{n-1}(x)$ admet d racines réelles négatives, donc $P'_{n-1}(x)$ doit avoir $d-1$ racines.
  De plus, par le théorème de Rolle, il existe une racine de $P'_{n-1}(x)$ entre deux racines consécutives de $P_{n-1}(x)$, donc il existe une racine de $P'_{n-1}(x)$ dans $]y_1, 0[$, et le signe de $P'_{n-1}(y_1)$ est différent de celui de $P'_{n-1}(0)$; donc $P'_{n-1}(0) > 0$, alors $P'_{n-1}(y_1) < 0$.

Pour $x = y_1$, on a montré que $y_1\left[P'_{n-1}(y_1) + P_{n-2}(y_1)\right]$ est positif, car c'est le produit de deux nombres négatifs et par conséquent $P_n(y_1) > 0$.
Or, $P_n(x) < 0$ dans l'intervalle $]y_1, 0[$, car $P'_{n-1}(x) > 0$ dans l'intervalle $]y_1, 0[$ d'aprés l'étape 1, et $P_{n-2}(x) < 0$ dans l'intervalle $]y_1, 0[$, car elle est négative dans $]z_1, 0[$ par hypothèse de récurrence, alors $P_n(x)$ a une racine dans l'intervalle $]y_1, 0[$.

Prouvons maintenant que $P_n(x)$ admet une racine dans chaque intervalle $]y_{i+1}, y_i[$. Pour montrer cela, il suffit de prouver que $P_n(y_i)$ et $P_n(y_{i+1}) > 0$ ont des signes différents.

- Il est clair à travers le théorème de Rolle que $P'_{n-1}(y_{i+1})$ et $P'_{n-1}(y_i)$ ont des signes différents.
- $P_{n-2}(y_{i+1})$ et $P_{n-2}(y_i)$ ont des signes différents, par hypothèse de récurrence.
- D'aprés le théorème de Rolle, P'_{n-1} change de signe i fois dans l'intervalle $]y_i, 0[$, et par l'hypothèse de récurrence P_{n-2} change son signe $i-1$ fois ; or, il existe un petit voisinage de 0 où $P'_{n-1}(x) > 0$ et $P_{n-2}(x) < 0$; par conséquent, $P'_{n-1}(y_i)$ et $P_{n-2}(y_i)$ sont de même signe.

D'après (4), $P_n(y_i)$ et $P_n(y_{i+1})$ ont des signes différents, ce qui implique que $P_n(x)$ possède une racine dans chaque intervalle $]y_{i+1}, y_i[$.

$P_n(x)$ a un nombre impair de racines dans chaque intervalle $]y_{i+1}, y_i[$, car cette grandeur change de signe dans chaque borne de cet intervalle. On sait que le nombre de racines de $P_n(x)$ dépasse au plus par une racine celui de $P_{n-1}(x)$; par conséquent, $P_n(x)$ a exactement une racine dans chaque intervalle $]y_{i+1}, y_i[$, ce qui complète la preuve de ce cas.

Considérons maintenant le cas où $P_n(x)$ est de degré $d+1$ et que $P_{n-1}(x)$ est de degré d, ce qui veut dire que n est pair.

La preuve est la même que celle du premier cas. De plus, on sait que la dernière racine de $P_n(x)$ doit être négative. Elle ne peut être dans aucun intervalle $]y_{i+1}, y_i[$, ce qui implique qu'elle appartient à l'intervalle $]-\infty, y_{d-1}[$, ce qui termine la preuve. □

Théorème 3.2. *La suite* $\left(\left\{ {n \atop k} \right\}^{[2]}\right)_k$ *est strictement log-concave, donc unimodale avec au plus deux modes consécutifs.*

Preuve. Par le Théorème 1.1 et le Théorème 3.1. □

4. Lecture dans le triangle de Stirling de seconde espèce et nombres de Fibonacci–Stirling

Cette section donne le lien entre les nombres de Stirling associés avec succession d'ordre 2 et les nombres de Stirling de seconde espèce. Nous introduisons aussi les nombres de Fibonacci–Stirling.

Théorème 4.1. *Pour $n \geq 2k$, on a :*

$$\left\{ {n \atop k} \right\}^{[2]} = \left\{ {n-k \atop k} \right\}. \tag{5}$$

Le théorème suivant est un anologue du théorème de Tanny et Zuker. À notre connaissance, c'est le premier exemple qui établit la log-concavité dans un triangle arithmétique autre que le triangle de Pascal.

Théorème 4.2. *La suite* $\left(\left\{ {n-k \atop k} \right\}\right)_k$ *est strictement log-concave, donc unimodale.*

Il est bien établi que les nombres de Fibonacci s'éxpriment comme somme des éléments parcourant la diagonale principale du triangle de Pascal, voir par exemple [1] ; ceci nous suggère d'introduire les nombres de Fibonacci–Stirling.

Définition 4.3. On définit la suite de Fibonacci–Stirling $(\varphi_n)_n$, pour tout $n \geq 2k$, par $\varphi_0 = 1$, $\varphi_1 = 0$, et

$$\varphi_{n+1} := \sum_k \left\{ \begin{matrix} n-k \\ k \end{matrix} \right\}. \tag{6}$$

Remarque 1. La relation entre les nombres de Fibonacci–Stirling et les nombres de Stirling associés avec succession d'ordre 2 est représentée par la relation suivante :

$$\varphi_{n+1} = \sum_k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}^{[2]}. \tag{7}$$

La suite (φ_n) est appelée suite de Bell associée avec succession d'ordre 2.

Remerciements

Ce projet est partiellement supporté par Tassili-Maghreb 14MDU929M. Une partie du travail a été réalisée lors du séjour de la seconde auteure au LIGM, équipe « Combinatoire algébrique et calcul symbolique ». Elle tient particulièrement à remercier les professeurs J.-C. Novelli et M. Josuat-Verges pour leurs conseils éclairés et leur disponibilités, sans oublier tous les membres du groupe de travail.

Références

[1] H. Belbachir, F. Bencherif, Linear recurrent sequences and powers of square matrix, Integers 6 (2006), A12, 17 pp.
[2] H. Belbachir, F. Bencherif, Unimodality of sequences associated to Pell numbers, Ars Comb. 102 (2011) 305–311.
[3] H. Belbachir, L. Szalay, Unimodal rays in the regular and generalized Pascal triangles, J. Integer Seq. 11 (2008), Article 08.2.4.
[4] M. Benoumhani, A sequence of binomial coefficient related to Lucas and Fibonacci numbers, J. Integer Seq. 6 (2003), Article 03.2.1.
[5] M. Bòna, Real zero and partitions without singleton blocks, arXiv :0705.2734v2 [math.CO], 18 May 2007.
[6] E.R. Canfield, Location of the maximum Stirling number(s) of second kind, Stud. Appl. Math. 59 (1978) 83–93.
[7] P. Erdös, On a conjecture of Hammersley, J. Lond. Math. Soc. 28 (1953) 232–236.
[8] J.M. Hammersley, The sum of products of the natural numbers, Proc. Lond. Math. Soc. 3 (1) (1951) 435–452.
[9] L.H. Harper, Stirling behaviour is asymptotically normal, Ann. Math. Stat. 38 (1967) 410–414.
[10] E.H. Lieb, Concavity properties and a generating function for Stirling numbers, J. Comb. Theory 5 (1968) 203–206.
[11] J. Riordan, An Introduction to Combinatorial Analysis, Dover Publications Inc., Mineola, NY, 2002, reprint of 1958 original, Wiley, New York.
[12] S. Tanny, M. Zuker, On unimodality sequence of binomial coefficients, Discrete Math. 9 (1974) 79–89.
[13] H.S. Wilf, Generatingfunctionology, Academic Press, 1994.