



Statistics/Mathematical Economics

A new nonlinear formulation for GARCH models

*Une nouvelle formulation non linéaire pour des modèles GARCH*Sebastian Ossandón^a, Natalia Bahamonde^b^a Instituto de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Casilla 4059, Valparaíso, Chile^b Instituto de Estadística, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Casilla 4059, Valparaíso, Chile

ARTICLE INFO

Article history:

Received 25 June 2012

Accepted after revision 27 February 2013

Available online 9 April 2013

Presented by the Editorial Board

ABSTRACT

In this note we deduce a new mathematical representation, based on a discrete-time nonlinear state–space formulation, to characterize Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity (GARCH) models. The purpose pursued by this article is to use the models presented herein to develop estimation techniques which are also valid in the situation when observations are missing.

© 2013 Académie des sciences. Published by Elsevier Masson SAS. All rights reserved.

R É S U M É

Dans cette note, on déduit une nouvelle représentation mathématique, basée sur une formulation espace–état en temps discret non linéaire, pour caractériser le modèle GARCH. L'objectif poursuivi dans ce travail est d'utiliser les modèles présentés ici afin de développer des techniques d'estimation qui soient aussi valables dans des situations où des données sont manquantes.

© 2013 Académie des sciences. Published by Elsevier Masson SAS. All rights reserved.

Version française abrégée

Nous présentons ici la classe particulière de processus GARCH, qui a été introduite en 1986 par Bollerslev et correspond à une extension du modèle ARCH (autorégressif conditionnellement hétéroscedastique), qui a été proposé par Engle en 1982. Ces modèles permettent de modéliser, de façon plus réaliste, un grand nombre de données, en particulier des données financières.

Pour les processus de séries chronologiques de type GARCH, bon nombre de méthodes ont été développées pour l'estimation des paramètres. Nous pouvons envisager l'utilisation du maximum de vraisemblance pour l'estimation des paramètres d'un modèle GARCH(p, q), puisque, par hypothèse, on connaît la distribution de la série conditionnellement aux valeurs passées. Cette approche a été considérée par [2] ainsi que par [1], et les propriétés asymptotiques ont fait l'objet de nombreux travaux.

Dans cette note, nous nous intéressons à une nouvelle représentation espace–état pour caractériser le modèle GARCH. Cette représentation est basée sur une formulation espace–état en temps discret non linéaire, et nous donnons, pour la première fois, une représentation de ces caractéristiques. Dans de nombreuses circonstances, la série dont on dispose est incomplète, soit par nature, soit parce que des données aberrantes ont été détectées et donc éliminées. Le problème de l'estimation des paramètres basée sur une série incomplète est plus complexe. Le modèle d'espace d'état que nous proposons

E-mail addresses: sebastian.ossandon@ucv.cl (S. Ossandón), natalia.bahamonde@ucv.cl (N. Bahamonde).

pour le processus GARCH est valable en même temps pour des séries qui sont complètement observées, comme pour d'autres pour lesquelles des données sont manquantes.

Nous utilisons cette représentation pour obtenir des estimateurs de paramètres associés aux modèles étudiés. Les résultats numériques sont très bons dans le cas du modèle ARCH(1) et aussi dans celui du modèle GARCH(1, 1) (voir [7] et [8]). Il faut remarquer que cette méthodologie donne de très bons résultats en comparaison des méthodes traditionnelles d'estimation. Il convient de noter que ces représentations d'états non linéaires sont données ici pour la première fois. L'utilisation de cette représentation est intéressante pour obtenir de nouvelles formes d'estimation des paramètres, basées sur des modèles non linéaires. De plus, notre objectif est que ces techniques d'estimation soient aussi applicables à des situations où des données sont manquantes.

Dans la Section 1, nous présentons le modèle GARCH et nous rappelons ses caractéristiques les plus importantes. Dans la Section 2, nous nous intéressons aux modèles d'espace d'état pour la classe de processus GARCH(p, q) avec $p \geq 1, q \geq 1$. Enfin, dans la Section 3, nous donnons quelques lignes directrices pour l'estimation des paramètres du modèle GARCH(p, q), basée sur le filtre de Kalman et la représentation des espaces d'état abordés dans cet article.

1. Introduction

ARCH-type modeling, introduced by Engle [4], is often used in finance because their properties are close to those observed on empirical financial data such as heavy tails, volatility clustering, white-noise behavior or autocorrelation of the squared series. In financial time series, the conditional variance often changes over time, which is named heteroskedasticity. The ARCH model family is a class of nonlinear time series models including the GARCH processes, introduced by Bollerslev [2], and their many variations and extensions. The GARCH(p, q) model with normal error is:

$$\begin{cases} r_k = \sigma_k \varepsilon_k, \\ \sigma_k^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i r_{k-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{k-j}^2, \end{cases} \tag{1}$$

where r_k and σ_k ($>0, \forall k$) are, respectively, the return and the volatility, in the discrete time $k \in \mathbb{Z}$, associated with a financial process, and $\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ is an i.i.d. Gaussian sequence, with $\mathbb{E}(\varepsilon_k) = 0$ (zero-mean), $\mathbb{E}(\varepsilon_k \cdot \varepsilon_j^\top) = Q \delta_{k-j}$ (covariance matrix), and parameters $\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, p \geq i \geq 1, \beta_j \geq 0, q \geq j \geq 1$ and $\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1$. Moreover, let us consider r_0 independent of sequence $\{\varepsilon_k\}_{k > 0}$.

It is well known that in linear time series analysis, state-space formulation (see [3]) and the associated Kalman filter (KF), introduced by Kalman (see [5] and [6]), provide convenient tools to handle missing observations in the measurement equation. However, the applicability of this approach to GARCH processes with missing observations is not immediately apparent. Let us remark that the dynamics of a GARCH process is nonlinear, and consequently the associated state-space formulation will follow the same type of behavior. Standard KF algorithm cannot be directly applied to nonlinear state-space formulations of GARCH models, because this algorithm only works when the processes have a linear behavior. A natural extension is the extended Kalman filter (EKF), which generalizes, based on a successive linearization on each time step, the standard KF, and makes this methodology applicable to nonlinear state-space formulations of GARCH models, including also those processes with missing observations.

2. Nonlinear state-space formulation for GARCH(p, q) models

2.1. State-space formulation for GARCH(p, q), $p, q \geq 2$

A possible state-space representation of Eq. (1) when $p, q \geq 2$ is:

$$\begin{cases} \mathbf{X}_k := \begin{bmatrix} \mathbf{X}_k^{(1)} \\ \mathbf{X}_k^{(2)} \\ \mathbf{X}_k^{(3)} \\ \mathbf{X}_k^{(4)} \end{bmatrix} = \mathcal{A}_\theta \cdot \mathbf{X}_{k-1} + \mathbf{f}(\mathbf{X}_{k-1}, \theta) + \mathcal{B} \cdot \mathbf{w}_k, \\ \mathbf{Y}_k := r_k = \mathbf{X}_k^{(4)} \sqrt{\mathbf{X}_k^{(3)}}, \end{cases} \tag{2}$$

where $\theta = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q)^\top \in \mathbb{R}^{p+q+1}, \mathcal{B} = (0, 0, \dots, 0, 1)^\top \in \mathbb{R}^{p+q+2}, \mathbf{w}_k = \varepsilon_k, \mathbf{X}_k^{(1)} := (r_{k-p}^2, r_{k-p+1}^2, \dots, r_{k-1}^2)^\top \in \mathbb{R}^p, \mathbf{X}_k^{(2)} := (\sigma_{k-q}^2, \sigma_{k-q+1}^2, \dots, \sigma_{k-1}^2)^\top \in \mathbb{R}^q, \mathbf{X}_k^{(3)} = \sigma_k^2 \in \mathbb{R} (>0, \forall k), \mathbf{X}_k^{(4)} = r_k / \sigma_k \in \mathbb{R}$ and

$$\mathbf{f}(\mathbf{X}_{k-1}, \theta) := \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(p+q-1) \times 1} \\ 1 \\ \beta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{X}_{k-1}^{(3)} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(p+q) \times 1} \\ \alpha_0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(p-1) \times 1} \\ 1 \\ \mathbf{0}_{q \times 1} \\ \alpha_1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{X}_{k-1}^{(3)} (\mathbf{X}_{k-1}^{(4)})^2. \tag{3}$$

Moreover, $\mathcal{A}_\theta = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{p \times p} & \mathbf{0}_{p \times q} & \mathbf{0}_{p \times 2} \\ \mathbf{0}_{q \times p} & \mathbf{B}_{q \times q} & \mathbf{0}_{q \times 2} \\ \boldsymbol{\alpha}_{2 \times p} & \boldsymbol{\beta}_{2 \times q} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(p+q+2) \times (p+q+2)}$, with

$$\mathbf{A}_{p \times p} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times p}, \quad \mathbf{B}_{q \times q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{q \times q}, \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{2 \times p} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_p & \cdots & \alpha_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times p}, \quad \boldsymbol{\beta}_{2 \times q} = \begin{pmatrix} 0 & \beta_q & \cdots & \beta_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times q}, \quad (5)$$

and where $\mathbf{0}_{m \times n}$, $1 \leq \forall m, n \leq p$, are matrices of zeros whose size is $m \times n$.

2.2. State-space formulation for GARCH(p, 1), $p \geq 2$

The following formulation is a possible state-space representation of Eq. (1) when $p \geq 2$ and $q = 1$:

$$\begin{cases} \mathbf{X}_k := \begin{bmatrix} X_k^{(1)} \\ X_k^{(2)} \\ X_k^{(3)} \end{bmatrix} = \mathcal{A}_\theta \cdot \mathbf{X}_{k-1} + \mathbf{f}(\mathbf{X}_{k-1}, \boldsymbol{\theta}) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{w}_k, \\ \mathbf{Y}_k := r_k = X_k^{(3)} \sqrt{X_k^{(2)}}, \end{cases} \quad (6)$$

where $\boldsymbol{\theta} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1)^\top \in \mathbb{R}^{p+2}$, $\mathbf{B} = (0, 0, \dots, 0, 1)^\top \in \mathbb{R}^{p+2}$, $\mathbf{w}_k = \varepsilon_k$, $\mathbf{X}_k^{(1)} := (r_{k-p}^2, r_{k-p+1}^2, \dots, r_{k-1}^2)^\top \in \mathbb{R}^p$, $X_k^{(2)} = \sigma_k^2 \in \mathbb{R}$ ($> 0, \forall k$), $X_k^{(3)} = r_k / \sigma_k \in \mathbb{R}$, and

$$\mathbf{f}(\mathbf{X}_{k-1}, \boldsymbol{\theta}) := \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{p \times 1} \\ \beta_1 \\ 0 \end{bmatrix} X_{k-1}^{(2)} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{p \times 1} \\ \alpha_0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(p-1) \times 1} \\ 1 \\ \alpha_1 \\ 0 \end{bmatrix} X_{k-1}^{(2)} (X_{k-1}^{(3)})^2. \quad (7)$$

Moreover, $\mathcal{A}_\theta = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{p \times p} & \mathbf{0}_{p \times 2} \\ \boldsymbol{\alpha}_{2 \times p} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(p+2) \times (p+2)}$, with

$$\mathbf{A}_{p \times p} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times p}, \quad \boldsymbol{\alpha}_{2 \times p} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_p & \cdots & \alpha_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times p}. \quad (8)$$

Let us remark that it is possible to obtain, from the formulation presented in this subsection, a state-space representation for the ARCH(p) ($p \geq 2$) model by simply replacing $\mathbf{f}(\mathbf{X}_{k-1}, \boldsymbol{\theta})$ in the formulation of GARCH(p, 1) by

$$\mathbf{f}(\mathbf{X}_{k-1}, \boldsymbol{\theta}) := \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{p \times 1} \\ \alpha_0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(p-1) \times 1} \\ X_{k-1}^{(2)} (X_{k-1}^{(3)})^2 \\ \alpha_1 X_{k-1}^{(2)} (X_{k-1}^{(3)})^2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Let us notice that rest of equations characterizing the ARCH(p) ($p \geq 2$) state-space representation remains invariant in state-space formulation for GARCH(p, 1) model (see [8]).

2.3. State-space formulation for GARCH(1, q), $q \geq 2$

Similar to previous case, a possible state-space representation for this GARCH model is:

$$\begin{cases} \mathbf{X}_k := \begin{bmatrix} X_k^{(1)} \\ X_k^{(2)} \\ X_k^{(3)} \end{bmatrix} = \mathcal{A}_\theta \cdot \mathbf{X}_{k-1} + \mathbf{f}(\mathbf{X}_{k-1}, \boldsymbol{\theta}) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{w}_k, \\ \mathbf{Y}_k := r_k = X_k^{(3)} \sqrt{X_k^{(2)}}, \end{cases} \quad (10)$$

where $\theta = (\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \dots, \beta_q)^\top \in \mathbb{R}^{q+2}$, $\mathcal{B} = (0, 0, \dots, 0, 1)^\top \in \mathbb{R}^{q+2}$, $\mathbf{w}_k = \varepsilon_k$, $\mathbf{X}_k^{(1)} := (\sigma_{k-q}^2, \sigma_{k-q+1}^2, \dots, \sigma_{k-1}^2)^\top \in \mathbb{R}^q$, $X_k^{(2)} = \sigma_k^2 \in \mathbb{R}$ ($>0, \forall k$), $X_k^{(3)} = r_k/\sigma_k \in \mathbb{R}$ and

$$\mathbf{f}(\mathbf{X}_{k-1}, \theta) := \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(q-1) \times 1} \\ 1 \\ \beta_1 \\ 0 \end{bmatrix} X_{k-1}^{(3)} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{q \times 1} \\ \alpha_0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{q \times 1} \\ \alpha_1 \\ 0 \end{bmatrix} X_{k-1}^{(3)} (X_{k-1}^{(4)})^2. \tag{11}$$

Moreover, $\mathcal{A}_\theta = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{q \times q} & \mathbf{0}_{q \times 2} \\ \beta_{2 \times q} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(q+2) \times (q+2)}$, with

$$\mathbf{B}_{q \times q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{q \times q}, \quad \beta_{2 \times q} = \begin{pmatrix} 0 & \beta_q & \dots & \beta_2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times q}. \tag{12}$$

2.4. State–space formulation for GARCH(1, 1)

A possible state–space representation of Eq. (1) when $p = q = 1$ is presented in [7].

3. Nonlinear estimation

Let $\mathcal{Y}_N = [\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k, \dots, \mathbf{y}_N]$ be a known sequence of measurement or observations, the likelihood function is given by the following joint probability density function:

$$L(\theta; \mathcal{Y}_N) = p(\mathbf{y}_0|\theta) \prod_{k=1}^N p(\mathbf{y}_k|\mathcal{Y}_{k-1}, \theta). \tag{13}$$

Conditioning on \mathbf{y}_0 , and considering the function:

$$\ell(\theta) = -\ln(L(\theta; \mathcal{Y}_k|\mathbf{y}_0)), \tag{14}$$

the maximum likelihood estimator of the parameter vector θ can be obtained solving the following nonlinear optimization problem:

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} (\ell(\theta)). \tag{15}$$

Let us remark that for a fixed θ , the parameter vector $\ell(\theta)$ can be obtained from the Kalman filter equations and subsequently used in the construction of the log-likelihood function. In this context, the success of the optimization of log-likelihood function depends strictly on the behavior of the EKF designed. Once estimated the parameters of the nonlinear stochastic process using the EKF, the goal is to calculate from the observations an estimation of the state of the nonlinear system. For this calculation, we can use again Kalman filter equations.

It is important to remark that this approach can also deal with missing observations. Hence the importance of exploiting the nonlinear state–space models presented in this article. In addition, we should mention that due to the versatility of state–space models, important properties of GARCH models, such as stability, controllability and observability, can be studied from a new perspective in future research.

Numerical examples are given by [7] for a GARCH(1, 1) without missing observations, and by [8], for an ARCH(1) assuming the existence of missing observations. Clearly the results make evident the effectiveness of the nonlinear estimation technique, which can be applied to higher-order models ($p \geq 2$ and/or $q \geq 2$), as presented in this article.

Acknowledgements

This research was partially supported by grants FONDECYT 11121531 and ECOS/CONICYT C10E03.

References

[1] I. Berkes, L. Horváth, P. Kokoszka, GARCH processes: structure and estimation, *Bernoulli* 9 (2) (2003) 201–227.
 [2] T. Bollerslev, Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, *J. Econom.* 31 (3) (1986) 307–327.
 [3] J. Durbin, S.J. Koopman, *Time Series Analysis by State Space Methods*, Oxf. Statist. Sci. Ser., vol. 24, Oxford University Press, Oxford, 2001.
 [4] R. Engle, Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation, *Econometrica* 50 (4) (1982) 987–1007.
 [5] R. Kalman, A new approach to linear filtering and prediction problems, *Trans. ASME J. Basic Eng.* 82 (1960) 35–45.
 [6] R. Kalman, R. Bucy, New results in filtering and prediction theory, *Trans. ASME J. Basic Eng.* 83 (1961) 95–108.

- [7] S. Ossandón, N. Bahamonde, On the nonlinear estimation of GARCH models using an extended Kalman filter, in: *Lectures Notes in Engineering and Computer Science: Proceedings of The World Congress on Engineering 2011, WCE 2011*, 6–8 July 2011, London, UK, pp. 148–151.
- [8] S. Ossandón, N. Bahamonde, Nonlinear parameter estimation for state–space ARCH models with missing observations, in: *Recent Advances in Systems Science & Mathematical Modelling: Proceedings of the 3rd International Conference on Mathematical Models for Engineering Science, MMES'12*, 2–4 December 2012, Paris, France, 2012, pp. 258–263.